Prime vs Random Sets

Sebastien Plaasch
Maxime Rubio
Lucas Villiere

11 mai 2020

Résumé

Resume de notre projet..

Table des matières

Introduction

Ici on fait l'introduction

1 Creation d'ensembles aléatoires suivant la distribution de $\pi(x)$

1.1 Approche analytique

Cette approche pour créer des ensembles aléatoires (désignés par Q) qui partagent la même distribution que celle des nombres premiers, est basée sur un théorème (théorème 1) issu de ... .

Théorème 1. *L'hypothèse de Riemann est équivalente à l'assertion*

$$\forall\ n \geqslant 11,\ |p_n - ali(n)| < \frac{1}{\pi}\sqrt{n}\log^{5/2}(n)$$

où p_n représente le n-ième nombre premier.

1.1.1 Méthode de création d'un ensemble aléatoire Q

Les onze premiers éléments d'un ensemble Q sont choisis arbitrairement. Pour $n > 11$, voici la méthode de sélection de l'élément $q_n \in Q$:

— on pose $a = \max\left\{q_{n-1}, \lceil ali(n) - \frac{1}{\pi}\sqrt{n}\log^{5/2}(n)\rceil\right\}$ (où $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière supérieure de x) ;

— on pose $b = \lfloor ali(n) + \frac{1}{\pi}\sqrt{n}\log^{5/2}(n)\rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière inférieure de x) ;

— q_n est choisi aléatoirement entre a et b.

En procédant de la sorte, le théorème 1 sera toujours vrai pour tout ensemble aléatoire Q.

Par cette méthode, nous avons créé 200 ensembles, jusqu'à 10^7, dont pour 100 d'entre-eux on a imposé la condition suivante : $\forall\, q_n \in Q$ tel que $n > 11$: q_n est impair.

1.1.2 Définition de la fonction σ

On peut désormais définir $\sigma : [0, \infty[\ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \#\{n \in Q : n < x\}$. Nous parlerons systématiquement de la fonction σ alors que cette fonction n'est bien entendu pas unique, elle dépend à chaque fois de l'ensemble aléatoire Q sur lequel on travail. Cependant, nous avons pu remarquer que les différentes fonctions σ sont souvent très proches les unes des autres. À titre d'exemple, pour un grand nombre d'ensembles aléatoires Q, nous avons calculé $\sigma(1000)$. Pour 45% des ensembles, $\sigma(1000) = 148$ et parmi 42% d'entre eux, $\sigma(1000) = 147$.

Afin de visualiser $\sigma(x)$ en la comparant à $\pi(x)$ et $\frac{x}{\log(x)}$, voici leur graphe respectif :

La figure 1 devrait apparaitre ici.

1.1.3 Écart entre $\pi(x)$ et $\sigma(x)$

La fonction σ semble suivre la même allure que $\pi(x)$. Cependant, lors de nos expérimentations, nous avons dessinés des graphes (que vous trouverez en annexe) pour des valeurs de x inférieures à celles de la figure 1. Pour des petites valeurs de x, la courbe de σ était presque confondue avec celle de $\frac{x}{\log(x)}$. Lorsque les valeurs de x sont de plus en plus grandes, $\sigma(x)$ tend vers $\pi(x)$. Pour analyser l'écart entre $\pi(x)$ et $\sigma(x)$, nous avons tracé le graphe de la fonction $\frac{\pi(x)}{\sigma(x)}$:

La figure 2 devrait apparaitre ici. On peut en conclure que $\pi(x) \sim \sigma(x)$.

1.1.4 Le Théorème des Nombres Premiers

L'objectif de cette section est de prouver la fidélité de nos ensembles aléatoires Q à la répartition des nombres premiers. Pour ce faire, nous allons vérifier si le Théorème des Nombres Premiers, cité ci-après, est vrai quand on remplace $\pi(x)$ par $\sigma(x)$.

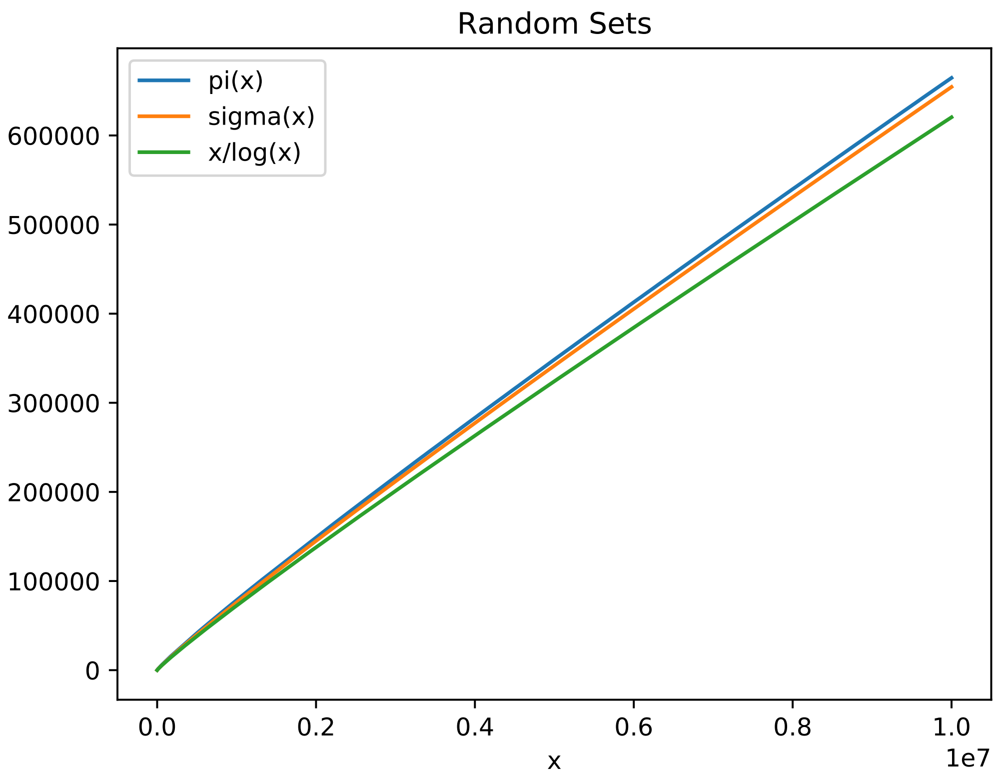

FIGURE 1 – Graphes de $\sigma(x)$, $\pi(x)$ et $\frac{x}{\log(x)}$

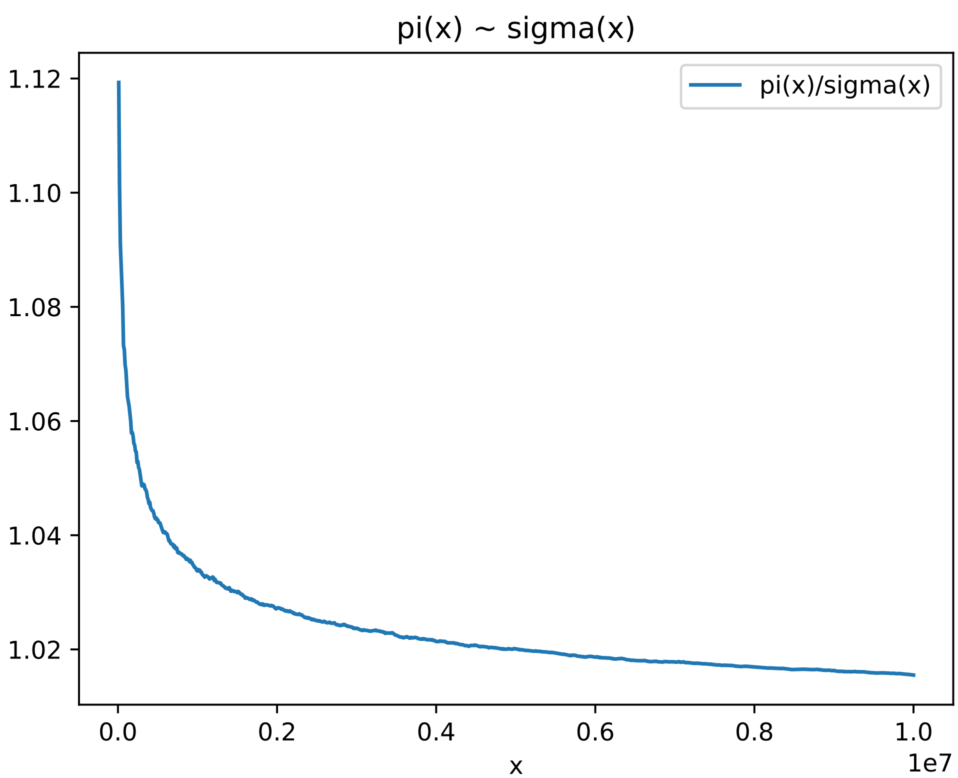

FIGURE 2 – Graphe de $\frac{\pi(x)}{\sigma(x)}$

Théorème 2 (Théorème des Nombres Premiers)**.** *Quand x tend vers l'infini :*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

Pour démontrer le Théorème des Nombres Premiers, il a été démontré que, quand x tend vers l'infini, $Li(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$. Nous pouvons montrer, graphiquement, que lorsque x tend vers l'infini, $\sigma(x) \sim Li(x)$ (voir figure 3), ce qui implique que $\sigma(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$.

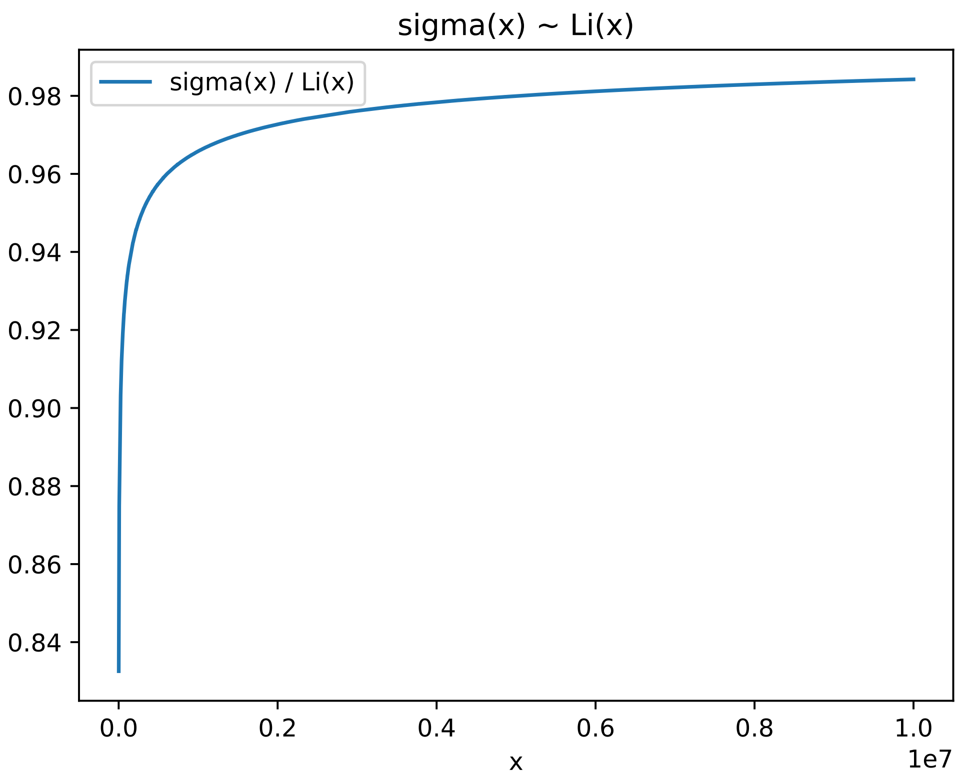

FIGURE 3 – Graphe de $\frac{\sigma(x)}{Li(x)}$

1.2 Approche probabiliste

Soient $E_n := \{k \in N^* \mid k \leq n\}$ l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à n, $P_n := \{k \in E_n \mid k$ est premier$\}$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n, et la fonction $\pi(n) := \#P_n$, le nombres de premiers inferieurs ou égaux à n.

On a vu que la fonction $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ donne une bonne approximation de $\pi(n)$.

Cette fonction peut être approximée par la somme de Riemann de pas contant $= 1$:

$$S(\frac{1}{\log x}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\log(2+k)} = \frac{1}{\log 2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\log k} \tag{1}$$

La fonction $\frac{1}{\log x}$ est une fonction continue, décroissante et positive sur l'interval $[2, \infty[$. L'erreur entre $\mathrm{Li}(n)$ et la fonction en escalier ci-dessus est donc bornée.

$$\left| S(\frac{1}{\log x}) - Li(n) \right| \leq \left| \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\log(k+1)} - \frac{1}{\log k} \right| = \frac{1}{\log(2)} - \frac{1}{\log(n+1)} < \frac{1}{\log 2} < 2$$

1.2.1 Ensembles aléatoires

Nous allons alors générer k ensembles aléatoires $R_{k_n} \subset E_n$ de sorte que :

$$\forall\, i \in E_n, P(i \in R_{k_n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ 1 & \text{si } i = 2 \\ \frac{1}{\log n} & \text{si } i \geq 3 \end{cases}$$

Il est à noter deux cas particuliers :
- — Le nombre 1 est exclu. En effet, $\frac{1}{\log 1}$ n'est pas défini. Par définition, 1 n'est pas un nombre premier.
- — Le nombre 2 est inclu par défaut. En effet, $P(2 \in R_{k_n}) = \frac{1}{\log 2} > 1$. De plus, le nombre 2 est par définition, un nombre premier.

Nous allons aussi introduire la fonction $\sigma_k(n) := \#R_{k_n}$. Cette fonction mesure la taille de l'ensemble aléatoire.
$\sigma_k(n)$ est donc une valeur aléatoire strictement inférieure à n dont l'espérance est donnée par la formule suivante :

$$E[\sigma_k(n)] = 0 + 1 + \frac{1}{\log 3} + ... + \frac{1}{\log n} = 1 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\log k} \tag{2}$$

On observe alors que l'erreur entre l'espérance de $\sigma_k(n)$ et la somme de Riemann (1) est constante, égale à $\frac{1}{\log 2} - 1 < 1$.

Les ensembles aléatoires générés de cette manière suivront donc une distribution similaire a Li(x), et donc à $\pi(x)$ (voir figures 4 et 5).

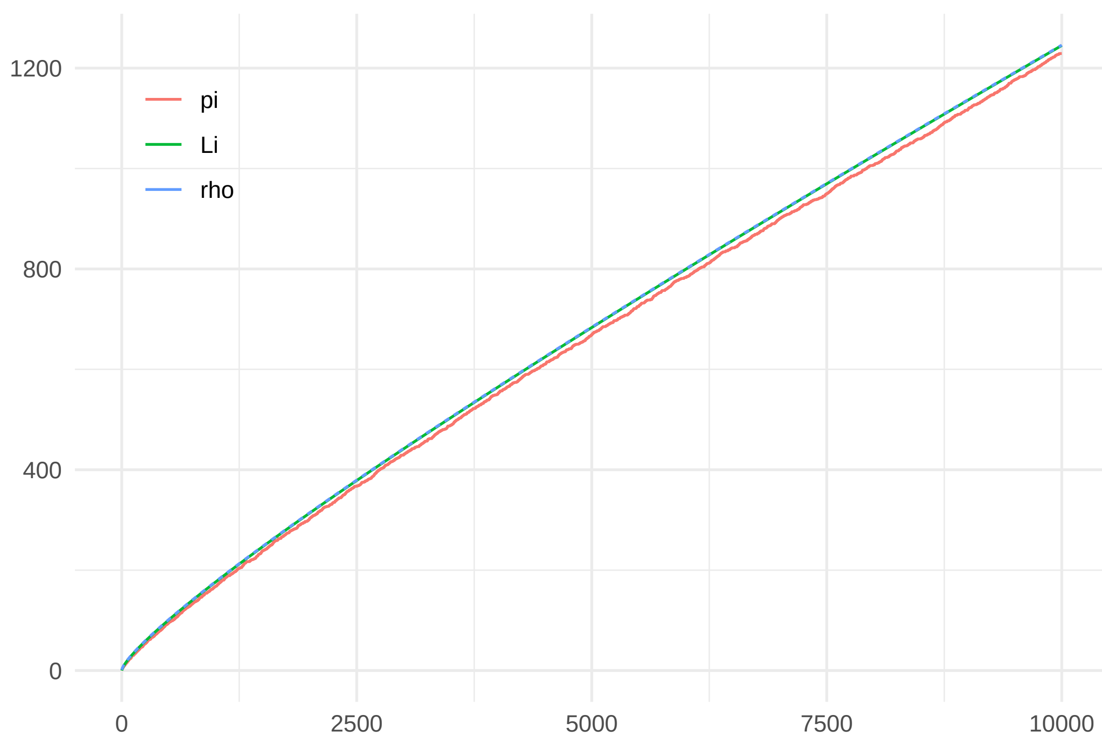

FIGURE 4 – Graphes des fonctions π, Li and σ. On observe que Li et σ sont superposées.

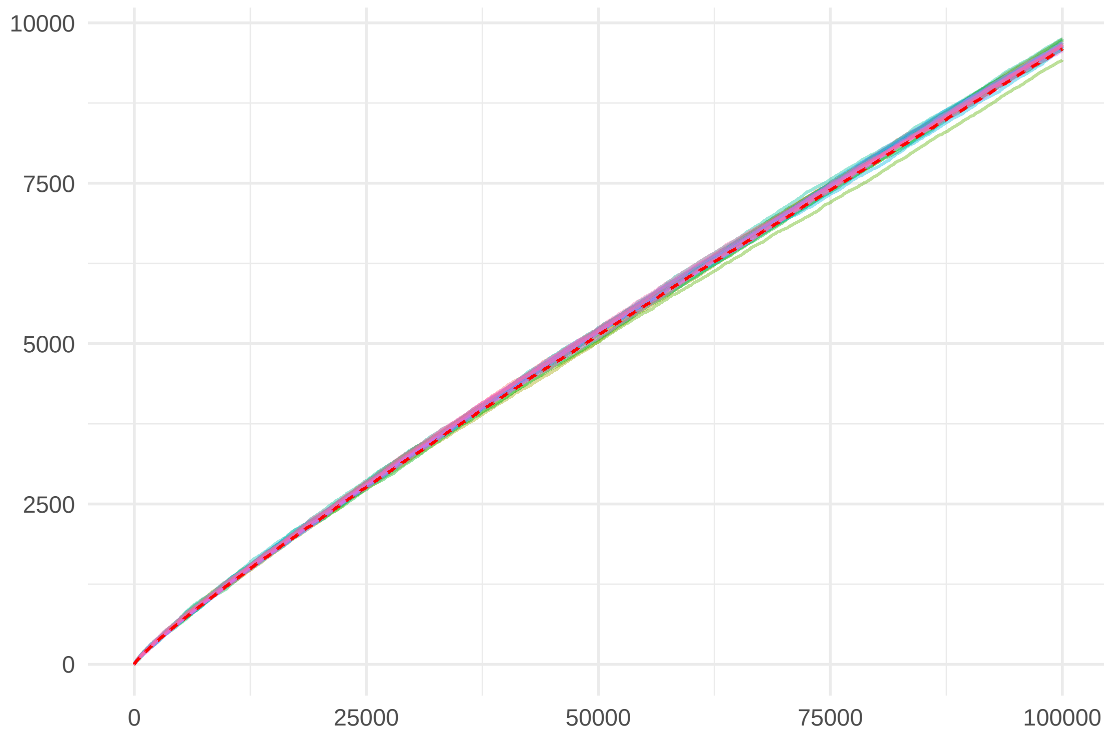

FIGURE 5 – graphes des fonctions $\sigma_k (1 \leq k \leq 25)$ et π

2 Ensembles aléatoires et conjonctures

Dans cette section, nous allons vérifier si des conjectures sur les nombres premiers peuvent s'appliquer aux ensembles aléatoires créés à la section 1. Ainsi, on sera en mesure d'estimer si la véracité d'une conjecture est susceptible de tenir grâce à la répartition des nombres premiers plutôt qu'à leur propriété d'être premier.

2.1 Les nombres premiers jumeaux

La première conjecture que nous allons analyser, et sans doute la plus célèbre, est la conjecture des nombres premiers jumeaux.

Définition 1. Soient a, $b \in \mathbb{N}$, $a < b$, on dit que a et b sont jumeaux si $a + 2 = b$.

Conjecture 1. *Il y a une infinité de nombres premiers jumeaux.*

Ces dernières années, il y'a eu de grosses avancées dans la démonstration de la conjecture. Ainsi, pour tout $m \geqslant 1$, soit $H_m := \liminf_{n\to\infty}(p_{n+m} - p_n)$, où p_n dénote le n-ième nombre premier. La conjecture des nombres premiers jumeaux est donc équivalente à $H_1 = 2$. En 2013, le mathématicien chinois Zhang Yitang est le premier à trouver une borne supérieure finie pour H_1, il a démontré que $H_1 \leqslant 70\,000\,000$. Suite à la publication de Zhang Yitang, de nombreux mathématiciens se sont mis en quête de réduire la borne supérieure de H_1. En optimisant les résultats de Zhang Yitang et grâce à d'autres méthodes ils ont pu montrer que $H_1 \leqslant 246$.

Afin de tester la conjecture sur les ensembles aléatoires, nous avons tracé un graphe (figure 6), où pour chaque ensembles aléatoires et l'ensemble des nombres premiers (jusqu'à 10^7) on trace une fonction qui compte le nombre de jumeaux. Nous pouvons faire les observations suivantes :

- Pour chaque type d'ensemble (selon l'approche utilisée), on constate, logiquement, que le nombre de jumeaux est plus ou moins le double pour les ensembles impairs.
- Il y'a plus de jumeaux dans les ensembles R que dans les ensembles Q ce qui peut s'expliquer par le fait qu'ils ont plus d'éléments que les ensembles Q.
- De manière générale, toutes les courbes sont croissantes, ce qui indiquerait, autant pour les nombres premiers que pour les ensembles aléatoires, que le nombre de jumeaux tend vers l'infini.

Par ailleurs, ce graphe éveille une idée intéressante. Si on désigne par f la fonction qui compte le nombre de jumeaux dans l'ensemble des nombres premiers et par g celle qui compte les jumeaux dans un ensemble aléatoire et qu'on parvient à montrer que f et g sont semblables (sous-entendu qu'elles le sont), alors $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Ce qui démontrerait la conjecture des nombres premiers jumeaux. Pour ce faire une idée d'une éventuelle équivalence entre f et g, voici le graphe (figure 7) de $\frac{f(x)}{g(x)}$, où g est appliquée à un ensemble impair Q choisi arbitrairement.

Pour les ensembles aléatoires R (créés par l'approche probabiliste), on peut avoir une bonne approximation de la fonction g, qui compte le nombre de jumeaux. Soit R un tel ensemble, on définit $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{i=2}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{\log(i)\log(i+2)}$. "Elle donne une bonne approximation car c'est l'espérance mathématique." À titre comparatif, voici le graphe de $g(x)$ (figure 8), d'une fonction qui compte les jumeaux dans l'ensemble des nombres premiers et une qui les compte dans R.

On peut montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$. Donc $f \geqslant g \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Pour conclure, la répartition des nombres premiers nous a permis de créer des ensembles aléatoires qui ont une infinité de nombres jumeaux.

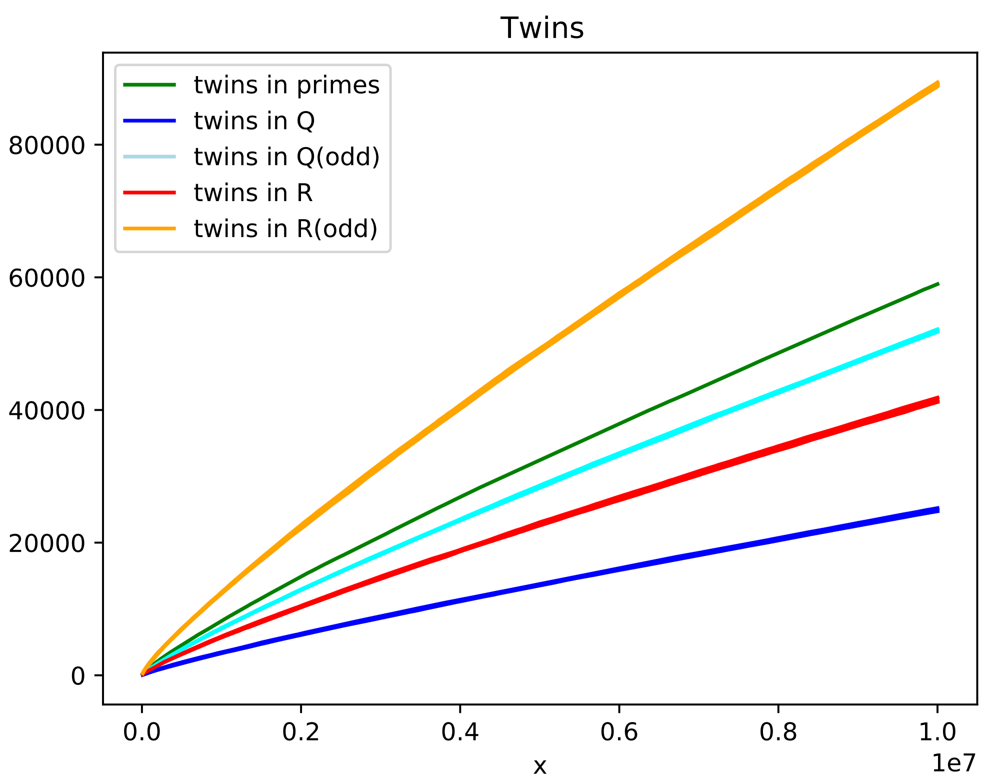

FIGURE 6 – Nombre de jumeaux dans chaque ensemble

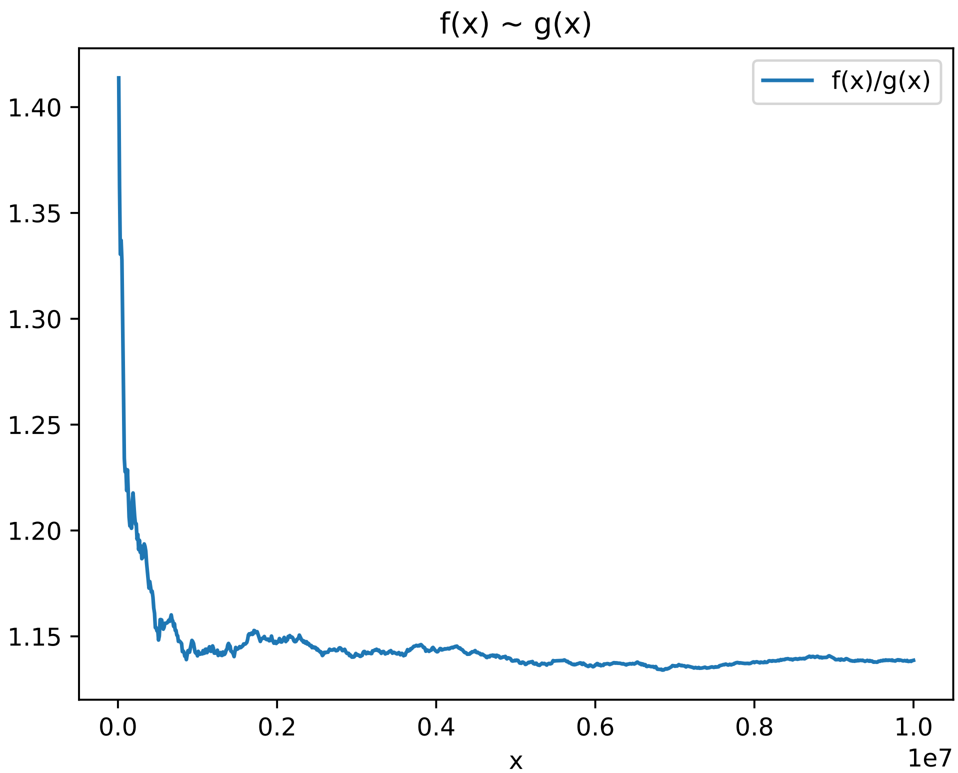

FIGURE 7 – $\frac{f(x)}{g(x)}$

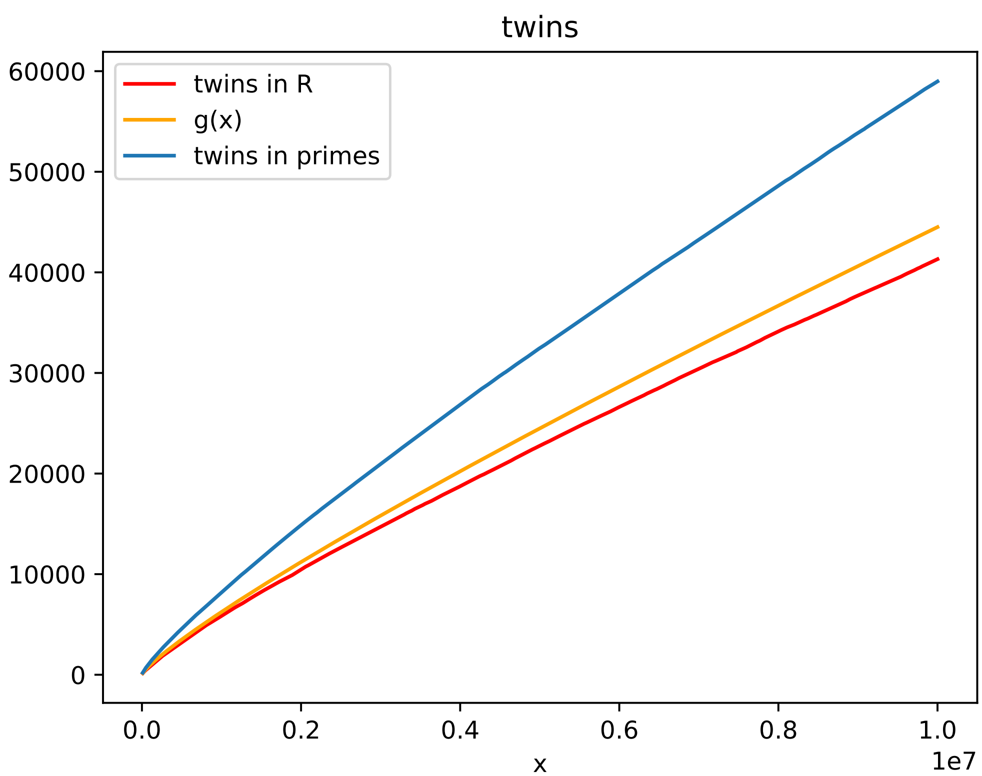

Figure 8 – Comparaison de $g(x)$

Conclusion

Ici on peut mettre la conclusion de notre raport.