

Fundo de Índice

Grupo: Gabriel Alcouffe (2320011), Luisa Compasso (2110976) e Matheus Nogueira (1810764)

Introdução:

Um índice é um número que representa o valor agregado de um grupo de itens [1]. Ao considerar índices financeiros, normalmente eles são conjuntos de ativos, como títulos ou ações, que capturam o valor de um dado mercado ou de algum segmento de um mercado. Podemos citar, por exemplo, o índice S&P500, composto pelas ações das 500 maiores empresas do mercado americano e o índice Ibovespa que, por sua vez, é formado pelas maiores empresas do mercado brasileiro.

Embora um índice financeiro possa ser interpretado como uma carteira fictícia de ativos, ele não é um instrumento financeiro que possa ser operado, ou seja, não é possível comprar ou vender cotas de um índice tal como se faz com ações, por exemplo. No entanto, pode ser do interesse do investidor adotar uma estratégia passiva de investimento [1] de modo a obter um retorno esperado similar ao mercado. É neste nicho que se encontra o problema conhecido como *index tracking*, uma das estratégias passivas de investimento mais populares dentre os investidores. Seu objetivo, como o nome sugere, é montar uma carteira de ativos cujo objetivo é replicar o comportamento de um índice qualquer, de modo a obter um retorno similar ao mercado que esse índice representa. A essa carteira dá-se o nome de fundo de índice.

Vale comentar, tal como [1] apresenta, que a estratégia mais simples de replicar um índice é a estratégia de “replicação completa”. Isto é, montar uma carteira com todos os ativos que fazem parte do índice a ser lastreado de modo que os pesos da carteira e do índice sejam iguais. No entanto, essa estratégia possui diversos problemas. Primeiramente, construir um portfolio dessa maneira pode gerar carteiras excessivamente grandes e com ativos tanto pequenos quanto de baixa liquidez, além de gerar elevados custos de comissão e transação, a depender da frequência de rebalanceamento. Dito isso, [1] sugere construir portfolios esparsos, de modo que poucos ativos sejam suficientes para lastrear o índice de referência.

Por fim, o objetivo das estratégias de fundos de índice não é maximizar retorno nem minimizar volatilidade da carteira, mas sim minimizar alguma medida de erro entre o índice a ser lastreado e a carteira. É a partir desse objetivo que montaremos o problema de otimização a ser apresentado neste relatório.

Metodologia:

O primeiro passo descrito em [1] para construir um portfolio de índice é definir qual a grandeza a ser lastreada. São apresentadas usualmente 4 possibilidades: lastrear o preço do índice, o log-preço do índice, o retorno do índice ou o seu log-retorno. Por motivos descritos em [1], optamos por utilizar o retorno do índice como grandeza a ser seguida.

Antes de avançar com a metodologia, vale definir a notação que será utilizada ao longo deste relatório. N é a quantidade de ativos utilizados na construção da carteira, T é o tamanho da janela de tempo utilizada para estimar o modelo de otimização, y_t é o retorno do índice no tempo t , x_t é

o vetor $1 \times N$ de alocações percentuais de cada ativo no tempo t , W_t é a riqueza do fundo no tempo t , H é o horizonte em dias do *backtest* e \mathbf{R}_t é o vetor $1 \times N$ dos retornos dos ativos no tempo t .

Vale definir o retorno percentual de um ativo i , como:

$$R_{t,i} = \frac{R_{t,i} - R_{t-1,i}}{R_{t-1,i}}$$

Com isso, podemos definir o modelo base que foi implementado neste projeto e descrito em [1].

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} TE(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \text{s. a: } \mathbf{x}'\mathbf{1} = 1 \\ x_i \geq 0 \forall i \in 1:N \end{aligned}$$

Onde $TE(\mathbf{x})$ é um *tracking error*, isto é, uma medida de erro entre o retorno do índice, \mathbf{y} e o retorno da carteira de alocação \mathbf{x} .

Versão 1: *Downside Risk*

A escolha do *tracking error* é uma etapa importante e, embora minimizar o erro quadrático entre o retorno da carteira e o retorno do portfólio seja uma escolha óbvia, [1] apresenta uma desvantagem dessa métrica de erro. O erro quadrático não discrimina as situações nas quais o retorno da carteira está acima ou abaixo do retorno do índice. Mesmo sabendo que o objetivo de um fundo de índice é lastrear o índice de forma mais precisa possível e não o superar, seria interessante utilizar uma métrica de erro que crie essa discriminação de modo a otimizar uma carteira que minimize o erro em relação ao índice mas sempre de modo a obter um retorno um igual ou maior que o índice. A essa métrica foi dada o nome de *downside risk* (DR) definida como:

$$DR(\mathbf{x}) = \|(\mathbf{y} - \mathbf{R}\mathbf{x})^+\|_2^2$$

Onde $(\mathbf{y} - \mathbf{R}\mathbf{x})^+$ pode ser entendido como $\max\{0, \mathbf{y} - \mathbf{R}\mathbf{x}\}$ e $\|(\cdot)\|$ é a norma 2.

Outro comentário importante a ser feito é em relação ao tamanho da janela de estimação do modelo. Embora [1] utilize sempre todos os dados de $t = 1$ até $t = T$ para estimar o modelo de otimização, neste projeto optamos por definir um tamanho ótimo de janela de estimação j . Ou seja, ao invés de utilizar todos os dados de 1 até T , nós utilizamos apenas dados entre $T - j$ e T . Testamos diferentes valores para j e escolhemos o que minimiza $TE()$ fora da amostra.

Versão 2: *Downside Risk* e Custo de transação

A partir deste modelo inicial, foi adicionada uma restrição para considerar custos de transação e outra para gerar portfólios esparsos. A seguir estão apresentadas a metodologia escolhida, além da modelagem utilizada para especificar o *downside risk*.

Para implementar o *downside risk*, que utiliza a função $\max\{a, b\}$, foi utilizado um truque clássico de programação linear, que consiste em criar uma variável auxiliar θ , $1 \times T$ tal que, ao ser minimizada, ela assume o valor de $\max\{0, y_t - x_t'R_t\}$. Para isso, adiciona-se as restrições:

$$\theta_t \geq 0 \text{ e } \theta_t \geq y_t - x_t'R_t$$

Com isso, o modelo de otimização para minimizar o *downside risk* pode ser descrito como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \theta} \quad & \sum_{t=T-j}^T \theta_t^2 \\ \text{s. a:} \quad & \theta_t \geq 0 \quad \forall t \in 1:T \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \in 1:N \\ & \theta_t \geq y_t - \mathbf{x}' \mathbf{R}_t \quad \forall t \in 1:T \\ & \mathbf{x}_t' \mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

Para implementar os custos de transação, assumimos uma corretagem de 1%, valor usual para fundos passivos como os fundos de índice. Para adicionar restrições relacionadas ao custo de transação, foi implementada a restrição de *turnover* descrita como

$$0.01 \times ||W_t - W_{t-1}||_1 \leq C W_t$$

Onde $||W_t - W_{t-1}||_1$ é o *turnover* de $t - 1$ para t , W_t é a riqueza da carteira em t e C é a porcentagem máxima da riqueza que estará disponível para ser utilizada como *turnover*. Importante ressaltar que essa variável é um dado de entrada definida pelo gestor do fundo.

Novamente, para implementar essa restrição que utiliza o operador de valor absoluto, foi utilizado um truque ao criar uma nova variável auxiliar \mathbf{c} , um vetor $1 \times N$ tal que:

$$\begin{aligned} c_i &\geq x_{i,t} W_t - x_{i,t-1} W_t \quad \forall i \in 1:N \\ c_i &\geq -(x_{i,t} W_t - x_{i,t-1} W_t) \quad \forall i \in 1:N \end{aligned}$$

Com isso, o modelo que implementa custos de operação foi especificado como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_t, \theta, \mathbf{c}} \quad & \sum_{t=T-j}^T \theta_t^2 \\ \text{s. a:} \quad & \theta_t \geq y_t - \mathbf{x}' \mathbf{R}_t \quad \forall t \\ & x_{i,t}, c_i \geq 0 \quad \forall i \in 1:N \\ & \theta_t \geq 0 \quad \forall t \in 1:T \\ & \mathbf{x}_t' \mathbf{1} = 1 \\ & c_i \geq x_{i,t} W_t - x_{i,t-1} W_t \quad \forall i \in 1:N \\ & c_i \geq -(x_{i,t} W_t - x_{i,t-1} W_t) \quad \forall i \in 1:N \end{aligned}$$

Versão Final: *Downside Risk*, custo de transação e esparsidade

A última *feature* implementada possui o objetivo de gerar um portfólio esparsos. Para isso, [1] sugere utilizar uma penalização na função objetivo, tal como:

$$\min_{\mathbf{x}} TE(\mathbf{x}, y) + \lambda ||\mathbf{x}||_0$$

Para combinar as condições de custo e esparsidade não foi possível implementar as duas restrições concomitantemente pois gerou um problema inviável. Assim, optamos por tratar o custo de transação como uma penalização na função objetivo e a esparsidade do portfólio como uma restrição.

Isso foi feito criando um *upper bound* K para a quantidade de ativos que podem ser alocados pelo otimizador. Ou seja:

$$\sum_{i=1}^N I_i \leq K$$

Onde I_i é uma variável indicadora binária que vale 1 se o ativo for alocado e 0 caso contrário.

Foi necessário alterar a função objetivo para minimizar a soma dos erros ao invés da soma dos erros ao quadrado para viabilizar computacionalmente a otimização tanto por tempo quanto por adequação ao *solver* utilizado.

Consequentemente, o modelo final implementado foi:

$$\begin{aligned} \min_{x_t, \theta, c, I} \quad & \sum_{t=T-j}^T \theta_t + \lambda \sum_{i=1}^N c_i \\ \text{s. a:} \quad & \theta_t \geq y_t - x_t' R_t \\ & \theta_t \geq 0 \quad \forall t, t = T-j, \dots, T \\ & x_{i,t}, c_i \geq 0 \quad \forall i, i = 1, \dots, N \\ & I_i \in \{0,1\} \quad \forall i, i = 1, \dots, N \\ & \sum_{i=1}^N x_{i,t} = 1 \\ & c_i \geq x_{i,t} W_t - x_{i,t-1} W_t \quad \forall i, i = 1, \dots, N \\ & c_i \geq -(x_{i,t} W_t - x_{i,t-1} W_t) \quad \forall i, i = 1, \dots, N \\ & x_{i,t} \leq I_i \quad \forall i \in 1:N \end{aligned}$$

Com o intuito de estimar e avaliar este modelo, foi utilizado o *framework* de otimização JuMP, da linguagem Julia. Primeiramente, utilizamos o *solver* Ipopt mas, ao adicionar variáveis binárias e, com isso, alterar a classe do problema, foi necessário alterar o *solver* para o SCIP e, posteriormente, para o Cbc, que se mostrou mais eficiente na otimização uma vez alterada a função objetivo.

Além disso, foi implementado um *backtest* para avaliar a qualidade deste modelo de *index tracking* ao longo do tempo.

Por fim, escolhemos o índice CAC40, composto pelas 40 maiores empresas francesas para ser replicado com a nossa estratégia. Foram obtidos os preços das ações de todas as empresas do índice entre os dias 16/08/2022 e 26/10/2023. É importante ressaltar que, das 40 ações que compõem o índice, 2 não possuíam dados de preço em algumas dessas datas, o que nos fez optar por retirar essas ações de nossa carteira. As ações excluídas foram URW.PA e MT.PA.

Em seguida, separamos os últimos $H = 50$ dias para servir de *backtest* da estratégia, que está especificado abaixo. Foram testados diferentes valores de λ, k e j com intuito de descobrir qual combinação desses hiper parâmetros gera menor erro fora da amostra entre o retorno da carteira e do índice.

```

 $T' \leftarrow$  tamanho da série de índice
 $H \leftarrow$  horizonte de backtest
 $T \leftarrow T' - H$ 
 $y \leftarrow$  série de retornos do índice
 $R \leftarrow$  matrix de séries de retornos dos ativos
 $W \leftarrow \{10000\}$  riqueza inicial
Para cada  $h$  em  $H$ , faça
     $y_T \leftarrow$  retornos do índice até  $T$ 
     $y_{T+1} \leftarrow$  retorno do índice de  $T$  para  $T + 1$ 
     $R_T \leftarrow$  retornos dos ativos até  $T$ 
     $R_{T+1} \leftarrow$  retornos dos ativos de  $T$  para  $T + 1$ 
     $x_T^{opt} \leftarrow$  otimizacao_tracking_portfolio( $y_T, R_T, j, k, \lambda$ )
     $W_{T+1}^{bruto} \leftarrow W_T(1 + (x_T^{opt})' R_{T+1})$ 
     $turnover_{T+1} \leftarrow |W_{T+1}^{bruto} - W_T|$ 
     $custo \leftarrow 0.01 \cdot turnover_{T+1}$ 
     $W_{T+1} \leftarrow W_{T+1}^{bruto} - custo$ 
     $x_{T+1}^{fin} \leftarrow x_T^{opt} W_{T+1}$ 
     $T \leftarrow T + 1$ 
fim para

```

Resultados:

A seguir são apresentados alguns dos resultados obtidos a partir do *backtest* explicitado acima. Primeiramente, a Tabela 1 exibe, para cada combinação testada de λ, k e j , o erro entre o retorno da carteira e do índice fora da amostra. Como o objetivo de um problema de *index tracking* é minimizar esse erro, está indicado em vermelho a combinação de hiper parâmetros que geou o melhor modelo.

Analisando a tabela, podemos perceber que, para os mesmos valores de λ e k , utilizar uma janela de 30 observações para otimizar a carteira gerou erros significativamente maiores fora da amostra. Isso é compreensível se assumirmos que quanto mais informação dos retornos passados o modelo possuir, melhor será seu resultado fora da amostra, tomando cuidado apenas com a possibilidade de *overfitting*.

Erro ($\times 10^{-6}$)	J	k	λ	Erro ($\times 10^{-6}$)	J	k	λ
11.486	30	38	0.0	0.7959	200	30	0.0001
0.2674	200	38	0.0	12.156	30	30	0.5
118.669	30	38	0.0001	0.7959	200	30	0.5
118.669	200	38	0.0001	96.765	30	10	0.0
118.669	30	38	0.5	26.486	200	10	0.0
118.669	200	38	0.5	53.888	30	10	0.0001
26.243	30	30	0.0	28.884	200	10	0.0001
0.4001	200	30	0.0	53.888	30	10	0.5
12.156	30	30	0.0001	28.884	200	10	0.5

Tabela 1: comparação dos erros fora da amostra

A seguir, as Figuras 1 e 2 exibem os resultados do melhor modelo. A Figura 1 compara os retornos diários da carteira e do índice além de comparar a evolução monetária obtida com esse modelo. A Figura 2, por sua vez, apresenta os *turnovers* percentuais e monetários diários. Nota-se que os retornos diários da carteira são praticamente idênticos aos retornos do índice e que, mesmo descontando custos de transação da carteira, a evolução monetária também se mostrou muito próxima à referência. Interessante notar que, mesmo com $\lambda = 0$, ou seja, sem penalizar custos de transação, os *turnovers* se mantiveram sempre abaixo de 2% do valor patrimonial. Por fim, esse resultado não é inesperado dado que esta combinação de hiper parâmetros é a menos restritiva, dado que não há penalização de custos de transação, que o otimizador pode alocar todos os ativos que compõem o índice CAC40 e que ele utilizou a maior janela de amostras.

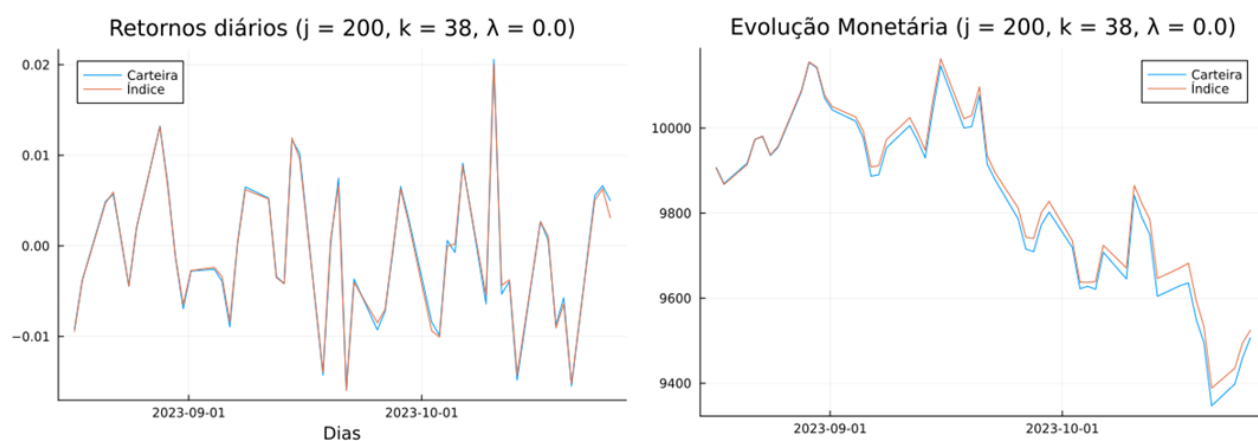


Figura 1: retorno diário e evolução monetária do melhor modelo

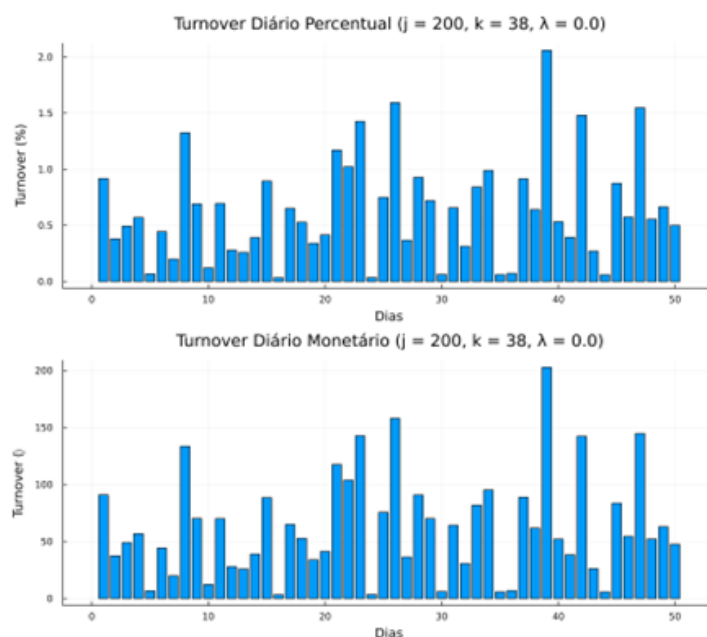


Figura 2: turnovers diários percentuais e monetários do melhor modelo

Em seguida, exibe-se uma comparação dos resultados variando apenas a penalização de custos de transação. A Figura 3 revela que um valor de λ diferente de 0 possui forte influência na evolução monetária da carteira. No entanto, não é possível concluir como o valor desse hiper parâmetro influencia na carteira, uma vez que para $\lambda = 0.0001$ e $\lambda = 0.5$ houve pouca diferença nos resultados. A Figura 4, que compara os *turnovers* percentuais não exibe grandes distinções para cada valor de λ . Inclusive, há dias, como o 15 e 30, nos quais, mesmo penalizando os custos de transação, o *turnover* fora da amostra foi maior.

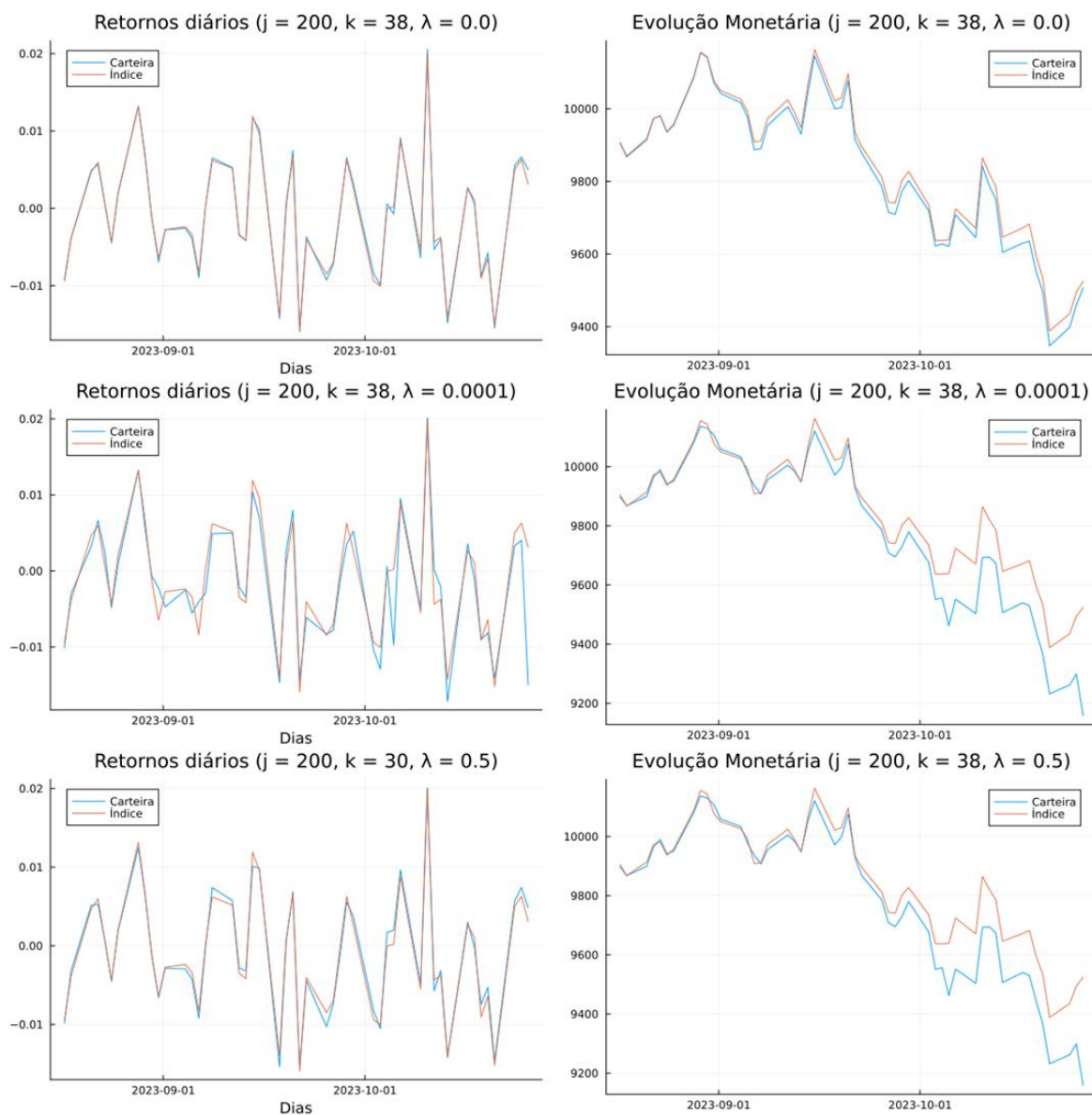


Figura 3: comparação dos retornos e evolução monetária com λ s variados para k e j fixos

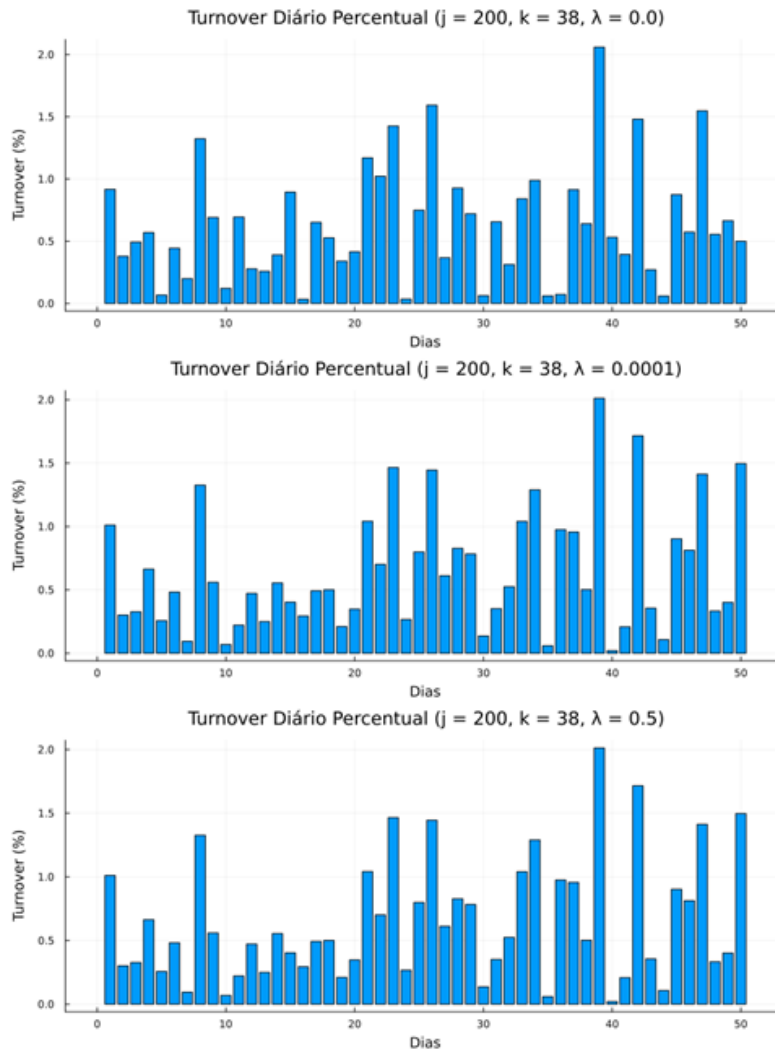


Figura 4: comparação dos *turnovers* de λ s variados para k e j fixos

Por fim, comparamos os resultados do *backtest* variando apenas o hiper parâmetro k , que define a quantidade máxima de ativos que pode ser alocada por dia. A Figura 5 mostra, claramente, que, quanto mais ativos o otimizador tem disponível, mais ele consegue minimizar o erro entre o retorno da carteira e do índice fora da amostra. Curioso notar que, para $k = 10$, mesmo com retornos diários menos próximos quando comparado com outros valores de k , a carteira terminou o período de *backtest* com patrimônio maior do que o do índice.

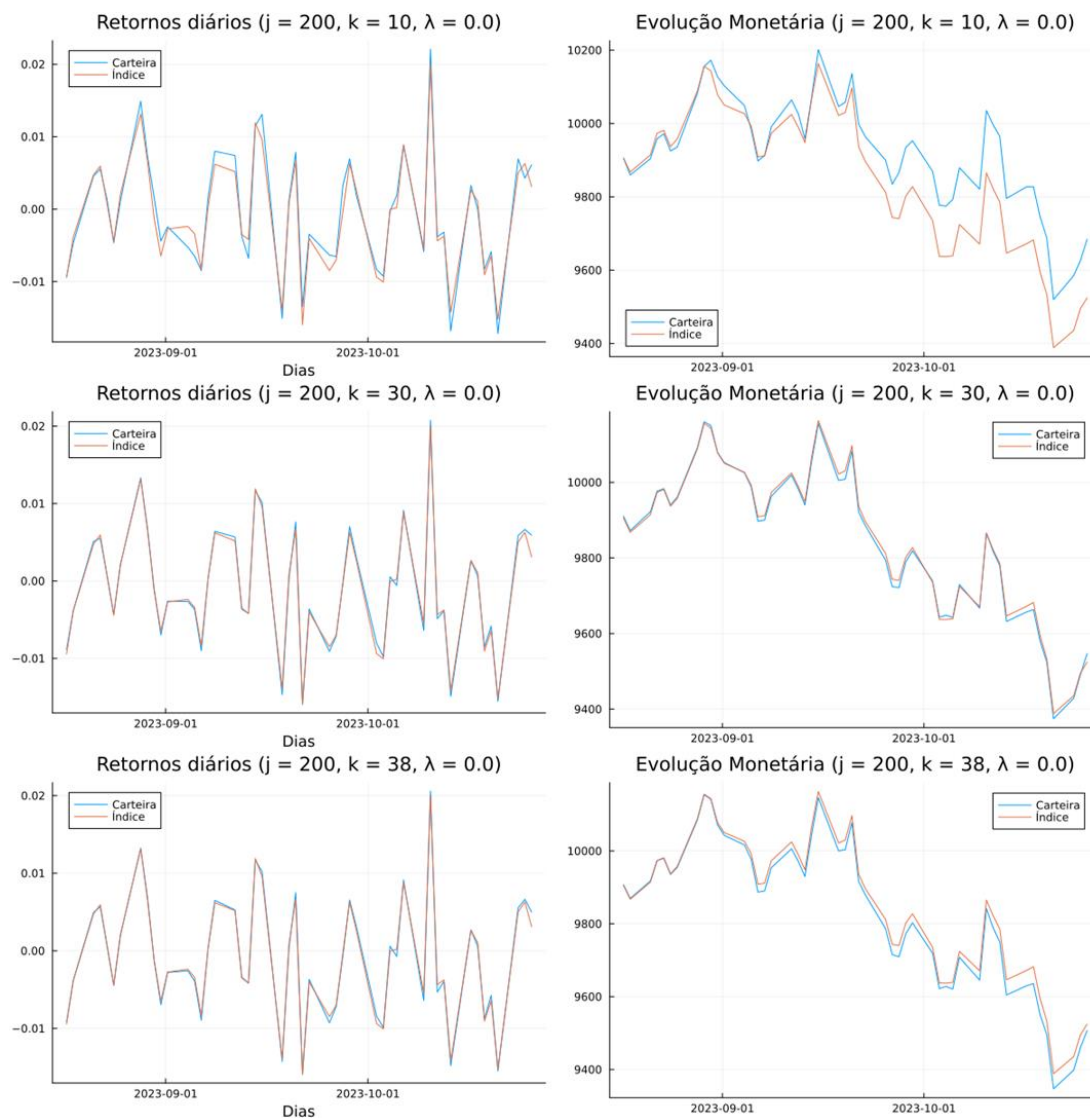


Figura 5: comparação dos retornos e evolução monetária com k variados para λ e j fixos

Conclusão:

O objetivo deste trabalho era construir portfólios esparsos e com penalização nos custos de transação para acompanhar a série de retornos de um índice financeiro. Podemos concluir, primeiramente, que a esparsidade dificulta o acompanhamento do índice, mas não o inviabiliza. Por outro lado, é importante ressaltar que não é suficiente avaliar a qualidade do modelo apenas com base na comparação dos retornos, dado que esse resultado não leva em consideração os custos de transação necessários para realocar diariamente os ativos. Dito isso, os resultados da evolução monetária da carteira sempre ficaram, com exceção de um caso, abaixo do que obteríamos se pudessemos investir diretamente no índice. Além disso, notou-se que, fora da amostra, os valores de *turnover* não se comportaram como nós esperávamos, isto é, com o aumento da penalização dos custos de transação, imaginávamos que os *turnovers* diminuiriam.

Por fim, seria interessante ainda testar outras funcionalidades, como, por exemplo, alterar a reestimação (e realocação) de uma janela diária para semanal. Somado a isso, poderíamos ter testado mais combinações de hiper parâmetros e ter realizado um *backtest* em uma janela maior. Outra aplicação interessante deste ferramental seria implementar um fundo cujo objetivo não é mais acompanhar o índice, mas sim o superar.

Referências:

[1] BENIDIS, Konstantinos et al. Optimization methods for financial index tracking: From theory to practice. **Foundations and Trends® in Optimization**, v. 3, n. 3, p. 171-279, 2018.