# 1 Approche analytique

Cette approche pour créer des ensembles aléatoires (désignés par $Q$) qui partagent la même distribution que celle des nombres premiers, est basée sur un théorème (théorème 1) issu de ... .

**Théorème 1.** *L'hypothèse de Reimann est équivalente à l'assertion*

$$\forall\ n \geqslant 11,\ |p_n - ali(n)| < \frac{1}{\pi}\sqrt{n}\log^{5/2}(n)$$

*où $p_n$ représente le n-ième nombre premier.*

## 1.1 Méthode de création d'un ensemble aléatoire $Q$

Les onze premiers éléments d'un ensemble $Q$ sont choisis arbitrairement. Pour $n > 11$, voici la méthode de sélection de l'élément $q_n \in Q$ :

- on pose $a = \max\left\{q_{n-1}, \lceil ali(n) - \frac{1}{\pi}\sqrt{n}\log^{5/2}(n)\rceil\right\}$ (où $\lceil x\rceil$ désigne la partie entière supérieure de $x$) ;
- on pose $b = \lfloor ali(n) + \frac{1}{\pi}\sqrt{n}\log^{5/2}(n)\rfloor$ (où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière inférieure de $x$) ;
- $q_n$ est choisi aléatoirement entre a et b.

En procédant de la sorte, le théorème 1 sera toujours vrai pour un ensemble aléatoire $Q$.

## 1.2 Définition de la fonction $\sigma$

On peut désormais définir $\sigma : [0, \infty[\ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \#\{n \in Q : n < x\}$. Nous parlerons systématiquement de la fonction $\sigma$ alors que cette fonction n'est bien entendu pas unique, elle dépend à chaque fois de l'ensemble aléatoire $Q$ sur lequel on travail. Cependant, nous avons pu remarquer que les différentes fonctions $\sigma$ sont souvent très proches les unes des autres. À titre d'exemple, pour un grand nombre d'ensembles aléatoires $Q$, nous avons calculé $\sigma(1000)$. Pour 45% des ensembles, $\sigma(1000) = 148$ et parmi 42% d'entre eux, $\sigma(1000) = 147$.

Afin de visualiser $\sigma(x)$ en la comparant à $\pi(x)$ et $\frac{x}{\log(x)}$, voici leur graphe respectif :

La figure 1 devrait apparaitre ici.

## 1.3 Écart entre $\pi(x)$ et $\sigma(x)$

La fonction $\sigma$ semble suivre la même allure que $\pi(x)$. Cependant, lors de nos expérimentations, nous avons dessinés des graphes (que vous trouverez en annexe) pour des valeurs de $x$ inférieures à celles de la figure 1. Pour des petites valeurs de $x$, la courbe de $\sigma$ était presque confondue avec celle de $\frac{x}{\log(x)}$. Lorsque les valeurs de $x$ sont de plus en plus grandes, $\sigma(x)$ tend vers $\pi(x)$. Pour analyser l'écart entre $\pi(x)$ et $\sigma(x)$, nous avons tracé le graphe de la fonction $\pi(x) - \sigma(x)$ :

FIGURE

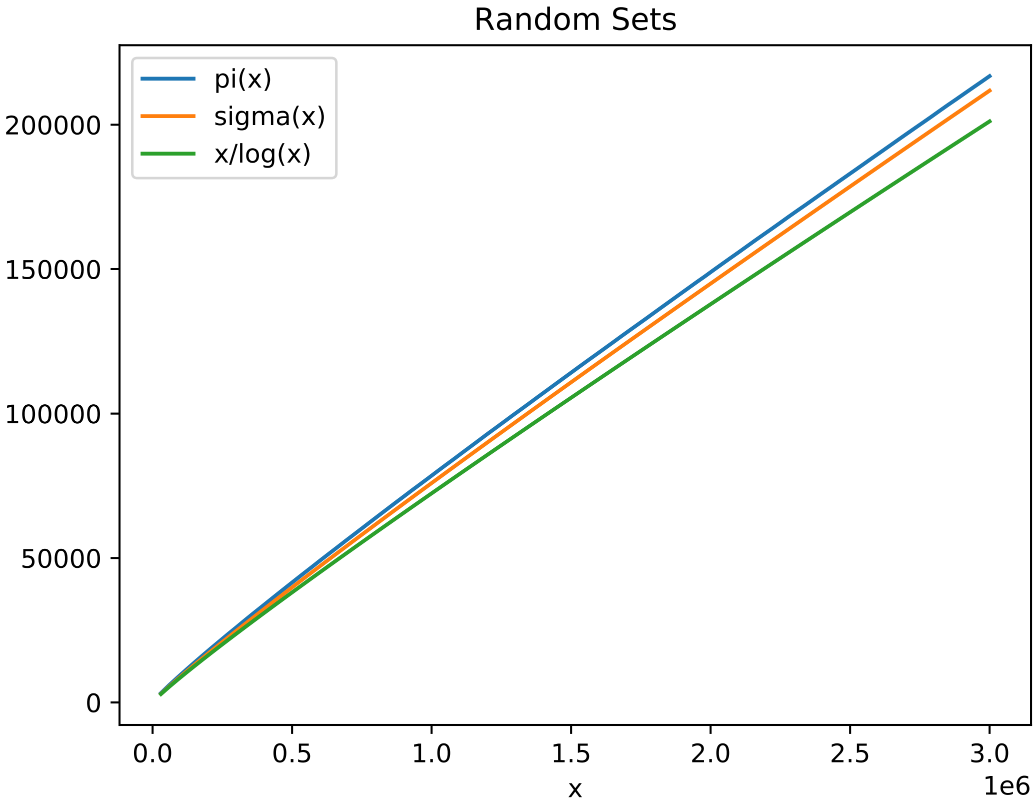


FIGURE 1 – Graphes de $\sigma(x)$, $\pi(x)$ et $\frac{x}{\log(x)}$

### 1.4 Le Théorème des Nombres Premiers

L'objectif de cette section est de prouver la fidélité de nos ensembles aléatoires $Q$ à la répartition des nombres premiers. Pour ce faire, nous allons vérifier si le Théorème des Nombres Premiers, cité ci-après, est vrai quand on remplace $\pi(x)$ par $\sigma(x)$.

**Théorème 2** (Théorème des Nombres Premiers)**.** *Quand $x$ tend vers l'infini :*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

Pour démontrer le Théorème des Nombres Premiers, il a été démontré que, quand $x$ tend vers l'infini, $Li(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$. Nous pouvons montrer, graphiquement, que lorsque $x$ tend vers l'infini, $\sigma(x) \sim Li(x)$ (voir figure 2), ce qui implique que $\sigma(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$.

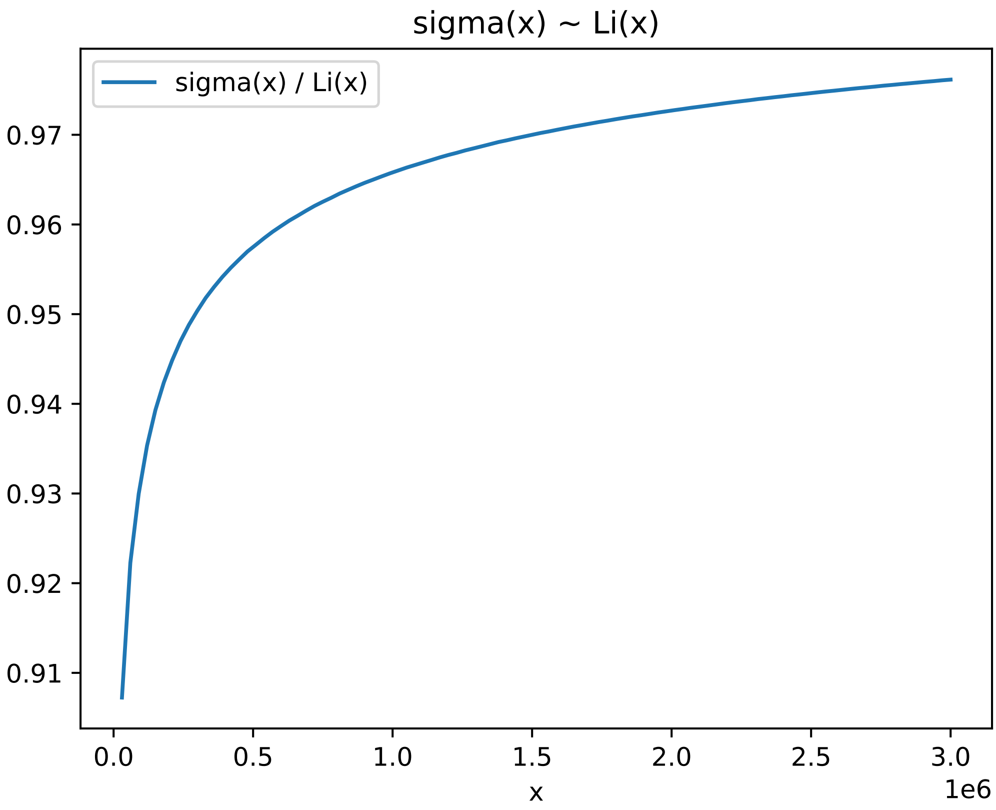


Figure 2 – Graphe de $\frac{\sigma(x)}{Li(x)}$