

Prime vs Random Sets

Sebastien Plaasch

Maxime Rubio

Lucas Villiere

9 avril 2020

Résumé

Resume de notre projet..

Table des matières

Introduction	4
1 Creation d'ensembles aléatoires suivant la distribution de $\pi(x)$	5
1.0.1 Ensembles aléatoires	5
2 Ensembles aleatoires et conjectures	8
Conclusion	9

Introduction

Ici on fait l'introduction

1 Creation d'ensembles aléatoires suivant la distribution de $\pi(x)$

Soient $E_n := \{k \in \mathbb{N}^* \mid k \leq n\}$ l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à n , $P_n := \{k \in E_n \mid k \text{ est premier}\}$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n , et la fonction $\pi(n) := \#P_n$, le nombre de premiers inférieurs ou égaux à n .

On a vu que la fonction $\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ donne une bonne approximation de $\pi(n)$.

Cette fonction peut être approximée par la somme de Riemann de pas constant $= 1$:

$$S\left(\frac{1}{\log x}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\log(2+k)} = \frac{1}{\log 2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{\log k} \quad (1)$$

La fonction $\frac{1}{\log x}$ est une fonction continue, décroissante et positive sur l'intervalle $[2, \infty[$. L'erreur entre $\text{Li}(n)$ et la fonction en escalier ci-dessus est donc bornée.

$$\left| S\left(\frac{1}{\log x}\right) - \text{Li}(n) \right| \leq \left| \sum_{k=2}^n \frac{1}{\log(k+1)} - \frac{1}{\log k} \right| = \frac{1}{\log(2)} - \frac{1}{\log(n+1)} < \frac{1}{\log 2} < 2$$

1.0.1 Ensembles aléatoires

Nous allons alors générer k ensembles aléatoires $R_{k_n} \subset E_n$ de sorte que :

$$\forall i \in E_n, P(i \in R_{k_n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ 1 & \text{si } i = 2 \\ \frac{1}{\log n} & \text{si } i \geq 3 \end{cases}$$

Il est à noter deux cas particuliers :

- Le nombre 1 est exclu. En effet, $\frac{1}{\log 1}$ n'est pas défini. Par définition, 1 n'est pas un nombre premier.
- Le nombre 2 est inclus par défaut. En effet, $P(2 \in R_{k_n}) = \frac{1}{\log 2} > 1$. De plus, le nombre 2 est par définition, un nombre premier.

Nous allons aussi introduire la fonction $\sigma_k(n) := \#R_{k_n}$. Cette fonction mesure la taille de l'ensemble aléatoire.

$\sigma_k(n)$ est donc une valeur aléatoire strictement inférieure à n dont l'espérance est donnée par la formule suivante :

$$E[\sigma_k(n)] = 0 + 1 + \frac{1}{\log 3} + \dots + \frac{1}{\log n} = 1 + \sum_{k=3}^n \frac{1}{\log k} \quad (2)$$

On observe alors que l'erreur entre l'espérance de $\sigma_k(n)$ et la somme de Riemann (1) est constante, égale à $\frac{1}{\log 2} - 1 < 1$.

Les ensembles aléatoires générés de cette manière suivront donc une distribution similaire à $\text{Li}(x)$, et donc à $\pi(x)$. (voir figures 1 et 2)

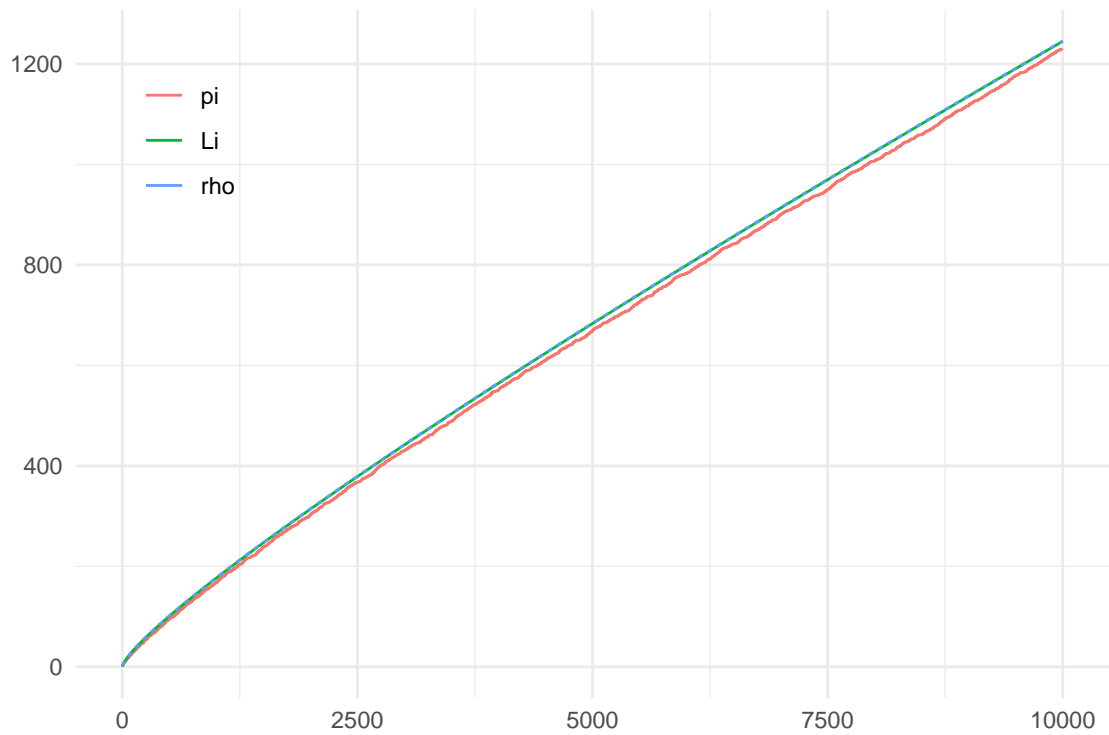


FIGURE 1 – Graphes des fonctions π , Li and σ . On observe que Li et σ sont superposées.

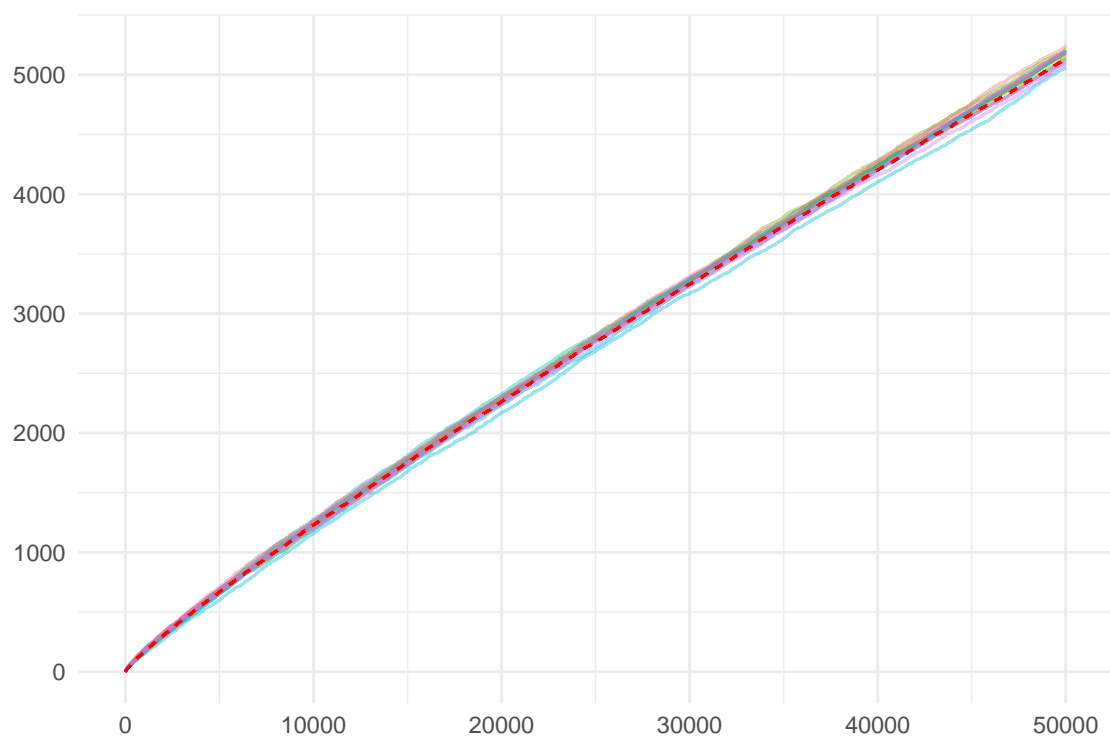


FIGURE 2 – graphes des fonctions $\sigma_k(1 \leq k \leq 25)$ et π

2 Ensembles aleatoires et conjectures

Then it's gonna be like this!

Conclusion

Ici on peut mettre la conclusion de notre rapport.