0.0.1 Approche probabiliste

Soient $E_n := \{k \in N^* \mid k \leq n\}$ l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à n, $P_n := \{k \in E_n \mid k \text{ est premier}\}$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n, et la fonction $\pi(n) := \#P_n$, le nombres de premiers inferieurs ou égaux à n.

On a vu que la fonction $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ donne une bonne approximation de $\pi(n)$.

Cette fonction peut être approximée par la somme de Riemann de pas contant = 1:

$$S(\frac{1}{\log x}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\log(2+k)} = \frac{1}{\log 2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\log k} \tag{1}$$

La fonction $\frac{1}{\log x}$ est une fonction continue, décroissante et positive sur l'interval $[2, \infty[$. L'erreur entre $\mathrm{Li}(n)$ et la fonction en escalier ci-dessus est donc bornée.

$$\left| S(\frac{1}{\log x}) - Li(n) \right| \leq \left| \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\log(k+1)} - \frac{1}{\log k} \right| = \frac{1}{\log(2)} - \frac{1}{\log(n+1)} < \frac{1}{\log 2} < 2$$

Ensembles aléatoires

Nous allons alors générer k ensembles aléatoires $R_{k_n} \subset E_n$ de sorte que:

$$\forall\ i \in E_n, P(i \in R_{k_n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ 1 & \text{si } i = 2 \\ \frac{1}{\log n} & \text{si } i \geq 3 \end{cases}$$

Il est à noter deux cas particuliers:

- Le nombre 1 est exclu. En effet, $\frac{1}{\log 1}$ n'est pas défini. Par définition, 1 n'est pas un nombre premier.
- Le nombre 2 est inclu par défaut. En effet, $P(2 \in R_{k_n}) = \frac{1}{\log 2} > 1$. De plus, le nombre 2 est par définition, un nombre premier.

Nous allons aussi introduire la fonction $\sigma_k(n) := \#R_{k_n}$. Cette fonction mesure la taille de l'ensemble aléatoire.
$\sigma_k(n)$ est donc une valeur aléatoire strictement inférieure à n dont l'espérance est donnée par la formule suivante:

$$E[\sigma_k(n)] = 0 + 1 + \frac{1}{\log 3} + ... + \frac{1}{\log n} = 1 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\log k} \tag{2}$$

On observe alors que l'erreur entre l'espérance de $\sigma_k(n)$ et la somme de Riemann (1) est constante, égale à $\frac{1}{\log 2} - 1 < 1$.

Les ensembles aléatoires générés de cette manière suivront donc une distribution similaire a $\mathrm{Li}(x)$, et donc à $\pi(x)$ (voir figures **??** et **??**).