Curso: Análise e Desenvolvimento de Sistemas, módulo I
Disciplina: Matemática Computacional
Professor: Ezequias Matos Esteves
Aluno(a): Matheus Levi da Silva Barbosa

Lista 4

1) Seja E = {x ∈ Z||x| ≤ 3} e R a relação de equivalência sobre E definida por

xRy se, e somente se, x + |x| = y + |y|

a) Mostre que R é uma relação de equivalência

- **A relação é reflexiva!**

Note que para todo x ∈ E a igualdade x + |x| = y + |y|

É válida. Logo a relação é reflexiva.

- **A relação é transitiva!**

Dado x, y, z ∈ E com xRy e yRz então:

x + |x| = y + |y|= y + |y| = z + |z|=

Combinando as duas equações acima se chega a:

x + |x| = z + |z|

⇒ xRz

- **A relação é simétrica**

x + |x| - y + |y|

b) Descreva o conjunto quociente E/R

2) Considere a relação S sobre R definida da seguinte forma:

xSy se, e somente se, x − y ∈ Q .

a) Prove que S é uma relação de equivalência.

- **Prova da reflexividade**

Dado x ∈ Q como x − x = 0 e 0 ∈ Q então xSx. Provando a reflexividade.

- **Prova da simetria**

Dado x, y ∈ Q tal que xSy então:

x − y ∈ Q

Sendo assim existe um k ∈ Q tal que x − y = k. Como k ∈ Q então −k ∈ Q e como

−K = y − x então xSx.

- **Prova de transitividade**

Dado x, y e z ∈ Q tal que xSy e ySz então:

(x − y) ∈ Z e (y − z) ∈ Z

Sendo assim, existe um k e um k, ambos pertencentes a Z tal que

x − y = k e y − z = k

De y − z = k

chega-se a y = k + z. Usando esse resultado na primeira equação x − (k+z) = k

⇒ x − k − z = k

⇒ x − z = k + k

Como a soma de inteiros resulta num inteiro então (x − z) ∈ Z⇒ xSz

b) Descreva a classe representada por ½

$\overline{\frac{1}{2}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(x - \frac{1}{2}\right) \in \mathbb{Q}\right\}$ por definição, mas como $\left(x - \frac{1}{2}\right) \in \mathbb{Q}\ \forall x \in \mathbb{Q}$

então podemos escrever a classe de equivalência também como: $\overline{\frac{1}{2}} = \mathbb{Q}$

c) Descreva a classe a̅, quando a ∈ Q.

$\overline{a} = \mathbb{Q}, a \in \mathbb{Q}$

d) Descreva a classe √2

$\overline{\sqrt{2}} = \{x + \sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}\}$

3) Quais os conjuntos abaixo são grupos em relação à operação usual indicada?

Resposta X a) A = {−2, −1, 0, 1, 2}; adição.

Resposta X b) D = {−1, 1}; multiplicação.

c) P = {x ∈ Z| x é par}; adição

d) P = {x ∈ Z| x é ímpar}; multiplicação.

Para que um par de conjunto com operação possa ser considerado um grupo, este par precisa obedecer 3 propriedades:

1. **Associatividade** (a+b) +c=a+(b+c)

2. **Elemento neutro** (a+b) =(b+a) =b (pois a é neutro)
3. **Elemento simétrico** b+b' = b'+b = a.

Com isto definido, podemos verificar quais dos pares de conjuntos e operações podemos formar grupos.

a) forma grupo porque existe zero (neutro) existe simétrico (negativos) e é associativa.

b) também é grupo e vemos que 1 é elemento neutro, e que -1 é o inverso de 1.

4) Pode se provar que G = R × R − {(0,0)} é um grupo, para a operação definida assim:

(a, b) ∗ (c, d) = (ac − bd, ad + bc)

Qual o elemento neutro desse grupo? G é comutativo? Se x = (a, b) ∈ G, determine x simétrico de x em relação à operação considerada.

Sendo R x R - {0,0} munida da operação *, dada por
(a,b)*(c,d)=(acbd,ad+bc) ser um grupo abeliano, para mostrar o elemento simétrico:
Considerando (e1,e2) elemento neutro. Então,
(a,b)*(e1,e2) = (ae1- be2, ae2+be1) = (a,b)
(e1,e2)*(a,b) = (e1a- e2b, e1b+e2a) = (a,b)

Para que ae1=e1a = a, temos que e1=1.

O mesmo se aplica para b. Como sabemos que e1=1, então pelo sistema acima, teremos e2=0.

Portanto, dado R x R - {0,0} munida da operação *, dada por
(a,b)*(c,d)=(ac-bd, ad+bc), a simetria é dada pelo par (c,d)=(1,0).

5)Prove que f: Z → C ∗ dada por f(n) = i n é um homomorfismo do grupo aditivo Z no grupo multiplicativo C ∗ . Determine f −1 ({1, −1}).

5)

$i = \sqrt{-1} \to i^2 = -1$

$f(n) = i^n$ $\quad$ $f(n+m) = f(n) \cdot f(m)$

$f(n+m) = i^{n+m} = i^n \cdot i^m = f(n) \cdot f(m)$

$f^{-1}: C^* \to Z$ $\quad$ $n = 4q + r$

$f(n) = i^n = 1$ $\quad$ $n = 4q$

$= i^{4q+r} = 1$ $\quad$ $i^m = -1$

$(i^4)^q \cdot i^r = 1$ $\quad$ $m = 4q + 2$

$f^{-1}(\{1, -1\}) = \{4q, 4q+2$

$f(-Z) = \{0, 2, 4, 6, \}$

6) Seja f: Z × Z → Z × Z dada pela lei f(x, y) = (x − y, 0). Prove que f é um homomorfismo do grupo aditivo Z × Z em si próprio. Obtenha o N(f).

6.

$f(x,y) = (x-y, 0)$

$x = (x_1, y_1)$

$f(x+y) = f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = f(x_1+x_2, y_1+y_2) = ((x_1+x_2-(y_1+y_2)), 0)$

$= ((x_1-y_1)+(x_2-y_2), 0)$

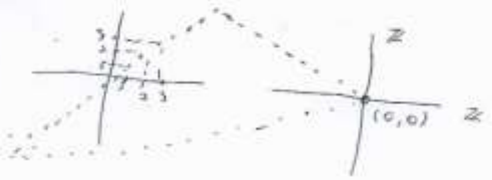
$= (x_1-y_1, 0) + (x_2-y_2, 0) = f(x) + f(y)$

$x = (x, y)$

$f(x) = 0,0$

$f(x,y) = 0,0$

$(x-y, 0) = 0,0$



$\begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} > x = y$ $\quad$ $f(3,3) = (3-3, 0) = (0,0$

$N(f) = \{(0,0), (1,1), (2,2), \ldots, (m,m)$
$(-1,-1), (-2,-2), \ldots\}$

7) Considere a estrutura algébrica (R, ∗), sendo a operação ∗ definida por x ∗ y = x − y + 3 Mostre que (R,∗) não é um grupo comutativo.

sendo o grupo {R}*, onde * e uma operação definida por x*y=x+y-3x, y E {R}

Vamos verificar se a operação x*y satisfaz a comutativa, temos pela definição que:

x*y=x-y+3

invertendo x por y temos:

y*x=y-x+3

sendo que em x-y=y-x, então:

x*y=y*x

logo a operação satisfaz a comutativa, portando {R}e um grupo, pois a operação é comutativa.