

# Monitoria MAT1202 - Álgebra Linear 2

## Apostila Notas de Aula

Matheus Nogueira

### Resumo

Este documento consiste nas notas de aula da monitoria de MAT1202. Este material foi produzido com base em minhas anotações do curso de Álgebra Linear 2 do semestre 20.2 e do livro *Álgebra Linear e suas aplicações*, de *Gilbert Strang*. Qualquer dúvida, favor entrar em contato *matnogueira@gmail.com*

## Sumário

<b>1</b>	<b>Sistemas Lineares e Eliminação Gaussiana</b>	<b>4</b>
1.1	Sistemas Lineares e Notação Matricial . . . . .	4
1.2	Solução de um Sistema Linear . . . . .	4
1.2.1	Operações Elementares . . . . .	5
1.2.2	Matrizes das operações elementares . . . . .	5
1.3	Exemplo . . . . .	6
1.4	Conclusão . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Fatoração <math>A=LU</math></b>	<b>8</b>
2.1	Sem permutação de linhas . . . . .	8
2.1.1	Exemplo . . . . .	9
2.2	Fatoração $PA=LU$ (com permutação de linhas) . . . . .	10
2.2.1	Exemplo . . . . .	10
2.3	Conclusão . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Espaços Fundamentais de uma Matriz</b>	<b>11</b>
3.1	Definições: . . . . .	11
3.1.1	Espaço Coluna - $Im(A)$ . . . . .	11
3.1.2	Espaço Nulo - $N(A)$ . . . . .	11
3.1.3	Espaço Linha - $Im(A^T)$ . . . . .	12
3.1.4	Espaço Nulo da Transposta- $N(A^T)$ . . . . .	12
3.2	Exemplo: . . . . .	12
3.3	Conclusão . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Ortogonalidade</b>	<b>14</b>
4.1	Produto Interno . . . . .	14
4.2	Norma . . . . .	14
4.3	Ortogonalidade e Espaços Vetoriais . . . . .	15
4.3.1	Espaços Ortogonais . . . . .	15

4.3.2	Complemento Ortogonal . . . . .	15
4.4	Conclusão . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Projeções Ortogonais</b>	<b>15</b>
5.1	Conceitos importantes . . . . .	15
5.2	Projeção ortogonal sobre um vetor . . . . .	16
5.2.1	Matriz de Projeção sobre o vetor $u$ . . . . .	17
5.2.2	Exemplo: . . . . .	17
5.2.3	Propriedades: . . . . .	17
5.3	Projeção Ortogonal sobre um subespaço qualquer . . . . .	17
5.4	Conclusão . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Mínimos Quadrados</b>	<b>18</b>
6.1	Motivação . . . . .	18
6.2	Relembrando Projeções Ortogonais . . . . .	19
6.3	Mínimos Quadrados . . . . .	19
6.3.1	Exemplo: . . . . .	19
6.4	Conclusão . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Matrizes Ortogonais, Ortogonalização de Grand-Schmidt e Fatoração QR</b>	<b>20</b>
7.1	Matrizes Ortogonais . . . . .	20
7.1.1	Propriedades . . . . .	20
7.2	Ortogonalização de Grand Schmidt . . . . .	21
7.3	Fatoração QR . . . . .	21
7.4	Conclusão . . . . .	22
<b>8</b>	<b>Polinômio Característico e Teorema de Cayley Hamilton</b>	<b>22</b>
8.1	Polinômio Característico . . . . .	22
8.2	Teorema de Cayley Hamilton . . . . .	23
8.2.1	Aplicação 1 - Cálculo da Inversa . . . . .	23
8.2.2	Aplicação 2 - Divisão de Polinômios . . . . .	24
8.3	Conclusão . . . . .	25
<b>9</b>	<b>Auto-Tudo</b>	<b>25</b>
9.1	Autovalores e Autovetores . . . . .	25
9.2	Diagonalização . . . . .	26
9.3	Potência de Matrizes . . . . .	27
9.4	Conclusão . . . . .	27
<b>10</b>	<b>Cálculo Funcional: Caso Diagonalizável</b>	<b>27</b>
10.1	Algumas Definições . . . . .	27
10.2	Caso Diagonalizável . . . . .	28
10.3	Conclusão . . . . .	29
<b>11</b>	<b>Cálculo Funcional: Caso Não Diagonalizável</b>	<b>29</b>
11.1	Lembrando a aula anterior . . . . .	29
11.2	Caso não diagonalizável . . . . .	29
11.2.1	Exemplo 1 . . . . .	29

11.3	Justificativa Intuitiva . . . . .	30
11.4	Conclusão . . . . .	30
<b>12</b>	<b>Sistema de Equações de Diferenças</b>	<b>30</b>
12.1	Equações de Diferenças . . . . .	30
12.2	Sistema de Equação de Diferenças . . . . .	31
12.2.1	Exemplos . . . . .	31
12.2.2	Comentários Importantes . . . . .	32
12.3	Crescimento Populacional . . . . .	33
12.4	Conclusão . . . . .	34

# 1 Sistemas Lineares e Eliminação Gaussiana

## 1.1 Sistemas Lineares e Notação Matricial

Nosso foco é estudar sistemas de equações da forma  $Ax = b$ , onde  $A$  é a matriz com os termos que acompanham as variáveis (incógnitas),  $x$  é o vetor coluna com as incógnitas e  $b$  é o vetor coluna com os termos independentes.

**Exemplo:** Seja o seguinte sistema de equações...

$$\begin{aligned}x + 2y + 3 &= 2 \\ -x + y - z &= -3 \\ 2x + y - z &= 0\end{aligned}$$

Escrevê-lo em forma matricial é definir as seguinte matriz e vetores:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Não é difícil perceber que a multiplicação representada por  $Ax$  resulta exatamente no sistema linear inicial.

## 1.2 Solução de um Sistema Linear

Nossa estratégia para calcular a solução de um sistema de equações lineares será a **Eliminação Gaussiana**.

Este método consiste em realizar operações na matriz do sistema  $Ax = b$ , chamadas *operações elementares*, para chegar a um *sistema triangular*. Ao ser obtido este sistema, basta realizar uma série de substituições retroativas para chegar à solução.

**Definição:** Matrizes Triangulares

Uma matriz é triangular - superior ou inferior - se todas as entradas abaixo ou acima, respectivamente, da diagonal principal são nulas. A matriz  $A$  abaixo é triangular superior, enquanto que  $B$  é triangular inferior.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

São 3 os possíveis tipos de solução de um sistema linear:

1. Exatamente 1 solução
2. Infinitas Soluções
3. Não há solução

**Observação:** lembrem-se que, para verificar qual das opções acima é a o caso da matriz a ser estudada, podemos olhar para o *determinante* da matriz. Se seu valor for zero, o sistema possui infinitas soluções ou nenhuma solução. Se for diferente de zero, uma solução.

### 1.2.1 Operações Elementares

**Definição:** dado um sistema linear  $Ax = b$ , são 3 as operações elementares que não alteram a solução do sistema.

1. Permutação de linhas ( $L_i \leftrightarrow L_j$ )
2. Multiplicação de linha por escalar ( $L_i \rightarrow L_i \cdot k, k \neq 0$ )
3. Somar um múltiplo de uma linha a outra linha ( $L_i \rightarrow L_i + k \cdot L_j$ )

### 1.2.2 Matrizes das operações elementares

Veremos que cada uma das 3 operações elementares descritas pode ser representada por meio de matrizes da seguinte forma:

Se queremos realizar a operação elementar  $e$  sobre a matriz  $A$ , devemos realizar a multiplicação  $E \cdot A$ , onde  $E$  é a matriz que representa a operação elementar  $e$ .

Vejamos as como montar as matrizes para as mesmas 3 operações já apresentadas. Por facilidade, usaremos matrizes  $3 \times 3$ , pois o raciocínio para outras dimensões é o mesmo. Começamos sempre com a matriz identidade e:

1. Permutação de linhas ( $L_i \leftrightarrow L_j$ ):  
basta permutar as linhas da matriz identidade de acordo com as linhas a serem permutadas na matriz  $A$
2. Multiplicação de linha por escalar ( $L_i \rightarrow L_i \cdot k, k \neq 0$ ):  
multiplicamos a linha correspondente da matriz identidade pelo escalar em questão.
3. Somar um múltiplo de uma linha a outra linha ( $L_i \rightarrow L_i + k \cdot L_j$ ):  
colocamos na entrada  $i, j$  da matriz identidade o valor de  $k$  com o devido sinal.

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = E \quad (1)$$

$$L_2 \rightarrow L_2 \cdot k \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k \cdot 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E \quad (2)$$

$$L_3 \rightarrow L_3 - 2 \cdot L_1 \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E \quad (3)$$

Ao final da *Eliminação Gaussiana*, depois de serem realizadas todas as devidas *operações elementares*, a matriz obtida estará na forma **escalonada**, isto é:

1. Se existem linhas nulas elas devem ser as últimas da matriz.
2. Em quaisquer duas linhas sucessivas não nulas, o pivô (primeiro elemento não nulo) da linha inferior deve estar mais à direita que o da linha superior.
3. Abaixo do pivô todas as entradas são nulas.

### 1.3 Exemplo

Calculemos a solução do seguinte sistema, mostrando as matrizes das operações elementares.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ 4x - 6y &= 2 \\ -2x + 7y + 2z &= 9 \end{aligned}$$

Em forma matricial o sistema é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Seja a matriz aumentada a ser escalonada a seguir:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Começemos as operações elementares para chegar à matriz escalonada. A cada operação, indicaremos a matriz  $E$  correspondente.

$$L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \text{ sendo } E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nosso sistema fica...

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \rightarrow L_3 + L_1 \text{ sendo } E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nosso sistema fica...

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \rightarrow L_3 + L_2 \text{ sendo } E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nosso sistema fica...

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Chegamos à matriz escalonada. Agora basta realizar algumas substituições retroativas para calcularmos a solução.

Lendo e substituindo o sistema de baixo para cima temos:

$$\begin{aligned} z &= 2 \\ -8y - 2(2) &= -12 \rightarrow y = 1 \\ 2x + 1 + 2 &= 5 \rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Note que chegamos a uma solução única, o que faz sentido pois  $\det(A) = -16 \neq 0$

Utilizando as matrizes das operações elementares, chegaríamos na mesma matriz escalonada:

$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$ , onde  $A$  é a matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

## 1.4 Conclusão

Com este material sabemos como encontrar a solução de um sistema linear utilizando a Eliminação Gaussiana e as operações Elementares, com suas respectivas matrizes. O próximo assunto a ser abordado será **Fatoração LU**.

## 2 Fatoração $A=LU$

### 2.1 Sem permutação de linhas

No capítulo anterior vimos, ou relembramos, como resolver um sistema linear utilizando o processo da Eliminação Gaussiana por meio, principalmente, de operações elementares e suas matrizes. Neste capítulo continuaremos estudando sistemas lineares do tipo  $Ax = b$  e apresentaremos uma maneira de fatorar a matriz  $A$ , escrevendo-a como  $A = LU$ .

Dito isso, já podemos definir a matriz  $A$  como a matriz de coeficientes do nosso sistema linear, ou seja, exatamente a mesma matriz  $A$  do capítulo anterior. Nosso sistema linear é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} \text{ logo, } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A matriz  $U$  é a matriz triangular superior que aparece ao final do processo de escalonamento da matriz  $A$ , obtida por meio das operações elementares. Você deve se lembrar que, em nossa aula 2 de *MATLAB*, aprendemos a função `[ , U] = lu(A)`, sendo  $U$  o nome dado à variável que guarda o output da função `lu()`, isto é, a matriz escalonada resultante da eliminação gaussiana. Com  $U$  em mãos, tudo que nos restava fazer era uma substituição retroativa para descobrir a solução do sistema.

A última matriz que falta ser descoberta é  $L$ . Para isso, precisamos lembrar das matrizes  $E_i$  que representam as operações elementares. Se nos recordarmos, para escalonar  $A$  até  $U$  fazíamos:

$$U = E_n \cdot E_{n-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$$

sendo  $n$  o número de operações elementares a serem feitas.

Chamemos de  $E$  a matriz resultante de todas as multiplicações de  $E_i$ . Podemos reescrever a equação acima como  $U = E \cdot A$ . Queremos chegar na faturação  $A = LU$ , logo, não é difícil perceber que basta multiplicar ambos os lados de  $U = E \cdot A$  por  $E^{-1}$  à esquerda que obteremos algo similar à fatoração desejada.

$$E^{-1}U = E^{-1}E \cdot A \rightarrow E^{-1} \cdot U = A$$

De fato, a matriz  $L$  da fatoração  $A = LU$  é, justamente, a multiplicação de todas as inversas das matrizes elementares utilizada. Sendo assim, definimos

$$L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \dots \cdot E_n^{-1}$$

Convença-se de que  $L$  está corretamente definida!

O único empecilho para esta definição é garantir que todas as matrizes elementares são inversíveis. Para isso, seus determinantes devem ser diferentes de 0. Como estamos estudando, nesta seção, apenas o caso sem trocas de linha, é trivial notar que todas as matrizes  $E_i$  possuem 1 em sua diagonal principal e são triangulares inferiores. Sendo



assim, seus determinantes são sempre 1. Convença-se deste fato.

Agora podemos apresentar a versão completa da função do *MATLAB*,  $[L, U] = lu(A)$ . Esta função retorna, não somente a matriz escalonada  $U$ , como a matriz  $L$ , o que faz todo o sentido dado o nome da função... A análise da matriz  $L$  é importante para ver se houve trocas de linha na execução interna do algoritmo da função.

Com todas estas definições em mãos, podemos partir para um exemplo.

### 2.1.1 Exemplo

Dada a seguinte matriz  $A$ , calculemos cada uma das matrizes envolvidas na fatoração  $A = LU$  e mostremos que essa igualdade vale.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Realizando seu escalonamento, chegamos às seguintes matrizes elementares:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos verificar (deixo por conta de você, caro aluno) que:

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = U \text{ onde, } U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Note que  $U$  é uma matriz triangular superior assim como prevê a teoria! Calculemos agora a matriz  $L$ .

$$L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Como previsto, a matriz  $L$  é triangular inferior com todas as entradas da diagonal principal igual a 1.

**Dica:** para inverter uma matriz elementar basta trocar o sinal da entrada não nula fora da diagonal principal.

Podemos, por fim, verificar que:

$$L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} = A$$

## 2.2 Fatoração PA=LU (com permutação de linhas)

Caso seja necessário realizar alguma permutação de linhas a fim de garantir que  $U$  será uma matriz escalonada, precisamos corrigir a matriz  $A$ , introduzindo as permutações necessárias para, então, realizar a fatoração  $LU$ . Uma vez detectadas as permutações realizadas, podemos carregar essa informação em uma matriz  $P$  e multiplicá-la por  $A$  de modo que

$$PA = LU$$

Vejamos um exemplo.

### 2.2.1 Exemplo

Dada a seguinte matriz  $A$ , calculemos cada uma das matrizes envolvidas na fatoração  $A = LU$ , mostremos que serão necessárias permutações, montemos a matriz  $P$  e verifiquemos a validade da igualdade  $PA = LU$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Para simplificar as contas, usemos a função do *MATLAB*  $[L,U] = lu(A)$ . O retorno desta função é:

$$L = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

A matriz  $L$ , neste caso, não é triangular inferior, o que indica que o algoritmo interno da função realizou permutações na matriz  $A$ . Precisamos, então, montar a matriz  $P$  de permutações. Podemos começar trocando as linhas 2 e 3. Para isso, chamemos de  $P_1$  a seguinte matriz de modo que...

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ de modo que } P_1 \cdot L = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora definimos  $P_2$  a partir da troca das linhas 1 e 3.

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ de modo que } P_2 \cdot P_1 \cdot L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definimos, então,  $P = P_2 \cdot P_1$ . O valor da matriz  $P$  está exibido logo abaixo.

Agora a matriz  $L$  possui as características necessárias segundo a teoria, isto é, ser triangular inferior e possuir todas as entradas da diagonal principal igual a 1.

Podemos, finalmente, verificar que:

$$PA = LU \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

## 2.3 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os conceitos de fatoraçaõ  $A = LU$  em seu caso sem permutação de linhas e  $PA = LU$  quando são necessárias essas permutações. Este é um algoritmo importante para a compreensão dos métodos de resolução de sistemas lineares e seu entendimento desmistifica o funcionamento da função  $lu()$  utilizada no *MATLAB*.

## 3 Espaços Fundamentais de uma Matriz

### 3.1 Definições:

Estudaremos os 4 subespaços fundamentais de uma matriz. Para todo este estudo, considere  $A$  uma matriz  $m \times n$ . São eles:

1. Espaço Coluna, ou Imagem
2. Espaço Linha
3. Espaço Nulo, ou Núcleo
4. Espaço Nulo da transposta

#### 3.1.1 Espaço Coluna - $Im(A)$

O espaço coluna, ou imagem de uma matriz  $A$  é o subespaço vetorial gerado pelas colunas da matriz  $A$ .

**Def:**

$$Im(A) = \{v \in R^m \text{ tal que } A \cdot u = v \text{ para algum } u \in R^n\}$$

É importante lembrar de alguns conceitos como *Espaços e Subespaços Vetoriais* e *Independência Linear*, uma vez que nada garante que as  $m$  colunas sejam *LI* e gerem um espaço de dimensão  $m$ .

**Base para  $Im(A)$ :** podemos fazer uma Eliminação Gaussiana de  $A$  e observar quais colunas da matriz  $U$  resultante deste processo possuem pivôs. Se as colunas  $c_i$  de  $U$  possuem pivô, então as colunas  $c_i$  de  $A$  serão base da *Imagem* de  $A$ . Consegue perceber o por quê?

**Observação Importante:**  $Im(A) \neq Im(U)$

**Posto** de uma matriz  $A$  é a dimensão da *Imagem* dessa matriz  $A \rightarrow posto(A) = dim(Im(A))$

#### 3.1.2 Espaço Nulo - $N(A)$

O espaço nulo de  $A$  é o espaço vetorial gerado pelos vetores  $x$  tal que  $A \cdot x = 0$ .

**Def:**

$$N(A) = \{x \in R^n \text{ tal que } A \cdot x = 0\}$$

### 3.1.3 Espaço Linha - $Im(A^T)$

O espaço linha de  $A$  é o espaço vetorial gerado pelos vetores linha de  $A$ . De modo análogo, é o *espaço coluna da matriz transposta* de  $A$ .

**Def:**

$$Im(A^T) = \{v \in R^m \text{ tal que } A \cdot u = v \text{ para algum } u \in R^n\}$$

Outra maneira de encontrar o espaço linha de  $A$  é, novamente, por meio da Eliminação Gaussiana. Note que, se  $U$  for a matriz escalonada da Eliminação Gaussiana, então o espaço linha de  $U$  é igual ao espaço linha de  $A$ . Isso quer dizer que uma base de  $Im(U^T)$  é também base de  $Im(A^T)$ .

### 3.1.4 Espaço Nulo da Transposta- $N(A^T)$

O espaço nulo da transposta de  $A$  é o espaço vetorial gerado pelos vetores  $x$  tal que  $A^T \cdot x = 0$ .

**Def:**

$$N(A^T) = \{x \in R^m \text{ tal que } A^T \cdot x = 0\}$$

## 3.2 Exemplo:

Encontre os 4 espaços fundamentais da matriz abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Para encontrar o espaço coluna de  $A$ , vamos escalonar esta matriz. Podemos usar o comando já aprendido  $[U] = lu(A)$ , que nos retorna:

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Já podemos perceber a existência de apenas 1 pivô, logo **posto(A)=dim(Im(A))=1**. Com além disso, como o pivô está na primeira coluna de  $U$ , a base da imagem de  $A$  será formada pela primeira coluna de  $A$ . Também podemos usar a função `colspace(sym((A)))` do MATLAB.

$$\beta_{Im(A)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para o núcleo de  $A$  devemos resolver o sistema linear  $A \cdot x = 0$  e os vetores  $x$  que satisfizerem esta igualdade serão nosso núcleo. Analogamente, e para facilitar nossa vida,

podemos usar o comando  $B = \text{null}(\text{sym}(A))$ , que retorna:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos confirmar esta resposta multiplicando  $A * B$  e verificando que esta conta dá **zero**.

**Base:** para verificar que estes vetores nas colunas de  $B$  são base do núcleo, devemos verificar que eles são *LI*. Uma vez confirmado, temos que:

$$\beta_{N(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**Observação:** note que  $\dim(N(A)) = 2$ . Isso faz sentido pois, lembrando de Álgebra 1,  $\dim(\text{Im}(A)) + \dim(N(A)) = n$ .

Para calcularmos o espaço linha, temos duas opções. Primeiro, transpor a matriz  $A$  e calcular a imagem desta nova matriz da maneira já explicada. Por exemplo:  $\text{colspace}(\text{sym}(\text{transpose}(A)))$ . Outra maneira é realizar a fatoração *LU* e olhar para as linhas de  $U$ , uma vez que  $\text{Im}(U^T) = \text{Im}(A^T)$ . Como já temos o resultado da função  $\text{lu}(A)$ , podemos notar que a primeira linha de  $U$  é base do espaço linha de  $U$ . Logo,

$$\beta_{\text{Im}(A^T)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente, para o espaço nulo da transposta, podemos utilizar um processo similar ao cálculo do espaço nulo. Será que  $\text{null}(\text{sym}(\text{transpose}(A)))$ , que retorna:

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificamos se estes vetores são, de fato, a base do núcleo da transposta ao verificar que eles satisfazem  $\text{transpose}(A) \cdot \text{null}(\text{sym}(\text{transpose}(A))) = 0$  e que eles são *LI*. Por fim, temos

$$\beta_{N(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

### 3.3 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os 4 espaços fundamentais de uma matriz qualquer, bem como os procedimentos necessários para calcular estes subespaços vetoriais. Na próxima aula veremos relações de ortogonalidade entre estes subespaços.

## 4 Ortogonalidade

### 4.1 Produto Interno

O conceito de produto interno já é comum a nós. Sendo assim, vamos apenas defini-lo brevemente:

**DEF:** o produto interno entre dois vetores  $u$  e  $v$ , sendo  $u, v \in R^n$ , representado por  $u \cdot v$  ou  $\langle u, v \rangle$ , é definido por

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Algumas propriedades importantes do produto interno são:

1. O produto interno é linear para qualquer argumento  $\rightarrow \langle ku, v \rangle = k\langle u, v \rangle, k \in R$  e  $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle, w \in R^n$
2.  $\langle u, u \rangle \geq 0$
3.  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

Nós utilizamos o conceito de produto interno para definir *ortogonalidade* da seguinte maneira.

**DEF:** dois vetores  $u$  e  $v$  são ditos **ortogonais** se e somente se  $\langle u, v \rangle = 0$

### 4.2 Norma

Podemos pensar na norma de um vetor  $u \in R^n$  como o seu "tamanho" ou "comprimento". Para calcular a norma de um vetor, representada por  $\|u\|$  sabemos que vale:

$$\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Note, portanto, que podemos expressar a norma de um vetor utilizando o produto interno!

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

**DEF:** Normalização de um vetor

Chamamos de normalização de um vetor o processo de dividi-lo pela sua norma com o intuito do vetor resultante possuir norma igual a 1.

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = 1$$

**DEF:** dois vetores  $u$  e  $v$  são ditos **ortonormais** se e somente se  $\langle u, v \rangle = 0$  e  $\|u\| = \|v\| = 1$

### 4.3 Ortogonalidade e Espaços Vetoriais

#### 4.3.1 Espaços Ortogonais

**DEF:** Dizer que  $V$  e  $W$  são dois espaços vetoriais ortogonais, ou seja  $V \perp W$  é

$$V \perp W \iff \langle v, w \rangle = 0, \forall v \in V, \forall w \in W$$

A discussão de espaços ortogonais é interessante para avaliarmos os espaços fundamentais de uma matriz  $A$ , estudados nas últimas aulas. De maneira direta, podemos averiguar que as seguintes duplas de espaços são ortogonais:

- Espaço Coluna  $Im(A)$  e Espaço Nulo da Transposta  $N(A^t)$
- Espaço Linha  $Im(A^t)$  e Núcleo  $N(A)$

#### 4.3.2 Complemento Ortogonal

**DEF:** Seja  $V$  um subespaço de  $R^n$ . O conjunto

$$W = \{w \in R^n : \langle v, w \rangle = 0, \forall v \in V\}$$

forma um subespaço de  $R^n$ , chamado de *complemento ortogonal* de  $V$  e denotado por  $V^\perp$

Propriedades Importantes:

1.  $\dim(V) + \dim(V^\perp) = n$ , sendo  $n$  a dimensão de  $R^n$
2.  $V \cap V^\perp = \emptyset$
3.  $V \cup V^\perp = R^n$

### 4.4 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados conceitos de ortogonalidade, produto interno, norma e complementos ortogonais.

## 5 Projeções Ortogonais

### 5.1 Conceitos importantes

Embora seja provável que estes conceitos já sejam bem conhecidos, vamos apenas relembrar o que são produto interno e sua relação com ortogonalidade, a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a Desigualdade Triangular.

**Def:** o produto interno entre dois vetores  $u$  e  $v$  pode ser definido como:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Uma outra maneira de definir o mesmo produto interno é:

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta)$$

onde  $\|u\|$  é a norma do vetor  $u$  e  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $u$  e  $v$ .

A partir desta definição, podemos derivar que dois vetores são ortogonais se e somente se o produto interno entre eles é zero. Isso é justificado por  $\cos(90) = 0$ .

**Def:** Desigualdade de Cauchy-Schwarz em  $R^n$

$$\|u \cdot v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

**Def:** Desigualdade Triangular

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

## 5.2 Projeção ortogonal sobre um vetor

Imagine que queiramos projetar um vetor  $v$  sobre um vetor  $u$ . Note que o vetor  $w$  da figura 1 abaixo é, justamente, o resultado dessa projeção.

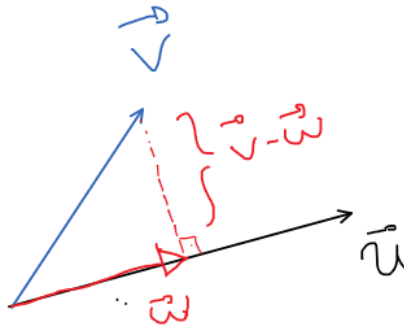


Figura 1: Projeção ortogonal de  $v$  em  $u$

Precisamos de duas premissas, as quais são facilmente observadas na figura acima:

$$w = \alpha \cdot u$$

$$\langle u, v - w \rangle = 0$$

A maneira de encontrar, explicitamente,  $w$  em função de  $u$  e  $v$ , com base nessas premissas, está descrita abaixo:

$$\langle u, v - w \rangle = 0$$

$$\langle u, v - \alpha u \rangle = 0$$

$$u \cdot v - \alpha \cdot u \cdot u = 0$$

$$\alpha \cdot u \cdot u = u \cdot v$$

$$\alpha = \frac{u \cdot v}{u \cdot u}$$

Sendo assim, temos:

$$w = \left( \frac{u \cdot v}{u \cdot u} \right) \cdot u$$

Note que o resultado dos produtos internos entre parênteses é um número, garantindo que  $w$  e  $u$  são paralelos.



### 5.2.1 Matriz de Projeção sobre o vetor $u$

Podemos encapsular a projeção ortogonal sobre um vetor  $u$  em uma matriz  $P$ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} w &= \left( \frac{u \cdot v}{u \cdot u} \right) \cdot u \\ &= \left( \frac{u^T v}{u^T u} \right) \cdot u \\ &= u \left( \frac{u^T v}{u^T u} \right) \\ &= \left( \frac{uu^T}{u^T u} \right) v \\ &= P \cdot v \end{aligned}$$

### 5.2.2 Exemplo:

Calcule a matriz de projeção sobre o vetor  $u = (1, -1, 1)$

$$\begin{aligned} P &= \left( \frac{uu^T}{u^T u} \right) \\ P &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad -1 \quad 1) \\ P &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 5.2.3 Propriedades:

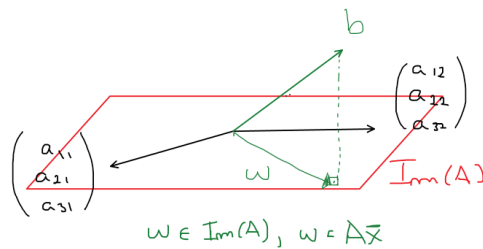
A matriz  $P$  definida possui as seguintes propriedades:

1.  $P$  é simétrica
2.  $P^2 = P$
3.  $\text{Posto}(P)=1$

## 5.3 Projeção Ortogonal sobre um subespaço qualquer

Considere as matriz  $A$  e o vetor  $b$  definidos abaixo. Além disso, seja  $w$  a projeção ortogonal de  $b$  sobre o espaço coluna de  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$$

Figura 2: projeção ortogonal sobre imagem de  $A$ 

Note que:

1. o vetor  $b - w$  é ortogonal ao espaço coluna de  $A$
2. o vetor  $b - A\bar{x}$  é ortogonal ao espaço coluna de  $A$ , sendo  $w = A\bar{x}$ .
3. Logo,  $b - A\bar{x} \in \text{Núcleo da Transposta de } A$
4.  $A^T(b - A\bar{x}) = 0$
5.  $A^T b = A^T A\bar{x} \rightarrow \text{Equação Normal}$

**Obs:** se as colunas de  $A$  são  $LI$ , então  $A^T A$  é inversível.

Com isso, chegamos na matriz de projeção sobre o espaço coluna de  $A$ :

$$P = A (A^T A)^{-1} A^T$$

## 5.4 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados conceitos projeções ortogonais sobre u vetor e sobre um subespaço vetorial qualquer.

# 6 Mínimos Quadrados

## 6.1 Motivação

Como já sabemos, estamos quase sempre interessados em resolver sistemas do tipo  $Ax = b$ . No entanto, há casos em que a solução deste sistema é impossível. Por exemplo, se o nosso sistema linear for um sistema linear de equações incompatíveis.

**Def:** Sistemas lineares incompatíveis são sistemas de  $m$  equações e  $n$  incógnitas onde  $m > n$ . Outra maneira de olhar para essa definição é pensar em matrizes  $A_{m \times n}$ , as quais possuem  $m$  linhas (equações) e  $n$  colunas (incógnitas). Sabemos que sistemas desse tipo não possuem solução.

O que fazer, pode ser feito, além de abandonar o problema e ir dormir em paz, é procurar uma solução aproximada de tal modo que o **erro** desta solução seja o menor possível.

**Def:** o erro de uma solução aproximada de um sistema  $Ax = b$ , é definido como:

$$\|Ax - b\|, \text{ onde } b \text{ é a solução real e } Ax \text{ é a solução aproximada.}$$

Perceba que, para casos em que podemos encontrar a solução real do sistema, esse erro é zero, uma vez que  $Ax = b$ , logo  $\|Ax - b\| = 0$ .

Mas e quando não é possível encontrar a solução?

x	y
-1	1
1	1
2	3

## 6.2 Relembrando Projeções Ortogonais

Lembre-se do capítulo passado sobre projeções ortogonais e acrescente um detalhe.

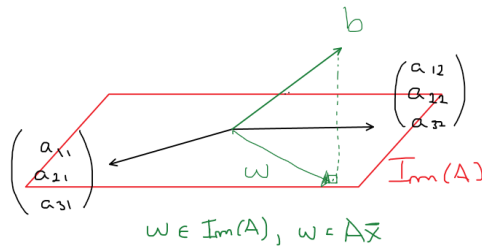


Figura 3: projeção ortogonal sobre imagem de  $A$

No âmbito de minimização de erro, podemos pensar que queremos a menor distância entre a solução real e a aproximada. Sendo assim, a *Projeção Ortogonal* aprendida de mostra muito adequada para esse problema de aproximação.

A própria equação normal  $A^T A \bar{x} = A^T b$  relaciona esses valores. Tenha isso em mente.

## 6.3 Mínimos Quadrados

Uma vez que o sistema linear  $Ax = b$  é incompatível, sabemos que  $b \notin Col(A)$ . Sendo assim, já sabemos que a melhor solução, a que minimiza o erro, será a solução  $\bar{x}$  tal que:

$$A\bar{x} = Proj_{Col(A)} b$$

Como vimos na aula anterior, podemos definir uma matriz  $P$  de projeção sobre o espaço coluna de  $A$ . Utilizando essa informação, chegamos no seguinte sistema:

$$A\bar{x} = Pb$$

Este sistema, agora, é compatível e possui uma solução.

Vejamos, por fim, um exemplo prático de como calcular a melhor reta para um dado conjunto de pontos (regressão linear).

### 6.3.1 Exemplo:

Encontre a reta que melhor interpola os seguintes pontos:

Dados esses pontos, podemos montar o seguinte sistema linear  $Ax = y$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Rescrevemos como da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Ax &= y \\ A^T Ax &= A^T y \end{aligned}$$

Colocando valores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema, encontramos  $a = \frac{4}{7}$  e  $b = \frac{9}{7}$ .

Logo, a reta desejada é:  $r(x) = \frac{4}{7} \cdot x + \frac{9}{7}$

## 6.4 Conclusão

Neste capítulo foi lembrado o conceito de projeções ortogonais sobre um subespaço vetorial qualquer e apresentado o algoritmo de Mínimos Quadrados.

# 7 Matrizes Ortogonais, Ortogonalização de Gram-Schmidt e Fatoração QR

## 7.1 Matrizes Ortogonais

Para definir uma matriz ortogonal, precisamos lembrar o que é um conjunto de vetores, ou uma base, se quisermos, ortonormal.

**Def:** uma base  $\beta$  de vetores de  $R^n$  é dita ortonormal se todos os vetores que a formam possuem, simultaneamente, norma 1 e são ortogonais entre si.

Com essa definição, podemos definir tranquilamente uma Matriz Ortogonal.

**Def:** Uma Matriz Ortogonal  $A$  é uma matriz cujas colunas formam uma base ortonormal.

Algumas propriedades das matrizes ortogonais são importantes para nosso curso.

### 7.1.1 Propriedades

(1) Toda matriz ortogonal  $Q$  satisfaz  $Q^T Q = I$ . Dessa propriedade, nota-se que  $Q^T = Q^{-1}$

*Prova:* note que uma multiplicação matricial é, de certo modo, um produto interno entre as colunas e linhas das matrizes. Sendo assim, como as colunas de  $Q$  são ortonormais,  $\langle v_i, v_j^T \rangle = 0 \forall i \neq j$ , sendo  $v_i$  os vetores da coluna de  $Q$  e  $v_j$  os vetores linhas de  $Q^T$ . A partir disso mostramos que  $Q^T Q = I$ .

(2) A multiplicação de uma matriz ortogonal por um vetor preserva o comprimento do vetor  $\rightarrow \|Qx\| = \|x\|$ .

$$\text{Dem: } \|Qx\|^2 = \langle Qx, Qx \rangle = (Qx)^T Qx = x^T Q^T Qx = x^T x = \|x\|^2$$

(3)) O ângulo entre vetores se preserva por matriz ortogonal.

$$\text{Dem: } \cos\theta = \frac{\langle Qu, Qv \rangle}{\|Qu\| \|Qv\|} = \frac{uQ^T Qv}{\|u\| \|v\|} = \frac{u^T v}{\|u\| \|v\|}$$

## 7.2 Ortogonalização de Grand Schmidt

O processo de ortogonalização de Grand-Schmidt consiste em uma estratégia para, a partir de uma base qualquer  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , obter uma base ortonormal  $\{q_1, \dots, q_n\}$  para o espaço gerado pela base  $a$ . Temos a seguinte construção:

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_1 \rightarrow q_1 = \frac{a'_1}{\|a'_1\|} \\ a'_2 &= a_2 - (q_1^T a_2)q_1 \rightarrow q_2 = \frac{a'_2}{\|a'_2\|} \\ a'_3 &= a_3 - (q_1^T a_3)q_1 - (q_2^T a_3)q_2 \rightarrow q_3 = \frac{a'_3}{\|a'_3\|} \\ a'_n &= a_n - (q_1^T a_n)q_1 - \dots - (q_{n-1}^T a_n)q_{n-1} \rightarrow q_n = \frac{a'_n}{\|a'_n\|} \end{aligned}$$

## 7.3 Fatoração QR

O processo de ortogonalização de Grand Schmidt nos entrega uma fatoração conhecida como **fatoração**  $A = QR$ . Não é difícil imaginar que a matriz  $Q$  desta fatoração será a matriz cujas colunas são a base  $\{q_1, \dots, q_n\}$  obtida no processo de ortogonalização e  $A$  é a matriz cujas colunas são a base  $\{a_1, \dots, a_n\}$ .

Antes de definirmos a matriz  $R$ , lembremos:

Se  $\{q_1, \dots, q_n\}$  é base ortonormal de  $R^N$  e  $b$  pertence a esse espaço gerado, então...

$$b = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \dots + c_n q_n$$

onde

$$c_1 = q_1^T b, c_2 = q_2^T b, \dots, c_n = q_n^T b$$

Vejamos como construir a matriz  $R$  para o caso de uma base do  $R^3$ . Esse procedimento é facilmente generalizado para  $R^N$ .

**Exemplo:** Seja  $\{a, b, c\}$  base para o  $R^3$  e  $\{q_1, q_2, q_3\}$  base ortonormal obtida via ortogonalização de Grand Schmidt a partir da base  $\{a, b, c\}$ .

Temos que:

$$a = (q_1^T a)q_1 + (q_2^T a)q_2 + (q_3^T a)q_3 = (q_1^T a)q_1$$

A primeira coluna de  $R$  será, então,  $(q_1^T a, 0, 0)^T$

$$b = (q_1^T b)q_1 + (q_2^T b)q_2 + (q_3^T b)q_3 = (q_1^T b)q_1 + (q_2^T b)q_2$$

A segunda coluna de  $R$  será, então,  $(q_1^T a, q_2^T b, 0)^T$

$$a = (q_1^T c)q_1 + (q_2^T c)q_2 + (q_3^T c)q_3$$

A terceira coluna de  $R$  será, então,  $(q_1^T a, q_2^T b, q_3^T c)^T$

$$\text{Logo, } R = \begin{pmatrix} q_1^T a & q_1^T a & q_1^T a \\ 0 & q_2^T b & q_2^T b \\ 0 & 0 & q_3^T c \end{pmatrix}$$

## 7.4 Conclusão

Neste capítulo apresentados os conceitos de Matriz Ortogonal, Processo de Ortogonalização de Grand-Schmidt e Fatoração  $A = QR$ .

# 8 Polinômio Característico e Teorema de Cayley Hamilton

## 8.1 Polinômio Característico

O polinômio característico de uma matriz é um conceito de extrema importância para a Álgebra Linear. É a partir dele que poderemos definir os conceitos de autovalores e autovetores, que, por sua vez, também são muito importantes. Esses conceitos surgem nas mais variadas aplicações, desde diagonalização de matriz e transformações lineares até cálculo funcional e sistemas de equações de diferenças.

Dito isso, passemos para a definição de polinômio característico.

**Def:** seja  $A$  uma matriz quadrada de dimensões  $n \times n$ . O polinômio característico dessa matriz é definido como:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A), \text{ onde } I \text{ é a matriz Identidade de } R^n, \lambda \in R$$

**Ex:** Calcule o polinômio característico da matriz  $A$  abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - a & b \\ c & \lambda - d \end{pmatrix} = \\ &= (\lambda - a)(\lambda - d) - cb \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \end{aligned}$$

Podemos fazer alguns comentários interessantes sobre esse resultado:

1. O último termo entre parênteses é o determinante da matriz  $A$  original.
2.  $p(0) = \det(0 \cdot I - A) = \det(-A) = \det(A \cdot (-I)) = \det(A) \cdot \det(-I) = \det(A) \cdot (-1)^n$

## 8.2 Teorema de Cayley Hamilton

O teorema de Cayley Hamilton é simples de ser demonstrado e diz o seguinte:

**Def:** Se  $A$  é uma matriz quadrada  $n \times n$  e  $p(\lambda)$  seu polinômio característico, então  $p(A) = 0$ .

*Demonstração:*

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ p(A) &= \det(A \cdot I - A) = \det(0) = 0 \end{aligned}$$

Esse teorema possui algumas aplicações interessantes que justificam seu estudo. Vejamos duas delas.

### 8.2.1 Aplicação 1 - Cálculo da Inversa

Vamos direto para um exemplo. Seja a matriz  $A$  abaixo. Calcule sua inversa via Teorema de Cayley Hamilton.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Temos que o polinômio característico dessa matriz é  $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ .

A partir de  $p(\lambda)$  podemos verificar facilmente que a matriz  $A$  é inversível uma vez que o termo independente do polinômio, que corresponde ao determinante de  $A$  é diferente de 0. Aplicando o Teorema de Cayley Hamilton temos a seguinte equação. Note que precisamos multiplicar o termo independente pela matriz identidade para a equação fazer sentido!

$$p(A) = 0 \rightarrow A^2 - 5A + 6I = 0$$

Desenvolvendo...

$$\begin{aligned} A^2 - 5A &= -6I \\ A^{-1}(A^2 - 5A) &= -6A^{-1}I \\ A - 5I &= -6A^{-1} \\ A^{-1} &= -\frac{1}{6}(A - 5I) \end{aligned}$$

Calculando a inversa do enunciado temos a seguinte resposta:

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabendo que a demonstração genérica do cálculo da matriz inversa via Teorema de Cayley Hamilton não é difícil, ela ficará como um desafio para quem quiser! Qualquer dúvida, não hesite em entrar em contato comigo.

### 8.2.2 Aplicação 2 - Divisão de Polinômios

Vejamos como o conhecimento desse Teorema, somado à divisão de polinômios, nos torna capazes de simplificar a aplicação de um polinômio qualquer em  $A$ .

Considere  $p_2(\lambda) = \lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + a_0$  um polinômio qualquer. Podemos simplificar o cálculo de  $p_2(A)$  da seguinte forma:

$$p_2(A) = p(A) \cdot q + s$$

A equação acima é a expressão de uma divisão de polinômios, sendo  $p(A)$  o polinômio característico de  $A$  aplicado em  $A$ , o que resulta em 0, obviamente,  $q$  é o quociente e  $s$  é o resto da divisão. Lembremo-nos que o grau de  $p_2(A)$  é  $r$ , de  $p(A)$  é  $n$ , de  $q$  é  $r - n$  e de  $s$  é menor que  $n$ .

A partir da aplicação do Teorema de Cayley Hamilton, teremos:

$$p_2(A) = p(A) \cdot q + s = 0q + s = s$$

Vamos a um exemplo!

Seja  $A$  a matriz abaixo,  $p(\lambda)$  seu polinômio característico e  $p_2(\lambda)$  um polinômio definido abaixo. Calculemos  $p_2(A)$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$p_2(\lambda) = \lambda^7 - 5\lambda^6 + 6\lambda^5 - 2\lambda^3 + 11\lambda^2 - 16\lambda + 5$$

A imagem abaixo exibe o cálculo de  $p_2(\lambda)$  simplificado. Peço perdão pela letra...

$$p_2(\lambda) = p(\lambda) \cdot q(\lambda) + s(\lambda)$$

$$\begin{array}{r} \lambda^7 - 5\lambda^6 + 6\lambda^5 - 2\lambda^3 + 11\lambda^2 - 16\lambda + 5 \\ - \lambda^7 + 5\lambda^6 - 6\lambda^5 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 2\lambda^3 - 10\lambda^2 + 12\lambda \\ \hline \lambda^2 - 4\lambda + 5 \\ - \lambda^2 + 5\lambda - 6 \\ \hline +\lambda - 1 // = s(\lambda) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ \hline \lambda^5 - 2\lambda + 1 // \\ \hline // \\ \hline q(\lambda) \end{array}$$

Figura 4: Cálculo de  $q(\lambda)$  e  $s(\lambda)$



Com isso, temos que  $p_2(\lambda) = \lambda - 1$ .

$$\text{Logo, } p_2(A) = A - 1I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

### 8.3 Conclusão

Neste capítulo apresentados os conceitos de Polinômio Característico e Teorema de Cayley Hamilton, além de estudadas algumas aplicações importantes desse teorema. Em seguida, veremos as definições de autovalores e autovetores, uma aula que eu costumo chamar, informalmente, de "autotudo".

## 9 Auto-Tudo

### 9.1 Autovalores e Autovetores

Como esses conceitos são apresentados e bem trabalhados em Álgebra Linear 1, podemos partir direto para a definição.

**Def:** seja  $A$  uma transformação linear de  $R^n$  para  $R_n$ . Chamamos de autovalor o número real  $\lambda$  que satisfaz:

$$T(v) = \lambda v$$

Além disso, chamamos  $v$  de autovetor associado ao autovalor  $\lambda$ .

A partir dessas definições, podemos, em seguida, definir o conceito de subespaço característico.

**Def:** o conjunto de todos os autovetores de  $A$  associados a um autovalor  $\lambda$  é denominado subespaço característico de  $A$  associado a  $\lambda$ , também representado por  $A_\lambda$ .

Dado o nome deste subespaço vetorial, podemos supor que o polinômio característico da matriz  $A$  possui alguma relação com seus autovalores e autovetores. Essa relação se dá pelo fato de que as raízes do polinômio característico de  $A$ ,  $p(\lambda) = 0$  são, justamente, os autovalores de  $A$ . Note que, devido a essa maneira de calcular os autovalores, sabemos que uma matriz  $A$  de dimensões  $n \times n$  terá sempre, no máximo,  $n$  autovalores. Com os autovalores em mãos, a maneira mais trivial de calcular os autovetores associados é por meio da própria definição de autovetor.

Além disso, os autovetores  $v_i$  estão associados aos autovalores  $\lambda_i$  da seguinte forma:

$$(\lambda_i I - A)v_i = 0$$

o que é o mesmo que dizer que...

$$v_i \in \text{Nucleo}(\lambda_i I - A)$$

Apresentemos mais algumas definições importantes conhecidas como multiplicidades.

**Def:** Multiplicidade Algébrica de  $\lambda$  corresponde à quantidade de raízes de  $p(\lambda)$  que são iguais a  $\lambda$ .

**Def:** Multiplicidade Geométrica de  $\lambda$  corresponde à dimensão do autoespaço  $A_\lambda$ .

*Exemplos:* vejamos os autovalores, autovetores e multiplicidades das matrizes a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculando as raízes de seu polinômio característico encontramos  $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ . Aplicando a definição, achamos o autovetor associado a esse autovalor  $v_1 = [1, 2]^T$ .

Logo, a multiplicidade algébrica do autovalor 2 é 2, uma vez que são duas raízes iguais a 2 e a multiplicidade geométrica é igual a 1, pois há apenas 1 autovetor.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando as raízes de seu polinômio característico encontramos  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Aplicando a definição, achamos os autovetores associados a esses autovalores  $v_1 = [1, 0]^T$  e  $v_2 = [0, 1]^T$ .

Logo, a multiplicidade algébrica do autovalor 1 é 2, uma vez que são duas raízes iguais a 1 e a multiplicidade geométrica é igual a 2, pois há 2 autovetores LI.

## 9.2 Diagonalização

Novamente, vamos direto para a definição.

**Def:** uma matriz  $A_{n \times n}$  é dita diagonalizável se existe uma matriz  $P$  tal que  $P^{-1}AP = D$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal.

Se  $A$  possui apenas autovetores LI, então:

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_n \\ | & | & | \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

O procedimento para encontrar a diagonalização de uma matriz  $A$  é:

1. Encontrar os autovetores LI de  $A$ , se houver
2. Construir a matriz  $P$  com esses autovetores nas colunas
3. Construir a matriz  $D$  como  $P^{-1}AP$ .

Vamos enumerar, e não demonstrar, alguns teoremas importantes.

**Teorema:** Se  $A_{n \times n}$  é quadrada, então são equivalentes as seguintes proposições:

1.  $A$  é diagonalizável
2.  $A$  possui  $n$  autovalores LI, ou seja,  $A = MG$
3.  $R^n = A_{\lambda_1} + A_{\lambda_2} + \dots + A_{\lambda_n}$

**Teorema:** se todos os autovalores de  $A$  são distintos, então  $A$  é diagonalizável.

**Teorema:** Os autovetores associados a autovalores distintos são LI.

### 9.3 Potência de Matrizes

O conhecimento do conceito de autovalor é um enorme facilitador para o cálculo de potência de matrizes. Vejamos o motivo.

Partindo da definição de uma matriz diagonal, vamos mostrar como calcular  $A^2$ .

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ A^2 &= (PDP^{-1})^2 \\ A^2 &= PDP^{-1}PDP^{-1} \\ A^2 &= PDDP^{-1} \\ A^2 &= PD^2P^{-1} \end{aligned}$$

Podemos, facilmente, generalizar:  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

Outra pergunta interessante é: quais os autovalores de  $A^n$ ?

A demonstração é muito simples e similar à intuição dada pela potência de matriz acima, então me abstenho que realizá-la aqui. Sendo assim, respondemos que os autovalores de  $A^n$  são iguais a  $\lambda^n$ , sendo  $\lambda$  os autovalores de  $A$ .

### 9.4 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os conceitos de Autovalores e Autovetores, além de algumas aplicações desses conceitos, como a Diagonalização de Matrizes. Nas próximas aulas todos esses conceitos serão muito utilizados para estudarmos cálculo funcional.

## 10 Cálculo Funcional: Caso Diagonalizável

### 10.1 Algumas Definições

Considere uma matriz quadrada  $A_{n \times n}$ . O cálculo funcional associa, a cada função, uma matriz  $f(A)$ . Por exemplo, seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função exponencial  $f(x) = e^x$ . Se  $A$  for nossa matriz, quanto vale  $f(A) = e^A$ ?

Como não é ementa deste curso, vamos apenas definir uma série de potências e a Série de Taylor, bem como fornecer as séries de Taylor para algumas funções usuais. Para mais informações em relação a essas séries, a disciplina de Cálculo 4 é a ideal.

**Def:** Série de Potências é definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

**Def:** Série de Taylor de uma função  $f(x)$  é definida como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

onde  $f^n(x)$  é a  $n$ -ésima derivada de  $f(x)$  em relação a  $x$ .

Temos, por exemplo, que a série de Taylor para as funções exponencial, seno e cosseno é:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots$$

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\text{cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Uma vez definidas essas séries para algumas funções, podemos nos perguntar, novamente, como calcular a exponencial de  $A$ . No entanto, podemos responder essa pergunta de uma forma um pouco mais adequada.

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots + \frac{1}{n!} A^n + \dots$$

A partir dessa expressão, podemos calcular "facilmente" a exponencial de uma matriz! Para, de fato, facilitar nossos cálculos, vejamos o caso em que  $A$  é uma matriz diagonalizável.

## 10.2 Caso Diagonalizável

Seja  $A_{n \times n}$  uma matriz quadrada diagonalizável. Ou seja, temos  $A = SDS^{-1}$ . Adicionando essa informação à série de Taylor da exponencial, teremos o seguinte:

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots + \frac{1}{n!} A^n + \dots$$

$$e^A = I + SDS^{-1} + \frac{1}{2!} SDS^{-1} SDS^{-1} + \frac{1}{3!} SDS^{-1} SDS^{-1} SDS^{-1} + \dots + \frac{1}{n!} (SDS^{-1})^n + \dots$$

$$e^A = SIS^{-1} + SDS^{-1} + \frac{1}{2!} SD^2 S^{-1} + \frac{1}{3!} SD^3 S^{-1} + \dots + \frac{1}{n!} SD^n S^{-1} + \dots$$

$$e^A = S(I + D + \frac{1}{2!} D^2 + \frac{1}{3!} D^3 + \dots)$$

$$e^A = Se^D S^{-1}$$

Sabemos calcular  $e^D$ , basta aplicar a função exponencial nas entradas da diagonal principal, fazendo  $e^{\lambda_i}$ . Além disso, também sabemos calcular a matriz  $S$ , basta pssuirmos os autovetores de  $A$ .

De forma geral, se  $f$  está definida para os autovalores de  $A$  e  $A$  é diagonalizável, então:

$$f(A) = S f(D) S^{-1}$$

Para finalizar, enumeremos algumas observações importantes:

- Se  $\lambda$  é autovalor de  $A$ , então  $e^\lambda$  é autovalor de  $e^A$
- $\det(e^A) = e_1^\lambda e_2^\lambda \dots e_n^\lambda = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)} = e^{\text{tr}(A)}$
- $e^A$  é sempre inversível, pois  $\det(e^A) \neq 0$

### 10.3 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os conceitos de cálculo funcional e a explicação de seu caso diagonalizável. Note que ganhamos um ferramental poderoso, pois podemos aplicar (quase) qualquer função a uma matriz. Nas próximas aulas continuaremos explorando o cálculo funcional.

## 11 Cálculo Funcional: Caso Não Diagonalizável

### 11.1 Lembrando a aula anterior

Na última semana foi discutido o cálculo funcional em seu caso diagonalizável. Lembremos:

Dada  $f$  uma função definida nos autovalores de  $A_{n \times n}$  e  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ , então,  $f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots$

Se  $A = SDS^{-1}$ , então  $f(A) = Sf(D)S^{-1}$ .

### 11.2 Caso não diagonalizável

Para calcular  $f(A)$ , sendo  $A_{n \times n}$  uma matriz não diagonalizável, seguiremos o seguinte algoritmo:

1. Determinar  $p(\lambda) = (\lambda I - A)$
2. Determinar os autovalores de  $A$  com suas respectivas multiplicidades
3. Determinar o polinômio  $q$  de grau  $n - 1$ , tal que, para cada autovalor  $\lambda_i$ :

$$\begin{aligned} q(\lambda_i) &= f(\lambda_i) \\ q'(\lambda_i) &= f'(\lambda_i) \\ q^{m_i-1}(\lambda_i) &= f^{m_i-1}(\lambda_i) \end{aligned}$$

, onde  $m_i$  é a multiplicidade de  $\lambda_i$

4.  $f(A) = q(A)$

#### 11.2.1 Exemplo 1

Seja  $A$  a matriz abaixo. Calcule  $f(A)$  sabendo que  $f(x) = x^{150}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Solução:**

É fácil calcular que os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 3$  com multiplicidade  $m_1 = 2$ .

Neste caso, temos  $n = 2$ , logo o polinômio  $q$  terá grau  $n - 1 = 2 - 1 = 1$ :  $q(x) = ax + b$ . Precisamos calcular  $a$  e  $b$ .

Sabemos que

$$\begin{cases} q(3) = f(3) \\ q'(3) = f'(3) \end{cases}$$

Com isso, temos:

$$\begin{cases} 3a + b = 3^{150} \\ a = 150 \cdot 3^{149} \end{cases}$$

Bastam algumas contas para calcular  $a$  e  $b$  e teremos nosso polinômio:

$$q(x) = 150 \cdot 3^{149} \cdot x - 149 \cdot 3^{150}$$

Por fim, fazemos  $f(A) = q(A)$ :

$$\begin{aligned} A^{150} &= 150 \cdot 3^{149} \cdot A - 149 \cdot 3^{150} \cdot I \\ A^{150} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3^{150} & 150 \cdot 3^{149} \\ 0 & 3^{150} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 11.3 Justificativa Intuitiva

Vejamos uma justificativa pouco formal, para o fato de  $f(A) = q(A)$ .

Se  $f$  for um polinômio, temos que:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - q(x) \\ h(\lambda_i) &= h'(\lambda_i) = \dots = h^{m_i-1}(\lambda_i) = 0 \text{ pois } h(\lambda_i) = f(\lambda_i) - q(\lambda_i) \end{aligned}$$

Note que todos os autovalores são raízes de  $h(x)$ , logo,

$$\begin{aligned} h(x) &= p(x) \cdot k(x) \\ h(A) &= p(A) \cdot k(A) = 0 \text{ lembre-se que } p(A)=0 \\ f(A) - q(A) &= 0 \\ f(A) &= q(A) \end{aligned}$$

Se  $f$  não for um polinômio, sabemos que ela pode ser aproximada por um, via Série de Taylor, por exemplo. Com isso, podemos descrever uma justificativa similar para verificar que a propriedade  $f(A) = q(A)$  vale.

### 11.4 Conclusão

Neste capítulo foi o cálculo funcional para o caso diagonalizável e apresentado o caso não diagonalizável. Nas próximas aulas entraremos em sistemas de equações de diferenças.

## 12 Sistema de Equações de Diferenças

### 12.1 Equações de Diferenças

Um sistema de equações de diferenças está associado à problemas do mundo discreto, onde temos informações pontuais de um sistema qualquer, em vez de informações contínuas. O exemplo que será abordado é o crescimento populacional.

Considere a equação:

$$y_{k+1} = f(y, k) \text{ onde } k \in \mathbb{N}$$

A equação acima é uma equação de diferenças de **primeira ordem**, pois o valor  $y_{k+1}$  depende apenas de  $y_k$ . Logo, uma equação de ordem  $n$  é definida pelo fato de  $y_{k+1}$  depender de  $n$  valores anteriores.

**Ex:** a equação  $y_{k+1} = c \cdot y_k$ , onde  $k \in N$  e  $c \in R$  possui solução da forma da sequência  $y_1, y_2, y_3, \dots$

Estamos interessados em buscar a solução geral da equação e avaliar seu comportamento quando  $k \rightarrow \infty$ .

Para este exemplo, temos:

$$\begin{aligned}y_1 &= c \cdot y_0 \\y_2 &= c \cdot y_1 = c^2 \cdot y_0 \\y_k &= c \cdot y_{k-1} = c^k \cdot y_0\end{aligned}$$

Logo, avaliando no limite:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \begin{cases} 0, & \text{se } |c| < 1 \\ y_0, & \text{se } c = 1 \\ \text{---}, & \text{se caso contrário} \end{cases}$$

## 12.2 Sistema de Equação de Diferenças

Podemos generalizar a definição de uma equação de diferenças, passando a enxergar  $y_k$  não mais como um valor único, mas um vetor coluna de valores  $u_k$ :

$$u_{k+1} = A \cdot u_k$$

onde  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e  $u_k \in R^n$ .

Dito isso, já sabemos que a solução geral é:

$$u_{k+1} = A^k \cdot u_0$$

### 12.2.1 Exemplos

Considere que, a cada ano, 10% da população do Estado do Rio se muda para a capital e 20% da população da capital se muda para outra cidade do estado.

(a) Determine o sistema que modela a situação

Podemos construir o seguinte vetor coluna  $u_k = (y_k, z_k)^T$  onde  $y_k$  é a população do estado e  $z_k$  é a população da capital e  $k$  é o ano. Com as informações do enunciado, podemos construir o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y_{k+1} = 0.9 \cdot y_k + 0.2 \cdot z_k \\ z_{k+1} = 0.1 \cdot y_k + 0.8 \cdot z_k \end{cases}$$

Pense e veja se você concorda com essas equações antes de continuar! Montar corretamente o sistema é essencial!

Podemos, então, reescrever o sistema como:  $u_{k+1} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} u_k$

(b) A população em 2019 era de  $y = 15$  e  $z = 7$  milhões. Qual será a população nos próximos anos?

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.9 \\ 7.1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14.9 \\ 7.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.83 \\ 7.17 \end{pmatrix}$$

(c) Estude o comportamento do sistema quando  $t \rightarrow \infty$ .

A estratégia para essa análise está expressa nos passos a seguir:

$$u_{k+1} = A^k u_0$$

$$u_{k+1} = S D^K S^{-1} u_0$$

$$u_{k+1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} S^{-1} u_0$$

O polinômio característico de  $A$  é  $p(\lambda) = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7$ . Com ele, calculamos  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0.7$ ,  $v_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$  e  $v_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ .

Com esses valores em mãos:

$$A^k = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0.7^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$U_{k+1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0.7^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \dots$$

$$u_{k+1} = (y_0 + z_0) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + 0.7^k (y_0 - 2z_0) \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Finalmente, avaliando o limite, temos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = (y_0 + z_0) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

### 12.2.2 Comentários Importantes

Podemos enumerar algumas considerações importantes sobre um sistema de equações de diferenças, principalmente em relação a sua estabilidade.

Note que  $u_k = c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2$ .

O sistema  $u + 1 = A^k u_k$  é:

1. Assintoticamente estável se  $|\lambda_i| < 1, \forall i$ .
2. Estável se  $\exists j$ , tal que  $|\lambda_j| = 1$  e  $|\lambda_j| < 1$  para os demais  $j$ .
3. Instável se  $|\lambda_1| > 1$  para algum  $i$ .



### 12.3 Crescimento Populacional

Imagine que uma população de coelhos que possuem idade máxima de 15 anos. Dividimos a população em 3 faixas etárias:  $[0, 5]$ ,  $[5, 10]$ ,  $[10, 15]$ . Sabemos que:

- 50% de  $[0, 5]$  sobrevive
- 25% de  $[5, 10]$  sobrevive
- De  $[0, 5]$  não há reprodução.
- De  $[5, 10]$  nascem 4 filhotes por fêmea.
- De  $[10, 15]$  nascem 3 filhotes por fêmea.

(a) Monte o sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz acima é chamada **Matriz de Leslie** e descreve a evolução da população. As colunas e linhas se referem, da esquerda para direita e de cima para baixo, às faixas etárias  $[0, 5]$ ,  $[5, 10]$ ,  $[10, 15]$  respectivamente. Sendo assim, a primeira linha traz a informação do número de filhotes novos, pois é a linha da faixa de  $[0, 5]$ . As demais mostram quantos sobrevivem de uma faixa para outra. O número  $1/2$  na primeira coluna ( $[0, 5]$ ) e segunda linha ( $[5, 10]$ ) quer dizer que 50% dos coelhos vivem entre as faixas de  $[0, 5]$  e  $[5, 10]$ .

(b) Sendo a população inicial composta de 100 coelhos em cada fase, calcule a população depois de uma geração.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 700 \\ 50 \\ 25 \end{pmatrix}$$

(c) Calcule mais uma geração.

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 700 \\ 50 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1437,5 \\ 137,5 \\ 87,5 \end{pmatrix}$$

(d) Estude o limite do sistema

Ao calcular as raízes do polinômio característico da Matriz de Leslie do sistema, obtemos  $\lambda_1 = 3/2$ ,  $\lambda_2 = (-3 + \sqrt{5})/4$  e  $\lambda_3 = (-3 - \sqrt{5})/4$ .

Como o sistema possui um autovalor de módulo maior que 1, ele será instável. Sendo assim,  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \infty$

Como o maior autovalor é  $3/2$ , será o seu autovetor associado que dominará o sistema no limite do infinito. Será o vetor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/18 \end{pmatrix}$  que ditará a proporção da quantidade de coelhos com o crescimento da população.

## 12.4 Conclusão

Neste capítulo foi apresentado o conceito de equações de diferenças e os sistemas de equações de equações de diferenças. Foi apresentada, também, a aplicação dessa teoria em problemas de crescimento populacional. Na próxima, e última, aula veremos as Cadeias de Markov, que são um tipo de sistema de equações de diferenças.