1 Einleitung

Hier fehlt das erste Kapitel, was allerdings nur motivierend seien soll. Stattdessen ein Kommentar:

Diese Mitschrift enthält weniger / schlechtere Bilder als die Mitschrift von Dr. Kopfer, allerdings befindet sich in Kapitel 7 interessantes Wissen / Beispiele aus den Übungsblättern. Das hier ist weitesgehend live während der VL mitgeschrieben worden. D.h. Fehler sind zu erwarten. Wer solche findet kann mir diese gerne an mh@mssh.dev schicken.

Viele Grüße, Manuel

2 Statistische Modelle

Der Stichprobenraum $\mathcal{X}$: Die möglichen Beobachtungsergebnisse bilden eine Menge.

Beispiel 1. $\mathcal{X}=\{0,\ldots,N\}, \mathcal{X}=\mathbb{N}, \mathcal{X}=\mathbb{R}^d$

Wieso $\mathcal{X}$ und nicht Ω ? $\mathcal{X}$ ist das Bild eines Zufallsexperiments $\mathcal{X}\colon \Omega \to \mathcal{X}$.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathcal{X}$ ist unbekannt, daher betrachten wir eine Familie von W.-verteilungen.

Definition 2. *Ein statistisches Modell ist ein Tripel* $\mathcal{M}=(\mathcal{X},\mathcal{F},(\mathbb{P}_\vartheta\colon \vartheta\in\theta))$. *Wobei*

- $\mathcal{X}$ *: Stichprobenraum,*
- $\mathcal{F}$ *:* σ*-Algebra auf* $\mathcal{X}$*,*
- $(\mathbb{P}_\vartheta\colon \vartheta\in\theta)$ *: Familie von W-Maßen auf* $\mathcal{X}$*.*

Bemerkung 3. Wenn man $(\mathbb{P}_\vartheta\colon \vartheta\in\theta)$ schlecht wählt, wird das stat. Verfahren unsinnig!

Die Grundaufgabe des Statistikers besteht in der Wahl des geeigneten Modells !

Definition 4. *Ein statistisches Modell* $\mathcal{M}$ *heißt parametrisch falls* $\theta\subseteq\mathbb{R}^d$ *für ein* $d\in\mathbb{N}$.

$\mathcal{M}$ *heißt diskret, falls* $\mathcal{X}$ *diskret mit* $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\mathcal{X})$. *Dann hat* $\mathbb{P}_\vartheta$ *eine Zähldichte:* $\zeta_\vartheta\colon x\mapsto\mathbb{P}_\vartheta[\{x\}]$.

$\mathcal{M}$ *heißt absolut-stetig, falls* $\mathcal{X}\subset\mathbb{R}^d$ *mit* $\mathcal{F}=\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *und* $\mathbb{P}_\vartheta$ *eine Dichtefunktion* ζ_ϑ *hat.*

$\mathcal{M}$ *heißt Standartmodell, falls es diskret oder absolut-stetig ist.*

Sei $(E,\mathcal{E},\mathbb{Q}_\vartheta\colon \vartheta\in\theta)$ *ein stat. Modell und* $n\geq 2$.

$$(\mathcal{X},\mathcal{F},(\mathbb{P}_\vartheta\colon \vartheta\in\theta)) := \left(E^n,\mathcal{E}^{\otimes n},{\mathbb{Q}_\vartheta}^{\otimes n}\colon \vartheta\in\theta\right)$$

ist das zugehörige n-fache Produktmodell.

$X_k\colon \mathcal{X}\to E$ *ist die k-te Koordinate und beschreit den Ausgang des k-ten Experiments. Insbesondere sind* $X_1,\ldots,X_n$ *u.i.v. (unabhängig und identisch verteilt) bzgl.* $\mathbb{P}_\vartheta$ *mit Verteilung* $\mathbb{Q}_\vartheta$.

3 Schätzer

Sei $(\mathcal{X},\mathcal{F},(\mathbb{P}_\vartheta\colon \vartheta\in\theta))$ stat. Modell und (Σ,ζ) ein Ereignisraum.

Eine bel. Zufallsvariable

$$\delta\colon (\mathcal{X},\mathcal{F})\to(\Sigma,\zeta)$$

heißt Statistik.

Sei $\tau: \theta \to \Sigma$ eine Abbildung. $\tau(\vartheta) \in \Sigma$ heißt Kenngröße. Eine Statistik $T: \mathcal{X} \to \Sigma$ heißt Schätzer für τ.

Ende Vorlesung 1

Bemerkung 5.

i. Statistik = ZV (im mathematischen Sinne), aber Zufallsvariable = unvorhersehbares Ereignis hervorgerufen durch Zufall. Eine Statistik = Vom Statistiker bestimmte Abbildung.

ii. Schätzer vs. Statistik: Ein Schätzer T ist eine Statistik, die speziell für die Schätzung von τ zugeschnitten ist.

iii. Was hat T mit τ zu tun ? Es gibt nicht nur einen Schätzer T für $\tau(\vartheta)$. Daher ist es nicht formalisiert um nicht zu restrektiv zu sein.

iv. Man spricht auch von Punktschätzern um von Bereichsschätzern abzugrenzen. (Kapitel: Konfidenzbereiche)

Beispiel 6. $\mathcal{X} = \{0,1\}^n, \mathbb{P}_\vartheta = \mathrm{Ber}_\vartheta^{\otimes n}$ mit $\vartheta \in [0,1]$ unbekannt.

$\mathrm{Ber}_\vartheta(1) = \vartheta = 1 - \mathrm{Ber}_\vartheta(0)$.

Gesucht: $\tau(\vartheta) = \vartheta$.

Sei $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$ die Stichprobe.

$$\Rightarrow T(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ist ein Schätzer für ϑ. Ein anderer Schätzer ist $S(X) = \frac{1}{2}$.

Aus dem Gesetz der großen Zahlen

$$\lim_{n\to\infty} T = \vartheta, \mathbb{P} - f.s.$$

aber

$$\lim_{n\to\infty} S = \frac{1}{2}.$$

Außer im „Glücksfall" $\vartheta = \frac{1}{2}$ ist T der „bessere" Schätzer als S.

- Was sind Qualitätskriterien ?
- Wie Schätzer finden ?

3.1 Maximum-Likelihood

- Die Idee ist einen Schätzer T zu wählen, s.d. die Dichtefunktion so groß wie möglich ist(D.h. wir sind im Standardfall). Methode zur Bestimmung eines Schätzer: andere Methode: Momentenmethode

Definition 7. *Sei* $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta: \vartheta \in \theta))$ ein stat. Standartmodell. *Die Likelihoodfunktion ist*

$$\rho: \mathcal{X} \times \theta \to [0, \infty) \text{ mit}$$

$$\rho(x, \vartheta) = \rho_\vartheta(x),$$

wobei ρ_ϑ die Dichtefunktion von $\mathbb{P}_\vartheta$ ist.

Die Likelihood-Funktion zum Beobachtungswert $x\in X$ ist

$$\rho_x := \rho(x,\cdot)\colon \theta \to [0,\infty]$$

$$\vartheta \mapsto \rho(x,\vartheta).$$

Definition 8. *Ein Schätzer $T\colon \mathcal{X}\to\theta$ für ϑ heißt Maximum-Likelihood-Schätzer (M-L-Schätzer) wenn $\rho(x,T(x)) = \max_{\vartheta\in\theta}\rho(x,\vartheta)$ für jedes $x\in\mathcal{X}$.*

$\Rightarrow T(x)$ ist eine Maximalstelle der Funktion ρ_x auf θ.

Beispiel 9. (Schätzung von Erfolgswahrscheinlichkeit)

Sei ϑ der Wirkungsgrad eines Medikaments.

$X_1,\ldots,X_n$ Stichprobe, $X_k\in\{0,1\}$ ($1\triangleq$gesund)

Sei $x\in\{0,\ldots,n\}$ Zahl der geheilten Personen.

Modell: Binomialmodell: $\mathcal{X}=\{0,\ldots,n\}$, $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\{0,\ldots,n\}), \mathbb{P}_\vartheta = \mathrm{Bin}_{n,\vartheta}, \vartheta\in[0,1]$

d.h. $\rho_\vartheta(x) = (\ n,k\ )\, \vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}$

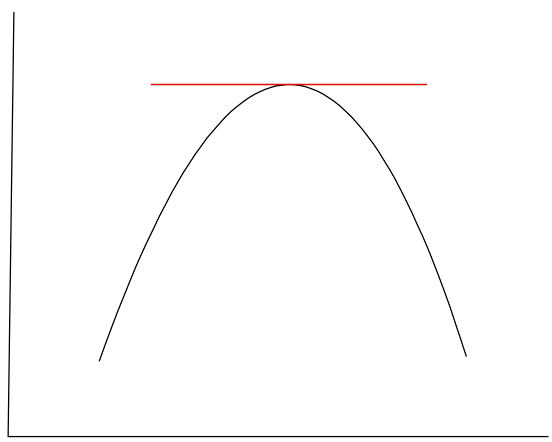
Was ist der M-L-Schätzer ?

Da $y\mapsto \ln y$ monoton wachsend, reicht es das Maximum von $\ln\rho_x(\vartheta)$ zu bestimmen.

$\Rightarrow: \frac{d}{d\vartheta}\ln\rho_x(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta}(\mathrm{x}\ln\vartheta + (n-x)\ln(1-\vartheta)) = \frac{x}{\vartheta} - \frac{n-x}{1-\vartheta} = \frac{x-\vartheta x - n\vartheta + \vartheta x}{\vartheta(1-\vartheta)} = \frac{x-n\vartheta}{\vartheta(1-\vartheta)} \overset{!}{=} 0$

Also $x = n\vartheta$.

Maximum ? Ja weil für $\vartheta \leqslant \frac{x}{n}$ ist ρ_x wachsend, für $\vartheta\geqslant\frac{x}{n}$ ist ρ_x fallend.



„unimodal“

$\Rightarrow T(x) = \frac{x}{n}$ ist (der) ML-Schätzer für ϑ im Binomialmodell

Beispiel 10. (Physikalische Messungen)

In jeder physikalischen Messung gibt es Messfehler.

Annahme:

Messungen sind u.i.v. ZV $X_1,\ldots,X_n$, n Zahl der Messungen mit $X_i \sim \mathcal{N}(\underbrace{m},\underbrace{\sigma^2})$, wobei m,$\sigma$ unbekannt.

$\Rightarrow M = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^{\otimes n}, \mathcal{N}(m,\sigma^2), m \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$

d.h. $\rho_\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$

Der M-L-Schätzer für (m,σ^2) ist

$$T(x) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2\right)$$

Beweis: Übung

Weitere Beispiele: Blatt 1+ Präsenzblatt (kont. Version German Tank Problem)

3.2 Erwartungstreue und quadratische Fehler

Ein erstes elementares Qualitätskriterium.

Definition 11. *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \theta))$ ein stat. Modell und $\tau : \theta \to \mathbb{R}$ eine relle Kenngröße.*

Ein Schätzer $T : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ für τ heißt erwartungstreu

wenn

$$\mathbb{E}_\vartheta[T] = \tau \forall \vartheta \in \theta$$

sonst, ist

$$\mathbb{B}_\vartheta[T] := \mathbb{E}_\vartheta[T] - \tau(\vartheta).$$

der Bias oder systematischer Fehler von T.

M-L-Schätzer sind nicht unbedingt erwartungstreu!!!!

Der M-L-Schätzer für die Varianz im Gauß Modell(Bsp. Physikalische Messungen) ist nicht erwartungstreu.

Satz 12. *(Schätzung von Erwartungswert und Varianz bei rellen Produktmodellen)*

Sei $n \geqslant 2$ und $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ...

Sei $m(\vartheta) := \mathbb{E}_\vartheta[X]$ und $\nu(\vartheta) := \mathrm{Var}_\vartheta[X]$ für jedes $\vartheta \in \theta$ definiert.

Der Stichprobenmittelwert

$$M := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

und die korrigierte Stichprobenvarianz

$$V^* := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} (X_k - M)^2$$

sind erwartungstreu für (m, v).

Beweis. *Sei $\vartheta \in \theta$ fest.*

1) $\mathbb{E}_\vartheta[M] \xlongequal[\text{lin}]{} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}_\vartheta[X_k] = \frac{1}{n}\mathrm{nm}(\vartheta) = m(\vartheta)$.

2) Sei $V = \frac{n-1}{n}V^*$ *Stichprobenvarianz.*

$$\mathbb{E}_\vartheta[V] \xlongequal[\text{lin.}]{} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k - M]^2 \xlongequal[\mathbb{E}_\vartheta[X_k-M]=0]{} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}[X_k - M]$$

$$\xlongequal[X_k i.i.d.]{} \mathrm{Var}_\vartheta\left[X_1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right] = \mathrm{Var}_\vartheta\left[X_1 \cdot \frac{n-1}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=2}^n X_k\right]$$

$$\xlongequal[X_{k i.i.d.}]{} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \mathrm{Var}_\vartheta[X_1] + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{Var}_\vartheta[X_1] = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \nu(\vartheta) + \frac{n-1}{n^2}\nu(\vartheta) = \frac{n-1}{n}\nu(\vartheta)$$

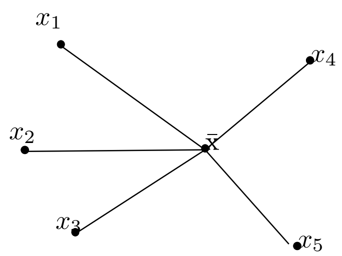
$\Rightarrow \mathbb{E}_\vartheta[V^*] = \nu(\vartheta)$.

□

Bemerkung 13. 1) Für große n sind $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n-1}$ fast gleich. $\Rightarrow$ V ist asymptotisch erwartungstreu.

2) $\mathbb{E}_\vartheta[V] = \frac{n-1}{n}\nu(\vartheta) < \nu(\vartheta), \nu(\vartheta) > 0$.

Der Schätzer V unterschätzt systematisch die Varianz.



Das heißt da

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x}) = 0$$

ist $x_1 - \bar{x}$ ist durch die anderen diff. schon bestimmt. Daher Normalisieren mit $\frac{1}{n-1}$.

3) Wenn der Erwartungswert bekannt $\mathbb{E}_\vartheta[X] = \mu$, dann ist V erwartungstreuer Schätzer für die Varianz!!

Ende Vorlesung 2

Erwartungstreue ist wünschenswert, aber nicht immer „besser“.

Beispiel 14. (Vorsetzung Binomialmodell)

$\mathcal{X}=\{0,\ldots,n\}, \theta=[0,1], \mathbb{P}_\vartheta=\text{Bin}_{n,\vartheta}$.

T(x)=$\frac{\text{x}}{\text{n}}$ ist Ml-Schätzer für θ.

$$\mathbb{E}_\vartheta[T]=\frac{1}{n}\mathbb{E}_\vartheta[X]=\vartheta \Rightarrow \text{Erwartungstreu}$$

Anderer Schätzer

$S(x)=\frac{x+1}{n+2}$ nicht erwartungstreu

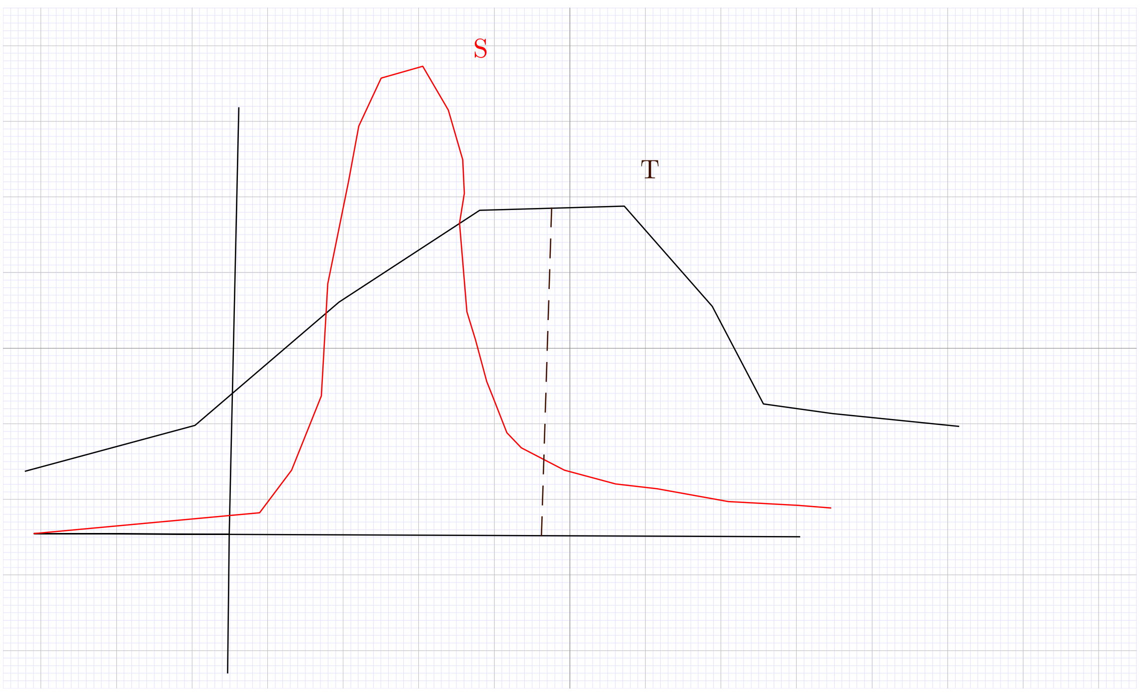
$$\mathbb{B}_\vartheta[S]=\frac{n\vartheta+1}{n+2}-\vartheta=\frac{1-2\vartheta}{n+2}>0$$

Aber was ist mit der mittleren quadraitschen Abweichung?

Definition 15. *Der mittlere quadratische Fehler eines Schätzers T für τ ist*

$$\mathbb{F}_\vartheta[T]:=\mathbb{E}[(T-\tau(\vartheta))^2]=\text{Var}_\vartheta[T]+\mathbb{B}_\vartheta[T]^2$$

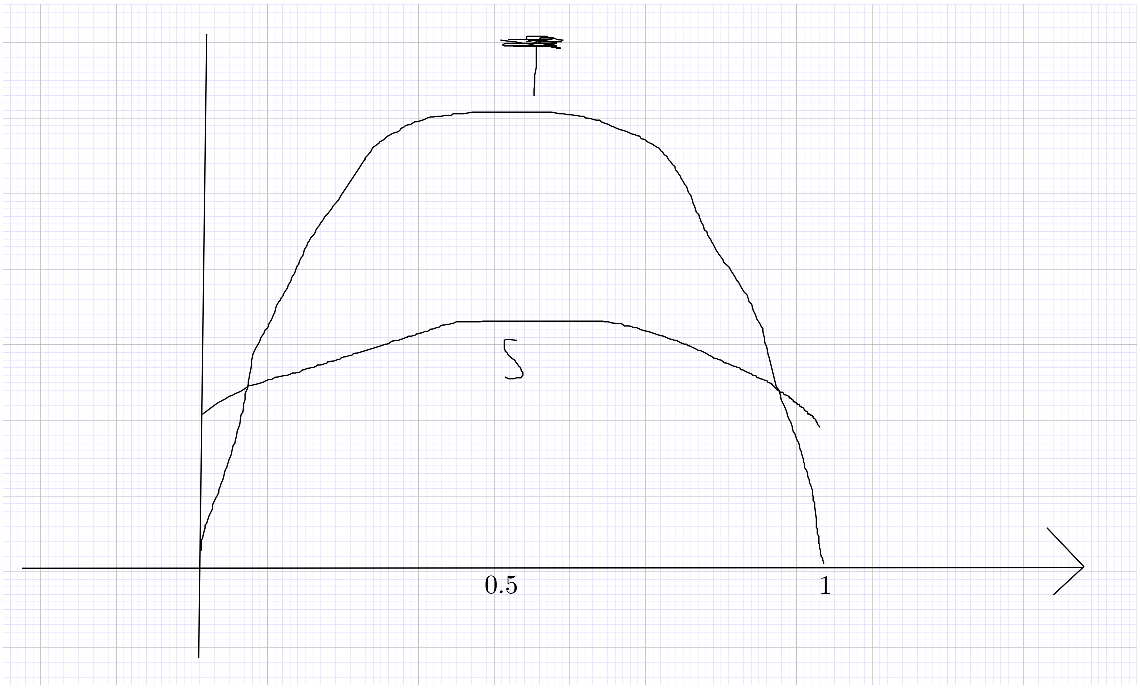
Wir wollen beide Terme gleichzeitig minimieren.



$\mathbb{F}_\vartheta[T]=\frac{1}{n^2}\text{Var}_\vartheta[X]=\frac{1}{n^2}n\vartheta(1-\vartheta)=\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}$

$\text{Var}_\vartheta[S]=\frac{1}{(n+2)^2}\text{Var}_\vartheta[X]$

$\Rightarrow \mathbb{F}_\vartheta[S]=\frac{n\vartheta(1-\vartheta)+(1-2\vartheta)^2}{(n+2)^2}$



Für Zentrale Werte von ϑ: S ist besser als T.
Es gilt für $(\left|\vartheta-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{8}} \approx 0.35)$.
Erwartungstreue ist also nicht alles, bleibt aber wichtig (Siehe Kapitel „Beste Schätzer“)

3.3 Konsistenz von Schätzern

Ein weiteres Qualitätskriterium ist die Konsistenz.

- Sei $\mathcal{M}=(\mathcal{X},\mathcal{F},(\mathbb{P}_\vartheta))$ ein stat. Modell und $\tau:\theta\to\mathbb{R}$ eine relle Kenngröße.
- Wiederholung der Messung: Sei $(X_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge von ZV auf $(\mathcal{X},\mathcal{F})$
  X_n ist n-te Messung mit Werten in $(E,\mathcal{E})$ $(z.B.\,\mathcal{X}=E^n)$
- Sei für $n\geqslant 1$ $T_n:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ ein Schätzer für τ

Definition 16. *Die Schätzfolge $(T_n)_{n\geqslant 1}$ für τ heißt konsistent, wenn $\forall\epsilon>0,\vartheta\in\theta$*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_\vartheta[|T_n-\tau(\vartheta)|\leq\epsilon]=1$$

oder:

$$\forall\epsilon,\vartheta\in\theta\colon \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_\vartheta[|T_n-\tau(\theta)|\geq\epsilon]=0$$

„Konvergenz im Maß (Stochastische Konvergenz)“

Im folgenden:
Standartfall mit unabhängigen Beobachtungen
$\Rightarrow(\mathcal{X},\mathcal{F},(\mathbb{P}_\vartheta))=(E^{\mathbb{N}},\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{N}},(\mathbb{Q}_\vartheta^{\otimes\mathbb{N}}))$

Satz 17. *Im unendlichen Produktmodell seien:*
$M_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k, V_n^\star=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n (X_k-M_n)^2$
die Erwartungstreuen Schätzer für m bzw. v.
Dann sind die Folgen $(M_n)_{n\geqslant 1},(V_n^*)_{n\geqslant 1}$ konsistent.

Beweis. *1.) Nach dem (schwachen) Gesetz der großen Zahlen*

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathbb{P}_\vartheta} \mathbb{E}_\vartheta[X_1] = m(\vartheta)$.

2.) Sei $\tilde{V}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - m(\vartheta))^2, V_n := \frac{n-1}{n} V_n^*$

$\Rightarrow V_n = \tilde{V} - (M_n - m(\vartheta))^2$ *(Verschiebungsformel / Verschiebungssatz)*

$\tilde{V} \xrightarrow{\mathbb{P}_\vartheta} v(\vartheta)$ *und* $(M_n - m(\vartheta))^2 \xrightarrow{\mathbb{P}_\vartheta} 0$ *(beides Nach g.G.Z.)*

$V_n \xrightarrow{\mathbb{P}_\vartheta} v(\vartheta)$ *und damit* $V_n^* = \frac{n}{n-1} V_k \xrightarrow{\mathbb{P}_\vartheta} v(\vartheta)$. □

Auch M-L-Schätzer sind konsistent:

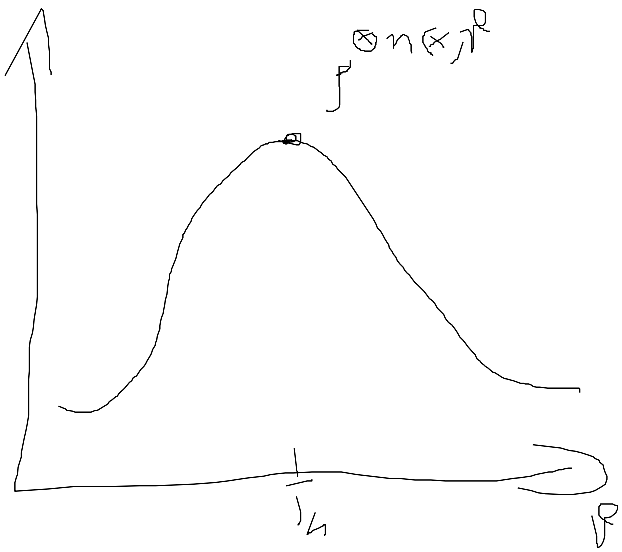
Satz 18. *(Konsistenz von M-L-Schätzern)*

Sei $(E, \mathcal{E}, \mathbb{Q}_\vartheta)$ *eine einparametriges Standartmodell (d.h.* $\theta \subseteq \mathbb{R}$*) ,mit Likelihood-Funktion* ρ.

Es gelte:

- θ *ist offenes Intervall in* $\mathbb{R}$ *und für* $\vartheta \neq \vartheta'$ *ist* $\mathbb{Q}_\vartheta \neq \mathbb{Q}_{\vartheta'}$.
- $\forall n \geqslant 1 \ \forall x \in E^n$ *ist*

  $$\rho^{\otimes n}(x, \vartheta) = \prod_{k=1}^{n} \rho(x_k, \vartheta)$$

  unimodal, d.h. $\exists$ *ML-Schätzer* $T_n: E_n \to \mathbb{R}$ *s.d* $\vartheta \mapsto \rho^{\otimes n}(x, \vartheta)$ *ist wachsend für* $\vartheta < T_n(x)$ *und fallend für* $\vartheta > T_n(x)$.
- 

Dann ist die Schätzfolge konsistent für ϑ.

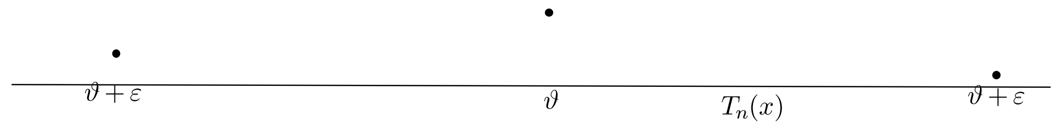
Beweis. (grob)

Wir wollen zeigen, dass $\forall \epsilon > 0, \vartheta \in \theta$

$$\mathbb{P}_\vartheta[\vartheta - \epsilon \leqslant T_n \leqslant \vartheta + \epsilon] \xrightarrow{n \to \infty} 1$$

Sei $\vartheta \in \theta$ und $\varepsilon > 0$ $(\vartheta \pm \varepsilon \in \theta)$

$\{x: \vartheta - \epsilon \leqslant T_n(x) \leqslant \vartheta + \varepsilon\} \supseteq \{x: \rho_{\vartheta-\varepsilon}^{\otimes n}(x) < \rho_{\vartheta}^{\otimes n}(x), \rho_{\vartheta+\varepsilon}^{\otimes n}(x) < \rho_{\vartheta}^{\otimes n}(x)\}$



$\supseteq \left\{ x: \log\left(\frac{\rho_{\vartheta}^{\otimes n}(x)}{\rho_{\vartheta+\varepsilon}^{\otimes n}(x)} \right) > 0, \log\left(\frac{\rho_{\vartheta}^{\otimes n}(x)}{\rho_{\vartheta-\varepsilon}^{\otimes n}(x)} \right) > 0 \right\}$

„+“-Fall Sei $f(x) = \frac{\rho_{\vartheta}}{\rho_{\vartheta+\varepsilon}}(x)$ und wir nehmen an, dass $\mathbb{E}_{\vartheta}[\log f] < \infty$.

Dann gilt nach dem G.d.g.Z. ($\mathcal{L}^1$ –Version: X_i p.w. u.i.v. und in $\mathcal{L}^1$, dann $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{E}[X_1]$)

$$\frac{1}{n}\log\frac{\rho_{\vartheta}^{\otimes n}}{\rho_{\vartheta+\varepsilon}^{\otimes n}}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(X_i) \xrightarrow{\mathbb{P}_{\vartheta}} \mathbb{E}_{\vartheta}[\log f]$$

$\mathbb{E}_{\vartheta}[\log f] = \int \log f \rho_{\vartheta}(x) \mathrm{dx} = \int \log \frac{\rho_{\vartheta}}{\rho_{\vartheta+\varepsilon}}(x)\rho_{\vartheta}(x)\mathrm{dx} =: H(\mathbb{Q}_{\vartheta}; \mathbb{Q}_{\vartheta+\varepsilon})$ (reltative Entropie)

Es gilt $H(\mathbb{Q}_{\vartheta}; \mathbb{Q}_{\vartheta}) > 0$, da wir angenommen haben, dass $\mathbb{Q}_{\vartheta} \neq \mathbb{Q}_{\vartheta'}$ für $\vartheta \neq \vartheta'$. (Beweis Blatt 2)

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ s.d.

$$\mathbb{P}_{\vartheta}\left[\frac{1}{n}\log\frac{\rho_{\vartheta}^{\otimes n}}{\rho_{\vartheta+\varepsilon}^{\otimes n}} > \delta \right] \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

„-“ Fall genau so...

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ s.-d.

$\mathbb{P}_{\vartheta}[\underbrace{\frac{1}{n}\log\frac{\rho_{\vartheta}^{\otimes n}}{\rho_{\vartheta\pm\varepsilon}^{\otimes n}} > \delta}_{\subseteq \left\{ x: \log\left(\frac{\rho_{\vartheta}^{\otimes n}(x)}{\rho_{\vartheta\pm\varepsilon}^{\otimes n}(x)} \right) > 0 \right\} \subseteq \{x: \vartheta - \epsilon \leqslant T_n(x) \leqslant \vartheta + \varepsilon\}}] \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Der Fall $\mathbb{E}_{\vartheta}[\log f] = \infty$ siehe Georgii.

$\square$

3.4 Beste Schätzer

Wir konzentrieren uns jetzt auf Klasse von Schätzern, die

- erwartungstreu
- am wenigsten streuen (Varianz ist minimal)

Definition 19. *Sei* $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \theta))$ ein stat. Modell. *Ein erwartungstreuer Schätzer T für eine reelle Kenngröße $\tau(\vartheta)$ heißt varianzminimierend/bester Schätzer, falls für jeden weiteren erwartungstreuen Schätzer S*

$$\mathrm{Var}_\vartheta[T] \leqslant \mathrm{Var}_\vartheta[S] \forall \vartheta \in \theta.$$

Definition 20. *(Regulär) Ein einparametrisches Standartmodell $(\mathcal{X},\mathcal{F},(\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \theta))$ heißt regulär, falls*

i. θ ist ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$.

ii. Die Likelihoodfunktion ρ ist auf $\mathcal{X} \times \theta$ strikt positiv und nach ϑ stetig differenzierbar.

iii. Für jedes $\vartheta \in \theta$ ex. die Varianz:

$$I(\vartheta) := \mathrm{Var}\left[\frac{d}{d\vartheta}\underbrace{\log\rho(x,\vartheta)}_{\text{diffbar}}\right]$$

und ist nicht 0. Außerdem gilt die Vertauschungsregel:

$$\int \frac{d}{d\vartheta}\rho(x,\vartheta)\mathrm{dx} = \frac{d}{d\vartheta}\int \rho(x,\vartheta)\mathrm{dx}.$$

Ende Vorlesung 3

Bemerkung 21. i. $I(\vartheta)$ heißt auch Fisher-Information des Modells und $U_\vartheta(x) := \frac{d}{d\vartheta}\underbrace{\log\rho(x,\vartheta)}_{\text{diffbar}}$ die Score Funktion. $I(\vartheta) = \mathrm{Var}_\vartheta[U_\vartheta]$

ii. $\mathbb{E}[U_\vartheta] = 0$, denn

$$\mathbb{E}[U_\vartheta] = \int_{\mathcal{X}} \frac{d}{d\vartheta}\log\rho(x,\vartheta)\rho(x,\vartheta)\mathrm{dx}$$

$$= \int_{\mathcal{X}} \frac{d}{d\vartheta}\rho(x,\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta}\underbrace{\int \rho(x,\vartheta)\mathrm{dx}}_{1} = 0$$

$\Rightarrow I(\vartheta) = \mathbb{E}[U_\vartheta^2]$

iii. Was bedeutet I ? Falls $I = 0$ auf $\theta_0 \subseteq \theta$, d.h. $U_\vartheta(x) = 0$ für $\vartheta \in \theta_0, \forall x \in \mathcal{X}$.

$\Rightarrow \rho(x,\vartheta) = \text{const}$ für alle $x \in \mathcal{X}$ auf θ_0. Also kann keine Beobachtung die Parameter in θ_0 unterscheiden.

I ist additiv für unabhängige Beobachtungen

Satz 22. *Sei $(\mathcal{X},\mathcal{F},(\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \theta))$ ein reguläres Modell mit Fisher Information I. Dann hat das Produktmodell $\mathcal{M}^{\otimes n}$ die Fisher Information $I^{\otimes n} = n \cdot I$.*

Beweis. *Die Likelihoodfkt. von $\mathcal{M}^{\otimes n}$ ist*

$$\rho_\vartheta^{\otimes n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \rho_\vartheta(x_k)$$

und

$$U_\vartheta^{\otimes n}(x_1,\dots,x_n)=\frac{d}{d\vartheta}\sum_{k=1}^{n}\log\rho_\vartheta(x_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{d}{d\vartheta}\rho_\vartheta(x_k)}{\rho_\vartheta(x_k)}=\sum_{k=1}^{n}U_\vartheta(x_k)$$

Dann $I^{\otimes n}(\vartheta)=\mathrm{Var}[U_\vartheta^{\otimes n}]=\mathrm{Var}[\sum_{k=1}^n U_\vartheta(x_k)]=\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}[U_\vartheta(x_k]=n\cdot I$

□

Die Fisher Information kann benutzt werden für die Abschätzung der $\mathrm{Var}_\vartheta[T]$ für reguläre erwartungstreue Schätzer T,

$$\int T(x)\frac{d}{d\vartheta}\rho(x,\vartheta)\mathrm{dx}=\frac{d}{d\vartheta}\underbrace{\int T(x)\rho(x,\vartheta)\mathrm{dx}}_{\mathbb{E}_\vartheta[T]}$$

Satz 23. *(Informationsungleichung). Sei $\mathcal{M}$ ein regulläres stat. Modell., $\tau:\theta\to\mathbb{R}$ eine zu schätzende stetig diff'bare Funktion mit $\tau'\neq 0$ und T ein regulärer erwartungstreuer Schätzer für τ.*

i. *Es gilt*

$$\mathrm{Var}_\vartheta[T]\geq\frac{\tau'(\vartheta)^2}{I(\vartheta)}\ \textit{für alle}\ \vartheta\in\theta.\ (\mathrm{Cramér-Rao-Ungleichung})$$

ii. *Gleichheit gilt für alle $\vartheta\in\theta$ g.d.w.*

$$T-\tau(\vartheta)=\frac{\tau'(\vartheta)}{I(\vartheta)}U_\vartheta\forall_\vartheta$$

d.h. wenn das Modell die Likelihoodfunktion

$$\rho(x,\vartheta)=\exp(a(\vartheta)T(x)-b(\vartheta))h(x)$$

Wobei

- $a:\theta\to\mathbb{R}$ *ist Stammfunktion von* $\frac{I}{\tau'}$
- $h:\mathcal{X}\to(0,\infty)$ *messbar.*
- $b(\vartheta):=\log(\int e^{a(\vartheta)T(x)}h(x)\mathrm{dx})$ *(Normierugsfunktion)*

Beweis. ***(i)*** $\mathrm{Cov}_\vartheta[T,U_\vartheta]:=\mathbb{E}[T\cdot U_\vartheta]-\mathbb{E}[T]\mathbb{E}[U_\vartheta]\overset{\mathbb{E}[U_\vartheta]=0}{=\!=}\mathbb{E}[T\cdot U_\vartheta]$

$$=\int_{\mathcal{X}}T(x)U_\vartheta(x)\rho(x,\vartheta)\mathrm{dx}=\int_{\mathcal{X}}T(x)\frac{d}{d\vartheta}\rho(x,\vartheta)\mathrm{dx}$$

$$=\frac{d}{d\vartheta}\mathbb{E}_\vartheta[T]\overset{T\quad\mathrm{erwartungstrue}}{=\!=\!=\!=\!=}\tau'(\vartheta)$$

$\tau'(\vartheta)^2=\mathrm{Cov}_\vartheta[T,U_\vartheta]^2\leq\mathrm{Var}_\vartheta[T]\cdot\underbrace{\mathrm{Var}_\vartheta[U_\vartheta]}_{I(\vartheta)}$

$\Rightarrow\mathrm{Var}[T]\geq\frac{\tau'(\vartheta)^2}{I(\vartheta)}$

(ii)

Es gilt Gleichheit g.d.w. $\exists\lambda\geq 0$ *s.d.*

$$(T-\mathbb{E}_\vartheta[T])^2=\lambda(U_\vartheta)^2\,\mathbb{P}_\vartheta-f.s.$$

Es gilt $\mathbb{E}[T-\mathbb{E}[T]]=\mathrm{Var}_\vartheta[T]$ *und* $\mathbb{E}_\vartheta[\lambda\cdot U_\vartheta^2]=\lambda\mathbb{E}[U_\vartheta^2]=\lambda\cdot I(\vartheta)$

$\Rightarrow \lambda = \frac{\tau'(\vartheta)^2}{I(\vartheta)^2} \geq 0$

$\Rightarrow T - \underbrace{\mathbb{E}_\vartheta[T]}_{\tau(\vartheta)} = \frac{\tau'(\vartheta)}{I(\vartheta)} \cdot U_\vartheta \qquad \mathbb{P}_\vartheta\ f.s.$

Da $\rho(x,\vartheta) > 0$ *gilt* $\Rightarrow T - \tau(\vartheta) = \frac{\tau'(\vartheta)}{I(\vartheta)} \cdot U_\vartheta \qquad f.s.$

Also

$$\frac{d}{d\vartheta}\log \rho(x,\vartheta) = \frac{I(\vartheta)}{\tau'(\vartheta)}(T(x) - \tau((\vartheta)))$$

Unbestimmte Integration in ϑ *liefert*

$$\log \rho(x,\vartheta) - \underbrace{h(x)}_{\text{Integrationskonstante}} = a(\vartheta)T(x) - \underbrace{b(\vartheta)}_{=\int \frac{I(\tilde{\vartheta})}{\tau(\tilde{\vartheta})}\tau(\tilde{\vartheta})d\tilde{\vartheta}}$$

$\Rightarrow \rho(x,\vartheta) = \exp\{a(\vartheta)T(x) - b(\vartheta)\}h(x)$

Da $\int_\mathcal{X} \rho(x,\vartheta)\mathrm{dx} = 1 \Rightarrow b(\vartheta) = \log \int e^{a(\vartheta)T(x)}h(x)\mathrm{dx}$.

Für die Umkehrung sei $\rho(x,\vartheta) = \exp\{a(\vartheta)T(x) - b(\vartheta)\}h(x)$

Dann ist $U_\vartheta(x) = \frac{d}{d\vartheta}\log\rho(x,\vartheta) = a'(\vartheta)T(x) - b'(\vartheta) = \frac{I(\vartheta)}{\tau'(\vartheta)}T(x) - \underbrace{\frac{I(\vartheta)}{\tau'(\vartheta)} \cdot \tau(\vartheta)}_{(*)}$

$\Rightarrow T(x) - \tau(\vartheta) = \frac{\tau'(\vartheta)}{I(\vartheta)}U_\vartheta$

Warum gilt $(*)$ *?*

$(b(\vartheta)) = \log \int e^{a(\vartheta)T(x)}h(x)\mathrm{dx}$

$$b'(\vartheta) = \frac{a'(\vartheta)\int T(x)e^{a(\vartheta)T(x)}h(x)\mathrm{dx}}{\int e^{a(\vartheta)T(x)}h(x)\mathrm{dx}} = \frac{a'(\vartheta)\int T(x)e^{a(\vartheta)T(x)-b(\vartheta)}h(x)\mathrm{dx}}{\underbrace{\int \underbrace{e^{a(\vartheta)T(x)-b(\vartheta)}h(x)}_{=\rho(x,\vartheta)}\mathrm{dx}}_{=1}} = a'(\vartheta)\mathbb{E}_\vartheta[T] = a'(\vartheta)\tau(\vartheta)$$

$$= \frac{I(\vartheta)}{\tau'(\vartheta)}\tau(\vartheta)$$

ad(**) Wann gilt Gleichheit ?

$c(\vartheta) = \frac{\tau'(\vartheta)}{I(\vartheta)}$

$0 \leq \mathrm{Var}[T - c(\vartheta)U_\vartheta] = \mathrm{Var}[T] - 2c(\vartheta)\mathrm{Cov}[T, U_\vartheta] + c(\vartheta)^2\mathrm{Var}[U_\vartheta] = \mathrm{Var}[T] - 2c(\vartheta)\tau'(\vartheta) + c(\vartheta)^2 I(\vartheta)$

$= \mathrm{Var}[T] - 2\frac{\tau'(\vartheta)^2}{I(\vartheta)} + \frac{\tau'(\vartheta)^2}{I(\vartheta)} = \mathrm{Var}[T] - \frac{\tau'(\vartheta)^2}{I(\vartheta)}$

$\Rightarrow \mathrm{Var}[T] \geq \frac{\tau'(\vartheta)^2}{I(\vartheta)}$

Gleichheit gilt g.d.w. $T(x) - c(\vartheta)U_\vartheta(x) = \mathbb{E}_\vartheta[T] = \tau(\vartheta)\ \mathbb{P}_\vartheta - f.s.\ \ldots$

□

Bemerkung 24. Wenn T erwartungstreu regulärer Schätzer , s.d. Gleichheit in Cramèr-Rao gilt, dann ist T bester Schätzer, (zumindestens für reguläre Schätzer).

Wann existieren solche Schätzer ?

Für die exponentielle Familien!

Definition 25. *Sei* $\mathcal{M}$ ein einparametriges Standartmodell *mit* θ *offen. Wenn die Likelihoodfkt. der Form*

$$\rho(x,\vartheta) = \exp\{a(\vartheta)T(x) - b(\vartheta)\}h(x)$$

mit Funktionen $a\colon\theta\to\mathbb{R}, a'\neq 0$

$h\colon\mathcal{X}\to(0,\infty)$ *und* $b=\log(\int e^{a(\vartheta)T(x)}h(x)\mathrm{dx})$

dann heißt $\mathcal{M}$ exponentielles Modell *und* $(\mathbb{P}_\vartheta,\vartheta\in\theta)$ *heißt* *exponentielle Familie* *bzgl. eine Statistik* $\underbrace{T\colon\mathcal{X}\to\mathbb{R}}_{f.s.\,\text{nicht konstant}}$.

Beispiel 26. (Poisson-Verteilung)

$\mathbb{P}_\vartheta$ hat die Dichte ...

i.e. T(x)=x, $a(\vartheta)=\log\vartheta$

Da T erwartungstreu ist, ist T ein bester Schätzer für ϑ.

Ende Vorlesung 4

KEINE OFFIZIELLEN MUSTERLÖSUNGEN ZU DEN ÜBUNGSBLÄTTERN!

Proposition 27. *(Eigenschaften von exponentiellen Modellen)*

a) *$b(\vartheta)$ ist auf θ stetig diff'bar mit $b'(\vartheta)=a'(\vartheta)\mathbb{E}_\vartheta[T]$ (Insbesondere existiert der Erwartngswert von T).*

b) *Jede Statistik $S\colon\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ mit existieremden $\mathbb{E}_\vartheta[S]$ ist regulär. Insbesondere sind M und T regulär und $\tau(\vartheta):=\mathbb{E}_\vartheta[T]$ ist stetig diff'bar mit $\tau'(\vartheta)=a'(\vartheta)\cdot\mathrm{Var}_\vartheta[T]\neq 0\forall\vartheta\in\theta$.*

c) *Es gilt $I(\vartheta)=a'(\vartheta)\tau'(\vartheta)\forall\vartheta\in\theta$.*

Wir beweisen die Prop. nach folgenden Korollar

Folgerung 28. *(Existenz von besten Schätzern)*

Für jedes exponentielle Modell $\mathcal{M}$ ist die zugrundeliegende Statistik T für

$$\tau(\vartheta):=\mathbb{E}_\vartheta[T]=\frac{b'(\vartheta)}{a'(\vartheta)}$$

und es gilt $I(\vartheta)=a'(\vartheta)\tau'(\vartheta)$

$$\mathrm{Var}_\vartheta[T]=\frac{\tau'(\vartheta)}{a'(\vartheta)}\forall\vartheta\in\theta.$$

Beweis. *Nach der obigen Prob. 27 ist M und T regulär. Da $\mathrm{Var}_\vartheta[T]=\frac{\tau'(\vartheta)}{a'(\vartheta)}=\underbrace{\frac{\tau'(\vartheta)^2}{I(\vartheta)}}_{\geq\text{Cramèr}-\text{Rao}}$ folgt aus Satz 23 die Behauptung.* □

Beweis. (Von Prop. 27)

Wir nehmen an, dass $a(\vartheta)=\vartheta$ (Da $a'(\vartheta)\neq 0$ folgt die allg. Aussage mit Kettenregel).

(Sonst $\left(\tilde{\vartheta}=a(\vartheta)\Rightarrow\frac{d}{d\vartheta}(\ldots\ldots.)=a'(\vartheta)\frac{d}{d\tilde{\vartheta}}(\ldots\ldots)\right)$)

Sei S in $\mathcal{L}^1$

Sei $u_S(\vartheta):=e^{b(\vartheta)}\mathbb{E}_\vartheta[S]=\int_\mathcal{X}S(x)h(x)e^{\vartheta T(x)}\mathrm{dx}$.

$u_S(\vartheta)$ ist (reell)-analytisch in ϑ, denn für $\vartheta+t\in\theta$ und $a_k=\int_\mathcal{X}\frac{S(x)h(x)T(x)^k}{k!}e^{\vartheta T(x)}\mathrm{dx}$

gilt

$$(*)\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\,|t|^k\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^k}{k!}\int_{\mathcal{X}}|S(x)|h(x)|T(x)|^k e^{\vartheta T(x)}\mathrm{dx}$$

$$\overset{\text{mon. Konv.}}{=\!=\!=\!=}\int_{\mathcal{X}}|S(x)|h(x)e^{\vartheta T(x)}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^k}{k!}|T(x)|^k}_{\exp(|\mathrm{tT}(x)|)}\mathrm{dx}$$

$$=\int_{\mathcal{X}}|S(x)|h(x)\underbrace{e^{\vartheta T(x)+|\mathrm{tT}(x)|}}_{\leq\begin{cases}e^{\vartheta T(x)+\mathrm{tT}(x)} & ,\mathrm{tT}(x)>0\\ e^{\vartheta T(x)-\mathrm{tT}(x)} & ,\mathrm{tT}(x)<0\end{cases}}\mathrm{dx}$$

$$\int_{\mathcal{X}}|S(x)|\underbrace{h(x)e^{(\vartheta+t)T(x)}}_{e^{b(\vartheta)\rho_{\vartheta+t}(x)}}\mathrm{dx}+\int_{\mathcal{X}}|S(x)|\underbrace{h(x)e^{(\vartheta-t)T(x)}}_{e^{b(\vartheta)\rho_{\vartheta-t}(x)}}\mathrm{dx}<\infty$$

Da $S\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P}_{\vartheta\pm 1})$.

$\Rightarrow u_S(\vartheta+t)=\int_{\mathcal{X}}S(x)h(x)e^{(\vartheta+t)T(x)}\mathrm{dx}\overset{(**)}{=\!=\!=}\sum_{k=0}^{\infty}t^k a_k$.

$(**)$ gilt, da $e^{\mathrm{tT}(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}t^k\frac{T(x)^k}{k!}$.

und Summe und Integral vertauscht werden dürfen wegen (*).

Also ist $u_S(\vartheta)$ analytisch und ist seine Taylorreihe, d.h.

$$u_S'(\vartheta)=a_1=\int_{\mathcal{X}}S(x)T(x)h(x)e^{\vartheta T(x)}\mathrm{dx}=e^{b(\vartheta)}\mathbb{E}_\vartheta[\mathrm{ST}]$$

$$u_S''(\vartheta)=a_2=\int_{\mathcal{X}}S(x)T(x)^2h(x)e^{\vartheta T(x)}\mathrm{dx}=e^{b(\vartheta)}\mathbb{E}_\vartheta[\mathrm{ST}^2]$$

<u>Für $S=1$</u>: gilt also $u_1(\vartheta)=e^{b(\vartheta)}$, $u_1'(\vartheta)=e^{b(\vartheta)}\mathbb{E}_\vartheta[T]$, $u_1{}'{}'(\vartheta)=e^{b(\vartheta)}\mathbb{E}_\vartheta[T^2]$.

$\Rightarrow b'(\vartheta)=\frac{d}{d\vartheta}\log u_1(\vartheta)=\frac{u_1'(\vartheta)}{u_1(\vartheta)}=\mathbb{E}_\vartheta[T]=:\tau(\vartheta)$.

$\Rightarrow$a)

b)

$$\tau'(\vartheta)=b''(\vartheta)=\frac{u_1''(\vartheta)}{u_1(\vartheta)}-\left(\frac{u_1'(\vartheta)}{u_1(\vartheta)}\right)^2$$

$$=\mathbb{E}_\vartheta[T^2]-(\mathbb{E}_\vartheta[T])^2=\mathrm{Var}[T]$$

<u>Allgemeine S (Regularität)</u>

$$\frac{d}{d\vartheta}\int_{\mathcal{X}}S(x)\rho(x,\vartheta)\mathrm{dx}=\frac{d}{d\vartheta}\mathbb{E}_\vartheta[S]=\frac{d}{d\vartheta}[e^{-b(\vartheta)}u_S(\vartheta)]$$

$$=(u_S'(\vartheta)-u_S(\vartheta)b'(\vartheta))e^{-b(\vartheta)}=\mathbb{E}_\vartheta[\mathrm{ST}]-\mathbb{E}_\vartheta[S]\underbrace{\mathbb{E}_\vartheta[T]}_{=:\tau(\vartheta)}$$

$$\mathbb{E}_\vartheta\left[S\left(\underbrace{T-\tau(\vartheta)}_{=(a'(\vartheta))U_\vartheta:\text{Satz }23\text{ (ii)}}\right)\right]=\mathbb{E}_\vartheta[\mathrm{SU}_\vartheta]$$

$$=\int_{\mathcal{X}}S(x)\frac{d}{d\vartheta}\rho(x,\vartheta)\mathrm{dx}$$

$\Rightarrow$ S regulär $\Rightarrow\mathcal{M}$ regulär (Vertauschungsregel gilt).

$\Rightarrow$ T regulär.

c) Da $U_\vartheta = T - \tau(\vartheta)$

$\Rightarrow I(\vartheta) = \mathrm{Var}_\vartheta[U_\vartheta] = \mathrm{Var}[T] = \tau'(\vartheta) > 0$ (da T f.s. nicht konstant)

(*) $\mathcal{M}$ regulär:

- θ offen,
- $\rho(x,\vartheta) > 0$ und nach ϑ stetig diff'bar
- $I(\vartheta) > 0$ und Vertauschungsregel □

Beispiel 29. (Binomialverteilung)

$\rho(x,\vartheta) = \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x}$

$T(x) = \frac{x}{n}$ (ML – Schätzer)

$a(\vartheta) = n \log\left(\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\right)$

$b(\vartheta) = -n \ln(1-\vartheta)$

$h(x) = \binom{n}{x}$

$\Rightarrow T$ ist bester Schätzer mit $\mathrm{Var}_\vartheta[T] = \frac{1}{a'(\vartheta)} = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}$ (Folgerung 28)

Bemerkung 30. (Produktmodelle)

Sei $\mathcal{M} = (\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \theta)$ ein exp. Modell bzgl. einer Statistik $T: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. So ist $\mathcal{M}^{\otimes n}$ mit Statistik $T_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T(x_k)$ und T_n ist bester Schätzer für $\tau(\vartheta) := \mathbb{E}_\vartheta[T]$

Beweis. $\rho^{\otimes n}(x,\vartheta) = \prod_{k=1}^n \rho(x,\vartheta)$

$$= \exp(n a(\vartheta) T_n - \mathrm{nb}(\vartheta)) \prod_{k=1}^n h(x_k)$$

und $\mathbb{E}_\vartheta[T_n] = \mathbb{E}_\vartheta[T]$ Aus Folgerung 28 folgt die Behauptung.

□

3.5 Bayes-Schätzer

$\mathcal{M}$ Standartmodell.

- Diesmal ist das Ziel nicht die Minimierung $\mathbb{F}_\vartheta[T]$ für alle ϑ, sondern die Minimierung von dem in ϑ gemittelten quadratischen Fehler.
- Für gegebenes ϑ und Schätzer T von $\tau(\vartheta)$ sei

  $$L(\vartheta, T) \text{ eine } ''\text{Verlustfunktion}''$$

  $$z.B. L(\vartheta, T) = |T(x) - \tau(\vartheta)|^2$$

  Dann ist $R(\vartheta, T) := \mathbb{E}_\vartheta[L(\vartheta, T)]$ das Risiko und wir wollen es minimieren.
- Aus irgendwelchen Daten nehmen wir an, dass die Werte von ϑ nicht unbed. gleichhäufig sind, aber haben eine Verteilungsdichte $a(\vartheta)$ (a priori Verteilung).

Ende Vorlesung 5

Definition 31.

i. Das Bayesrisiko des Schätzers T bzgl. α und L ist gegeben durch

$$r(\alpha,T) := \int_\theta \alpha(\vartheta) R(\vartheta,T) d\vartheta = \int_\theta \int_{\mathcal{X}} \alpha(\vartheta)\rho(x,\vartheta) L(\vartheta, T(x)) \mathrm{d}x\mathrm{d}\vartheta$$

ii. Ein Schätzer T heißt Bayes-Schätzer von $\tau(\vartheta)$ bzgl. α und L falls für alle anderen Schätzer S von $\tau(\vartheta)$

$$r(\alpha,T) \le r(\alpha,S).$$

Man kann $\alpha(\vartheta)\rho(x,\vartheta)$ so interpretieren

a) zunächst zieht man ϑ gemäß der Dichte α und dann zieht man x gemäß der Likelihoodfunktion $\rho(x,\vartheta)$.

b) Wenn x gezogen ist, verändert dies die Information über α. Statt $\alpha(\vartheta)$ haben wir $\rho(x,\vartheta)\alpha(\vartheta)$.

Man definiert „a posteriori-Dichte“-Dichte

$$\Pi_x(\vartheta) := \frac{\alpha(\vartheta)\rho(x,\vartheta)}{\underbrace{\int_\theta \alpha(\tilde\vartheta)\rho(x,\tilde\vartheta)d\tilde\vartheta}_{=:\rho_\alpha}}$$

(„bedingte Verteilung der Parameter auf Beobachtung x“)

Satz 32. *Für den Spezialfall $L(\vartheta,T) = |T(x)-\tau(\vartheta)|^2$ ist der Bayes-Schätzer T von $\tau(\vartheta)$ mit $\mathbb{E}_\alpha[\tau^2] < \infty$ bzgl. α ist gegeben durch*

$$T(x) := \mathbb{E}_{\Pi_x}[\tau] = \int_\theta \tau(\vartheta)\Pi_x(\vartheta)d\vartheta \quad \forall x\, \rho_a\, f.s.$$

Beweis. *Sei* $r(\alpha,S) = \int_\theta\int_{\mathcal{X}} \alpha(\vartheta)\rho(x,\vartheta)|S(x)-\tau(\vartheta)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\vartheta$

$$\Rightarrow r(\alpha,S) - r(\alpha,T) \overset{\text{Fubini}}{=\!=} \int_{\mathcal{X}}\int_\theta \rho_\alpha(x)\Pi_x(\vartheta)[|S(x)-\tau(\vartheta)|^2 - (T(x)-\tau(\vartheta))^2]d\vartheta\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\mathcal{X}}\int_\theta \rho_\alpha(x)\Pi_x(\vartheta)[S(x)^2 - 2S(x)\tau(\vartheta) - T(x)^2 + 2T(\vartheta)\tau(\vartheta)]d\vartheta\mathrm{d}x$$

Da $\int \Pi_x d\vartheta = 1$

$$\overset{\text{def.}T}{=\!=} \int_{\mathcal{X}} \rho_\alpha(x)\left[\underbrace{S(x)^2 - 2S(x)T(x) - T(x)^2}_{(S(x)-T(x))^2}\right]d\vartheta\mathrm{d}x$$

$\Rightarrow$ *T ist Bayes Schätzer. Gleichheit gilt genau dann wenn $S(x) = T(x)$ ρ_α f.s.*

□

Beispiel 33. (Auto Versicherung)

$\vartheta =$ Schadenshäufigkeit pro Jahr.

Anfangsbewertung $U_{[0,1]} \Rightarrow \alpha(\vartheta) = 1$ auf $[0,1]$.

Nach n Jahren hat der Kunde x Schaden produziert.

$\Rightarrow \Pi_x(\vartheta) = \frac{1 \cdot \mathrm{Bin}_{n,\vartheta}(x)}{\text{Normalisierung}} = \frac{\binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}}{\int_0^1 \binom{n}{x} \underbrace{\tilde{\vartheta}^x(1-\vartheta)^{n-x}d\tilde{\vartheta}}_{=\text{Beta Fkt. mit dem} \int}} = \frac{\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}}{B(x+1,n-x+1)}$

Schätzer für $\tau(\vartheta) = \vartheta$

$$T(x) = \int_0^1 \frac{\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}}{B(x+1,n-x+1)} \vartheta d\vartheta = \frac{x+1}{n+2}.$$

(Aus Beispiel ...)

4 Konfidenzbereiche

Beispiel 34. Betrachten wir das Binomialmodell

$\mathcal{X} = \{0,\ldots,n\} = \#\text{Erfolge in } n \text{ unab. Versuchen}$

$\mathbb{P}_\vartheta = \mathrm{Bin}_{n,\vartheta}$

$\Rightarrow$ Likelihoodfkt. $= \rho(x,\vartheta) = \binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}$

$\Rightarrow$ Wir haben gesehen, dass ML Schätzer ist gegeben durch $T(x) = \frac{x}{n}$.

Es gibt zwei Personen, Hans und Otto, die die folgenden Ergebnisse bekommen in n=100 Messungen:

Hans: 40 Mal Erfolg $\Rightarrow$Schätzung $T_H = 0.4$

Otto: 55 Mal Efolg $\Rightarrow$Schätzung $T_H = 0.55$

Frage: Wer hat Recht ? Keiner !

Was dann ? Um seriöse Aussagen zu machen, müssen wir Abweichungen zulassen.

z.B. Hans sagt „Mit W'keit 0.9 ist $\vartheta \in [0.32; 0.49]$"

Otto sagt „Mit W'keit 0.9 ist $\vartheta \in [0.46; 0.64]$"

Frage: Wie kommen die beiden auf ihre Aussagen?

Definition 35. *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \theta))$ ein stat. Modell, Σ eine bel. Menge, $\tau : \theta \to \Sigma$ eine unbekannte Größe und $0 < \alpha < 1$.*

Eine Abbildung

$$C : \mathcal{X} \to \mathcal{P}(\Sigma)$$

$$x \mapsto C(x) \subset \Sigma$$

heißt Konfidenzbereich für τ zum Irrtumsniveau α, wenn

$$\inf_{\vartheta \in \theta} \mathbb{P}_\vartheta[x \in X : \tau(\vartheta) \in C(x)] \geq 1 - \alpha.$$

Falls $\Sigma = \mathbb{R}$ und jedes $C(x)$ *ein Intervall ist, dann spricht man von Konfidenzintervall.*

Bemerkung 36.

i. Wir wollen $C(x)$ möglichst klein, aber auch α möglichst klein. Diese zwei Wünsche konkurieren. Je kleiner $\alpha \Rightarrow$ desto größer wird $C(x)$.

   $\alpha = 0 \Rightarrow C(x) = \Sigma$

   $\alpha = 1 \Rightarrow C(x) = \text{ein Punkt}$

ii. Mögliches Missverständnis!

   $\vartheta \in [0.32, 0.49] = C(0.4)$ mit $\alpha = 0.1$. Das bedeutet nicht dass ϑ in 90% der Fälle in dem Interval liegt: ϑ ist unbekannt, aber nicht zufällig.

   Das bedeutet, dass in 90% der Beobachtungen (also aller x) ist das $\vartheta \in C(x)$.

Konstruktion von Konfidenzbereichen

Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta: \vartheta \in \theta))$ ein stat. Modell. Nehmen wir den Fall $\tau(\vartheta) = \vartheta \Rightarrow \Sigma = \theta$.

Für jedes $\vartheta \in \theta$, sei C_ϑ eine Untermenge s.d.

$$\mathbb{P}_\vartheta[C_\vartheta] \geqslant 1 - \alpha$$

und C_ϑ so klein wie möglich. (z.B. Standartmodell)

$C = \{(x, \vartheta) \in \mathcal{X} \times \theta : x \in C_\vartheta\}$

Um für eine geg. $x \in \mathcal{X}$ $C(x)$ zu bestimmen, muss man den vertikalen Schnitt betrachten, d.h.

$$C(x) = \{\vartheta \in \theta : x \in C_\vartheta\}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}_\vartheta[x \in \mathcal{X} : \vartheta \in C(x)] = \mathbb{P}_\vartheta[x \in \mathcal{X} : \vartheta \in C_\vartheta] \geq 1 - \alpha.$

$\Rightarrow C$ ist Konfidenzbereich für ϑ zum Irrtumniveau α.

Beispiel 37. (Schätzung mittlere Lebenszeit von radioaktiven Zerfall)

$\mathcal{M} = \{\mathbb{R}_+ \mathcal{B}, \mathbb{P}_\vartheta\}$ mit $\mathbb{P}_\vartheta = \underbrace{\frac{1}{\vartheta}}_{\text{Ereignisrate}, \vartheta = \text{mittlere Lebensdauer}} e^{-\frac{x}{\vartheta}}, x \geq 0$

Sei $x > 0$ Messung.

Für geg. ϑ suchen wir C_ϑ *s.d.*

$$\mathbb{P}_\vartheta[C_\vartheta] \geq 1 - \alpha$$

$$\alpha = \int_{x^*}^{\infty} \frac{1}{\vartheta} e^{-x/\vartheta} \mathrm{dx}$$

$$\Rightarrow x^* = -\vartheta \log \alpha$$

$\Rightarrow C_\vartheta = [0, -\vartheta \log \alpha]$

$\Rightarrow C(x) = \{\vartheta : x \in C_\vartheta\}.$

$x \in C_\vartheta \Rightarrow x = -\vartheta \log\alpha \Rightarrow \vartheta = -\frac{x}{\log\alpha}$

$C(x) = \left[-\frac{x}{\log\alpha}, \infty\right)$

Ende Vorlesung 6

Wiederholung des Beispieles der Bayesschätzer

Beispiel 38. (Auto Versicherung, zweiter Versuch)

Neukunde hat $\vartheta \in [0,1]$ W-keit mindestens einen Schaden pro Jahr zu produzieren (unbekannt).

Vorbewertung (a priori) des Risikos ist $\mathcal{U}_{[0,1]} \Rightarrow \alpha(\vartheta) = 1$ auf $[0,1]$.

Nach n Jahren hat der Kunde x Schaden produziert.

Hier steht was anderes??

Beispiel 39. Beispiel 37

Jetzt machen wir $n \geq 2$ unabhängige Messungen und sei $x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ die mittlere Lebenszeit der Messungen (empirisch).

Dann wegen $\rho_\vartheta(x) = \gamma_{\frac{1}{\vartheta},1}(x)$ (Gamma-Verteilung)

$$\gamma_{b,p}(x) = \begin{cases} \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\mathrm{bx}} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\gamma_{b,r}(x) * \gamma_{b,s}(x) = \gamma_{b,r+s}(x)$ (Faltungshalbgruppe) haben wir:

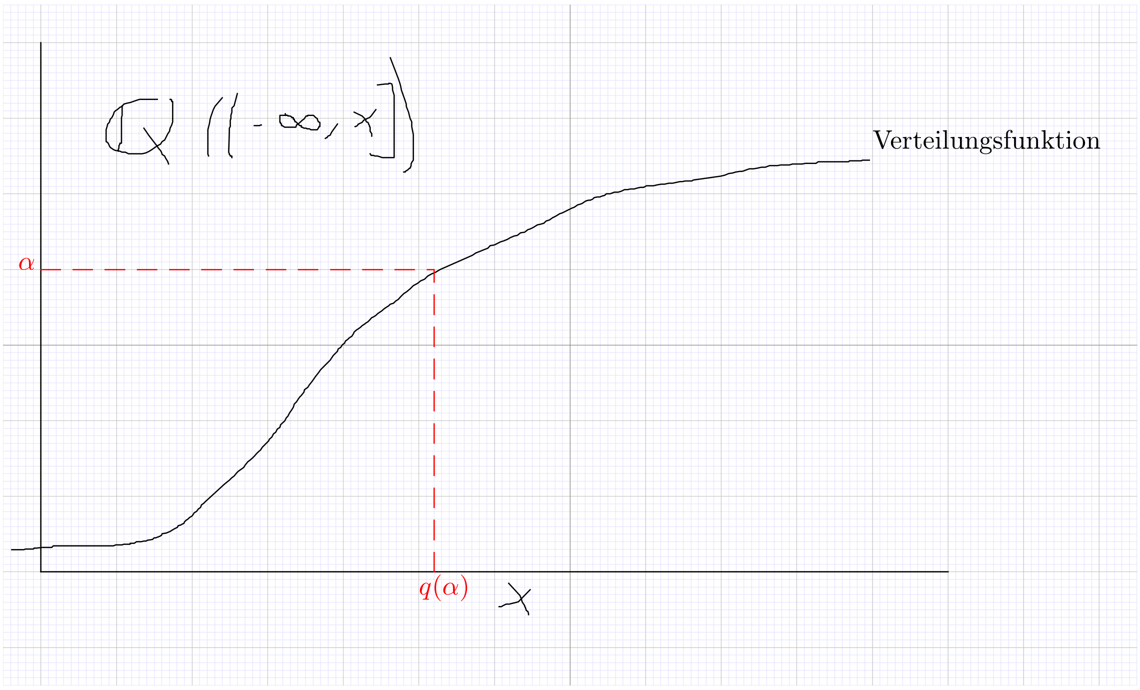
$$\rho_\vartheta^{(n)}(X) = \gamma_{\frac{1}{\vartheta},n}(x) = \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^{n-1} \frac{e^{-x/\vartheta}}{(n-1)!} \frac{1}{\vartheta}, x > 0.$$

Für $n \geq 2$ haben wir eine obere Schranke. Nach dem finden des Konfidenzintervalles durch n teilen.

Definition 40. *Sei $\mathbb{Q}$ ein W.maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $0 < \alpha < 1$. Jede Zahl $q \in \mathbb{R}$ mit*

$$\mathbb{Q}[(-\infty, q]] \geq \alpha \ \textit{und} \ \mathbb{Q}[[q, \infty)] \geq 1 - \alpha$$

ist ein α-Quantiel von $\mathbb{Q}$. Ein $\frac{1}{2}$-Quantiel heißt Median. Ein (1-α)-Quantil heißt α-Fraktil. Ein $\frac{1}{4}$-Quantil heißt unteres Quartiel. Ein $\frac{3}{4}$-Quantil heißt oberes Quartiel.



Im abs. stetigen Fall $\mathbb{Q}[(-\infty, q]] = \alpha = \int_{-\infty}^{q} \rho(x)\mathrm{d}x$. Wenn Dichte $\rho(x) > 0 \Rightarrow$ eindeutig.

Anwendung: Konfidenzintervalle für den Mittelwert im Gauß'schen Produktmodell. Sei das Modell $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \theta)) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{N}_{m,v}^{\otimes n})$

Gesucht: Konfidenzintervall für m:

Für jedes $m \in \mathbb{R}$ wird Menge C_m gesucht, s.d. $\mathcal{N}_{m,v}^{\otimes n}(C_m) \geq 1 - \alpha$ und dann $C(x) = \{m \in \mathbb{R} : x \in C_m\}$.

Sei für jedes $m \in \mathbb{R}$ die Statistik

$$T_m := \frac{M - m}{\sqrt{V^*/n}}$$

wobei:

$$M = \frac{1}{n} \sum x_k, V^* = \frac{1}{n-1} \sum (x_k - M)^2.$$

Wir behaupten: Dann hängt die Verteilung

$$Q := \mathcal{N}_{m,v}^{\otimes n} \circ T_m^{-1}$$

nicht von (m, v) ab. ((Q,T_m) ist ein Pivot für m).

Beweis. Sei $\mathcal{S}_{m,v} := \left(\frac{X_k - m}{\sqrt{v}}\right)_{k=1,\ldots,m}$. Dann, da $X_k \sim m + \sqrt{v} Z_k$, $Z_k \sim \mathcal{N}(0,1)$x

$$\mathcal{N}_{m,v}^{\otimes n} \circ \mathcal{S}_{m,v}^{-1} = \mathcal{N}_{0,1}^{\otimes n}$$

Dazu $(M \circ \mathcal{S}_{m,v})(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - m}{\sqrt{v}} = \frac{M - m}{\sqrt{v}}$

$$(M \circ \mathcal{S}_{m,v})(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{X_k - m}{\sqrt{v}} - \frac{M - m}{\sqrt{v}}\right)^2 = V^*/v$$

$\Rightarrow (T_0 \circ \mathcal{S}_{m,v})(x) = \frac{M - m}{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{V^*/v \cdot n}} = T_m$.

$\Rightarrow$ Deshalb

$$\mathcal{N}_{m,v}^{\otimes n} \circ T_m^{-1} = \mathcal{N}_{m,v}^{\otimes n} \circ S_{m,v}^{-1} \circ T_0^{-1} = \mathcal{N}_{0,1}^{\otimes n} \circ T_0^{-1} =: Q$$

Welche Verteilung hat Q?

Die Student-t-Verteilung mit (n-1)-Freiheitsgraden t_{n-1}:

Für $X, Y_1, \ldots, Y_n$ unabh. $N_{0,1}$-Z.V.

$\frac{\mathrm{X}}{\sqrt{\frac{1}{\mathrm{n}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}_{\mathrm{Chi-Quadrat} := \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)}}}$ ist t_n-verteilt.

$\square$

Ende Vorlesung 7

Für gegebenes α, sei $-x^*$, das $\frac{\alpha}{2}$-Quantil (wegen Symmetrie ist x^* das $\frac{\alpha}{2}$-Fraktil).

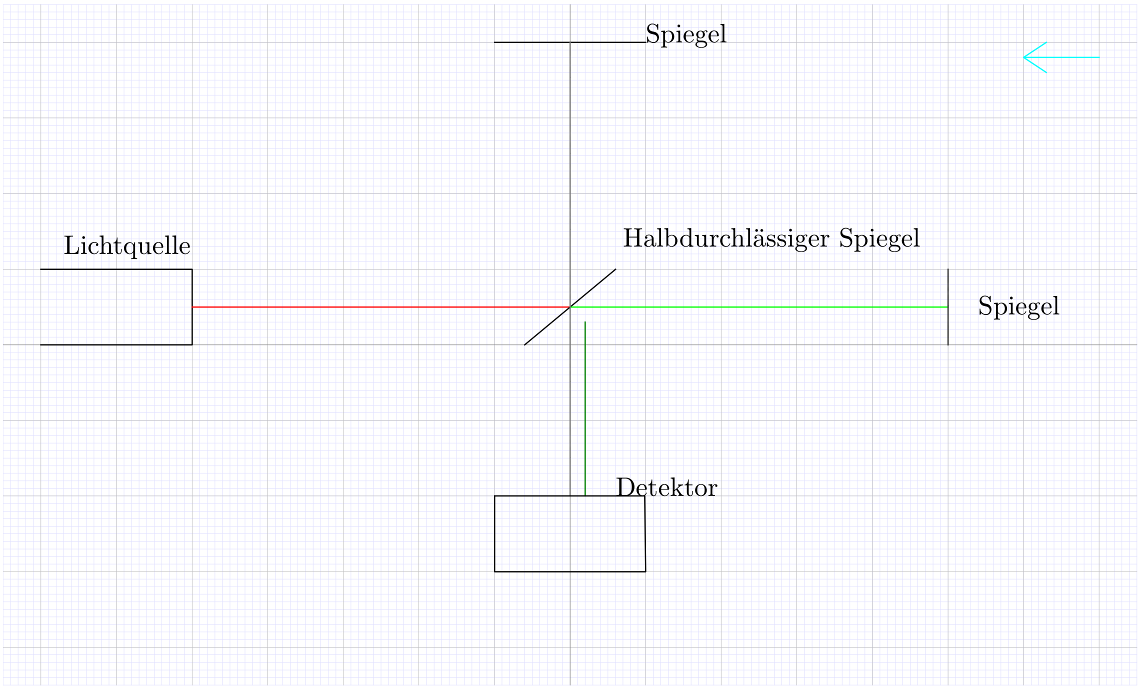
Setzen wir $C_m = T_m^{-1}((-x^*, x^*))$, denn

$$\mathcal{N}_{m,v}^{\otimes n}(C_m) = Q((-x^*, x^*)) \geq 1 - \alpha$$

für alle m, v.

Satz 41. *(Konfidenzintervall für den Mittelwert im Gaußmodell)*
Sei das n-Produktmodell mit unbekanntem Erwartungswert m und unbekannter Varianz v. Sei $x^* := F_Q^{-1}(1 - \alpha/2)$, mit $Q \sim t_{n-1}$ $(F_Q(x) = [(-\infty, x])$).
$\Rightarrow C(x) = \left(M - x^* \sqrt{V^*/n}, M - x^* \sqrt{V^*/n}\right)$ ein Konfidenzintervall für m zum Irrtumsniveau α.

Anwendung: (Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit von Michelson und Morely)
Im Jahr 1879 hat Michelson 5 mal eine Reihe von 20 Messungen durchgeführt zur Bestimmung der Lichgeschwindigkeit.



Annahme: Messungen sind Normalverteilt mit unbekannten m, v.

Aufgabe: Wie kann man für jede Reihe $(x_{k,1}, \ldots, x_{k,20}), k = 1, \ldots, 5$ ein Konfidenzintervall für m zum Irrtumsniveau $\alpha = 0.02$ bestimmen?

Lösung: Anwenden des Satzes:

1. $x^* = (1 - \alpha/2) -$ Quantil von t_{n-1} mit $n = 20$.
   ≈ 2.54

2. Berechnen $M(X_{k,1}, \ldots, X_{k,20}) = \begin{cases} 299909\left[\frac{\text{km}}{s}\right] \\ 299856\left[\frac{\text{km}}{s}\right] \\ 299845\left[\frac{\text{km}}{s}\right] \\ 299821\left[\frac{\text{km}}{s}\right] \\ 299832\left[\frac{\text{km}}{s}\right] \end{cases}$

3. Berechnen von $\sqrt{V^*(X_{k,1},\ldots,X_{k,20})} = \begin{cases} 102\left[\frac{\text{km}}{s}\right] \\ 60\left[\frac{\text{km}}{s}\right] \\ 77\left[\frac{\text{km}}{s}\right] \\ 59\left[\frac{\text{km}}{s}\right] \\ 53\left[\frac{\text{km}}{s}\right] \end{cases}$

$$\Rightarrow C(X_{k,1},\ldots,X_{k,20}) = \begin{cases} (299851,\ 299966) \\ (299821,\ 299890) \\ (299801,\ 299888) \\ (299787,\ 299854) \\ (299802,\ 299862) \end{cases}$$

Aufgabe 2) Bestimmen von Konfidenzintervall mit $\alpha = 0.02$ mit allen Daten.

$x^* = (1-\alpha/2)$-Quantil von $t_4 \approx 2.36$

$M_{\text{alle}} = 299852\,\frac{\text{km}}{s}$

$\sqrt{V^*_{\text{alle}}} = 34\frac{\text{km}}{s}$

$\Rightarrow C(\text{alle}) = (299816, 299888)$

Tatsächlich: 299792

<u>Konfidenzintervalle im Binomialmodell</u>

Sei das Binomialmodell $\mathcal{X} = \{0,\ldots,n\}, \mathbb{P}_\vartheta = \text{Bin}(n,\vartheta), \vartheta \in (0,1)$.

<u>Ges.:</u> Konfidenzintervall für ϑ

<u>3 Methoden:</u>

1. Tchebyschev:

   Der beste Schätzer für ϑ ist $T(x) = \frac{x}{n}$.

   Ansatz $C(x) = \left(\frac{x}{n} - \varepsilon, \frac{x}{n} + \varepsilon\right)$ mit $\varepsilon > 0$. Die Bedingung ist

   $$\mathbb{P}_\vartheta\left[x\colon \left|\frac{x}{n} - \vartheta\right|\right]$$

   $$\mathbb{P}_\vartheta\left[\left|X - n\vartheta\right| \geq \varepsilon n\right] \leq \frac{\text{Var}_\vartheta[x]}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{n\vartheta(1-\vartheta)}{n^2\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \leq \alpha$$

   Für $\varepsilon \geq \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}}$

   $\alpha = 0.05, n = 1000 \Rightarrow \varepsilon \geq 0.07$

2. Normalapproximation

   $\frac{x}{n} \cong \mathcal{N}\left(\vartheta, \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}\right)$ für $n \gg 1$

   $$\mathbb{P}_\vartheta\left[\left|\frac{x}{n} - \vartheta\right| \geq \varepsilon\right] = \mathbb{P}_\vartheta\left[\left|\underbrace{\frac{x - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}}_{\approx\sim\mathcal{N}(0,1)}\right| \geq \varepsilon\sqrt{\frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)}}\right]$$

   $$\approx \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)}}\right) + 1 - \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)}}\right) \overset{\text{symm.}}{=\!=} 2\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)}}\right) \leq \alpha$$

$\Rightarrow \varepsilon_\vartheta \geq -\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}\Phi^{-1}(\alpha/2) = \sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha/2) = \sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}\left(\frac{\alpha}{2} - \text{Fraktil von} \,\mathcal{N}(0,1)\right).$

Da $\vartheta(1-\vartheta) \leq \frac{1}{4}$ nehmen wir an

$$\varepsilon \geq \max_\vartheta \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{\sqrt{4n}}\Phi^{-1}(1-\alpha/2).$$

Für $\alpha = 0.05, n = 1000 \Rightarrow \Phi^{-1}(1-\alpha/2) = 1.96$

$\Rightarrow \varepsilon \geq 0.03$

3. Verwendung von Quantielen

   Lemma: Sei $n \geq 1, \mathcal{X} = \{0, \ldots, n\}$

   a) $\forall \vartheta \in (0,1)\colon x \mapsto \mathrm{Bin}(n,\vartheta)(\{x\})$ strikt wachsend auf $\{0, \ldots, (n+1)\vartheta - 1\}$

      danach stritk fallend $\Rightarrow$ x=(n+1)ϑ

   b) $\forall x \neq 0$ $\vartheta \mapsto \mathrm{Bin}(n,\vartheta)[\{x, \ldots, n\}]$ auf $[0,1]$ stetig und strikt wachsend. Und es gilt

$$\mathrm{Bin}(n,\vartheta)(\{x, \ldots, n\}) = \underbrace{\beta_{x,n-x+1}}_{f_{p,q}(x) = \frac{1}{B(p,q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1}}([0,\vartheta])$$

Das benutzen wir nun als 3. Methode.

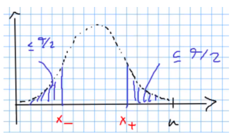


Abbildung 1.

Wir schneiden für jedes $\vartheta \in (0,1)$ $\alpha/2$ von oberen/unterem Teil der Verteilung ab.

$C_\vartheta = \{x_-(\vartheta), \ldots, x_+(\vartheta)\}$

wobei $x_-(\vartheta) = \max\{x \in \mathcal{X}\colon \mathrm{Bin}_{n,\vartheta}(\{0, \ldots, x-1\}) \leqslant \alpha/2\}$

$x_+(\vartheta) = \min\{x \in \mathcal{X}\colon \mathrm{Bin}_{n,\vartheta}(\{x+1, \ldots, n\}) \leqslant \alpha/2\}$

Und C(x)=$\{\vartheta\colon x \in C_\vartheta\}$ zu finden müssen wir $x \in C_\vartheta$ nach ϑ auflösen.

$x \leqslant x_+(\vartheta) \Leftrightarrow \mathrm{Bin}_{n,\vartheta}(\{x, \ldots, n\}) \geq \alpha/2$

$= \beta_{x,n-x+1}([0,\vartheta])$

$x \geq x_-(\vartheta) \Leftrightarrow \mathrm{Bin}_{n,\vartheta}(\{0, \ldots, x\}) \geq \alpha/2$

$= 1 - \beta_{x,n-x+1}([0,\vartheta])$

d.h.$\beta_{x,n-x+1}([0,\vartheta]) > \alpha/2$ und $\beta_{x,n-x+1}([0,\vartheta]) < 1 - \alpha/2$

Seien ϑ_-, ϑ_+ $\alpha/2$ Quantil/Fractile von $\beta_{x,n-x+1}$ (eindeutig wegen Lemma b))

$C(x) = (\vartheta_-, \vartheta_+)$ ist Konfidenzintervall für α, weil

$$\mathbb{P}_\vartheta[x\colon \vartheta \in C(x)] = \mathbb{P}_\vartheta[x\colon \vartheta_-(x) < \vartheta < \vartheta_+(\vartheta)] = \mathbb{P}_\vartheta[x\colon x_-(\vartheta) < x < x_+(\vartheta)]$$

$\geq 1 - \alpha.$

Ende Vorlesung 8

Satz 42. *Im Binomialmodell,* $\mathcal{X} = \{0, \ldots, n\}, \mathbb{P}_\vartheta = \mathrm{Bin}_{n,\vartheta}, 0 < \vartheta < 1$ *ist*

$$C(x) = (\vartheta_-(x), \vartheta_+(x))$$

wobei

$$\vartheta_-(x) = \alpha/2 \quad \text{Quantil von } \beta_{x,n-x+1}$$

$$\vartheta_+(x) = \alpha/2 \quad \text{Fraktil von } \beta_{x+1,n-x}$$

ein Konfidenzintervall fpr ϑ *zum Irrtumsniveau* α*. Für* $\alpha = 0.05$ *und* $n = 1000$*,* $\varepsilon(x) = \frac{\vartheta_+(x) - \vartheta_-(x)}{2}$

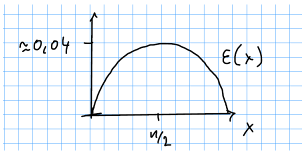


Abbildung 2.

Beweis. (voherigem Lemma)

a)

Sei $x \geqslant 1$

$$\frac{\mathrm{Bin}_{n,\vartheta}(\{x\})}{\mathrm{Bin}_{n,\vartheta}(\{x-1\})} = \frac{\binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}}{\binom{n}{x-1}\vartheta^{x-1}(1-\vartheta)^{n-x+1}} = \frac{(n-x+1)\vartheta}{x(1-\vartheta)} > 1 \Leftrightarrow x < (n+1)\vartheta$$

b)

Seien $U_1, \ldots, U_n$ u.i.v. mit $\mathcal{U}_{[0,1]}$.

Dann $S_\vartheta := \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{[0,\vartheta]}(U_k)$ ist binomialverteilt $\mathrm{Bin}(n, \vartheta)$.

$\mathrm{Bin}(n,\vartheta)(\{x, \ldots, n\}) = \underbrace{\mathbb{P}[S_\vartheta \geqslant x]}_{\text{mind.}\, x \quad \text{der}\, U_i \quad \text{liegen} \quad \text{in}\, [0,\vartheta]}$

Seien $U_{(1)} < U_{(2)} < U_{(3)} < \cdots < U_{(n)}$ mit $\{U_1, \ldots, U_n\} = \{U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}[S_\vartheta \geqslant x] = \mathbb{P}[U_{(x)} \leqslant \vartheta]$

$$= n! \int_0^1 \ldots \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,\vartheta]}(t_x) \mathbb{1}_{\{t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}} \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n$$

$$= n! \int_0^\vartheta \left(\int_0^{t_x} \ldots \int_0^{t_x} \mathbb{1}_{\{t_1 < t_2 < \cdots < t_x\}} \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_{x-1} \right) \left(\int_{t_x}^1 \ldots \int_{t_x}^1 \mathbb{1}_{\{t_x < \cdots < t_x\}} \mathrm{d}t_{x+1} \ldots \mathrm{d}t_n \right) \mathrm{d}t_x$$

□

Ende Vorlesung 9

---

5 Normalverteilung, χ^2,t,F-Verteilung

Lemma 43. *Sei* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* $\mathbb{P}$ *ein W'maß auf* $(X, B(X))$ *mit Dichte* ρ *bzgl.* $\mathcal{L}$*.*

Sei $T: X \to Y$ ($Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) *ein Diffeomorphismus (d.h. stetig differenziebare Bijektion, stetig differenzierbare Umkehrabbildung).*

Dann hat $\mathbb{P}\circ T^{-1}$ die Dichte

$$\rho_T(y)=\rho(T^{-1}(y))|\det \mathrm{DT}^{-1}(y)|\,\forall y\in Y$$

Beweis. $\mathbb{P}\circ T^{-1}(A)=\int_{T^{-1}(A)}\rho(x)\mathrm{dx} \overset{\text{Trafo.}}{=\!=\!=} \int_A \rho(T^{-1}(y))|\det \mathrm{DT}^{-1}(y)|\,\mathrm{dy}$ □

Satz 44. *Seien $X_1,\ldots,X_n$ u.i.v. $\sim\mathcal{N}(0,1)$ und $X=(X_1,\ldots,X_n)^t$.*
Sei $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre (det $B\neq 0$) Matrix und $m\in\mathbb{R}^n$. Dann $Y=\mathrm{BX}+m$ hat die Dichte

$$\phi_{m,c}(y)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}|\det c|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(y-m)^t C^{-1}(y-m)\right)$$

wobei $C=B\cdot B^t$,
und $\mathbb{E}[Y_k]=m_k, \mathrm{Cov}[Y_k,Y_l]=C_{k,l}\quad 1\le k,l\leqslant n$.

Bemerkung 45. *C ist symmetrisch (und pos. definit) $\Rightarrow$ diagonalisierbar.*
Notation $\forall n\times n$ pos. def. symmetrisch Matrix C und $m\in\mathbb{R}^n$ schreiben wir $\mathcal{N}_n(m,C)$ für W-Maße auf $\mathbb{R}^n$ mit Dichtefunktion $\Phi_{m,c}(x)$.

Beweis. *Die Dichte von X ist*

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x_i^2}=\frac{1}{2\pi}^{n/2}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2}=\frac{1}{2\pi}^{n/2}e^{-\frac{1}{2}x^T x}=\Phi_{0,E}$$

Lemma 43 $\Rightarrow$ Y hat Dichte

$$\Phi_{0,E}(B^{-1}(y-m))|\det B^{-1}|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\frac{1}{\sqrt{|\det C|}}\exp\left(-\frac{1}{2}(y-m)^T C^{-1}(y-m)\right)$$

$$\mathbb{E}[Y_i]=\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n B_{i,k}X_k+m_i\right]=\sum B_{i,k}\underbrace{\mathbb{E}[X_k]}_{=0}+m_i=m_i$$

$$\mathrm{Cov}[Y_k,Y_l]=\sum_{i,j=1}^n B_{k,i}B_{l,j}\underbrace{\mathrm{Cov}[X_i,X_j]}_{=\delta_{i,j}}=\sum_{i=1}^n B_{k,i}B_{l,i}=C_{k,l}$$

□

Ein paar Eigenschaften:

1. $\mathcal{N}(0,E)\circ R^{-1}=\mathcal{N}(0,E)$ $(Y=\mathrm{RX})$ für R orthogonal (d.h. $R^{-1}=R^T\Rightarrow|\det R|=1$)
   Drehungen + Drehspiegelungen.
2. Sei $X\sim\mathcal{N}(m,C)$, $A\in\mathbb{R}^{k\times n}$ eine Matrix mit Rang k und $a\in\mathbb{R}^k$
   $\Rightarrow Y=\mathrm{Ax}+a\sim\mathcal{N}_k(\mathrm{Am}+a,\mathrm{ACA}^t)$

Besondere Verteilungen:

Γ-Verteilung

β-Verteilung

Chi-Quadrat ...

Satz 46.

$X \sim N(0,1) \Rightarrow X^2 \sim \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$

Beweis: Siehe Blatt 4 Aufgabe 1.

Satz 47. *Seien* $\alpha, r, d > 0$

$X \sim \Gamma_{\alpha,r}, Y \sim \Gamma_{\alpha,s}$

$\Rightarrow X + y \sim \Gamma_{\alpha,r+s}$

$\frac{X}{X+y} \sim \beta_{r,s}$

und sind unabhängig. Beweis: Übung

Folgerung 48. $\Gamma_{\alpha,r} * \Gamma_{\alpha,s} = \Gamma_{\alpha,r+s}$ *(Faltungshalbgruppe)*

Aus Satz 46 + Korollar48 folgt sofort

Satz 49. *(Chi-Quadrat Verteilung)*

Seien $X_1, \ldots, X_n$ *u.i.v.*$\sim\mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow Y = \sum X_k^2 \sim \Gamma_{1/2,n/2} =: \chi_n^2$

Chi-Quadrat Vert. mit n Freiheitsgraden

$\gamma_{1/2,n/2}(x) = \frac{x^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} e^{-x/2}$

Satz 50. *(Fisher-Verteilung)*

Seien $X_1, \ldots X_m$, $Y_1, \ldots, Y_n$ *u.i.v.* $\mathcal{N}(0,1)$

Dann hat $F_{m,n} := \frac{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m X_k^2}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k^2}$ *Dichte*

$$f_{m,n}(x) = \frac{m^{m/2} \cdot n^{n/2}}{\underbrace{B(m/2,n/2)}_{\int_0^1 x^{m/2-1}(1-x)^{n/2-1}\mathrm{dx}}} \frac{x^{m/2-1}}{(n+\mathrm{mx})^{(m+\mathrm{xn})/2}}$$

Beweis. $X = \sum_{k=1}^m X_k^2 \sim \Gamma_{1/2,m/2}$ *Satz 49*

$Y = \sum_{k=1}^n Y_k^2 \sim \Gamma_{1/2,n/2}$ *Satz 49*

$\Rightarrow \frac{X}{X+Y} \sim \beta_{m/2}, n/2$ Satz 47

Außerdem $F{:}\, m, n = \frac{n}{m}\frac{X}{Y} = \frac{n}{m}\frac{Z}{1-Z} = T(Z)$

$T(x) = \frac{n}{m}\frac{x}{1-x}{:}\, (0,1) \rightarrow (0,\infty)$

$T^{-1}(y) = \frac{\mathrm{my}}{n+\mathrm{my}}$

Lemma 43

$$\Rightarrow f_{m,n} = \beta_{m/2,n/2}\Big(\frac{\mathrm{my}}{n+\mathrm{my}}\Big) \cdot \frac{\mathrm{mn}}{(n+\mathrm{my})^2}$$

$$= \frac{1}{B(m/2,n/2)}\left(\frac{\mathrm{my}}{n+\mathrm{my}}^{m/2-1}\left(\frac{n}{n+\mathrm{my}}\right)^{n/2-1}\frac{\mathrm{mn}}{(n+\mathrm{my})^2}\right) \qquad \square$$

Definition 51. *Die Verteilung $F_{m,n}$ auf $(0,\infty)$ mit Dichtefunktion $f_{m,n}$ heißt Fisher-Verteilung mit m und n Freiheitsgraden.*

Bemerkung 52. $\forall m,n \in \mathbb{N}\ F_{m,n} = \beta_{m/2}, n/2 \circ T^{-1}$

$$T(x) = \frac{m}{n}\frac{x}{1-x}, d.h.$$

$F_{m,n}((0,c]) = \beta_{m/2,n/2}\Big(\Big[0, \frac{\mathrm{mc}}{n+\mathrm{mc}}\Big)\Big)$

Satz 53. *(Student Verteilung)*

Seien $X, Y_1, \ldots, Y_n$ u.i.v. $\mathcal{N}_{0,1}$. Dann hat

$$T := \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k^2}}$$

Dichte

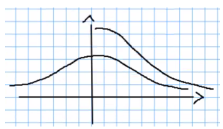
$$\tau_n(x) = \frac{1}{(1+\frac{x2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{n}B(1/2,n/2)}$$

Beweis. *Blatt 4, Aufgabe 1, oder*

$T^2 \sim F_{1,n} \xRightarrow{\text{Lemma43}} |T| = \sqrt{|T|}$ *hat Dichte*

$$f_{1,n}(y^2)2y$$

T und $-T$ haben gleiche Verteilung (wegen Symmetrie von $\mathcal{N}_{0,1}$)



$\Rightarrow$ *T hat Dichte $f_{1,n}(y^2)|y|$*

Abbildung 3.

$|y| f_{1,n}(y^2) = \frac{n^{n/2}}{B(1/2,n/2)}\frac{|y|^{2(1/2)-1}}{(n+y^2)^{\frac{(n+1)}{2}}}|y|$

$$= \frac{|y|^{-1}}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{1}{2}}}|y|\frac{1}{B(1/2,n/2)} = \tau_n(y)$$

$\square$

Definition 54. *Das W-Maß t_n mit Dichte τ_n heißt Student-t-Verteilung mit n Freiheitsgraden.*

Satz 55. *(Student/Gosset 1908)*

Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, (\mathcal{N}_{m,v}^{\otimes n}, m \in \mathbb{R}, v > 0))$

Dann gilt

i. *M und V^* sind unabhängig*

ii. $M \sim \mathcal{N}_{m,v/n}, \frac{n-1}{n} V^* \sim \chi^2_{n-1}$

iii. $\sqrt{n}(M-m)/\sqrt{V^*} \sim t_{n-1}$

Beweis. *(i)*

$X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ *(m=0,v=1$\rightarrow \frac{X_k - m}{\sqrt{v}}$)*

$$O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ & * & & \end{pmatrix} \quad \text{orthogonale}\, n \times n\, \text{Matrix}$$

$Y = \text{OX} \Rightarrow M = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1$

$|Y| = |X|$ *weil O orthogonal*

$\Rightarrow (n-1)V^* = \sum_{k=1}^n (X_k - M)^2 = \sum_{k=1}^n X_k^2 - \text{nM}^2$

$$= |Y|^2 - Y_1^2 = \sum_{k=1}^n Y_k^2$$

$Y \sim \mathcal{N}$*(0,E)*$\Rightarrow Y_k$ *u.i.v.* $\left(\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right)\right)$. □

Ende Vorlesung 10

---

6 Testtheorie

Beispiel 56. (Test faire Münze)

Sei $p \in (0,1)$ die W'keit, dass ein Münzwurf Kopf (1) ist.

Werfen n-mal die Münze $X = (X_1, \ldots, X_n)$ und

$$T(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

ist bester Schätzer.

Aber: Mit W'keit 1 (p$\notin \mathbb{Q}$) ist $T(x) \neq p$.

Frage:

Wie können wir entscheiden ob die Münze fair ist oder nicht, d.h. die Hypothese $p = \frac{1}{2}$ testen?

In diesem Fall muss man zwischen Nullhypothese H_0: $p = \frac{1}{2}$ und Alternative H_1: $p \neq \frac{1}{2}$ entscheiden.

Fehler: Es gibt zwei Möglichkeiten einen Fehler zu machen:

1. Verwerfe H_0, obwohl H_0 vorliegt: Fehler 1. Art

2. Nehme H_0 an, obwohl H_1 vorliegt: Fehler 2. Art

Gesucht: Ein Test, dessen W'keit einen Fehler 1. Art unterhalb eines geg. Irrtumsniveau $\alpha \in [0,1]$ liegt.

z.B.: Falls $\left|T(X) - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}$ nehmen wir H_1 an, sonst H_0.

Was ist ein Test? Wie sollte man Entscheidungverfahren durchführen?

Stat. Entscheidungsverfahren:

1. Formulierung des stat. Modells

$$(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \theta))$$

2. Formulierung von Nullhypothese und Alternative zerlegt θ in θ_0 und θ_1 s.d.

$$\vartheta \in \theta_0 \Leftrightarrow \vartheta \,\text{ist akzeptabel, gewünschter Normalfall}$$

$$\vartheta \in \theta_1 \Leftrightarrow \vartheta \,\text{ist problematisch, Abweichung vom Normalfall}$$

3. Wahl eines Irrtumsniveau

   Wähle $\alpha \in [0,1]$ und fordert, dass Fehler 1. Art höchstens mit W'keit α passiert.

4. Wahl einer Entscheidungsregel

   Man wähle eine Statistik $\varphi : \mathcal{X} \to [0,1]$ wie folgt

   → $\varphi(x)$ ist Grad mit dem man sich für die Alternative entscheidet.

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \text{Nehme die Nullhypothese}$$

$$\varphi(x) = 1 \Leftrightarrow \text{Vewerfe die Nullhypothese und nehme Alternative}$$

$$\varphi(x) \Leftrightarrow \text{Nehme die Nullhypothese mit } W'\text{keit } 1 - \varphi(x)$$

5. Durchführung des Experiments

   Wieso erst jetzt? Sonst Täuschung fast unvermeidbar.

   Beispiel:

   - Nullhypothese und Alternative an Daten anpassen.
   - Niveau und Entscheidungsregel geeignet auswählen.

Definition 57. *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \theta))$ ein stat. Modell und $\theta = \theta_0 \cup \theta_1$ eine Zerlegung von θ in Nullhypothese und Alternative.*

a) *Jede Statistik $\varphi : \mathcal{X} \to [0,1]$ heißt Test von der θ_0 gegen θ_1.*

b) *Ein Test φ heißt nicht randomisiert, falls $\varphi(x) \in \{0,1\} \forall x \in \mathcal{X}$.*

   In diesem Fall heißt $\{x \in \mathcal{X} : \varphi(x) = 1\}$ Ablehnungsbreich oder kritischer Bereich.

c) *Falls $\varphi(x) \notin \{0,1\}$ für ein $x \in \mathcal{X}$*

$\Rightarrow\varphi$ *ist randomisiert.*

d) *Effektives Niveau von* φ *ist*

$$\sup_{\vartheta\in\theta_0}\mathbb{E}_\vartheta[\varphi]$$

d.h. das sup von W'keiten Fehler erster Art zu begehen.

e) *Ein Test* φ *hat (Irrtums-)niveau* α *wenn*

$$\sup_{\vartheta\in\theta_0}\mathbb{E}_\vartheta[\varphi]\leqslant\alpha$$

f) *Gütefunktion* $G_\varphi\colon\theta\to[0,1]$

$$\vartheta\mapsto G_\varphi(\vartheta):=\mathbb{E}_\vartheta[\varphi].$$

g) *Macht von* φ *bei* ϑ*: für* $\vartheta\in\theta_1$*:*$G_\varphi(\vartheta)$*=W'keit mit der die Alternative erkannt wird, wenn sie vorliegt* $\Rightarrow\beta_\varphi(\vartheta)=1-G_\varphi(\vartheta)$ *für alle* $\vartheta\in\theta_1$ *ist die W'keit für Fehler 2. Art.*

Wie soll man φ wählen?

a) $G_\varphi(\vartheta)\leqslant\alpha$ für alle $\vartheta\in\theta_0$. $\Rightarrow$Irrtums $-$ W'keit für Fehler 1. Art $\leqslant\alpha$.

b) $G_\varphi(\vartheta)$ so groß wie möglich $\forall_{\vartheta\in\theta_1}\Rightarrow$ Fehler 2. Art minimieren.

Definition 58. *Ein Test* φ *von* θ_0 *gegen* θ_1 *heißt bester Test zum Niveau* α*, wenn Niveau(*φ*)=*α *und* $\forall$Tests ψ *mit Niveau*$(\psi)=\alpha$ *gilt* $G_\varphi(\vartheta)\geq G_\psi(\vartheta)\forall\vartheta\in\theta_1$*. Auf englisch: UMP-Test=uniform most powerful test.*

Beispiel 59. (Faire Münze)

Wir werfen n mal eine Münze

1. $\mathcal{X}=\{0,\ldots,n\},\mathbb{P}_p=\mathrm{Bin}_{n,p}$ mit $p\in[0,1]$.

2. $\theta_0=\{\frac{1}{2}\}$ und $\theta_1=[0,1]\setminus\{\frac{1}{2}\}$

3. $\alpha\in(0,1)$ fest z.B.: $\alpha=0.05$ (5% Fehler 1. Art möglich)

4. $\varphi(x)=\mathbb{1}_{\{|x-\frac{n}{2}|>c\}}$

   Jetzt wollen wir c berechnen s.d. der Test Niveau α hat.

   $\mathrm{Niveau}(\varphi):=\sup_{\vartheta\in\theta_0}\mathbb{E}_\vartheta[\varphi]=\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}[\varphi]$

$$=\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}\big[\mathbb{1}_{\{|x-\frac{n}{2}|\geq c\}}\big]=\mathrm{Bin}_{n,\frac{1}{2}}\Big[\Big\{0,\ldots,\Big\lfloor\frac{n}{2}-c\Big\rfloor\Big\}\Big]+\mathrm{Bin}_{n,\frac{1}{2}}\Big[\Big\{\Big\lceil\frac{n}{2}+c\Big\rceil,\ldots,n\Big\}\Big]\leqslant\alpha$$

   Sei $k_-=\frac{\alpha}{2}$ Quantil von $\mathrm{Bin}_{n,\frac{1}{2}}$ und k_+ das (1-$\alpha/2$)-Quantil von $\mathrm{Bin}_{n,\frac{1}{2}}=n-k_-$

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x\in[k_-,k_+]\\ 1 & \text{sonst}\end{cases}$$

   hat Niveau α

Beispiel 60. $\alpha = 0.05$

$$\left(\begin{array}{ccc} n & k_- & \text{Eff. Niveau} \\ 10 & 2 & 2 \cdot 0.0107 = 0.021 \\ 20 & 6 & 0.041? \\ 50 & 18 & 0.033 \\ 100 & 40 & 0.035 \\ 1000 & 469 & 0.046 \\ 1000000 & 499020 & 0.0499 \end{array}\right)$$

10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107
	2	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547
	3	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719
	4	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770
	5	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230
	6		1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281
	7			1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453
	8				1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893
	9						1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990
	10								1.0000	1.0000	1.0000

Abbildung 4.

Frage: Können wir nicht einfach einen Test anderer Form wählen

$$\tilde{\varphi}(x) = \mathbb{1}_{\{1, \ldots, k_- - 1\} \cup \{k_+ + 1, \ldots, n-1\}}$$

Dann wäre $\tilde{\varphi}$ ein Test mit kleinerem Niveau als φ.

Problem: Wenn $x = n$, dann $\tilde{\varphi}(x) = 0$ und die Nullhypothese H_0: $p = \frac{1}{2}$ wird behalten $\rightarrow$ nicht gut!

Auch $G_{\tilde{\varphi}}(p=1) = \mathbb{E}_{p=1}[\tilde{\varphi}(x)] = \mathrm{Bin}_{n,1}(\mathbb{1}_{\{1 \leqslant x \leqslant k_- - 1\} \cup \{k_+ + 1 \leqslant x \leqslant n-1\}}) = 0 < G_{\tilde{\varphi}}\left(p = \frac{1}{2}\right)$.

D.h. im Fall von sehr starker Unfairness nehmen wir mit $\tilde{\varphi}$ H_0 an!

Um diese Absurdität zu vermeiden:

Definition 61. *Ein Test φ heißt unverfälscht zum Niveau α wenn*

$$G_\varphi(\vartheta_0) \leqslant \alpha \leqslant G_\varphi(\vartheta_1) \forall \vartheta_0 \in \theta_0, \vartheta_1 \in \theta_1,$$

d.h. man entscheidet sich mit größerer W'keit für die Alternative wenn sie richtig ist, als wenn sie falsch ist.

Ende Vorlesung 11

6.1 Neyman-Pearson-Test

Jetzt betrachten wir eine besondere Situation, wo wir nur zwischen W'maßen $\mathbb{P}_0$ und $\mathbb{P}_1$ entscheiden müssen.

Annahme:

$(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1)$ d.h. $\theta = \{0, 1\}$, Standardmodell

Nullhypothese $\theta_0 = \{0\}$ Alternative $\theta_1 = \{1\}$

Seien ρ_0, ρ_1 die Dichte von $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1$.

Gesucht: Ein bester Test φ von $\mathbb{P}_0$ gegen $\mathbb{P}_1$.

Idee:

Man entscheidet sich für die Alternative, wenn $\rho_1(x)$ hinreichend größer ist als $\rho_0(x)$.

Deshalb definiert man den Likelihood-Quotienten

$$R(x) = \begin{cases} \frac{\rho_1(x)}{\rho_0(x)} & \rho_0(x) > 0 \\ \infty & \rho_0(x) = 0 \end{cases}$$

Hinreichend groß bedeutet, dass $R(x)$ größer als ein vorgegebener Schwellenwert c ist.

$\Rightarrow$ Wir kriegen einen Test der Form

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & R(x) > c \\ 0 & R(x) < c \end{cases} \tag{1}$$

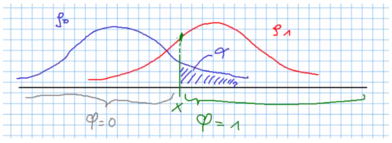


Abbildung 5.

Definition 62. *Ein Test dieser Form heißt Neyman-Pearson-Test zum Schwellenwert c.*

Satz 63. *(Neyman-Pearson-Lemma 1932)*

Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1)$ ein Standardmodell mit

Nullhypothese: H_0: $\theta = \{0\}$ und

Alternative: H_1: $\theta = \{1\}$ und

$\alpha \in (0,1)$ ein vorgegebenes Niveau. Dann gilt:

- *$\exists$ Neyman-Pearson-Test φ mit $\mathbb{E}_0[\varphi] = \alpha$.*
- *Jeder N-P-Test φ mit $\mathbb{E}_0[\varphi] = \alpha$ ist ein bester Test zum Niveau α, und jeder beste Test ψ zum Niveau α ist ununterscheidbar von einem N-P-Test.*

Bemerkung 64. Im Beweis werden wir sehen:

Sei c ein α-Fraktil von $\mathbb{P}_0 \circ R^{-1}$. Dann

$$\gamma = \begin{cases} \frac{\alpha - \mathbb{P}_0[R > c]}{\mathbb{P}_0[R = c]} & \mathbb{P}_0[R = c] > 0 \\ 0 & \mathbb{P}_0[R = c] = 0 \end{cases}$$

Dann

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & R(x) > c \\ \gamma & R(x) = c \\ 0 & R(x) < c \end{cases}$$

Beweis.

Sei c ein bel. α-Fraktil von $\mathbb{P}_0 \circ R^{-1}$, d.h.

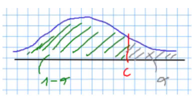


Abbildung 6.

$\mathbb{P}_0[R(x)\geqslant c]\geqslant\alpha$,$\mathbb{P}_0[R(x)>c]\leqslant\alpha$

Da $\mathbb{P}_0[R(x)=\infty]=0$ existiert so ein c.

$$\mathbb{P}_0[R(x)=c]=\mathbb{P}_0[R(x)\geqslant c]-\mathbb{P}_0[R(x)>c]\geqslant\alpha-\mathbb{P}_0[R(x)>c]$$

<u>1. Fall:</u>

$$\mathbb{P}_0[R(x)=c]=0\Rightarrow\varphi(x)=\mathbb{1}_{\{R(x)>c\}}$$

ist ein N-P-Test mit $\mathbb{E}_0[\varphi]=\mathbb{P}_0[R(x)>c]=\alpha$.

<u>2. Fall:</u>

$\mathbb{P}_0[R(x)=c]>0$, dann mit

$$\gamma=\frac{\alpha-\mathbb{P}_0[R(x)>c]}{\mathbb{P}_0[R(x)=c]}\in[0,1]$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & R(x)>c\\ \gamma & R(x)=c\\ 0 & R(x)<c\end{cases}$$

ist ein N-P-Test mit Niveau

$$\mathbb{E}_0[\varphi]=\mathbb{P}_0[R(x)>c]+\gamma\cdot\mathbb{P}_0[R(x)=c]=\alpha.$$

Damit existiert so ein Test.

(ii): Sei φ ein N-P-Test mit $\mathbb{E}_0[\varphi]=\alpha$ und Schwellenwert c und ψ ein Test zum Niveau α.

$\mathbb{E}_1[\varphi]-\mathbb{E}_1[\psi]=\int\varphi(x)-\psi(x)\rho_1(x)\mathrm{dx}$

<u>1. Fall:</u>

Falls $\varphi(x)>\psi(x)\Rightarrow\varphi(x)>0$ und deshalb $R(x)\geqslant c$, d.h. $\rho_1(x)\geqslant c\rho_0(x)$.

<u>2. Fall:</u>

Falls $\varphi(x)<\psi(x)\Rightarrow\varphi(x)<1$ und deshalb $R(x)\leqslant c$ d.h. $\rho_1(x)\leqslant c\rho_0(x)$.

$\Rightarrow\forall x\,\underbrace{(\varphi(x)-\psi(x))\rho_1(x)}_{f_1(x)}\geqslant c(\varphi(x)-\psi(x))\rho_0(x)$

$\Rightarrow\mathbb{E}_1[\varphi]-\mathbb{E}_1[\psi]\geqslant c\int\underbrace{\varphi(x)-\psi(x)\rho_0(x)}_{f_0(x)}\mathrm{dx}=c(\underbrace{\mathbb{E}_0[\varphi]}_{=\alpha}-\underbrace{\mathbb{E}_0[\psi]}_{\leqslant\alpha})\geqslant 0$

$\Rightarrow\varphi$ ist ein bester Test zum Niveau α.

<u>Ununterscheidbar:</u> Sei ψ ein bester Test mit Niveau α.

$\Rightarrow\int\varphi(x)-\psi(x)\rho_0(x)\mathrm{dx}=0$

$\Rightarrow f_1(x)=\mathrm{cf}_0(x)$ bis auf x aus Lebesgue-Nullmenge N.

$$d.h.: (\varphi(x)-\psi(x))(\rho_1(x)-c\rho_0(x))=0\forall x\notin N$$

$\Rightarrow\varphi=\psi$ für alle $x\notin N$ mit $R(x)\neq c$

$\Rightarrow$ Behauptung. □

Beispiel 65. (Entscheidung zwischen zwei möglichen Werten einer (vermutlich) fairen Münze)

Sei p die W'keit, dass bei einem Münzwurf Zahl rauskommt.

Jemand behauptet, dass die Münze nicht fair ist, sondern $p=3/4$ gilt.

Er ruft die Polizei, die mit $\underline{n=10}$ Würfen entscheiden soll, was der Fall ist mit Irrtumsniveau $\alpha=0.01$.

H_0: $p=\frac{1}{2}$ gegen H_1: $p=\frac{3}{4}$.

$\Rightarrow \mathbb{P}_0=\mathrm{Bin}_{n,\frac{1}{2}}$ und $\mathbb{P}_1=\mathrm{Bin}_{n,\frac{3}{4}}$.

$\Rightarrow R(x)=\frac{\mathrm{Bin}_{n,\frac{3}{4}}(x)}{\mathrm{Bin}_{n,\frac{1}{2}}(x)}=\frac{\binom{n}{x}\frac{3^x}{4^n}}{\binom{n}{x}\frac{1}{2^n}}=\frac{3^x}{2^n}$

ist streng monoton steigend.

Ein Test der Form

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \gamma & x=a\\ 1 & x>a\end{cases}$$

ist äquivalent zu

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & R(x)<c\\ \gamma & R(x)=c\\ 1 & R(x)>c\end{cases}$$

mit $a=R^{-1}(c)$.

Sei a ein α-Fraktil von $\mathbb{P}_0=\mathrm{Bin}_{10,\frac{1}{2}}$

$$\mathbb{P}_0[X\geqslant a]\geqslant\alpha \text{ und } \mathbb{P}_0[X>a]\leqslant\alpha$$

Da $\mathrm{Bin}_{10,\frac{1}{2}}(\{10\})\cong 0.001\leqslant 0.01$

und $\mathrm{Bin}_{10,\frac{1}{2}}(\{9\},\{10\})\cong 0.0107\geqslant 0.01$

$\Rightarrow a=9$

$$\gamma=\frac{\alpha-\mathrm{Bin}_{10,\frac{1}{2}}(\{10\})}{\mathrm{Bin}_{10,\frac{1}{2}}(\{9\})}\approx 0.924$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x<9\\ 0.924 & x=9\\ 1 & x>9\end{cases}$$

Seien $\mathbb{P}_0,\mathbb{P}_1$ zwei W'maße mit Dichten ρ_0,ρ_1. Dann

$$H(\mathbb{P}_0|\mathbb{P}_1)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}_0}\left[\ln\frac{\rho_0}{\rho_1}\right]=\begin{cases}\int\rho_0\ln\frac{\rho_0}{\rho_1}\mathrm{dx} & \text{falls } \mathbb{P}_0[\rho_1=0]\\ \infty & \text{sonst.}\end{cases}$$

heißt relative Entropie von $\mathbb{P}_0$ bzgl. $\mathbb{P}_1$. Insbesondere $H(\mathbb{P}_0|\mathbb{P}_1)\geqslant 0$ und $H(\mathbb{P}_0|\mathbb{P}_1)=0\Leftrightarrow\mathbb{P}_0=\mathbb{P}_1$. (Siehe Blatt 1 oder 2?)

Die statistische Bedeutung von H: Je größer $H(\mathbb{P}_0|\mathbb{P}_1)$ desto schneller wächst auch die Macht von optimalen Tests von $\mathbb{P}_0$ gegen $\mathbb{P}_1$ mit der Anzahl der Beobachtungen. Das ist ein Teil vom folgenden Satz

Satz 66. *(Lemma von Stein ' 52)*

Sei $(E, \mathcal{E}, \mathbb{Q}_0, \mathbb{Q}_1)$ *ein stat. Standardmodell*

$H_0\colon \theta = \{0\}, H_1\colon \theta = \{1\}$ *und sei* $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\vartheta\colon \vartheta \in \{0,1\}) = (E^{\mathbb{N}}, \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{N}}, \mathbb{Q}_\vartheta^{\otimes\mathbb{N}}\colon \{0,1\})$

$\forall n > 1$ *Sei* φ_n ein $N-P-$Test *mit* $\mathbb{E}_0[\varphi] = \alpha$, *der nur von den ersten* n *Beobachtungen* $X_1, \ldots,$ X_n *abhängt. Dann*

$$\frac{\ln(1 - \mathbb{E}_1[\varphi_n])}{n} \xrightarrow{n \to \infty} - H(\mathbb{Q}_0|\mathbb{Q}_1),$$

d.h.

$$\mathbb{E}_1[\varphi_n] \approx 1 - \underbrace{e^{-\mathrm{nH}(\mathbb{Q}_0|\mathbb{Q}_1)}}_{=\left\{\begin{smallmatrix} 1 & H=0 \\ 0 & H>0 \end{smallmatrix}\right.}.$$

Ende Vorlesung 12

Beweis des Lemmas in Georgii.

Beispiel 67. (Test für den Erwartungswert zweier Normalverteilungen bei bekannter Varianz)

Sei $\mathbb{Q}_0 = \mathrm{N}_{m_0,v}, \mathbb{Q}_{m_1,v}$ mit $m_0 < m_1$ und $v > 0$ fix.

$H_0\colon m = m_0$, gegen $H_1\colon m = m_1$

$\Rightarrow R_n = \exp\big(-\frac{1}{2v}\sum_{k=1}^n ((x_k - m_1)^2 - (x_k - m_0)^2)\big)$

$$= \exp\left(-\frac{n}{2v}(2(m_0 - m_1)M_n + m_1^2 - m_0^2)\right)$$

mit $M_n = \frac{1}{n}\sum x_k$

$$\Rightarrow h_n := \frac{-1}{n}\ln R_n = \frac{m_0 - m_1}{v}M_n + \frac{m_1^2 - m_0^2}{2v}$$

$\Rightarrow$ N-P-Test von m_0 gegen m_1 nach n Beobachtungen

$$\varphi_n(x) := \mathbb{1}_{\{M_n > b_n\}}$$

mit $\mathbb{P}_0\Bigg[\underbrace{M_n > b_n}_{\mathcal{N}_{m_0,v/n}((b_n,\infty))}\Bigg] \stackrel{!}{=} \alpha$

$$\mathcal{N}_{m_0,v/n}((b_n,\infty)) = 1 - \Phi\left(\frac{b_n - m_0}{\sqrt{v/n}}\right)$$

$\Rightarrow b_n = m_0 + \sqrt{v/n}\,\Phi^{-1}(1-\alpha)$

Dann die rel. Entropie:

$$H(\mathbb{P}_0|\mathbb{P}_1) = \mathbb{E}_0[h_n] = m_0\frac{m_0 - m_1}{v} + \frac{m_1^2 - m_0^2}{2v} = \frac{(m_0 - m_1)^2}{2v}$$

Stein's Lemma:

$$\mathbb{E}_1[1 - \varphi_n] \approx \exp\left(-n\frac{(m_0 - m_1)^2}{2v}\right)$$

Beispiel 68.

$\mathbb{Q}_0$: $\mathbb{Q}_0(\{0\}) = \mathbb{Q}_0(\{1\}) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{Q}_1$: $\mathbb{Q}_0(\{1\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{Q}_1(\{1\}) = \frac{3}{4}$

Sei $S_n = \sum x_k$ und $q_n \cong (1-\alpha)$-Quantil von $\mathrm{Bin}_{n,\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \varphi_n(s) = \begin{cases} 0 & s < q_n \\ \gamma_n & s = q_n \\ 1 & s > q_n \end{cases}$

mit $\gamma_n = \dfrac{\alpha - \mathrm{Bin}_{n,\frac{1}{2}}(\{q_{n+1}, \ldots, n\})}{\mathrm{Bin}_{n,\frac{1}{2}}(\{q_n\})}$

$\Rightarrow \mathbb{E}_0[\varphi_n] = \alpha$

$\Rightarrow \mathbb{E}_1[\varphi_n] = \gamma_n \mathrm{Bin}_{n,\frac{3}{4}}(\{q_n\}) + \mathrm{Bin}_{n,\frac{3}{4}}(\{q_{n+1}, \ldots, n\})$

und $H(\mathbb{Q}_0|\mathbb{Q}_1) = \frac{1}{2}\ln(8/3)$

Stein's Lemma :

$$\mathbb{E}_1[\varphi_n] 1 - (3/8)^{n/2}$$

6.2 Beste einseitige Tests

Die Neyman-Pearson-Tests sind oft zu einfach für Anwendungen. Das ist aber der Grundstein für komplexere Tests (wenn wir eine geeignete Monotonie gilt).

Definition 69. *(Likelihood-Quotient $R_{\vartheta':\vartheta}(x)$)*

Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbb{P}_0 \colon \vartheta \in \theta)$ ein Standardmodell mit $\theta \subseteq \mathbb{R}$. Das Modell hat wachsende Likelihood-Quotienten bzgl. einer Statistik

$$T \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R} \quad \text{wenn } \textit{für} \text{ alle } \vartheta < \vartheta'$$

$$R_{\vartheta':\vartheta} := \frac{\rho_{\vartheta'}}{\rho_\vartheta}$$

ist eine wachsende Funktion für T, d.h.

$$R_{\vartheta':\vartheta}(x) = f_{\vartheta':\vartheta}(T(x)) \text{ mit}$$

$f_{\vartheta':\vartheta}(y)$ wachsend in y.

Bemerkung 70. Jedes (einparametrige) exponentielle Modell hat wachsende Likelihood-Quotienten (bzgl. T oder -T).

In der Tat

$$R_{\vartheta':\vartheta}(x) = \exp[(a(\vartheta') - a(\vartheta))T(x)] \frac{e^{b(\vartheta)}}{e^{b(\vartheta')}}$$

und $\vartheta \mapsto a(\vartheta)$ ist strikt monoton.

$$\begin{cases} \text{wenn a wachsend} & \text{bzgl T} \\ \text{wenn a fallend} & \text{bzgl. } -T \end{cases}$$

Erinnerung:

In den exponentiellen Modellen sind unter anderem

i. Binomialmodell

ii. Poisson

iii. Normalverteilung mit fester Varianz oder festem Erwartungswert

iv. Alle Produktmodelle von (i)-(iii)

Was ist ein einseitiger Test?

H_0: $\vartheta \leqslant \vartheta_0$ gegen $\vartheta > \vartheta_0$ (linksseitig)

H_0: $\vartheta \geqslant \vartheta_0$ gegen $\vartheta < \vartheta_0$ (rechtsseitig)

Was ist ein beidseitiger Test?

H_0: $\vartheta \in [\vartheta_{0,1}, \vartheta_{0,2}]$ gegen H_1: $\vartheta \notin [\vartheta_{0,1}, \vartheta_{0,2}]$.

Satz 71.

Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \theta)$ mit $\theta \subseteq \mathbb{R}$ ein Standardmodell mit wachsenden Likelihood-Quotienten bzgl. T und $\vartheta_0 \in \theta$, $0 < \alpha < 1$.

Dann ex. ein bester Test φ zu dem Niveau α ($\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\varphi] \leqslant \alpha$) für H_0: $\vartheta \leqslant \vartheta_0$ gegen H_1: $\vartheta > \vartheta_0$ der Form

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & T(x) > c \\ \gamma & T(x) = c \\ 0 & T(x) < c \end{cases} \tag{2}$$

Außerdem ist die Gütefunktion G_φ monoton wachsend.

$c = \alpha$-Fraktil von $\mathbb{P}_{\vartheta_0} \circ T^{-1}$

γ löst $G_\varphi(\vartheta_0) = \mathbb{P}_{\vartheta_0}[T > c] + \gamma \mathbb{P}_{\vartheta_0}[T = c] \stackrel{!}{=} \alpha$

Beweis.

Sei $R_{\vartheta':\vartheta}(x) = f_{\vartheta':\vartheta}(T(x))$

mit $f_{\vartheta':\vartheta}(y)$ monoton wachsend in y.

$$\theta_0 = (-\infty, \vartheta_0], \theta_1 = (\vartheta_0, \infty\}$$

Zuerst berechnen wir c und γ. Aus $N-P-$Lemma konstruieren wir ein φ der Form 2 mit

$c = \alpha$-Fraktil von $\mathbb{P}_{\vartheta_0} \circ T^{-1}$ und $\gamma \in [0,1]$ kommt aus der Gleichung

$$\alpha = \mathbb{P}_{\vartheta_0}[T(x) > c] + \gamma \mathbb{P}_{\vartheta_0}[T(x) = c]$$

Sei $\vartheta < \vartheta'$

Wenn $R_{\vartheta':\vartheta} = f_{\vartheta':\vartheta}(T) > f_{\vartheta':\vartheta}(c)$

$\Rightarrow T > c \Rightarrow \varphi = 1$

Wenn $R_{\vartheta':\vartheta} = f_{\vartheta':\vartheta}(T) < f_{\vartheta':\vartheta}(c)$

$\Rightarrow T < c \Rightarrow \varphi = 0$

$\Rightarrow \varphi$ ist ein N-P-test

von ϑ gegen ϑ'.

Insbeosndere für $\vartheta = \vartheta_0$ und bel. $\vartheta' > \vartheta_0$ folgt aus $N - P -$ Lemma, dass φ ein bester Test für ϑ_0 gegen jedes $\vartheta' \in \theta_1$ zum Niveau α.

Noch zu zeigen, dass Niveau von φ als Test θ_0 gegen θ_1 α ist, d.h.

$$G_\varphi(\vartheta) \leqslant \alpha \forall \vartheta \in \theta_0$$

Da $G_\varphi(\vartheta_0) = \alpha$ müssen wir zeigen, dass G_φ monoton wachsend ist.

Für $\vartheta < \vartheta'$, folt aus dem N-P-Lemma, dass φ ein bester Test zu dem Niveau $\beta := G_\varphi(\vartheta)$ ist

$\Rightarrow G_\varphi(\vartheta') \geqslant G_\psi(\vartheta')$ für alle Tests ψ mit Niveau β

$G_\varphi(\vartheta') = \beta = G_\varphi(\vartheta)$

$\Rightarrow G_\varphi$ ist monoton wachsend. □

Bemerkung 72. Für einen rechtsseitigen Test

$H_0 \colon \vartheta \geqslant \vartheta_0$ gegen $H_1 \colon \vartheta < \vartheta_0$

müssen wir nur $<$ und $>$ in φ tauschen. D.h. $\vartheta \mapsto -\vartheta$ und $T \mapsto -T$ (Anmerkung von Manuel: Nicht wirklich, $\theta = [0, 1]$ als Gegenbsp.)

Beispiel 73. (Einseitiger Gauß-Test, bekannte Varianz)

Sei $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{N}_{m,v}^{\otimes n} \colon m \in \mathbb{R}, v \,\text{fest})$

Zu Testen $H_0 \colon m \leqslant m_0$ gegen H_1

Der Ablehnungsbereich ist

$$\left\{ M_n > m_0 + \sqrt{v/n}\,\Phi^{-1}(1-\alpha) \right\}$$

Übung!

Beispiel 74. (Einseitiger Chi-Quadrat Test (bekannter Erwartungswert)

Seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(m, v)$ m fest und $v > 0$.

Testen: $H_0 \colon v \geqslant v_0$ gegen $H_1 \colon v < v_0$.

Dieses Modell ist exponentiell bzgl. der Statistik

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2$$

In der Tat, die Likelihoodfunktion

$$\rho_\vartheta(x) = \exp\left(\underbrace{-\frac{1}{2v}}_{a(v)} T(x) - \frac{n}{2} \ln(2\pi v) \right)$$

$a(v)$ ist wachsend in v.

$\Rightarrow R_{v':v}(x) = \frac{\rho_{v'}(x)}{\rho_v(x)}$ ist wachsend in $T_n(x)$.

$\Rightarrow$Rechtsseitiger Test

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & T_n(x) < c \\ 0 & T_n(x) > c \end{cases}$$

c berechnen:

$G_\varphi(v_0) \overset{!}{=} \alpha$

$$G_\varphi(v_0) = \mathbb{E}_{v_0}[\varphi] = \mathbb{P}_{v_0}[T_n < c]$$

$$\mathbb{P}_{v_0}[T_n < c] = \underbrace{\mathbb{P}_{\vartheta_0}\left[\frac{T_n}{v_0} < \frac{c}{v_0}\right]}_{X_k \sim \mathcal{N}_{m,v_0}} \overset{!}{=} \alpha$$

$Y_k = \frac{X_k - m}{\sqrt{v_0}} \sim \mathcal{N}_{0,1}$

$\frac{T_n(x)}{v_0} = \sum_{k=1}^n Y_k^2 \sim \chi_n^2$

$\Rightarrow c = v_0 \cdot (\alpha\text{-Quantil von } \chi_n^2)$

$\Rightarrow$ Ablehnungsbreich

$$\{x \colon T_n(x) < v_0(\alpha - \text{Quantl von } \chi_n^2)\}$$

Ende Vorlesung 13

Vorlesung über R mit Hilfe von RStudio.

```
#Programmier-Crashkurs R

#Author: M. Braun


#1 Allgemeines

#1.1 Einrichtung

#Download auf rstudio.com (Open Source)
#Empfehlung: Eigenes .R-Script für jedes Projekt

#1.2 Literatur

#Youtube: Statistik am PC, DataCamp, etc.
#M. Luhmann: R für Einsteiger
#G. Grolemund, H. Wickham: R for Data Science


#2 Grundbefehle
```

```
#2.1 Rechenoperationen

7+3
7-3
7*3
7/3
sqrt(7)
exp(7)
sin(7)
floor(7.5)
floor(pi)
?floor

#2.2 Variablen

#Zuweisung
x <- 4
y <- x^2
plot(x,y)
curve(sin(x), from=0, to=2*pi)

#Überschreiben
x <- x+3

#Überblick
ls()

#Löschen
rm(x)
rm(y)
rm(list=ls())

#Ausgeben
x <- 2
y <- x^2
print("Hallo Welt")
print(x)
print(paste("Das Quadrat von", x, "ist", y))

#2.3 Schleifen und Bedingungen
i <- 1

#if-Bedingung
#Standard !=, <, <=, >, >=
if(i == 5){
  print(paste("Deine Glückszahl ist", i))
} else{
  print("Nö!")
}

#for-Schleife
for(j in 1:10){
  if(!j %% 2){
    print(paste(j, "ist eine gerade Zahl"))
  } else{
    if(j == 5){
```

```
      print("Hallo Welt!")
    } else{
      print("Hi.")
    }
  }
}
rm(j)

#while-Schleife
while(i < 60){
  print(i^3)
  i <- i+1
}
rm(i)

#2.4 Funktionen

#Parameter festlegen
square <- function(a){
  b <- a^2
  #Rückgabe des Wertes
  return(b)
}

square(2)

#Auflistung und Zählen natürlicher Zahlen
list.smaller <- function(p){
  q <- 1
  counter <- 0
  while(q < p){
    print(paste(q, "ist kleiner als", p))
    q <- q+1
    counter <- counter+1
  }
  print(paste("Insgesamt sind", counter, "nat�rliche Zahlen kleiner als", p))
}

list.smaller(1000)

#BMI berechnen
bmi <- function(weight, height){
  if(height > 5){
    height <- height/100
  }
  #BMI = Gewicht[kg]/Größe[m]
  result <- weight/(height)^2
  return(result)
}

#Funktion aufrufen
bmi(80,180)
bmi(80,1.80)

#Alter berechnen
age <- function(year){
```

```
  a <- 2021 - year
  return(a)
}

age(1993)

#Lassen Sie dem PC bei umständlichen Berechnungen Zeit
#Bauen Sie ggf. 'Checkpoints' ein
k <- 6

for(n in 1:10^k){
  if(!n %% 10){
    print(paste("Die Marke", n, "ist erreicht!"))
  }
  print(n)
}


#3 Verwalten von Daten

#3.1 Vektoren

#Vektor zuweisen
vector <- c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)
vector2 <- c(1:10)
vector
table(vector)
vec <- integer(400)
vect <- (1:200)/2

#Auf Elemente zurückgreifen
vector[1] + vector[5]
#Bei Tabellen bspw. tabelle[zeile,spalte]

#Rechenoperationen auf alle Elemente anwenden
vector <- log(vector)
vector <- sin(vector)

#Vektoren zusammenfügen
vector <- append(vector, c(1))
vector <- append(vector, c(12:24))
vector <- append(c(12:24), vector)

#Grundfunktionen
sum(vector)
length(vector)
mean(vector)
sd(vector)
max(vector)
min(vector)
median(vector)

#Plotten
hist(vector)
barplot(vector)
plot(vector)
```

```
boxplot(vector)

#3.2 Erzeugen von Zufallszahlen

#Gleichverteilung
gleich <- runif(100, -1, 1)
gleich
barplot(gleich)

#Normalverteilung
normal <- rnorm(100, 1, 3)
normal
barplot(normal)
mean(normal)
sd(normal)
hist(normal)

#3.3 Data Frames

#Data Frames können alle möglichen Daten zusammenbündeln
person <- c("Lisa", "Kunibert", "Herbert", "Moritz", "Irmgard")
age <- c(36, 66, 90, 41, 50)
vaccine <- c("Johnson", "Astra", "Astra", "Biontech", "Johnson")
df <- data.frame(person,age, vaccine)
df

#3.4 Tabellen einlesen

scorer <- read.table("scorer.txt")
scorer
nrow(scorer)
length(scorer)

#Operationen auf Spalten durchführen
with(scorer, mean(V3))
with(scorer, sd(V3))

#Abschließendes Beispiel
data <- read.table("bmi-data.txt")

#Berechnung des Durchschnitts-BMI's separiert nach Geschlechtern
experiment <- function(maximum){
  #Counter für die Geschlechter
  females <- 0
  males <- 0
  #Fehlercounter
  error <- 0
  #Durchschnitts-BMI's initialisieren
  fbmi <- 0
  mbmi <- 0
  #Falls Eingabe zu groß
  if(maximum > nrow(data)){
    print(paste("Es wurden nur", nrow(data), "Personen untersucht."))
    print(paste("Sie haben mit", maximum, "eine zu hohe Zahl eingetippt."))
  } else {
    for(i in 1:maximum){
```

```
      if(i <= nrow(data)){
        if(data[i,1] == "w"){
          females <- females + 1
          fbmi <- fbmi + bmi(data[i,2], data[i, 3])
        } else {
          if(data[i,1] == "m"){
            males <- males + 1
            mbmi <- mbmi + bmi(data[i,2], data[i, 3])
          } else {
            error <- error + 1
          }
        }
      }
    }
    print(paste("Es wurden", females, "Frauen und", males, "Männer, also insg-
esamt", nrow(data)-error, "Personen untersucht."))
    fbmi <- fbmi/females
    mbmi <- mbmi/males
    print(paste("Der durchschnittliche weibliche BMI ist", fbmi))
    print(paste("Der durchschnittliche männliche BMI ist", mbmi))
    print(paste("Es sind", error, "Fehler aufgetreten"))
  }
}
experiment(7)
experiment(10)
```

Ende Vorlesung 14

Bemerkungsänderung:

α Quantil und Fraktil

Bemerkung 75. (Rechtsseitige beste Tests)

Zu Satz 71 Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\vartheta \colon \vartheta \in \theta)$ mit $\theta \subseteq \mathbb{R}$ ein Standardmodell mit wachsenden Likelihood-Quotienten bzgl. T und $\vartheta_0 \in \theta$, $0 < \alpha < 1$.

Dann ex. ein bester Test φ zu dem Niveau α ($\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\varphi] \leqslant \alpha$) für $H_0 \colon \vartheta \geqslant \vartheta_0$ gegen $H_1 \colon \vartheta < \vartheta_0$ der Form

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & T(x) < c \\ \gamma & T(x) = c \\ 0 & T(x) > c \end{cases} \tag{3}$$

Außerdem ist die Gütefunktion G_φ monoton fallend.

$c = \alpha$-Quantil von $\mathbb{P}_{\vartheta_0} \circ T^{-1}$

γ löst $G_\varphi(\vartheta_0) = \mathbb{P}_{\vartheta_0}[T > c] + \gamma \mathbb{P}_{\vartheta_0}[T = c] \overset{!}{=} \alpha$

<u>Tests im Gaußmodell</u>:

Jetzt behandeln wir den Fall, wo der Erwartungswert <u>und</u> die Varianz unbekannt sind.

Wir wollen aber wie früher nur eine der beiden Unbekannten testen.

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{N}_{m,v}^{\otimes n} : m \in \mathbb{R}, v > 0)$

<u>Linksseitiger Chiquadrat-Test für die Varianz</u>

Test für die Varianz

$(V-)$: $H_0 : v \leqslant v_0$ gegen $H_1 : v > v_0$

mit $v_0 > 0$ und Niveau α gegeben.

$\Rightarrow \theta_0 = \mathbb{R} \times [0, v_0], \theta_1 = \mathbb{R} \times (v_0, \infty)$

Beispiel 76. Testen ob ein Messgerät präzise genug ist.

Idee: Wenn m fest wäre, dann würde der Ablehnungsbereich

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)^2 > v_0 (1-a) \text{Qauntil von } \mathcal{X}_n^2 \right\}$$

Deshalb wäre natürlich zu raten, dass m mit

$$M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

zu ersetzen. Diesmal hätten wir statt χ_n^2 eine χ_{n-1}^2-Verteilung (Satz 55).

Das ist richtig für den linksseitigen Test, für rechtsseitige Tests braucht man die Bedingung <u>unverfälscht</u>.

<u>Likelihood-Quotienten Test:</u>

Bei Beobachtung von x wählen wir die Alternative wenn der Likelihood-Quotient

$$R(x) = \frac{\sup_{\vartheta \in \theta_1} \rho_\vartheta(x)}{\sup_{\vartheta \in \theta_0} \rho_\vartheta(x)}$$

größer als „c" ist.

$$\varphi = \begin{cases} 1 & R > c \\ 0 & R < c \end{cases}$$

In unserem Fall:

$$R(x) = \frac{\sup_{m \in R, v > v_0} \phi_{m,v}^{\otimes n}(x)}{\sup_{m \in R, v \leqslant v_0} \phi_{m,v}^{\otimes n}(x)} = \frac{\sup_{m \in R, v > v_0} \frac{1}{(2\pi v)^{n/2}} e^{-\frac{n}{2v} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)^2}_{\to V}}}{\sup_{m \in R, v \leqslant v_0} \frac{1}{(2\pi v)^{n/2}} e^{-\frac{n}{2v} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)^2}}$$

$$\text{mit } V = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - M)^2$$

$$R(x) \xlongequal{m=M} \frac{\sup_{v > v_0} e^{-\frac{n}{2} f(v/V)}}{\sup_{v \leqslant v_0} e^{-\frac{n}{2} f(v/V)}}$$

mit $f = \ln(x) + \frac{1}{x}$

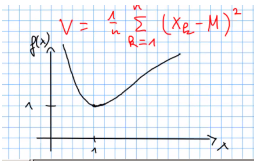


Abbildung 7.

Falls $V > v_0$: $\frac{v_0}{V} < 1$

$R(x) = \exp\left(\frac{n}{2}\left(\frac{V}{v_0} - \ln\left(\frac{V}{v_0}\right) - 1\right)\right)$

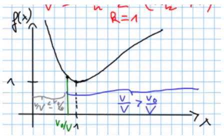


Abbildung 8.

Falls $V < v_0$: $R(x) = \exp\left(-\frac{n}{2}\left(\frac{V}{v_0} - \ln\frac{V}{v_0} - 1\right)\right)$

$\Rightarrow$ R ist eine streng monoton wachsende Funktion in V (und V^*)

Dann „anwenden“ von Satz 71 und Satz 55

findet man den Ablehnungsbereich

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} (X_k - M)^2 > v_0(\alpha\,\text{Fraktil von } \chi^2_{n-1})\right\}$$

R (also die Programmiersprache)ist nicht Klausurrelevant.

Satz 77. *(Linksseitiger χ^2-Test für die Varianz einer Normalverteilung)*

Sei das n-fache Gauß'sche Produktmodell

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{N}_{m,v}^{\otimes n}, m \in \mathbb{R}, v > 0)$$

Dann ist der Test

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \sum_{k=1}^{n} (X_k - M)^2 > v_0(\alpha\,\text{Fraktil von } \chi^2_{n-1}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein <u>bester Test</u> von

$$H_0\colon v \leqslant v_0 \,\text{gegen}\, H_1\colon v > v_0 \,\text{zum Niveau}\, \alpha$$

Beweis.

Idee: Reduktion zu einem 1-parametrigem Problem!

Für ein festes $\vartheta_1 = (m_1, v_1) \in \theta_1$

Sei das W-Maß: $v \leqslant v_1$

$$\tilde{\mathbb{P}}_v := \int \mathbb{P}_{m,v} \mathrm{dw}_v(m)$$

Mit $w_v = \mathcal{N}_{m_1, \frac{v_1 - v}{n}}$ *(für* $v = v_1, w_v = \delta_{m_1}$*)*

Es gilt:

$$\widetilde{\mathbb{P}_v} \circ M^{-1} = \mathbb{P}_{\vartheta_1} \circ M^{-1}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}_v} \circ M^{-1} = \int \mathcal{N}_{m, v/n} d\mathcal{N}_{m_1, \frac{v_1 - v}{n}}(m)$$

$$= \mathcal{N}_{m_1, \frac{v_1 - v}{n}} * \mathcal{N}_{0, v/n} = \mathcal{N}_{m_1, v_1/n} = \mathbb{P}_{\vartheta_1} \circ M^{-1}$$

Das bedeutet dass man durch Beobachtung des emp. Mittels $\widetilde{\mathbb{P}_v}$ *nicht von* $\mathbb{P}_{\vartheta_1}$ *unterscheiden kann.*

Die Likelihood-Funktion von $\widetilde{\mathbb{P}_v}$ *ist*

$$\tilde{\rho_v}(x) = \int_{\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} \phi_{m_1, \frac{v_1 - v}{n}}(m) \mathrm{dm} = c(v) \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-\sum_{k=1}^{n} \frac{(X_k - m)^2}{2v}}}_{e^{-\frac{\mathrm{nV}}{2v} - \frac{n(m - M_v)^2}{2v}}} e^{-\frac{(m - m_1)^2}{2(v_1 - v)/n}} \mathrm{dm}$$

$$= c(v) e^{-\frac{\mathrm{nV}}{2v}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{n(m - m_1)^2}{2(v_1 - v)} - \frac{n}{2v}(m - M_n)^2\right) \mathrm{dm}}$$

$$= \tilde{c}(m_1) \phi_{0, \frac{v_1 - v}{n}} * \phi_{M_n, \frac{v_1}{n}}(m_1)$$

$$= \tilde{\tilde{c}}(m_1) \exp\left(-\frac{(M_n - m_1)^2}{2v_1/n}\right)$$

$$\tilde{\rho_v}(x) = c'(v, m_1) \exp\left(-\frac{n-1}{2v} V^* - \frac{n(m_1 - M_n)^2}{2v_1}\right)$$

für $v \leqslant v_1$*.*

$\Rightarrow \{\tilde{\mathbb{P}}_v : 0 < v \leqslant v_1\}$ *ist* <u>*exponentielle Familie*</u> *bzgl. der Statistik* $T = V^*$ *mit* <u>*wachsendem Koeffizienten*</u> $a(v) = -\frac{n-1}{2v}$

$\Rightarrow$ *Aus Satz 71 gibt es einen besten Test* φ *von* $\{\tilde{\mathbb{P}}_v : v \leqslant v_0\}$ *gegen* $\{\tilde{\mathbb{P}}_{v_1}\}$ *mit Niveau* α*.*

$$\varphi = \mathbb{1}_{\{V^* > c\}} \text{ mit } c \text{ aus Bedingung } (\alpha - \text{Fraktil von } \widetilde{\mathbb{P}_{v_0}} \circ (V^*)^{-1})$$

$$\tilde{G}_\varphi(v_0) \tilde{\mathbb{P}}_{v_0}[V^* > c] == \alpha$$

$$\forall v \leqslant v_1 : \tilde{\mathbb{P}}_{v_0}[V^* > c] = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{P}_{m,v}[V^* > c]}_{\frac{n-1}{v} V^* \sim \chi^2_{n-1}} \mathrm{dw}_v(m) = \int \chi^2_{n-1}\left(\left(\frac{n-1}{v} c, \infty\right)\right) \mathrm{dw}_v(m) = \chi^2_{n-1}\left(\left(\frac{n-1}{v} c, \infty\right)\right)$$

Für $v = v_0$*:* $c = \frac{v_0}{n-1} \underbrace{\chi^2_{n-1} : 1 - \alpha}_{\alpha - \text{Fraktil von } \chi^2_{n-1}}$.

Für bel. $\vartheta = (m, v) \in \theta_0 . \Rightarrow v \leqslant v_0 \leqslant v_1$

$$G_\varphi(\vartheta) = \chi^2_{n-1}\left(\left(\frac{n-1}{v} c, \infty\right)\right) \leqslant \alpha$$

weil $\frac{n-1}{v} c > \frac{n-1}{v_0} c$

$\Rightarrow \varphi$ *ist ein Test von* θ_0 *gegen* θ_1 *vom Niveau* α*.*

Schließlich:

φ ist ein bester Test von θ_0 gegen θ_1:

Sei ψ ein anderer Test von θ_0 gegen θ_1 mit Niveau $\alpha \Rightarrow$ für $v \leqslant v_0$

$$\widetilde{G_\psi}(v) = \int \underbrace{G_\psi(m, v)}_{\leqslant \alpha} \mathrm{dw}_v(m) \leqslant \alpha$$

d.h. ψ als Test von $\{\tilde{\mathbb{P}}_v : v \leqslant v_0\}$ gegen $\{\tilde{\mathbb{P}}_{v_1}\}$ hat Niveau α.

φ ist aber optimal $\Rightarrow G_\psi(m, v_1) = \widetilde{G_\psi}(v_1) \leqslant \widetilde{G_\varphi}(v_1) = G_\varphi((m_1, v_1))$

$\square$

Ende Vorlesung 15

Klausurankündigungen: (unbenotet)

1. Klausur: 03.08.2021 (über Ecampus) open Book Klausur:

online um 08:45 geschrieben von 09:00 bis 11:00.

Upload um 11:15 auf ecampus.

2. Klausur 23.09.2021 gleiche Zeiten.

Wiederholung: von Beweis von Satz 71:

$0 < \alpha < 1$

$H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

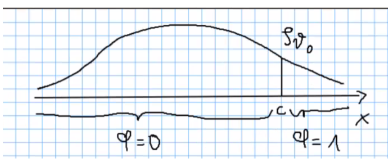


Abbildung 9.

$\vartheta < \vartheta'$, T Statistik (typischer Weise Schätzer für Parameter)

$$R_{\vartheta' : \vartheta}(x) = f_{\vartheta' : \vartheta}(T(x))$$

$f_{\vartheta' : \vartheta}$ monoton steigend.

Idee: Konstruiere NP-Test φ für ϑ_0 gegen bel. $\vartheta' > \vartheta_0$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} 1 & R_{\vartheta', \vartheta_0}(x) > c \\ \gamma & R_{\vartheta', \vartheta_0}(x) = c \\ 0 & R_{\vartheta', \vartheta_0}(x) < c \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{Monoton}} \varphi(x) = \begin{cases} 1 & T(x) > c' \\ \gamma & T(x) = c \\ 0 & T(x) < c' \end{cases} \quad \text{mit } c' \ \alpha\text{-Fraktil von } \mathbb{P}_{\vartheta_0} \circ T^{-1}$$

und $\alpha = G_\varphi(\vartheta_0) = \mathbb{P}[T > c'] + \vartheta \mathbb{P}[T = c']$

Unabhängig von ϑ'!

$\Rightarrow$NP $-$ Lemma φ ist bester Test von $\{\vartheta_0\}$ gegen $\{\vartheta'\}$ für alle $\vartheta' \in \theta_1$-

$$\Rightarrow G_\varphi(\vartheta') \geqslant G_\psi(\vartheta') \forall \vartheta' \in \theta_1$$

und ψ Test mit $\sup_{\vartheta \in \theta_0} G_\psi(\vartheta) \leqslant \alpha$.

Zu zeigen: φ hat Niveau α.

Sei $\vartheta < \vartheta_0 \Rightarrow \varphi$ ist bester Test ist NP-Test für $\{\vartheta\}$ gegen $\{\vartheta_0\}$

mit Niveau

$$\mathbb{E}_\vartheta[\varphi] = G_\varphi(\vartheta) =: \beta$$

NP-Lemma$\Rightarrow$ φ bester Test von $\{\vartheta\}$ gegen $\{\vartheta_0\}$ mit Niveau β.

$\Rightarrow \alpha = G_\varphi(\vartheta) \geqslant G_\psi(\vartheta_0) \forall \psi \colon G_\psi(\vartheta) \leqslant \beta$

$= \beta$ (konstanter Test $\psi = \beta$)

Linksseitiger χ^2-Test für Varianz im Gauß-Produktmodell:

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{N}_{m,v}^{\otimes n} \colon m \in \mathbb{R}, v > 0)$

$H_0 \colon v \leqslant v_0$ gegen $H_1 \colon v > v_0$.

$\theta_0 = \mathbb{R} \times (0, v_0], \theta_1 = \mathbb{R} \times (v_0, \infty)$

$\vartheta_1 = (m_1, v_1) \in \theta_1$

$$\tilde{\mathbb{P}}_v := \int \mathbb{P}_{m,v} \mathrm{dw}_v(m), w_v = \mathcal{N}_{m_1, \frac{v_1 - v}{n}}$$

Für $v = v_1$:$\Rightarrow \tilde{\mathbb{P}}_v = \mathbb{P}_{m_1, v_1} = \mathbb{P}_{\vartheta_1}$

$\Rightarrow \tilde{\rho}_v(x) = \int_{\mathbb{R}} \prod_{k=1}^n \phi_{m,v}(x_k) \phi_{m1, \frac{v_1 - v}{n}}(m) \mathrm{dm}$

$\tilde{\mathbb{P}}_v \circ M_n = \mathbb{P}_{\vartheta_1} \circ M_n = \mathbb{P}_{m_1, v_1} \circ M_n$

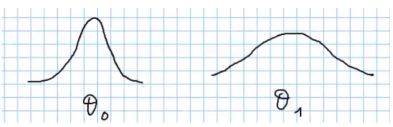


Abbildung 10.

Für $T = V^*$ bildet $\{\tilde{\mathbb{P}}_v \colon 0 \leqslant v \leqslant v_1\}$ eine exponentielle Familie.

Satz 71 $\Rightarrow \varphi = \mathbb{1}_{\{V^* > c\}}$ ist ein bester Test von $\{v \leqslant v_0\}$ gegen $\{v_1\}, \alpha = \tilde{\mathbb{P}}_{v_0}[V^* > c]$.

$\forall v \leqslant v_1 \colon \tilde{\mathbb{P}}_v[V^* > c] = \chi^2_{n-1}\left(\left(\frac{n-1}{v} c, \infty\right)\right)$

$\Rightarrow c = \frac{v_0}{n-1} \cdot \chi^2_{n-1:1-\alpha}$

φ ist ein Test von θ_0 gegen $\{\vartheta_1\}$ zum Niveau α:

$\forall v \leqslant v_0 \colon G_\varphi((m, v)) = \chi^2_{n-1}\left(\left(\underbrace{\frac{n-1}{v}}_{\geqslant \frac{n-1}{v_0}} c, \infty\right)\right) \leqslant \alpha.$

φ ist ein bester Test von θ_0 gegen θ_1 mit Niveau α.

ψ Test von θ_0 gegen θ_1 zu α

$\Rightarrow$ für alle $v \leqslant v_0$

$\widetilde{G_\psi}(v) = \int_{\mathbb{R}} G_\psi(m,v) \mathrm{dw}_v(m) \leqslant \alpha$

$\Rightarrow \psi$ hat als Test von $\{\tilde{\mathbb{P}}_v : v \leqslant v_0\}$ gegen $\{\tilde{\mathbb{P}}_{v_1}\}$ Niveau α.

φ ist optimal

$\Rightarrow G_\psi(\vartheta_1) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\vartheta_1}}[\psi] = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}_{v_1}}[\psi] \leqslant \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}_{v_1}}[\varphi] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\vartheta_1}}[\varphi] = G_\varphi(\vartheta_1)$

$\vartheta_1 \in \theta_1$ bel $\Rightarrow$ Behauptung.

Rechtsseitiger Chiquadrat-Test für die Varianz

Satz 78.

Sei $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{N}_{m,v}^{\otimes} : M \in \mathbb{R}, v > 0)$*. Dann ist der Test mit Ablehnungsbereich*

$$\{\Sigma_{k=1}^n (x_k - M_n)^2 < v_0 \chi^2_{n-1:\alpha}\}$$

ein bester unverfälschter Test von Niveau α *von*

$$(V+) H_0 : v \geqslant v_0 \text{ gegen } H_1 : v < v_0.$$

Wieso nur unverfälscht?

Wieso nicht mehr gleichmäßig?

Erinnerung:

$$\sup_{(m,v)\in\theta_0} G_\varphi((m,v)) \leqslant \alpha \leqslant \inf_{(m,v)\in\theta_1} G_\varphi((m,v))$$

Für $m \in \mathbb{R}$, sei

$$\varphi_m := \mathbb{1}_{\{\sum (x_k - m)^2 \leqslant v_0 c\}}, c = \chi^2_{n:\alpha}$$

Für bel. $(m', v) \in \theta_0$

$\Rightarrow G_{\varphi_m}((m',v)) = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_{m',v}^{\otimes n}}[\varphi_m] \leqslant \mathbb{E}_{\mathcal{N}_{m,v}^{\otimes n}}[\varphi_m]$ (Letzter Schritt ist Übung).

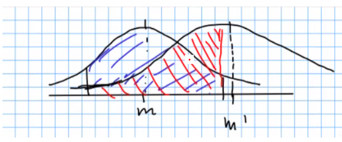


Abbildung 11.

$= \chi^2_n\left(\left[0, \frac{v_0 c}{v}\right]\right) \leqslant \alpha$ mit $\frac{v_0}{v} \leqslant 1$.

$\Rightarrow \varphi$ hat auf $\theta_0 = \mathbb{R} \times [v_0, \infty)$ Niveau α.

φ_m ist bester Test von $\{m\} \times [v_0, \infty)$ gegen $\{m\} \times (0, v_0)$

denn φ_m unter allen Tests ψ mit $\mathbb{E}_{(m,v_0)}[\psi] \leqslant \alpha$ an allen Stellen (m,v) mit $v < v_0$ die größte Macht

$\Rightarrow \mathbb{E}_{m,v}[\varphi_m] \geqslant \mathbb{E}_{m,v}[\psi] \forall v < v_0$.

Fixiere v und variiere in m

$\Rightarrow \varphi_m$ ändert sich

$\Rightarrow$ es gibt keinen (gleichmäßig) besten Test :(

Nachteil von φ_m:

$$\forall v\colon G_{\varphi_m}((m',v)) = \mathbb{E}_{\mathcal{N}^{\otimes n}_{(m',v)}}[\varphi_m] = \mathcal{N}^{\otimes n}_{(m',v)}\left[\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(x_k-(m-m'))^2}_{\to\infty} < v_0 c\right] \xrightarrow{|m'|\to\infty} 0$$

aus dominierte Konvergenz.

$\Rightarrow$ φ_m ist verfälscht!

$\varphi = \mathbb{1}_{\{\sum_{k=1}^n x_k - M\}^2 < v_0 \chi^2_{n-1:\alpha}}$

ist unverfälscht!

$(m,v)\in\theta_1 \quad (v<v_0)$

$$G_\varphi(m,v) = \chi^2_{n-1}\left(\left[0, \frac{v_0}{v}\chi^2_{n-1:\alpha}\right]\right) > \alpha.$$

Einseitiger t-Test für Erwartungswert

Sei $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{N}^{\otimes n}_{m,v}\colon m\in\mathbb{R}, v>0)$ gegeben.

$(M-)\colon H_0\colon m\leqslant m_0$ gegen $H_1\colon m>m_0$

$\Rightarrow \theta_0 = (-\infty, m_0]\times\mathbb{R}_+,\ \theta_1 = (m_0,\infty)\times\mathbb{R}_+$

Beispiel 79. Minigurken

Welchen Test würden wir aus dem MLP wählen?

$R(x) = \frac{\sup_{m>m_0, v>0}\phi^{\otimes n}_{m,v}(x)}{\sup_{m\leqslant m_0, v>0}\phi^{\otimes n}_{m,v}(x)} = \frac{\sup_{m>m_0}\tilde{V}_m^{-n/2}}{\sup_{m\leqslant m_0}\tilde{V}_m^{-n/2}}$

Wobei $\widetilde{V}_m := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k-m)^2$. Für gegebenes m ist $\phi^{\otimes n}_{m,v}(x)$ maximal für $v = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k-m)^2 = \widetilde{V}_m$.

$$\phi^{\otimes n}_{m,\tilde{V}_m}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{V}_m}} e^{-\frac{\sum(X_k-m)^2}{2\tilde{V}_m}} = \text{const}\cdot\tilde{V}_m$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dm}}\tilde{V}_m = -\frac{2}{n}\sum_{k=1}^n (X_k-m) = -2(M_n-m)$$

$\Rightarrow$

$$R(x) = \begin{cases} (\tilde{V}_{m_0}/V)^{-n/2} & \text{falls } M_n\leqslant m_0 \\ (V/\tilde{V}_{m_0})^{-n/2} & \text{falls } M_n > m_0 \end{cases}$$

Wobei V die emp. Varianz ist.

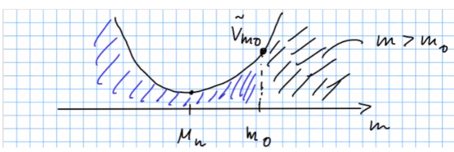


Abbildung 12.

Aus letzter VL:

$$R(x) = \begin{cases} (\tilde{V}_{m_0}/V)^{-n/2} & \text{falls}\, M_n \leqslant m_0 \\ (V/\tilde{V}_{m_0})^{-n/2} & \text{falls}\, M_n > m_0 \end{cases}$$

$\widetilde{V_{m_0}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - m)^2$

$V = \frac{1}{n}\sum (X_k - M_n)^2$

Verschiebungsformel:

$$\tilde{V}_{m_0} = V + (M - m_0)^2$$

$\Rightarrow \frac{\tilde{V}_{m_0}}{V} = 1 + \frac{(M_n - M)^2}{V}$

Mit V^*:

$$T_{m_0} = \frac{\sqrt{n}(M - m_0)}{\sqrt{V^*}}\,(\text{folgt}\,\text{aus}\,\text{Student})$$

$$\frac{\tilde{V}_{m_0}}{V} = 1 + \frac{T_{m_0}^2}{n-1}$$

$\Rightarrow R$ ist strikt wachsend in T.

$\Rightarrow$Satz 71 hat Gestalt $\varphi = \mathbb{1}_{\{T_{m_0} > t\}}$.

Für jedes $\mathbb{P}_{m_0,v}$ hat T_{m_0} die t_{n-1}-Verteilung

$\Rightarrow$ Für geg. α wählt man

$$t = t_{n-1:1-\alpha}$$

Satz 80.

Im n-fachen Gauß'schen Produktmodell ist der Test

$$\varphi(x) = \mathbb{1}_{\left\{\frac{M_n - m_0}{\sqrt{V^*/n}} > t_{n-1:1-\alpha}\right\}}$$

ein bester unverfälschter Test zum Niveau α von

H_0: $m \leqslant m_0$ gegen H_1: $m > m_0$.

Beweis.

a) o.B.d.A. $m_0 = 0$

Reparametrisieren

$$\mu = \frac{m\sqrt{n}}{v}, \eta = \frac{1}{2v}$$

$\Rightarrow \rho_{\mu,\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \mathrm{n} e^{-\frac{1}{2v}\sum (X_k - m)^2} = \mathrm{const}(m,v) e^{\mu \tilde{M}_n - \eta S}$

mit $\widetilde{M_n} = \sqrt{n} M_n$

und $S = \sum_{k=1}^n X_k^2$

Test in (μ, η):

H_0: $\mu \leqslant 0$ *gegen* H_1: $\mu > 0$

$T_0 = M_n \sqrt{\frac{n}{V^*}} = \frac{\tilde{M}_n}{\sqrt{S - \tilde{M}_n^2}} \sqrt{n-1}$.

$\Rightarrow \{T_0 > t_{n-1:1-\alpha}\} = \left\{ \frac{\tilde{M}_n}{\sqrt{S - \tilde{M}_n^2}} > \frac{t_{n-1:1-\alpha}}{\sqrt{n-1}} \right\} = \{\tilde{M}_n > f(S)\}$

$$f(S) = r\sqrt{\frac{S}{1+r^2}}, r = \frac{t_{n-1:1-\alpha}}{\sqrt{n-1}}.$$

b)

$(*)$ *Behauptung: Sei* ψ *unverfälscht zum Niveau* α

$\forall h$: $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ *mit* $h(x) e^{-\delta x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 \forall \delta > 0$.

$$\mathbb{E}_{(m,\eta)}[h(S)(\varphi - \psi)] = 0$$

Es gilt $\mathbb{E}_{(m,\eta)}[\psi] = \alpha$ *für alle* $\eta > 0$, *denn*

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \mathbb{E}_{(0,\eta)}[\psi] \leqslant \alpha \leqslant \mathbb{E}_{(\varepsilon,\eta)}[\psi]$$

und die Verteilung $\mathbb{P}_{\mu,\eta}$ *ist stetig in* μ.

$\Rightarrow \mathbb{E}_{(0,\eta)}[\psi] = \alpha$ *für alle* η.

Satz von Student $\Rightarrow \mathbb{E}_{(0,\eta)}[\varphi] = \mathbb{P}_{(0,\eta)}[T_0 > t_{n-1:1-\alpha}] = \alpha$

$\Rightarrow \mathbb{E}_{(0,\eta)}[\varphi - \psi] = 0$ *für alle* η.

Da $\rho_{\mu,\eta} = c(m,v) e^{-\eta S + \mu \tilde{M}_n}$ *gilt* $\forall k \in \{0,1,\dots\}$

$0 = \mathbb{E}_{(0,\eta+k)}[\varphi - \psi] = \mathbb{E}_{(0,\eta)}[e^{-\mathrm{kS}}(\varphi - \psi)] \tilde{c}(v,k)$

$\Rightarrow \mathbb{E}_{(0,\eta)}[g(e^{-S})(\varphi - \psi)] = 0$

für alle Polynome Polynome g *(Linearität im Erwartungswert).*

Weierstraß Approximationssatz:

$\Rightarrow \mathbb{E}_{(0,\eta)}[g(e^{-S})(\varphi - \psi)] = 0$

für alle stetigen Funktionen g: $[0,1] \to \mathbb{R}, 0 \leqslant e^{-S} \leqslant 1$.

Setzte $g_\delta(x) = \begin{cases} x^\delta h(\ln(1/x)) & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

für $\delta > 0$ *und* h *gegebene stetige Funktion*

h: $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ *mit* $\lim_{x \to \infty} h(x) e^{-\delta x} = 0 \forall \delta > 0$

$\Rightarrow \mathbb{E}_{(0,\eta)}[e^{-\delta S} h(S)(\varphi - \psi)] = 0 \forall \delta > 0$.

$\Rightarrow \mathbb{E}_{(0,\eta)}[h(S)(\varphi - \psi)] = 0$

$\Rightarrow (*)$, *damit ist die Behauptung bewiesen.*

c): φ *bester Test:*

Sei $(\mu, \eta) \in \theta_1 = (0,\infty)^2$ *gegeben:*

$\Rightarrow$ *Likelihood-Quotient*

$$R_{(\mu,\eta):(0,\eta)}(x) = \frac{\rho_{\mu,\eta}(x)}{\rho_{0,\eta}(x)} = c(m,v)e^{\mu\tilde{M}_n(x)}$$

Ist eine strikt wachsende Funktion von $\tilde{M}_n$.

$\Rightarrow \varphi(x) = \mathbb{1}_{\{\tilde{M}_n > f(S)\}} = \mathbb{1}_{\left\{R_{(\mu,\eta):(0,\eta)} > \underbrace{c \cdot e^{\mu f(S)}}_{h(S)}\right\}}.$

$h(x)e^{-\delta x} = e^{\mu\sqrt{x} - \delta x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \forall \delta > 0.$

Aber:

$$\mathbb{E}_{(\mu,\eta)}[\varphi - \psi] = \int (\varphi - \psi)\rho_{\mu,\eta}(x)\mathrm{dx} = \int (\varphi - \psi)c \cdot e^{\mu\tilde{M}_n(x)}\rho_{0,\eta}(x)\mathrm{dx} = \mathbb{E}_{(0,\eta)}[(\varphi - \psi)R_{(\mu,\eta):(0,\eta)}]$$

$$\overset{(*)}{=\!=} \mathbb{E}_{(0,\eta)}[(\varphi - \psi)(R_{(\mu,\eta):(0,\eta)} - h(S))] \geqslant 0 \text{ weil}$$

wenn $R > h(S) \Rightarrow \varphi = 1 \Rightarrow \varphi - \psi \geqslant 0$

wenn $R < h(S) \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \varphi - \psi \leqslant 0.$ □

Bemerkung 81. Analoges gilt für den rechtsseitigen Test!

$H_0 \colon m \geqslant m_0$ gegen $H_1 \colon m < m_0$

$$\varphi(x) = \mathbb{1}_{\left\{\frac{M_n - m_0}{\sqrt{V^*/n}} < t_{n-1:\alpha}\right\}}$$

ist bester unverfälschter Test zum Niveau α.

Zweiseitige Tests:

$H_0 \colon m = m_0$ gegen $H_1 \colon m \neq m_0$

$\Rightarrow \begin{cases} \theta_0 = \{m_0\} \times (0,\infty) \\ \theta_1 = (\mathbb{R} \setminus \{m_0\}) \times (0,\infty) \end{cases}$

Satz 82. *(Zweiseitiger t-test)*

Im n-fachen Produktmodell ist der Test

$$\varphi(x) = \mathbb{1}_{\left\{|M_n - m_0|\sqrt{\frac{n}{V^*}} > t_{n-1:1-\alpha/2}\right\}}$$

ein bester unverfälschter Test zum Niveau von

$$H_0 \colon m = m_0 \text{ gegen } H_1 \colon m \neq m_0$$

Beweis (Georgii).

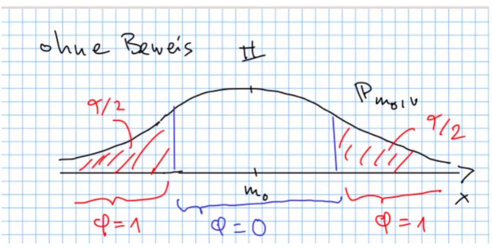


Abbildung 13.

Beidseitiger Chiquadrat Test: Blatt 9 Aufgabe 5

Anmerkung zu Aufgabe 2 auf Blatt 9:

2- Stichproben Problemm:

$\underbrace{X_1, \ldots, X_k}_{\sim \mathcal{N}(m,v)}$ und $\underbrace{Y_1, \ldots, Y_l}_{\sim \mathcal{N}(m',v)}$ unabhängig.

$H_0 \colon m = m'$ gegen $H_1 \colon m \neq m'$

Likelihood Quotienten Test:

$\varphi = \mathbb{1}_{\{|T| > c\}}$

mit $T = \sqrt{\frac{1}{1/k + 1/l}} \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{V^*}} \sim t_{k+l-2}$ und $V^* = \frac{1}{k+l-2}(\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2)$

6.3 χ^2-Anpassungstest

Beispiel 83. (Mendels Erbsen 1865)

Beobachtung bei Erbsen:

a) Form

b) Farbe

a) Form $\in \{\text{rund}, \text{kantig}\}$ mit rund dominant

b) Farbe $\in \{\text{gelb}, \text{grü}n\}$ mit gelb dominant

d.h. 4 verschiedene Genotypen für die Form:

$\underbrace{(\text{rund}, \text{rund})\,(\text{rund}, \text{kantig})\,(\text{kantig}, \text{rung})}_{\text{Phaenotyp:rund}}$

und $\underbrace{(\text{kantig}, \text{kantig})}_{\text{Phaenotypkantig}}$.

Ähnlich für die Farbe.

Beobachtungsergebnis : $n = 556$

absolut	gelb	grün
rund	315	108
kantig	101	32

Tabelle 1.

Zu testen:

theoretisch	gelb	grün
rund	$\frac{9}{16} \approx 0.562$	$\frac{3}{16} \approx 0.188$
kantig	$\frac{3}{16} \approx 0.188$	$\frac{1}{16} \approx 0.063$

Tabelle 2.

vs:

relativ	gelb	grün
rund	0.567	0.194
kantig	0.182	0.058

Tabelle 3.

Dieses Bspo. ist ein besonderer Fall von Folgendem:

Seien $\{1, \ldots, s\}$ die möglichen ausgänge einer Messung und $\rho(k)$ die W'keit Ausgang k zu messen.

$\sum \rho(k) = 1$, $\rho(k) > 0$.

Wir wiederholen die Messung n-mal (unabhängig). Dann sind die Häufigkeiten

$$h_n(k) = |\{m \in \{1, \dots n\} \colon X_m = k\}|$$

Dann ist die Verteilung

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{k=1}^{s} \{h_n(k) = a_k\}\right] = \binom{n}{a_1, \dots, a_s} \left(\prod_{k=1}^{s} \rho(k)^{a_k}\right) \mathbb{1}_{\{\sum_{k=1}^{s} a_k = n\}}$$

$\underbrace{(, \dots, k, \dots,)}_{n}$ mit $\binom{n}{a_1, \dots, a_s} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{s} a_i!}$.

Multinomialverteilung: $s = 2 \Rightarrow$ Binomialverteilung.

Ende Vorlesung 17

$E = \{1, \dots, s\}$

Vermutete Verteilung $\{\rho(i)\}_{i=1}^{s}, \sum \rho(i) = 1$, $\rho(i) > 0$.

n-unabhängige Wiederholungen

$h_n(k) := |\{m \in \{1, \dots, n\} \colon X_m = k\}|$

ist multinomialverteilt.

Multi$(n, \rho(1), \dots, \rho(s))$

Wir betrachten die Stichprobenfunktion

$$D_{n,\rho}(X_1, \dots, X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(h_n(k) - n\rho(k))^2}{n\rho(k)}$$

Wir sind interessiert an der Verteilung von $D_{n,\rho}$ und werden einen Test einführen der Gestalt:

$$\varphi = \mathbb{1}_{\{D_{n,\rho} > c\}}$$

zum Niveau α.

In Mendels Erbsen Beispiel:

1. (gelb,rund) $\rho(1) = 9/16$
2. (gelb,kantig) $\rho(2) = 3/16$
3. (grün,rund) $\rho(3) = 3/16$
4. (grün,kantig) $\rho(4) = 1/16$

Sei $h_n^*(k) = \frac{h_n(k) - n\rho(k)}{\sqrt{n\rho(k)}}$, $k = 1, \dots, s$.

Dann ist der Vektor h_n^* stets in der Hyperebene

$$H_\rho := \left\{x \in \mathbb{R}^s \colon \sum_{k=1}^{s} \sqrt{\rho(k)} x_k = 0\right\}$$

In der Tat

$$\sum_{k=1}^{s} \sqrt{\rho(k)} \frac{h_n(k) - n\rho(k)}{\sqrt{n\rho(k)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{s} (h_n(k) - n\rho(k)) = \frac{1}{\sqrt{n}}(n-n) = 0.$$

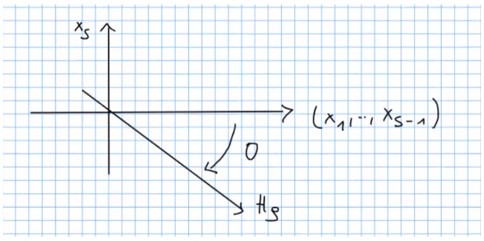


Abbildung 14.

Sei O eine orthogonale Matrix mit letzter Spalte $\left(\sqrt{\rho(k)}\right)_{k=1}^{s}$

$$O = \begin{pmatrix} * & * & \sqrt{\rho(1)} \\ * & * & \vdots \\ * & * & \sqrt{\rho(k)} \end{pmatrix}$$

Dann ist O eine Drehung s.d. $O\{x \in \mathbb{R}^s : x_s = 0\} = H_\rho$ denn für $y \in H_\rho$:

$$\mathrm{O}^T y = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ \sqrt{\rho(1)} & \dots & \sqrt{\rho(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \in \{x \in \mathbb{R}^s : x_s = 0\}$$

$\Rightarrow O^T H_\rho = \{x \in \mathbb{R}^s : x_s = 0\}$.

Wir wollen herausfinden welche Verteilung hat h_n^* im Limes. Da $h_n^* \in H_\rho$, suchen wir zunächst die orthogonale Projektion von $x \in \mathbb{R}^s$ auf H_ρ. Diesen Punkt nennen wir $\pi_\rho(x)$.

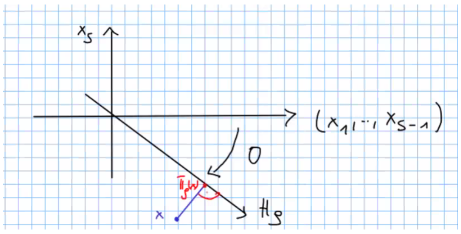


Abbildung 15.

$$\Rightarrow \pi_\rho := O \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ & 0 & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}} \mathrm{O}^T$$

denn $\pi_\rho(x) \in H_\rho = O\{x \in \mathbb{R}^s : x_s = 0\}$

und

$$<x - \pi_\rho(x), H_\rho> = <O^T x - \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ & 0 & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} O^T x, \{x_s = 0\}>$$

$$= <(0, \dots, (O^T x)_s), \{x_s = 0\}> = 0$$

Definition 84. *Die Standartnormalverteilung auf H_ρ*

$$\mathcal{N}_\rho := \mathcal{N}_{0,1}^{\otimes s} \circ \pi_\rho^{-1}$$

ist die Normalverteilung unter der Projektion π_ρ.

Bemerkung 85.

$$\underbrace{\left(\overbrace{\mathcal{N}_s\left(0,\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&0&\\&0&1&\\&&&0\end{pmatrix}\right)}^{\mathcal{N}_{0,1}^{\otimes s-1}\otimes\delta_0}\right)}_{\overset{\text{Trafo}}{=\!=\!=}\mathcal{N}_s\left(0,O\underbrace{\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&0&\\&0&1&\\&&&0\end{pmatrix}O^T}_{\pi_\rho}\right)} \circ \mathrm{O}^T = \mathcal{N}_\rho$$

Satz 86.

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} h_n^* \overset{\mathcal{D}}{=\!=} \mathcal{N}_\rho.$$

ohne Beweis.

Daraus erhalten wir folgendes Korollar:

Folgerung 87.

$\lim_{n\to\infty} D_{n,\rho} \overset{\mathcal{D}}{=\!=} \chi^2_{s-1}$.

Beweis.

$$\mathbb{P}[D_{n,\rho} \leqslant c] = \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{s} (h_n^*(i))^2 \leqslant c\right]$$

$$= \mathbb{P}[h_n^* \in \{x \in \mathbb{R}^s \|x\|^2 \leqslant c\}]$$

$$\underbrace{\xrightarrow{n\to\infty}}_{\text{Satz 86}} \mathcal{N}_\rho(\{x \in \mathbb{R}^s : \|x\|^2 \leqslant c\})$$

$$\overset{\text{geht, weil} O^T \text{orhtogonal}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} (\mathcal{N}_{0,1}^{\otimes s-1} \otimes \delta_0)(\{x \in \mathbb{R}^{s-1} : \|x\|^2 \leqslant c\}) = \mathcal{N}_{0,1}^{\otimes s-1}(\{x \in \mathbb{R}^{s-1} : \|x\|^2 \leqslant c\})$$

$$\Rightarrow \chi^2_{s-1}([0, c])$$

□

Anwendung: χ^2-Anpassungstest

$E = \{1, \ldots, s\}$

$(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}}, \mathbb{P}_\vartheta = \vartheta^{\otimes \mathbb{N}} : \vartheta \in \theta)$

$\theta = \{\vartheta = (\vartheta(i))_{i=1}^s : \sum_{i=1}^s \vartheta(i) = 1\}$.

Definition 88. *Ein Test fpr das Problem*

$H_0\colon \vartheta = \rho$ *gegen* $H_1\colon \vartheta \neq \rho$

mit Ablehnungsbereich $\{D_{n,\rho} > c\}$ *heißt* *χ^2-Anpassungstest nach n Beobachtungen.*

Man setzte $c = \chi^2_{s-1:1-\alpha}$*, dann*

$$\chi^2_{s-1}((c,\infty)) = \alpha$$

Bemerkung 89.

Faustregel: Die Approximation für den Fall

$$n \geqslant \frac{5}{\min(\rho(i))}$$

ist die ausreichend gut.

Für kleinere n: $\mathbb{P}[D_{n,\rho} \leqslant c] = \mathbb{P}[\sum_{i=1}^n (h_n^*(i))^2 \leqslant c]$.

Es gilt:

$$D_{n,\rho} = \sum_{k=1}^s \frac{(h_n(k) - n\rho(k))^2}{n\rho(k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^s h_n(k)^2 / \rho(k) - n.$$

Beispiel 90.

$D_{556,\rho} = \frac{16}{556}\left(\frac{315^2}{9} + \frac{108^2 + 101^2}{3} + 32^2\right) - 556 \approx 0.47$

Für $\alpha = 0.1$: $\chi^2_{3:0.9} = 6.3$

$\Rightarrow D_{556,\rho} < 6.3 \Rightarrow \varphi = 0$

$\Rightarrow$ Wir lehnen die Nullhypothese nicht ab.

Beispiel 91. Test eines Pseudozufallsgenerators:

$n = 10^4$, Ziffern $\in \{0,\ldots,9\}$

$\Rightarrow \rho(i) = \frac{1}{10}, i = 0,\ldots,9.$

Ziffern	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeiten	1007	987	928	986	1010	1029	987	1006	1034	1026

$\alpha = 5\% \Rightarrow \chi^2_{9,0.95} \approx 17$

und $D_{10^4,\rho} = \frac{1}{104}\sum_{i=0}^9 \frac{h_n(i)}{1/10} - 10^4 \approx 8.6 < 17.$

Test lehnt die Hypothese der Gleichverteilung nicht ab mit 5% Fehlerniveau.

Beispiel 92. Test auf Lottozahlen

n=4854 Ziehungen 6 aus 49.

Sind alle Zahlen gleichverteilt? (Daten aus dem Übungsblatt)

1. Test: 13 ist seltene Zahl: „13 ist eine Unglückszahl“.

   $H_0\colon p \leqslant p_0 = \frac{6}{49}$ gegen $H_1\colon p > p_0$

   $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, X_i = \begin{cases} 1 & \text{falls 13} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\sim\mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ approximativ.

$\varphi(x) = \mathbb{1}_{\{\bar{X} > c\}}$ $\mathbb{P}_0[\bar{X} > c] = \alpha \Rightarrow c \approx \frac{6}{49} + \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha)$

$\alpha = 10\% \Rightarrow c \approx 0.129 > \frac{6}{49} \approx 0.122$

Relative H'keit der 13: $\frac{532}{4854} \approx 0.110$.

$\Rightarrow$Die Nullhypothese wird akzeptiert.

2. Test.: „13 ist keine Unglückszahl“

   H_0: $p \geqslant p_0 = \frac{6}{49}$ gegen H_1: $p < p_0$.

   $\Rightarrow \varphi(x) = \mathbb{1}_{\{\bar{X} < c\}}$

   $\mathbb{P}_=[\bar{X} < c] = \alpha$

   $\Rightarrow c = p_0 + \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\Phi^{-1}(\alpha)$

   Mit $\alpha = 0.1 \Rightarrow c \approx 0.116 > 0.11$

   Die Nullhypothese wird abgelehnt.

   Bemerkung 93. Diese Tests sind künstlich.

   Wir haben zuerst bemerkt, dass 13 weniger häufig gezogen wurde und dann haben wir den Test durchgeführt. $\Rightarrow$ Das Ergebnis war von vornherein klar!

3. „Zahlen sind gleichverteilt“

   H_0: $p(i) = \frac{1}{49}$ vs H_1: $p(i) \neq \frac{1}{49}$.

   $N = 6 \cdot n, n = 4856$

$$D_{n,\rho} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{49} \frac{h_n(k)^2}{\rho(k)} - N \approx 43$$

   $\chi^2_{48:0.9} = 61$

   $\Rightarrow$Unser Anpassungstest lehnt die Hypothese der Gleichverteilung nicht ab!

Ende Vorlesung 18

---

7 Bonus: Interessantes Wissen aus den Blättern

7.1 Blatt 01

Bemerkung 94. (Momentenmethode):

- Gegeben seien $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. Zufallsvariablen.
- Wir kennen die Verteilung, gesucht sind Schätzungen von einem oder mehreren Parametern.
- Bestimmen der ersten k theoretischen Momente $\mathbb{E}(X^j)$ der Verteilung und ermitteln einen Zusammenhang zu den gesuchten Parametern.

- Ersetzen der theoretischen Momente durch $\frac{1}{n}\sum X_i^j$ und lösen nach den gesuchten Parametern auf.

7.2 Blatt 03

Es sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \theta)$ ein stat. Modell.

Definition 95. *Wir nennen eine Statistik $T: \mathcal{X} \to \Sigma$ mit abzählbarem Wertebereich Σ:*

a) *suffizient, falls für alle $s \in \Sigma$ eine Verteilung Q_s auf $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ existiert, s.d.*

$$\mathbb{P}_\vartheta[\cdot|T = s] = Q_s$$

für alle $\vartheta \in \theta$ mit $\mathbb{P}_\vartheta[T = s] > 0$ und

b) *vollständig, falls keine nicht identisch verschwindende Funktion $g: \Sigma \to \mathbb{R}$ existiert, s.d. $\mathbb{E}_\vartheta[g(T)] = 0$ für alle $\vartheta \in \theta$.*

Für eine eine relle Schätzfunktion τ:

Satz 96. *(Satz von Rao-Backwell)*
Es sei T suffizient und S ein Erwartungstreuer Schätzer für τ. Wir definieren $g_S: \Sigma \to \mathbb{R}$ durch $g_S(s) := \mathbb{E}_{Q_s}[S]$. Der Schätzer $g_S(T)$ ist erwartungstreu für τ und für alle $\vartheta \in \theta$ gilt:

$$\mathrm{Var}_\vartheta[g_S(T)] \leqslant \mathrm{Var}_\vartheta[S].$$

Satz 97. *(Satz von Lehmann-Scheffè)*
Es sei $g: \Sigma \to \mathbb{R}$ gegeben und T sei suffizient und vollständig. $g(T)$ ist ein bester Schätzer für τ, falls $g(T)$ erwartungstreu für τ ist.

Beispiel 98. Dichten in Exponentiellen Familien:

- $f_\vartheta(x) = \frac{\vartheta^x}{x!}\exp(-\vartheta), x \in \mathbb{N}_0$ und $\vartheta > 0$.
- Inverse Gammaverteilung 1: $f_\alpha(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{(-\alpha+1)} \exp(-\beta/x) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, wobei $\beta > 0$ bekannt, $x \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$.
- Inverse Gammaverteilung 2: $f_\alpha(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{(-\alpha+1)} \exp(-\beta/x) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, wobei $\alpha > 0$ bekannt, $x \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$.

Kein Element einer Exponentiellen Familie:

- $f_\vartheta(x) = \exp(-2\log(\vartheta) + \log(2x)) \mathbb{1}_{(0,\vartheta)}(x)$, wobei $x \in \mathbb{R}, \vartheta > 0$.
- Laplace-Verteilung: $f_\vartheta(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x - \vartheta|)$, wobei $x, \vartheta \in \mathbb{R}$.

7.3 Blatt 05

7.4 Blatt 06: Zusammenhang zwischen Konfidenzbereichen und Tests

Für ein stat. Modell $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \theta)$ gilt

- Ist $C: \mathcal{X} \to \mathcal{P}(\theta)$ ein Konfidenzbereich für ϑ zum Niveau $1 - \alpha$ und $\vartheta_0 \in \theta$, so ist $K := \{x \in \mathcal{X}: \vartheta_0 \notin C(x)\}$ der kritische Bereich eines Tests von der Hypothese $\theta_0 = \{\vartheta\}$ gegen die Alternative $\theta_1 = \{\vartheta: \vartheta \neq \vartheta_0\}$ zum Niveau α.
- Es sei für jedes $\vartheta \in \theta$ K_ϑ der kritische Bereich eines Tests von der Hypothese H_0 mit $\theta_0 = \{\vartheta\}$ gegen die Altenative H_0 mit $\{\tilde{\vartheta}: \tilde{\vartheta} \neq \vartheta_0\}$ zum Niveau α. Dann ist $C = \{(x, \vartheta) \in \mathcal{X} \times \vartheta: x \in K_\vartheta^c\}$. ein Konfidenzbereich zum Niveau $1 - \alpha$ für ϑ.

$\sum_{k=1}^s \sqrt{\rho(k)}$