



# ENG1585

# Fundo de Índice

---

Gabriel Alcouffe, Luisa Compasso e Matheus Nogueira

# Sumário

01

## Introdução

O que é um índice?  
O que é um fundo de  
índice?

02

## Metodologia

Como formular o problema?  
Como implementar um  
*backtest*?

03

## Resultados



01

# Introdução

O que é um índice? O que é um fundo de índice?

# O que é um índice?

- Índice é um número que representa o valor agregado de um grupo de itens.
- Índices financeiros são medidas formadas por um conjunto de ativos que capturam o valor de um dado mercado ou de um segmento de um mercado

## **Exemplos de índices financeiros:**

- Ibovespa
  - Composto pelas empresas da B3 que representam 80% das negociações da bolsa
- S&P500
  - Composto pelas 500 maiores empresas listadas na bolsa americana
- CAC40
  - Composto pelas 40 maiores empresas listadas na bolsa de Paris

# Índices da B3

Índices			Você está visualizando a composição do Índice: <span>IBOV</span>					
IBOV <sup>D</sup> *	128184.91	+0.67%						
IBOV		+853.79						
IBXX <sup>D</sup> *	53868.79	+0.66%						
IBXX		+353.47						
IBXL <sup>D</sup> *	21226.93	+0.62%						
IBXL		+130.88						
IBRA <sup>D</sup> *	5039.11	+0.70%						
IBRA		+35.19						
IGCX <sup>D</sup> *	20076.37	+0.79%						
IGCX		+157.20						
ITAG <sup>D</sup> *	28433.76	+0.67%						
ITAG		+188.06						
IGNM <sup>D</sup> *	3875.05	+1.28%						
IGNM		+48.91						

Nome	Valor	Variação	Var%	Abertura	Máx
IBOVESPA					
ENEVA ON NM	12.95 <sup>D</sup>	0.26	2.05%	12.69	12.95
GRUPO NATURAON NM	16.93 <sup>D</sup>	0.44	2.67%	16.47	17.02
MRV ON NM	9.59 <sup>D</sup>	-0.08	-0.83%	9.73	9.77
SUZANO S.A. ON NM	51.76 <sup>D</sup>	-2.02	-3.76%	53.40	53.87
AMBEV S/A ON	14.08 <sup>D</sup>	0.39	2.85%	13.69	14.08
DEXCO ON NM	7.43 <sup>D</sup>	0.17	2.34%	7.31	7.48
BRF SA ON NM	15.18 <sup>D</sup>	0.52	3.55%	14.60	15.18
IRBBRASIL REON NM	53.63 <sup>D</sup>	3.13	6.20%	50.74	53.63
BRUNO S.A. ON NM	22.37 <sup>D</sup>	0.43	0.57%	22.02	22.40

Dados em tempo real

Imagem retirada de [https://www.b3.com.br/pt\\_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/cotacoes/indices.htm](https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/cotacoes/indices.htm)  
Acesso em 02/12/2023

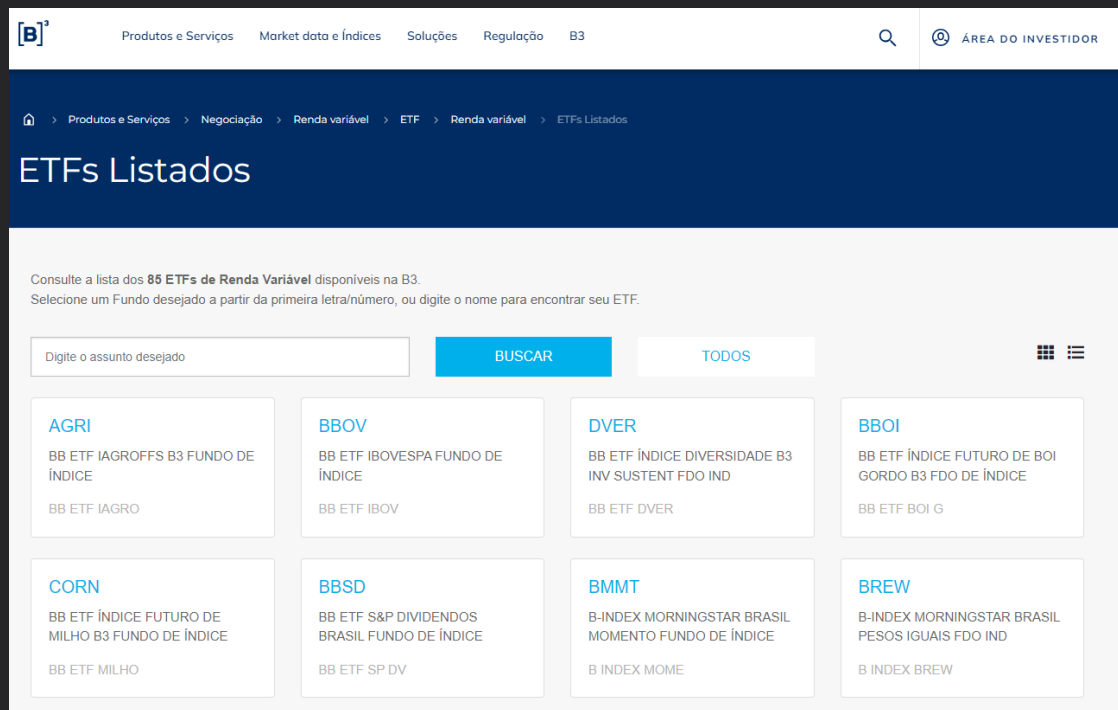
# O que é um fundo de índice?



Por que pensar em um fundo de índice?


- Índices são instrumentos financeiros não “investíveis”.
- Possibilidade de se expor a todo um mercado sem possuir um grande número de ações

- Um fundo de índice é uma carteira de investimentos **cujo objetivo é replicar** o comportamento de **um índice específico**.
- Ao problema de replicar o índice, dá-se o nome de *index tracking problem*

# Fundos de Índices (ETFs) da B3





**[B3]** Produtos e Serviços Market data e Índices Soluções Regulação B3   ÁREA DO INVESTIDOR

 > Produtos e Serviços > Negociação > Renda variável > ETF > Renda variável > ETFs Listados

## ETFs Listados

Consulte a lista dos **85 ETFs de Renda Variável** disponíveis na B3.  
Selecione um Fundo desejado a partir da primeira letra/número, ou digite o nome para encontrar seu ETF.

**BUSCAR** **TODOS**  

<b>AGRI</b> BB ETF IAGROFFS B3 FUNDO DE ÍNDICE BB ETF IAGRO	<b>BBOV</b> BB ETF IBOVESPA FUNDO DE ÍNDICE BB ETF IBOV	<b>DVER</b> BB ETF ÍNDICE DIVERSIDADE B3 INV SUSTENT FDO IND BB ETF DVER	<b>BBOI</b> BB ETF ÍNDICE FUTURO DE BOI GORDO B3 FDO DE ÍNDICE BB ETF BOI G
<b>CORN</b> BB ETF ÍNDICE FUTURO DE MILHO B3 FUNDO DE ÍNDICE BB ETF MILHO	<b>BBSD</b> BB ETF S&P DIVIDENDOS BRASIL FUNDO DE ÍNDICE BB ETF SP DV	<b>BMMT</b> B-INDEX MORNINGSTAR BRASIL MOMENTO FUNDO DE ÍNDICE B INDEX MOME	<b>BREW</b> B-INDEX MORNINGSTAR BRASIL PESOS IGUAIS FDO IND B INDEX BREW

Imagem retirada de [https://www.b3.com.br/pt\\_br/produtos-e-servicos/negociacao/renda-variavel/etf/renda-variavel/etfs-listados/](https://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/negociacao/renda-variavel/etf/renda-variavel/etfs-listados/)  
Acesso em 02/12/2023



# O2

# Metodologia

Como modelar o problema de *index tracking*? Como  
implementar um *backtest*?



# Como replicar um índice?

Primeiro passo: o que será replicado?

- Preço? **Retorno?** Log-preço? Log-retorno?

Replicação completa: por que não comprar todos os ativos que compoem o índice?

- **Modelo base para replicação do retorno de um índice:**

$$\min_x TE(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{R})$$

$$s. a: \sum_i x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \forall i$$

Onde  $\mathbf{x}$  é o valor de alocações,  $\mathbf{R}$  é a matriz de retornos dos ativos que compõem o índice,  $\mathbf{y}$  é o vetor de retornos do índice e  $TE()$  é um *tracking error* a ser minimizado.

# Modelo implementado

## Tracking error: Downside Risk

$$DR(x) = ||(y - R'x)^+||_1^1$$

- Variável de decisão  $\theta$
- Restrições (2) e (4)

## Penalização por custos de transação

- Variável de decisão  $c$
- Restrições (1), (6) e (7)
- Hiperparâmetro de penalização  $\lambda$

## Esparsidade: não utilizar todos os ativos

- Variável indicadora de decisão  $I$
- Restrições (3), (5) e (9)
- Hiperparâmetro  $k$  como o número de ativos

## Modelo final implementado

$$\min_{x_t, \theta, c, I} \sum_{t=T-j}^T \theta_t + \lambda \sum_{i=1}^N c_i$$

s. a:

$$x_{i,t}, c_i \geq 0 \quad (1)$$

$$\theta_t \geq 0 \quad (2)$$

$$I_t \in \{0,1\} \quad (3)$$

$$\theta_t \geq y_t - x_t' R_t \quad (4)$$

$$x_{i,t} \leq I_i \quad (5)$$

$$c_i \geq x_{i,t} W_t - x_{i,t-1} W_t \quad (6)$$

$$c_i \geq -(x_{i,t} W_t - x_{i,t-1} W_t) \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{i,t} = 1 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^N I_i \leq k \quad (9)$$

# Modelo implementado

## Tracking error: Downside Risk

$$DR(x) = ||(y - R'x)^+||_1^1$$

- Variável de decisão  $\theta$
- Restrições (2) e (4)

## Penalização por custos de transação

- Variável de decisão  $c$
- Restrições (1), (6) e (7)
- Hiperparâmetro de penalização  $\lambda$

## Esparsidade: não utilizar todos os ativos

- Variável indicadora de decisão  $I$
- Restrições (3), (5) e (9)
- Hiperparâmetro  $k$  como o número de ativos

## Modelo final implementado

$$\min_{x_t, \theta, c, I} \sum_{t=T-j}^T \theta_t + \lambda \sum_{i=1}^N c_i$$

s. a:

$$x_{i,t}, c_i \geq 0 \quad (1)$$

$$\theta_t \geq 0 \quad (2)$$

$$I_t \in \{0,1\} \quad (3)$$

$$\theta_t \geq y_t - x_t' R_t \quad (4)$$

$$x_{i,t} \leq I_i \quad (5)$$

$$c_i \geq x_{i,t} W_t - x_{i,t-1} W_t \quad (6)$$

$$c_i \geq -(x_{i,t} W_t - x_{i,t-1} W_t) \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{i,t} = 1 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^N I_i \leq k \quad (9)$$

# Modelo implementado

## Tracking error: Downside Risk

$$DR(x) = ||(y - R'x)^+||_1^1$$

- Variável de decisão  $\theta$
- Restrições (2) e (4)

## Penalização por custos de transação

- Variável de decisão  $c$
- Restrições (1), (6) e (7)
- Hiperparâmetro de penalização  $\lambda$

## Esparsidade: não utilizar todos os ativos

- Variável indicadora de decisão  $I$
- Restrições (3), (5) e (9)
- Hiperparâmetro  $k$  como o número de ativos

## Modelo final implementado

$$\min_{x_t, \theta, c, I} \sum_{t=T-j}^T \theta_t + \lambda \sum_{i=1}^N c_i$$

s. a:

$$x_{i,t}, c_i \geq 0 \quad (1)$$

$$\theta_t \geq 0 \quad (2)$$

$$I_t \in \{0,1\} \quad (3)$$

$$\theta_t \geq y_t - x_t' R_t \quad (4)$$

$$x_{i,t} \leq I_i \quad (5)$$

$$c_i \geq x_{i,t} W_t - x_{i,t-1} W_t \quad (6)$$

$$c_i \geq -(x_{i,t} W_t - x_{i,t-1} W_t) \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{i,t} = 1 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^N I_i \leq k \quad (9)$$

# Modelo implementado

## Tracking error: Downside Risk

$$DR(x) = ||(y - R'x)^+||_1^1$$

- Variável de decisão  $\theta$
- Restrições (2) e (4)

## Penalização por custos de transação

- Variável de decisão  $c$
- Restrições (1), (6) e (7)
- Hiperparâmetro de penalização  $\lambda$

## Esparsidade: não utilizar todos os ativos

- Variável indicadora de decisão  $I$
- Restrições (3), (5) e (9)
- Hiperparâmetro  $k$  como o número de ativos

## Modelo final implementado

$$\min_{x_t, \theta, c, I} \sum_{t=T-j}^T \theta_t + \lambda \sum_{i=1}^N c_i$$

s. a:

$$x_{i,t}, c_i \geq 0 \quad (1)$$

$$\theta_t \geq 0 \quad (2)$$

$$I_t \in \{0,1\} \quad (3)$$

$$\theta_t \geq y_t - x_t' R_t \quad (4)$$

$$x_{i,t} \leq I_i \quad (5)$$

$$c_i \geq x_{i,t} W_t - x_{i,t-1} W_t \quad (6)$$

$$c_i \geq -(x_{i,t} W_t - x_{i,t-1} W_t) \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{i,t} = 1 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^N I_i \leq k \quad (9)$$

# Modelo implementado

## Tracking error: Downside Risk

$$DR(x) = ||(y - R'x)^+||_1^1$$

- Variável de decisão  $\theta$
- Restrições (2) e (4)

## Penalização por custos de transação

- Variável de decisão  $c$
- Restrições (1), (6) e (7)
- Hiperparâmetro de penalização  $\lambda$

## Esparsidade: não utilizar todos os ativos

- Variável indicadora de decisão  $I$
- Restrições (3), (5) e (9)
- Hiperparâmetro  $k$  como o número de ativos

## Modelo final implementado

$$\min_{x_t, \theta, c, I} \sum_{t=T-j}^T \theta_t + \lambda \sum_{i=1}^N c_i$$

s. a:

$$x_{i,t}, c_i \geq 0 \quad (1)$$

$$\theta_t \geq 0 \quad (2)$$

$$I_t \in \{0,1\} \quad (3)$$

$$\theta_t \geq y_t - x_t' R_t \quad (4)$$

$$x_{i,t} \leq I_i \quad (5)$$

$$c_i \geq x_{i,t} W_t - x_{i,t-1} W_t \quad (6)$$

$$c_i \geq -(x_{i,t} W_t - x_{i,t-1} W_t) \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{i,t} = 1 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^N I_i \leq k \quad (9)$$

# Backtest

- Ideia base do *backtest*:
  - Otimizar com dados até  $T$
  - Alocar de  $T$  para  $T + 1$
  - Próximo passo

$T' \leftarrow$  tamanho da série de índice  
 $H \leftarrow$  horizonte de backtest  
 $T \leftarrow T' - H$   
 $y \leftarrow$  série de retornos do índice  
 $R \leftarrow$  matrix de séries de retornos dos ativos  
 $W \leftarrow \{10000\}$  riqueza inicial  
Para cada  $h$  em  $H$ , faça  
     $y_T \leftarrow$  retornos do índice de  $T - j$  até  $T$   
     $y_{T+1} \leftarrow$  retorno do índice de  $T$  para  $T + 1$   
     $R_T \leftarrow$  retornos dos ativos de  $T - j$  até  $T$   
     $R_{T+1} \leftarrow$  retornos dos ativos de  $T$  para  $T + 1$   
     $x_T^{opt} \leftarrow$  otimizacao\_tracking\_portfolio( $y_T, R_T, j, k, \lambda$ )  
     $W_{T+1}^{bruto} \leftarrow W_T(1 + (x_T^{opt})' R_{T+1})$   
    turnover $_{T+1} \leftarrow |W_{T+1}^{bruto} - W_T|$   
    custo  $\leftarrow 0.01 \text{ turnover}_{T+1}$   
     $W_{T+1} \leftarrow W_{T+1}^{bruto} - \text{custo}$   
     $x_{T+1}^{fin} \leftarrow x_T^{opt} W_{T+1}$   
     $T \leftarrow T + 1$   
fim para

# Backtest

- Ideia base do *backtest*:
  - Otimizar com dados até  $T$
  - Alocar de  $T$  para  $T + 1$
  - Próximo passo

```
 $T' \leftarrow$  tamanho da série de índice  
 $H \leftarrow$  horizonte de backtest  
 $T \leftarrow T' - H$   
 $y \leftarrow$  série de retornos do índice  
 $R \leftarrow$  matrix de séries de retornos dos ativos  
 $W \leftarrow \{10000\}$  riqueza inicial  
Para cada  $h$  em  $H$ , faça  
   $y_T \leftarrow$  retornos do índice de  $T - j$  até  $T$   
   $y_{T+1} \leftarrow$  retorno do índice de  $T$  para  $T + 1$   
   $R_T \leftarrow$  retornos dos ativos de  $T - j$  até  $T$   
   $R_{T+1} \leftarrow$  retornos dos ativos de  $T$  para  $T + 1$   
   $x_T^{opt} \leftarrow$  otimizacao_tracking_portfolio( $y_T, R_T, j, k, \lambda$ )  
   $W_{T+1}^{bruto} \leftarrow W_T(1 + (x_T^{opt})' R_{T+1})$   
   $turnover_{T+1} \leftarrow |W_{T+1}^{bruto} - W_T|$   
   $custo \leftarrow 0.01 turnover_{T+1}$   
   $W_{T+1} \leftarrow W_{T+1}^{bruto} - custo$   
   $x_{T+1}^{fin} \leftarrow x_T^{opt} W_{T+1}$   
   $T \leftarrow T + 1$   
fim para
```



# Backtest

- Ideia base do *backtest*:
  - Otimizar com dados até  $T$
  - Alocar de  $T$  para  $T + 1$
  - Próximo passo

$T' \leftarrow$  tamanho da série de índice  
 $H \leftarrow$  horizonte de backtest  
 $T \leftarrow T' - H$   
 $y \leftarrow$  série de retornos do índice  
 $R \leftarrow$  matrix de séries de retornos dos ativos  
 $W \leftarrow \{10000\}$  riqueza inicial  
Para cada  $h$  em  $H$ , faça  
     $y_T \leftarrow$  retornos do índice de  $T - j$  até  $T$   
     $y_{T+1} \leftarrow$  retorno do índice de  $T$  para  $T + 1$   
     $R_T \leftarrow$  retornos dos ativos de  $T - j$  até  $T$   
     $R_{T+1} \leftarrow$  retornos dos ativos de  $T$  para  $T + 1$   
     $x_T^{opt} \leftarrow$  otimizacao\_tracking\_portfolio( $y_T, R_T, j, k, \lambda$ )  
     $W_{T+1}^{bruto} \leftarrow W_T(1 + (x_T^{opt})' R_{T+1})$   
    turnover $_{T+1} \leftarrow |W_{T+1}^{bruto} - W_T|$   
    custo  $\leftarrow 0.01 \text{ turnover}_{T+1}$   
     $W_{T+1} \leftarrow W_{T+1}^{bruto} - \text{custo}$   
     $x_{T+1}^{fin} \leftarrow x_T^{opt} W_{T+1}$   
     $i \leftarrow i + 1$   
fim para

# Backtest

- Ideia base do *backtest*:
  - Otimizar com dados até  $T$
  - Alocar de  $T$  para  $T + 1$
  - Próximo passo

```
 $T' \leftarrow$  tamanho da série de índice  
 $H \leftarrow$  horizonte de backtest  
 $T \leftarrow T' - H$   
 $y \leftarrow$  série de retornos do índice  
 $R \leftarrow$  matrix de séries de retornos dos ativos  
 $W \leftarrow \{10000\}$  riqueza inicial  
Para cada  $h$  em  $H$ , faça  
   $y_T \leftarrow$  retornos do índice de  $T - j$  até  $T$   
   $y_{T+1} \leftarrow$  retorno do índice de  $T$  para  $T + 1$   
   $R_T \leftarrow$  retornos dos ativos de  $T - j$  até  $T$   
   $R_{T+1} \leftarrow$  retornos dos ativos de  $T$  para  $T + 1$   
   $x_T^{opt} \leftarrow$  otimizacao_tracking_portfolio( $y_T, R_T, j, k, \lambda$ )  
   $W_{T+1}^{bruto} \leftarrow W_T(1 + (x_T^{opt})' R_{T+1})$   
  turnover $_{T+1} \leftarrow |W_{T+1}^{bruto} - W_T|$   
  custo  $\leftarrow 0.01 \text{ turnover}_{T+1}$   
   $W_{T+1} \leftarrow W_{T+1}^{bruto} - \text{custo}$   
   $x_{T+1}^{fin} \leftarrow x_T^{opt} W_{T+1}$   
   $T \leftarrow T + 1$   
fim para
```

# Backtest

- Ideia base do *backtest*:
  - Otimizar com dados até  $T$
  - Alocar de  $T$  para  $T + 1$
  - Próximo passo
- Escolha de hiperparametros:
  - Combinação que minimize o erro fora da amostra entre o retorno da carteira e do índice

```
 $T' \leftarrow$  tamanho da série de índice  
 $H \leftarrow$  horizonte de backtest  
 $T \leftarrow T' - H$   
 $y \leftarrow$  série de retornos do índice  
 $R \leftarrow$  matrix de séries de retornos dos ativos  
 $W \leftarrow \{10000\}$  riqueza inicial  
Para cada  $h$  em  $H$ , faça  
   $y_T \leftarrow$  retornos do índice de  $T - j$  até  $T$   
   $y_{T+1} \leftarrow$  retorno do índice de  $T$  para  $T + 1$   
   $R_T \leftarrow$  retornos dos ativos de  $T - j$  até  $T$   
   $R_{T+1} \leftarrow$  retornos dos ativos de  $T$  para  $T + 1$   
   $x_T^{opt} \leftarrow$  otimizacao_tracking_portfolio( $y_T, R_T, j, k, \lambda$ )  
   $W_{T+1}^{bruto} \leftarrow W_T(1 + (x_T^{opt})' R_{T+1})$   
   $turnover_{T+1} \leftarrow |W_{T+1}^{bruto} - W_T|$   
   $custo \leftarrow 0.01 turnover_{T+1}$   
   $W_{T+1} \leftarrow W_{T+1}^{bruto} - custo$   
   $x_{T+1}^{fin} \leftarrow x_T^{opt} W_{T+1}$   
   $T \leftarrow T + 1$   
fim para
```



O3

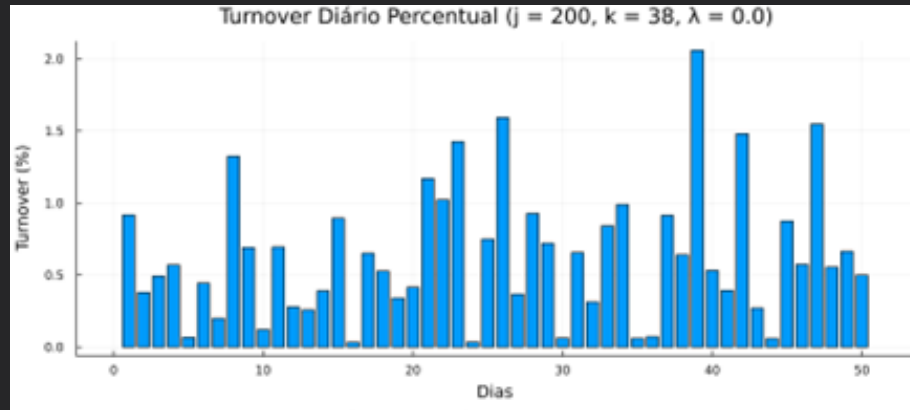
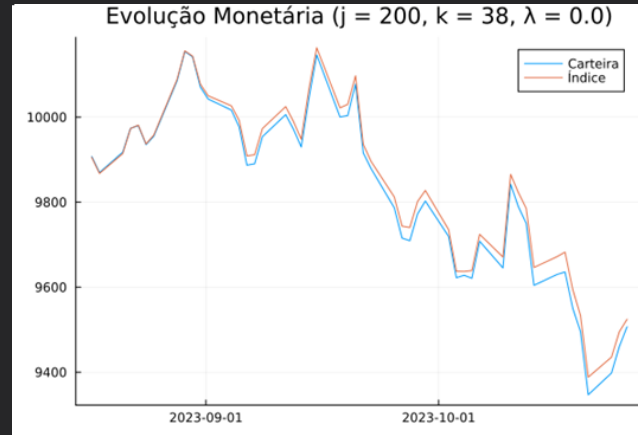
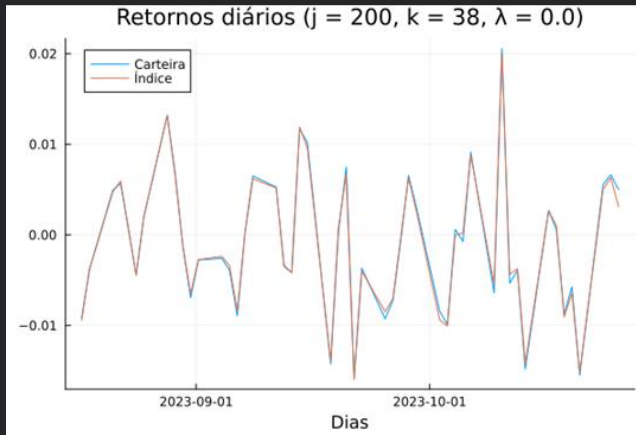
Resultados

# Melhor combinação de hiperparâmetros

Erro ( $\times 10^{-6}$ ) *	J	k	$\lambda$	Erro ( $\times 10^{-6}$ ) *	J	k	$\lambda$
11.486	30	38	0.0	0.7959	200	30	0.0001
0.2674	200	38	0.0	12.156	30	30	0.5
118.669	30	38	0.0001	0.7959	200	30	0.5
118.669	200	38	0.0001	96.765	30	10	0.0
118.669	30	38	0.5	26.486	200	10	0.0
118.669	200	38	0.5	53.888	30	10	0.0001
26.243	30	30	0.0	28.884	200	10	0.0001
0.4001	200	30	0.0	53.888	30	10	0.5
12.156	30	30	0.0001	28.884	200	10	0.5

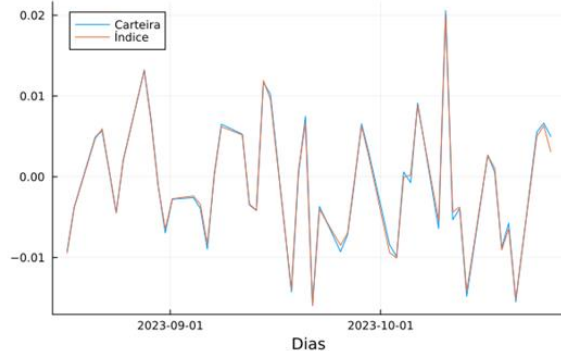
\* Erro fora da amostra entre o retorno da carteira e o retorno do índice

# Melhor modelo

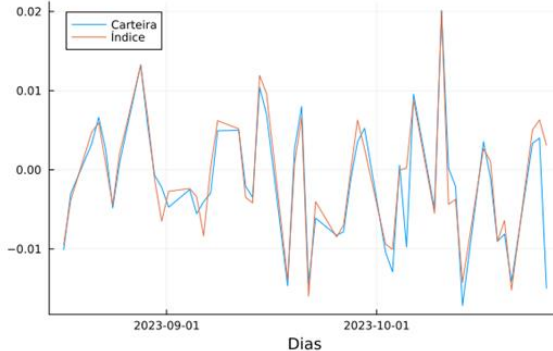


# Variando $\lambda$ com $k$ e $j$ fixos

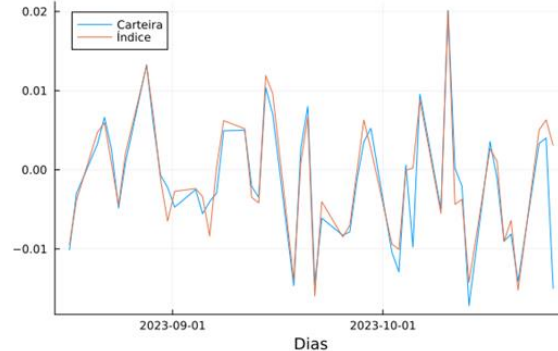
Retornos diários ( $j = 200$ ,  $k = 38$ ,  $\lambda = 0.0$ )



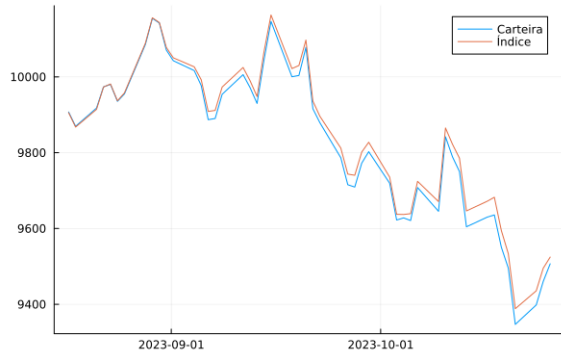
Retornos diários ( $j = 200$ ,  $k = 38$ ,  $\lambda = 0.0001$ )



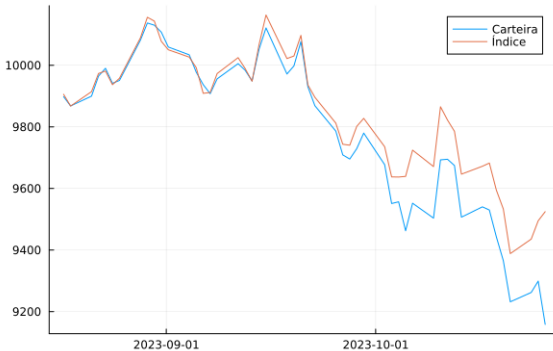
Retornos diários ( $j = 200$ ,  $k = 38$ ,  $\lambda = 0.5$ )



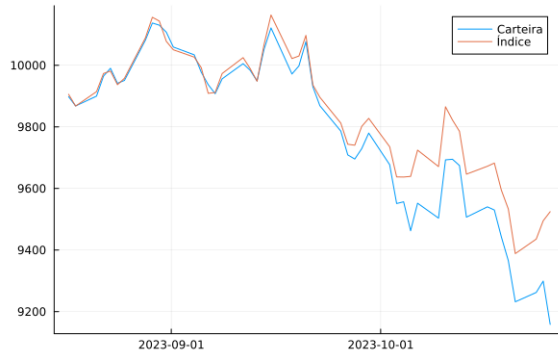
Evolução Monetária ( $j = 200$ ,  $k = 38$ ,  $\lambda = 0.0$ )



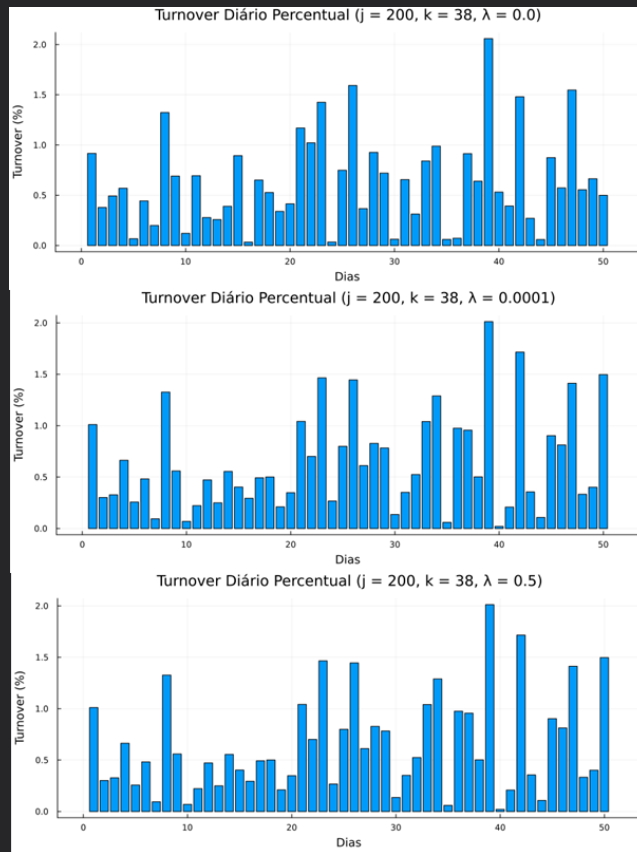
Evolução Monetária ( $j = 200$ ,  $k = 38$ ,  $\lambda = 0.0001$ )



Evolução Monetária ( $j = 200$ ,  $k = 38$ ,  $\lambda = 0.5$ )



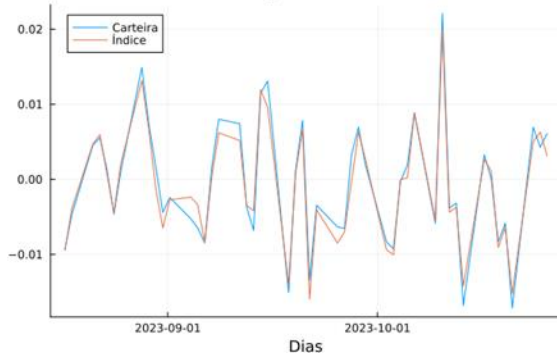
# Variando $\lambda$ com $k$ e $j$ fixos



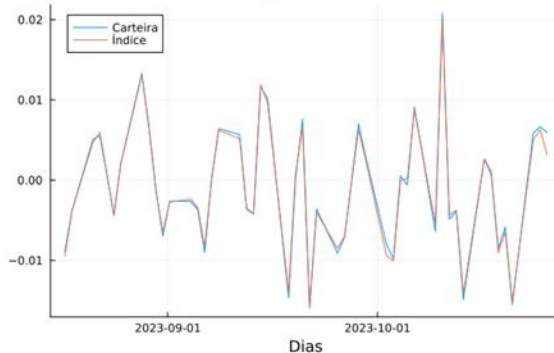


# Variando $k$ com $\lambda$ e $j$ fixos

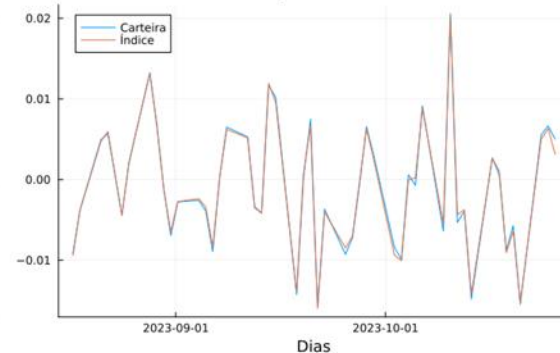
Retornos diários ( $j = 200$ ,  $k = 10$ ,  $\lambda = 0.0$ )



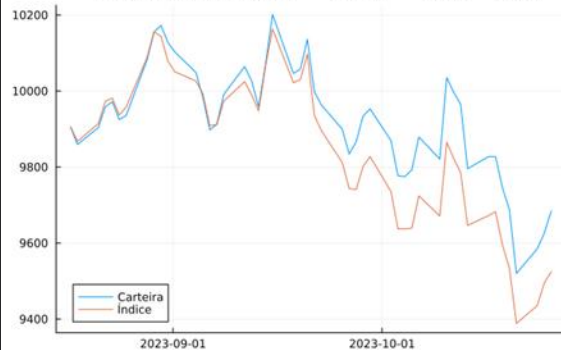
Retornos diários ( $j = 200$ ,  $k = 30$ ,  $\lambda = 0.0$ )



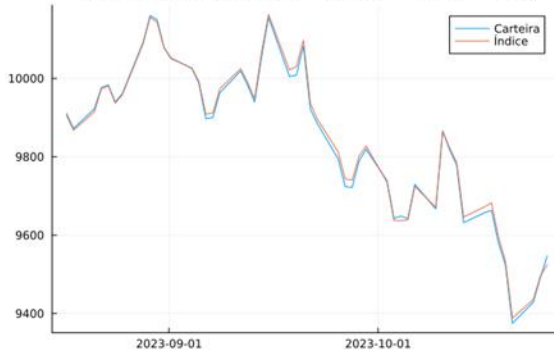
Retornos diários ( $j = 200$ ,  $k = 38$ ,  $\lambda = 0.0$ )



Evolução Monetária ( $j = 200$ ,  $k = 10$ ,  $\lambda = 0.0$ )



Evolução Monetária ( $j = 200$ ,  $k = 30$ ,  $\lambda = 0.0$ )



Evolução Monetária ( $j = 200$ ,  $k = 38$ ,  $\lambda = 0.0$ )



# Conclusões

- Esparsidade dificulta o acompanhamento do índice, mas não o inviabiliza
- Penalização nos custos de transação também dificulta o acompanhamento do índice
  - Em especial, a evolução monetária da carteira
- ✦ ● Não basta avaliar os retornos diários, é essencial avaliar a evolução monetária
  - Considerando custos de transação, deve ser necessário bater o índice e não apenas replicá-lo.
- *Turnovers* não variaram muito com o aumento da penalização

# Referências

[1] BENIDIS, Konstantinos et al. Optimization methods for financial index tracking: From theory to practice. Foundations and Trends® in Optimization, v. 3, n. 3, p. 171-279, 2018.

