Prime vs Random Sets

Sebastien Plaasch
Maxime Rubio
Lucas Villiere

3 mai 2020

Résumé

Resume de notre projet..

Table des matières

Introduction

Ici on fait l'introduction

1 Creation d'ensembles aléatoires suivant la distribution de $\pi(x)$

1.1 Approche analytique

Cette approche pour créer des ensembles aléatoires (désignés par Q) qui partagent la même distribution que celle des nombres premiers, est basée sur un théorème (théorème 1) issu de ... .

Théorème 1. *L'hypothèse de Reimann est équivalente à l'assertion*

$$\forall\ n \geqslant 11,\ |p_n - ali(n)| < \frac{1}{\pi}\sqrt{n}\log^{5/2}(n)$$

où p_n représente le n-ième nombre premier.

1.1.1 Méthode de création d'un ensemble aléatoire Q

Les onze premiers éléments d'un ensemble Q sont choisis arbitrairement. Pour $n > 11$, voici la méthode de sélection de l'élément $q_n \in Q$:

— on pose $a = \max\left\{q_{n-1}, \lceil ali(n) - \frac{1}{\pi}\sqrt{n}\log^{5/2}(n)\rceil\right\}$ (où $\lceil x\rceil$ désigne la partie entière supérieure de x) ;

— on pose $b = \lfloor ali(n) + \frac{1}{\pi}\sqrt{n}\log^{5/2}(n)\rfloor$ (où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière inférieure de x) ;

— q_n est choisi aléatoirement entre a et b.

En procédant de la sorte, le théorème 1 sera toujours vrai pour tout ensemble aléatoire Q.

1.1.2 Définition de la fonction σ

On peut désormais définir $\sigma : [0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \#\{n \in Q : n < x\}$. Nous parlerons systématiquement de la fonction σ alors que cette fonction n'est bien entendu pas unique, elle dépend à chaque fois de l'ensemble aléatoire Q sur lequel on travail. Cependant, nous avons pu remarquer que les différentes fonctions σ sont souvent très proches les unes des autres. À titre d'exemple, pour un grand nombre d'ensembles aléatoires Q, nous avons calculé $\sigma(1000)$. Pour 45% des ensembles, $\sigma(1000) = 148$ et parmi 42% d'entre eux, $\sigma(1000) = 147$.

Afin de visualiser $\sigma(x)$ en la comparant à $\pi(x)$ et $\frac{x}{\log(x)}$, voici leur graphe respectif :

La figure 1 devrait apparaitre ici.

1.1.3 Écart entre $\pi(x)$ et $\sigma(x)$

La fonction σ semble suivre la même allure que $\pi(x)$. Cependant, lors de nos expérimentations, nous avons dessinés des graphes (que vous trouverez en annexe) pour des valeurs de x inférieures à celles de la figure 1. Pour des petites valeurs de x, la courbe de σ était presque confondue avec celle de $\frac{x}{\log(x)}$. Lorsque les valeurs de x sont de plus en plus grandes, $\sigma(x)$ tend vers $\pi(x)$. Pour analyser l'écart entre $\pi(x)$ et $\sigma(x)$, nous avons tracé le graphe de la fonction $\frac{\pi(x)}{\sigma(x)}$:

La figure 2 devrait apparaitre ici. On peut en conclure que $\pi(x) \sim \sigma(x)$.

1.1.4 Le Théorème des Nombres Premiers

L'objectif de cette section est de prouver la fidélité de nos ensembles aléatoires Q à la répartition des nombres premiers. Pour ce faire, nous allons vérifier si le Théorème des Nombres Premiers, cité ci-après, est vrai quand on remplace $\pi(x)$ par $\sigma(x)$.

Théorème 2 (Théorème des Nombres Premiers)**.** *Quand x tend vers l'infini :*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

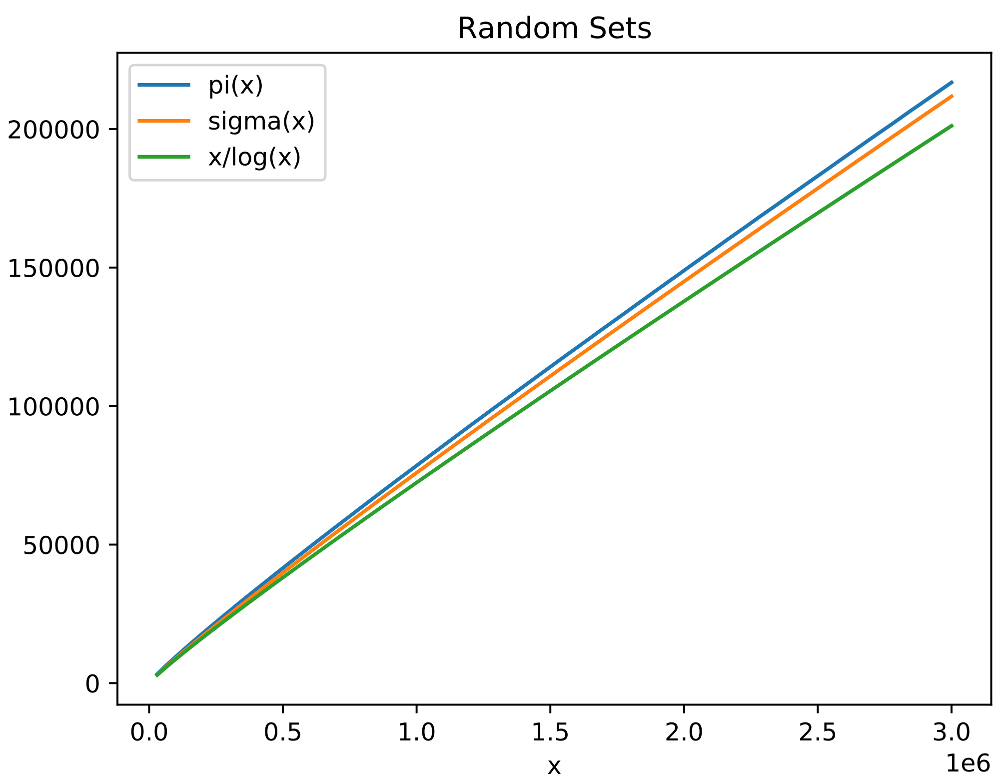

FIGURE 1 – Graphes de $\sigma(x)$, $\pi(x)$ et $\frac{x}{\log(x)}$

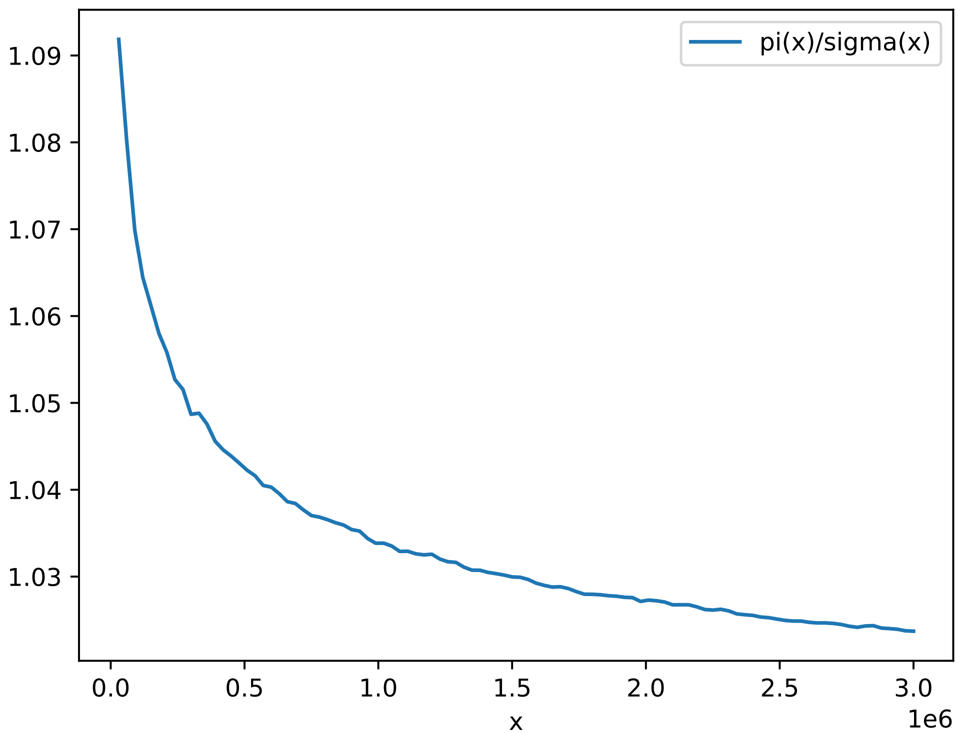

FIGURE 2 – Graphe de $\frac{\pi(x)}{\sigma(x)}$

Pour démontrer le Théorème des Nombres Premiers, il a été démontré que, quand x tend vers l'infini, $Li(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$. Nous pouvons montrer, graphiquement, que lorsque x tend vers l'infini, $\sigma(x) \sim Li(x)$ (voir figure 3), ce qui implique que $\sigma(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$.

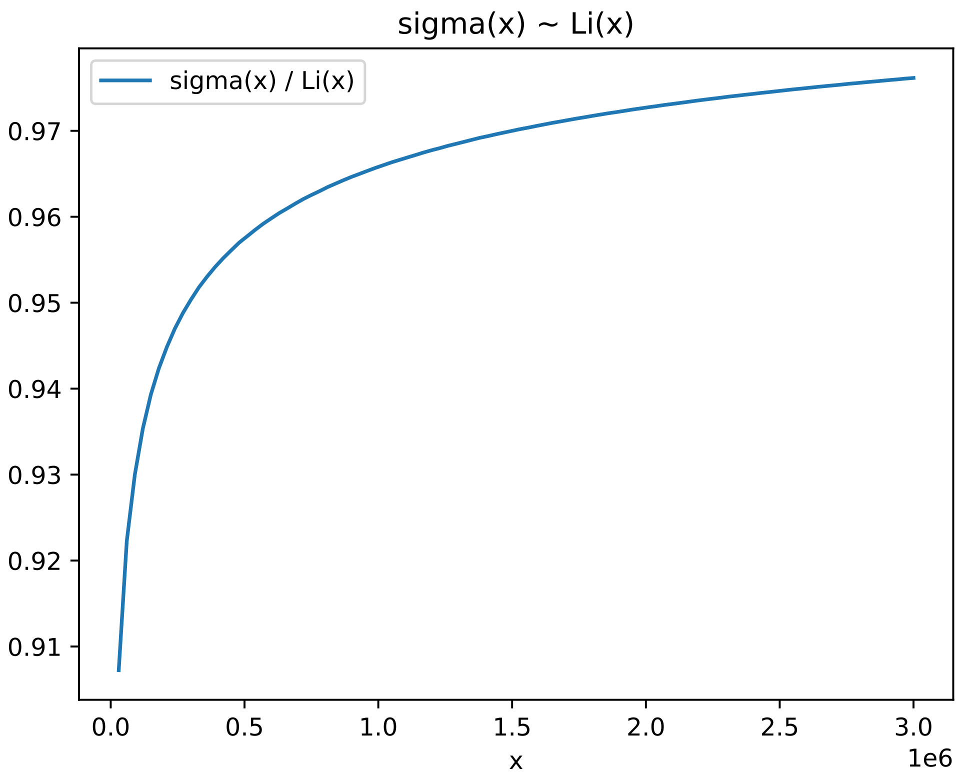

FIGURE 3 – Graphe de $\frac{\sigma(x)}{Li(x)}$

1.2 Approche probabiliste

Soient $E_n := \{k \in N^* \mid k \leq n\}$ l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à n, $P_n := \{k \in E_n \mid k$ est premier$\}$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n, et la fonction $\pi(n) := \#P_n$, le nombres de premiers inferieurs ou égaux à n.

On a vu que la fonction $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ donne une bonne approximation de $\pi(n)$.

Cette fonction peut être approximée par la somme de Riemann de pas contant $= 1$:

$$S(\frac{1}{\log x}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\log(2+k)} = \frac{1}{\log 2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\log k} \tag{1}$$

La fonction $\frac{1}{\log x}$ est une fonction continue, décroissante et positive sur l'interval $[2, \infty[$. L'erreur entre $\mathrm{Li}(n)$ et la fonction en escalier ci-dessus est donc bornée.

$$\left| S(\frac{1}{\log x}) - Li(n) \right| \leq \left| \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\log(k+1)} - \frac{1}{\log k} \right| = \frac{1}{\log(2)} - \frac{1}{\log(n+1)} < \frac{1}{\log 2} < 2$$

1.2.1 Ensembles aléatoires

Nous allons alors générer k ensembles aléatoires $R_{k_n} \subset E_n$ de sorte que :

$$\forall\, i \in E_n, P(i \in R_{k_n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ 1 & \text{si } i = 2 \\ \frac{1}{\log n} & \text{si } i \geq 3 \end{cases}$$

Il est à noter deux cas particuliers :

— Le nombre 1 est exclu. En effet, $\frac{1}{\log 1}$ n'est pas défini. Par définition, 1 n'est pas un nombre premier.

— Le nombre 2 est inclu par défaut. En effet, $P(2 \in R_{k_n}) = \frac{1}{\log 2} > 1$. De plus, le nombre 2 est par définition, un nombre premier.

Nous allons aussi introduire la fonction $\sigma_k(n) := \#R_{k_n}$. Cette fonction mesure la taille de l'ensemble aléatoire.

$\sigma_k(n)$ est donc une valeur aléatoire strictement inférieure à n dont l'espérance est donnée par la formule suivante :

$$E[\sigma_k(n)] = 0 + 1 + \frac{1}{\log 3} + ... + \frac{1}{\log n} = 1 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\log k} \tag{2}$$

On observe alors que l'erreur entre l'espérance de $\sigma_k(n)$ et la somme de Riemann (1) est constante, égale à $\frac{1}{\log 2} - 1 < 1$.

Les ensembles aléatoires générés de cette manière suivront donc une distribution similaire a $\mathrm{Li}(x)$, et donc à $\pi(x)$ (voir figures 4 et 5).

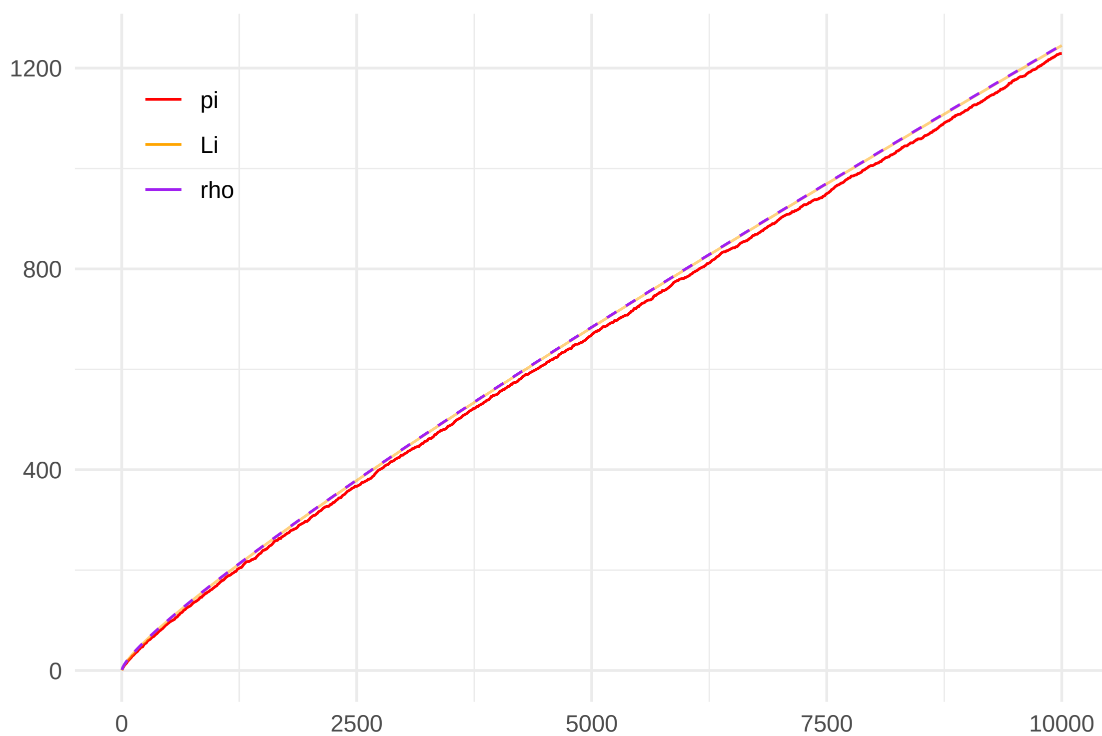

FIGURE 4 – Graphes des fonctions π, Li and σ. On observe que Li et σ sont superposées.

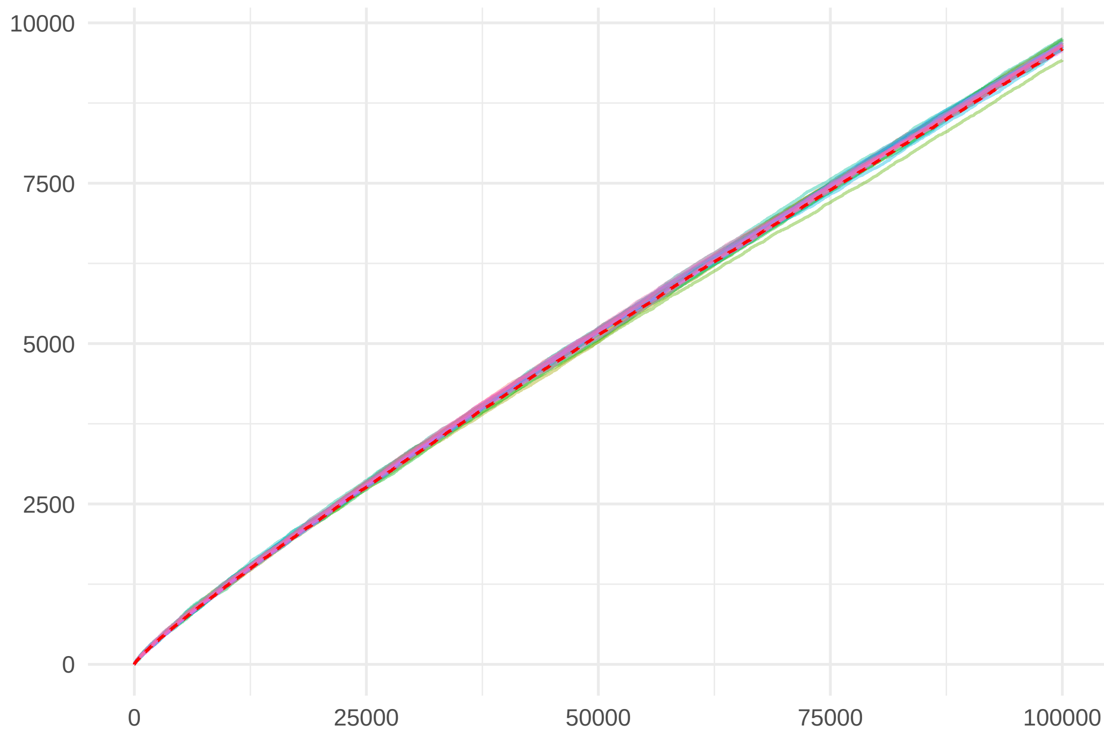

FIGURE 5 – graphes des fonctions $\sigma_k (1 \leq k \leq 25)$ et π

1.2.2 Ensembles probabilistes impairs

Bien que ces ensembles aléatoires suivent la distribution de $\pi(x)$, il manque une propriété importante des nombres premiers : à l'exception de 2, tous les nombres premiers sont impairs.

Nous allons alors modifier l'algorithme mentionné précedemment afin de générer des ensembles ayant cette propriété. Soit $O_n := E_n \cap 2\mathbb{N} + 1$ l'ensemble des entiers impairs inférieurs ou égaux à n. Soit alors l'ensemble aléatoire $U_{k_n} \subset \{O_n \cup \{2\}\}$ tel que $\forall\ i \in \{O_n \cup \{2\}\}$, le probabililité que i soit dans l'ensemble U_{k_n} soit :

$$P(i \in U_{k_n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ 1 & \text{si } 2 \leq i < 9 \\ \frac{2}{\log n} & \text{si } i \geq 9 \end{cases}$$

Le fait que $P(i \in U_{k_n}) = 1$ pour les entiers impairs inferieurs à 9 découle du au fait que $2/\log(n) > 1$ pour ces entiers.

On observe alors que ces suites débutent avec les mêmes éléments : $(2, 3, 5, 7, ...)$, mais contienent des éléments aléatoires à partir du 5ᵉ terme. Pour tout $n \geq 5$, la fonction σ est une valeur aléatoire d'esperance :

$$E[\sigma(n)] = 4 + \sum_{i=5}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2}{\log(2i-1)}$$

En réécrivant l'equation 1 de la page 8 en une somme de Riemann de pas constant = 2, on obtient que :

$$S(\frac{1}{\log(x)}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{\log 2 + k}$$

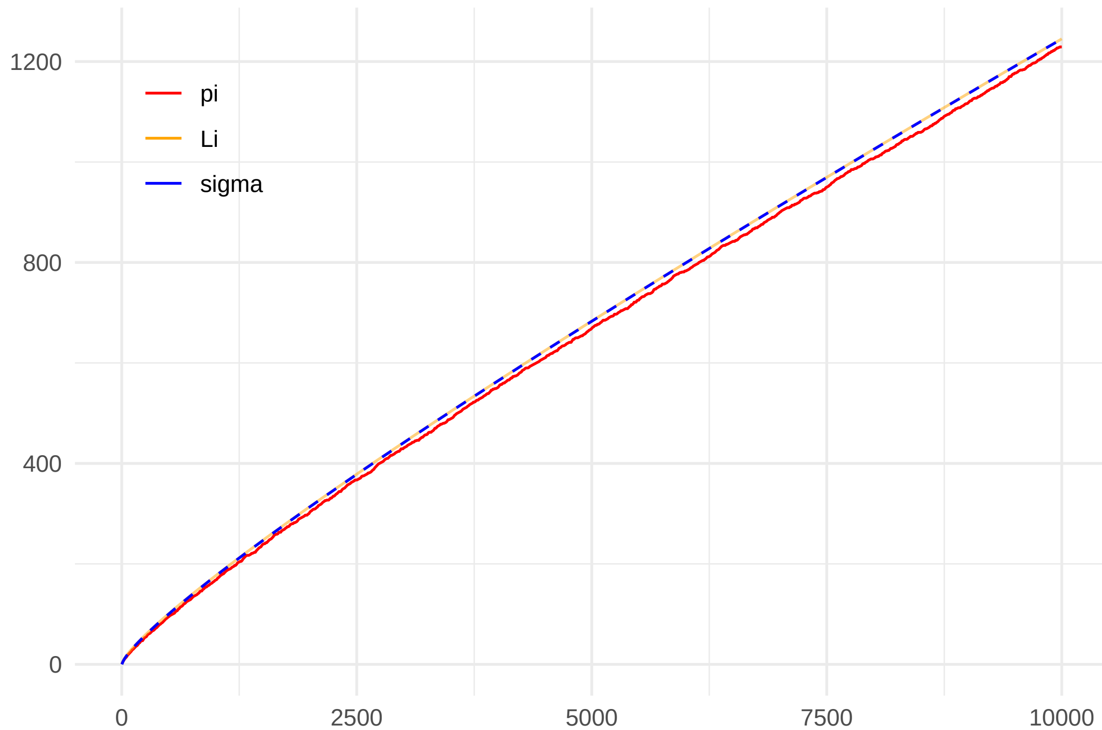

FIGURE 6 – Graphes des fonctions π et σ.

2 Ensembles aleatoires et conjonctures

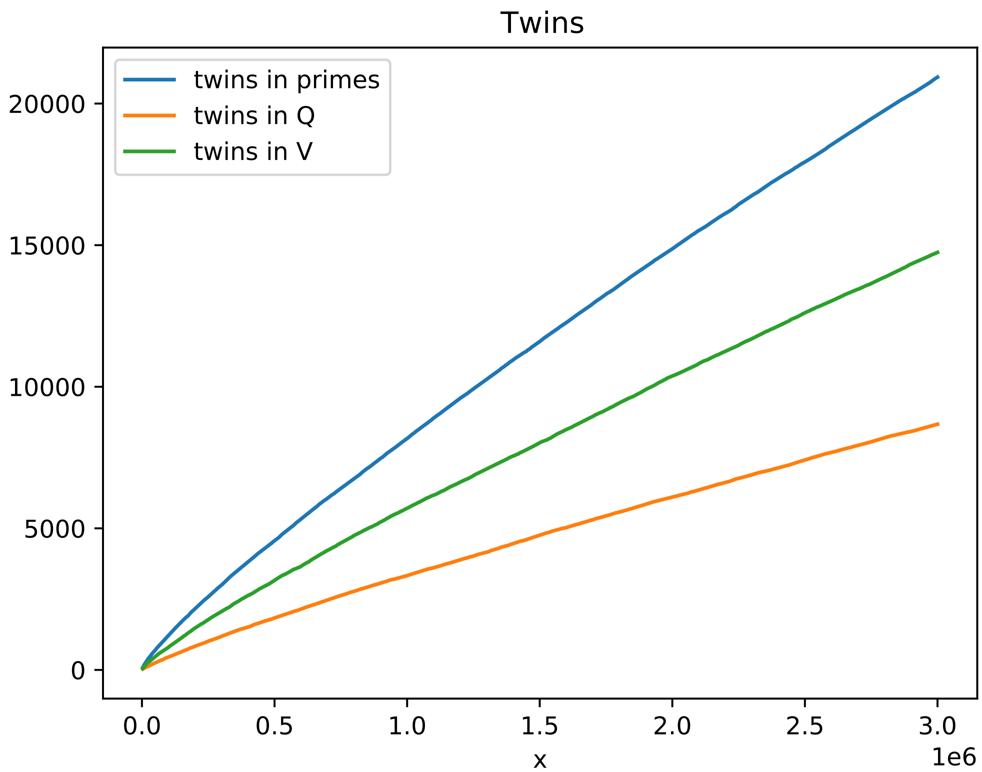

Figure 7 – Nombre de jumeaux dans chaque ensemble

Conclusion

Ici on peut mettre la conclusion de notre raport.

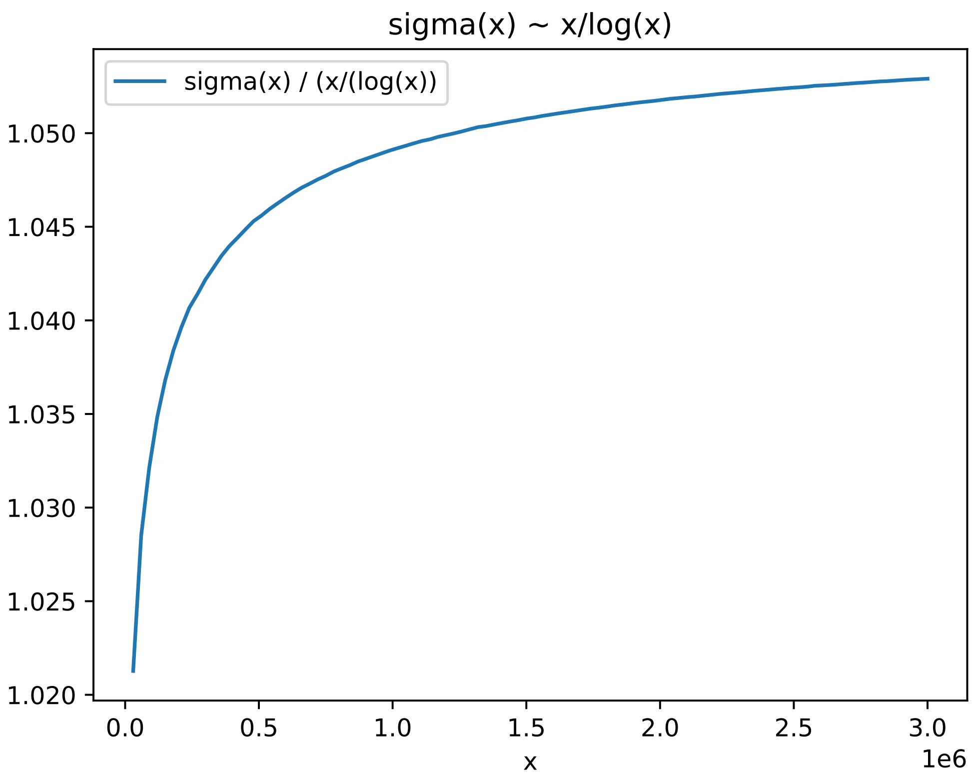

FIGURE 8 – Graphe de $\frac{\sigma(x)}{\frac{x}{\log(x)}}$