Einführung in die Grundlagen der Numerik (WS 22/23)

Manuel Hinz

11. Oktober 2022

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Diese Mitschrift von der Vorlesung Einführung in die Grundlagen der Numerik (Dölz,WS 2022/2023) wird von mir neben der Vorlesung geschrieben und ist dementsprechend Fehleranfällig. Fehler gerne an mh@mssh.dev!

Kapitel 1

Orthogonalität

1.1 Grundlegende Definitionen

Definition 1.1. *Sei X ein $\mathbb{R}$ Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt* ***Skalarprodukt*** *oder inneres Produkt, falls*

$$\forall f \in X \setminus 0 : \langle f, f \rangle > 0 \tag{Positiviät}$$

$$\forall f, g \in X : \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \tag{Symmetrie}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g, h \in X : \langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle \tag{Linearität im ersten Argument}$$

Bemerkung 1.2. *Symmetrie und Linearität im ersten Argument implizieren, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine bilineare Abbildung ist.*

Definition 1.3. *Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wir bezeichnen die zugehörige* ***Norm*** *(in Abhänigkeit von einem Vektor $f \in X$) mit*

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Lemma 1.4. *Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann gil die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:*

$$\forall f, g \in X : \langle f, g \rangle \leq \|f\| \cdot \|g\| \tag{C.S.}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn f und g linear abhängig sind.

Beweis. O.B.d.A. $f, g \neq 0$, da sonst offensichtlich Gleichheit gilt. Sei $\alpha \neq 0$, dann gilt mit $f, g \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \|f - \alpha g\|^2 = \langle f - \alpha g, f - \alpha g \rangle = \|f\|^2 - 2\alpha \langle f, g \rangle + \alpha^2 \|g\|^2$$

Wählen wir jetzt $\alpha = \frac{\langle f, g \rangle}{\|g\|^2}$ folgt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f\|^2 - \frac{2\langle f, g \rangle^2}{\|g\|^2} + \frac{\langle f, g \rangle^2}{\|g\|^2} \\ &\implies \langle f, g \rangle^2 \leq \|f\|^2 \cdot \|g\|^2. \end{aligned}$$

$\square$

Eingefügte Bemerkung. *Rechnung zur Begründung von $\langle f - \alpha g, f - \alpha g \rangle = \|f\|^2 - 2\|\alpha \langle f, g \rangle + \alpha^2 \|g\|^2$:*

$$\begin{aligned} &\langle f - \alpha g, f - \alpha g \rangle \\ &= \langle f, f - \alpha g \rangle - \alpha \langle g, f - \alpha g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \alpha \langle f, g \rangle - \alpha \langle g, f \rangle + \alpha^2 \langle g, g \rangle \\ &= \|f\|^2 - 2\|\alpha \langle f, g \rangle + \alpha^2 \|g\|^2 \end{aligned}$$

Beispiel 1.5. *1.* $X = \mathbb{R}^n$ *und* $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ *(Euklidisches Skalarprodukt)*

2. $X = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = x^\perp Ay$, *wobei* A *positiv definit und symmetrisch ist*

3. $I = [a, b], w : I \to \mathbb{R}$ *beschränkt und strikt positiv:*

$$X = \left\{ f : I \to \mathbb{R} : \int_a^b f(x)^2 w(t)dt < \infty \right\} = L^2(I, w)$$

mit

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$$

Eingefügte Bemerkung. *Die Definition von* $L^2(I, w)$ *ist hier nicht ganz richtig, man müsste natürlich noch Äquivalenzklassen, bzgl. Gleichheit bis auf Nullmengen, bilden. Dies wird hier, da Analysis 3 / Wtheo. nicht nicht vorrausgesetzt wird, ignoriert.*

Definition 1.6. *Sei* X *ein* $\mathbb{R}$*-VR mit Skalarprodukt* $\langle\cdot, \cdot\rangle$. $f, g \in X$ *heißen* ***orthogonal****, falls* $\langle f, g\rangle = 0$.

Bemerkung 1.7. *Im* $\mathbb{R}^n$ *mit dem euklidischen Skalarprodukt stimmt Definition 1.6, wegen*

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cos(\theta), \theta = \angle(x, y),$$

mit unserem bisherigen Verständnis überein.

1.2 Bestapproximationseigenschaft

Definition 1.8. *Sei* V *ein* $\mathbb{R}$*-VR mit Skalarprodukt* $\langle\cdot, \cdot\rangle$ *und* U *ein Unterraum.*

$$U^\perp = \{v \in V : \langle v, u\rangle = 0, \forall u \in U\}$$

heißt das ***orthogonale Komplement*** *von* U.

Satz 1.9. *Unter den Annahmen von Definition 1.8 und der zusätzlichen Annahme, dass* U *endlich dimensional ist, gilt folgendes für* $v \in V$*:*

$$\|v - u\| = \min_{w\in U} \|v - w\|$$

genau dann, wenn $v - u \in U^\perp$.

Beispiel 1.10. $V = \mathbb{R}^2$, $U = span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ *mit euklidischem Skalarprodukt* $\langle\cdot, \cdot\rangle$. *Dann ist* $U^\perp = span\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

Beweis von Satz 1.9. Sei $v \in V$ und seien $u, w \in U$. Dann gilt:

$$\|v - w\|^2 = \langle v - w, v - w\rangle = \langle(v - u) + (u - w), (v - u) + (u - w)\rangle$$
$$= \|v - u\|^2 + 2\langle v - u, \underbrace{u - w}_{\in U}\rangle + \|u - w\|^2 \geq \|v - u\|^2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $w - u = 0$ (da dann der $\|u - w\|$ Term verschwindet). □

Bemerkung 1.11. *Der Satz sagt, dass es zu* <u>*jedem*</u> $v \in V$ *ein* <u>*eindeutiges, bestmögliches*</u> $u \in U$ *gibt.*

Definition 1.12. *Die Lösung aus Satz 1.9 heißt* ***orthogonale Projektion*** *von* v *auf* U. *Die Abbildung*

$$P : V \to U, v \mapsto P(v) \text{ mit } \|v - Pv\| = \min_{w\in U} \|v - w\|$$

ist linear und wird ***orthogonale Projektion*** *genannt.*

Eingefügte Bemerkung (Beweis der Linearität). *Für $v_1, v_2 \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$v_1 - Pv_1 \in U^\perp$$
$$v_2 - Pv_2 \in U^\perp$$

Daher

$$\alpha(v_1 - Pv_1) + (v_2 - Pv_2) = (\alpha v_1 + v_2) - (\alpha Pv_1 + Pv_2) \in U^\perp.$$

Aber dann muss $\alpha Pv_1 + Pv_2$ schon, wegen der Eindeutigkeit, $P(\alpha v_1 + v_2)$ sein.

Bemerkung 1.13. *Satz 1.9 gilt auch, wenn U durch $W = w_0 + U$ ersetzt wird. Die orthogonale Projektion ist analog definiert..*

Frage: Die Orthogonale Projektion hat offenbar gute Eigenschaften. Aber: wie berechnen wir sie? Wie wählen wir U?

- Berechnung ist leicht
- U wählen schwierig

1.3 Orthonormalbasen

Definition 1.14. *Sei X ein $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $X_n \subset X$ ein endlich dimensionaler Teilraum mit Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Die Basis heißt* ***Orthogonalbasis****, falls*

$$\forall i \neq j : \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0$$

gilt und Orthonormalbasis (ONB), falls zusätzlich $\|\varphi_i\| = 1$ gilt. Das impliziert:

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Beispiel 1.15.

1. *$\mathbb{R}^n$ mit euklidischem Skalarprodukt und kanonischer Basis*
2. *$X = L^2(I, 1)$ mit entsprechendem Skalarprodukt und X_n der Raum der trigonometrischen Polynome bis Grad n. Dann ist folgendes eine ONB:*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

Eingefügte Bemerkung. *Trigonometrische Polynome sind Funktionen der Form*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

Die größte Faktor vor dem x ist der Grad eine trigonometrischen Polynoms.

Satz 1.16. *Sei $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ eine ONB von $X_n \subset X$. Dann gilt*

1. $f = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, f \rangle \varphi_i$
2. $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, f \rangle^2$
3. *Die orthogonale Projektion f_n von $f \in X \setminus X_n$ ist gegeben durch*

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, f \rangle \varphi_i$$

4. im Fall von 3.:

$$\|f_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, f\rangle^2 \leq \|f\|$$

Beweis. 1.:

$$\begin{aligned} f \in X_n &\implies \exists \alpha_i \in \mathbb{R} : f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \\ &\implies \langle \varphi_i, f\rangle = \langle \varphi_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = \alpha_i \end{aligned}$$

2.:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle f, f\rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \end{aligned}$$

3.:

$$\begin{aligned} &f \in X \setminus X_n : \\ &\|f - \underbrace{\tilde{f}_n}_{\in X_n}\| = \langle f - \sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i \varphi_i, f - \sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i \varphi_i \rangle \\ &\qquad = \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i \underbrace{\langle \varphi_i, f\rangle}_{=:\alpha_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \\ &\qquad = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i^2 \overset{\text{Quadratische Ergänzung}}{=} \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\alpha_i - \tilde{\alpha}_i)^2}_{\geq 0} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dies wird minimiert, wenn $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i$ ist.
4.:
$f \in X_n$ wurde in 2. gezeigt. Sonst:

$$\begin{aligned} f \notin x_n \implies \text{ mit } \alpha_i = \tilde{\alpha}_i \text{ in } (1.1): \\ 0 \leq \|f - f_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\alpha_i^2}_{\langle \varphi_i, f\rangle^2} \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. □

Vorteile von Orthogonalität:

- Bestapproximation
- Einfache Basisdarstellung

——————————Ende von Vorlesung 01 am 11.10.2022——————————