Формула Байеса

$$\boxed{P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}}$$ (апостериорная вероятность)

4.04.20

## Послед-сть незав-ых исп-ий

Часто приход-ся рассм-ть сложн. Э, пред-щ собой неск-ко раз повтор испыта-ние (элем. эксп — ЭЭ). В научн. и практ. деят-сти пост-но прих-ся пров-ть многокр-но повт. испыт-ых усл-ий. Рез-ты предшеств. И никак не сказ-ся на послед-их.

Примеры:

1. Произв. в некот. пост. техн. усл-иях деталь оказ-ся нестанд-ой
2. За время $t$ произойдет распад радиоакт. в-ва
3. При опускании монеты денежный автомат срабатывает правильно.

Здесь Э — эксперимент И — испытание

Все эти события можно описать 1 схемой. Каждое соб-ие наступает в каждом И с одной и той же вер-ью, к-ая не измен-ся, если стан-ся известными рез-ты предшеств-их И-ий. Такие И-ия - незав-ые

Предполагается также, что И м.б. повторены как угодно большое число раз.

Таким образом, последовательные И-ия -

независимые, если вер-сть осущ-ия любого исхода в i-ом по счету И не зависит от реализации исходов предыдущих И-ий.

Простейшим классом повтор-ся незав. И-ий явл-ся послед-сть незав-ых И-ий с 2 исходами (Успех – A и неуспех $\overline{A}$) и с неизменными в каждом И вер-ями успех $P(A) = p$ и неуспех $P(\overline{A}) = 1 - p = q$

Это очень важный простейший тип И-ий. Впервые он был исследован знаменитым швейцарским ученым Яковом Бернулли (1654–1705 г.г) и получил его имя – схема Бернулли (описан в произведении "Искусство предположений", изданным после смерти автора в 1713 году).

Схема таких И-ий – урн-ая схема с возвратом.

В урне $m_1$ белых шаров и $m_2$ – черных. Соб-ие A – извлечение белого шара.

$\overline{A}$ – извлечение черного шара.

$$p = P(A) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$P(\overline{A}) = q = 1 - p = 1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

1 Поставим перед собой 1-ый вопрос, к-ый ставится при таких Испытаниях.

---

? Опр-ть вер-сть того, что при проведении n И-ий соб-ие A осущ-ся ровно m раз ($0 \le m \le n$) и, след-но, не осущ-ся $n - m$ раз.

---

Искомая вер-сть обозн-ся $P_n(m)$ – что

означает вер-сть того, что в $n$ И-ях соб-ие появ-ся ровно $m$ раз, и, след-но, не появится $n-m$ раз.

Найдем $P_n(m)$ - ?

Благ-ое сложное соб-ие представим в виде комбинации более простых соб-ий. Пусть $A_i$ - означает, что успех (соб-ие $A$) наступит в этом И-ии.

$\bar{A}_i$ - событие $\bar{A}$ (неуспех) произойдет в этом Исп-ии

Т.к мы рассматриваем соб-ие, сост-щее в том, что при проведении $n$ испытаний соб-ие $A$ произойдет ровно $m$ раз и не произойдет $n-m$, то одно из благ-ых соб-ий (например, $B_1$) с помощью введенных $A_i$ и $\bar{A}_i$ можно представить следующей формулой:

$$B_1 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_m \cdot \bar{A}_{m+1} \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n$$

Благоприятное сложное соб-ие представим в виде произведения более простых соб-ий, причем в этом случае считаем, что соб-ие $A$ наступило в 1-ых $m$ И-ях $(i=\overline{1,m})$ и не настало в последующих $n-m$ И-ях с номерами $m+1, m+2, \ldots n$

Наступление или ненаступление $A$ в И-х с различными номерами для схемы Бернулли независимы, $\Rightarrow$ для опр-ия вер-сти соб-ия $B_1$ $(P(B_1))$ можно воспользоваться теоремой умножения вер-ей для незав-ых соб-ий.

(вер-сть произведения = произв-ию вер-стей)

Поскольку вер-сто того, что A наступит = p,
а вер-сто неуспеха = q, то имеем

$$\boxed{P(B_1)=\underbrace{p\cdot p\cdot p\cdot p\cdots p}_{m\text{ раз}}\cdot\underbrace{q\cdot q\cdot q\cdots q}_{n-m}=p^m\cdot q^{n-m}} \quad (*)$$

Формула (*) позволяет посчитать вер-сть наступления соб-ия A ровно m раз при проведении n незав-ых И-ий для соб-ия $B_1$, когда успех наступает в первых m опытах (от 0 до m), а в ост-ных n-m не наступает, но это лишь 1 из благ-ных соб-ий, к-ые нас интересуют, т.к. при постановке вопроса в опр-ии вер-сти $P_n(m)$ указано только кол-во исходов, при к-ых A наступает (m) и, след-но, кол-во A-не наступает n-m, но не указ-ся в каких именно по счету исп-ях наступает или не наст-ет соб-ие A, то, след-но, благ-ными будут все соб-ия $B_i$ ($i=\overline{1,k}$), к-ые опис-ют рез-т проведения серии n И-ий, в к-ых интересующее соб. A наступает m раз.

Это значит, что номера этих И-ий м.б. любыми, важно только, чтобы их число было = m. Например, рассмотр. выше соб $B_1$ или соб-ие, в к-ом успех наступает в послед. m исп-ях, и след-но, в первых n-m не наступает и т.д.

Найдем кол-во k благ. соб-ий $B_i$, в к-ых меняются только номера i-испытаний (расположение $A_i$ и $\overline{A_i}$), но не их число. Это зн-ие k можно найти как число неупорядоченных выборок из n по m без повторений, т.е опр-ся числом сочетаний из n по m.

Получаем это следующим образом: имеем мн-во $M = \{1, 2, \dots n\}$ эл-ами мн-ва $m$ номеров (опытов, в к-ых соб-ие $A$ происходит). Т.к. в данном случае получ-ся $m$-элементные наборы (выборки), раз-ся только составом эл-ов, то это есть сочетание, и значит число всех наборов $k = C_n^m$.

Таким образом, будем иметь $B_j$ благ-ых соб-ий $(j = \overline{1, k})$

Поскольку все эти сложн. соб. $B_j$ несовм, то в соотв-ие с з акс-ой о сложении несовм соб-ий искомая вер-сть $P_n(m)$ равна сумме вер-ей всех возм-ых сложных соб-ий

$$B_j \, (j = \overline{1, k}) : P_n(m) = P\left(\sum_{j=1}^{k=C_n^m} B_j\right) = \left|\begin{matrix}\text{соб-ия}\\ \text{несовместимы}\end{matrix}\right| = \sum_{j=1}^{k=C_n^m} P(B_j)$$

Т.к. вер-сти этих сложных соб-ий $B_j$ один-вы

$P(B_j) = p^m q^{n-m} \quad (j = \overline{1, k = C_n^m})$, то иск-ая вер-сть появл-ия $m$ раз соб-ия $A$ в $n$ И-х = вер-сти 1-ого сложн. соб-ия * на их число

$$P_n(m) = k \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \text{ т.е } P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

$$\boxed{P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m \cdot q^{n-m}}$$ Формула Бернулли

Иногда $P_n(m)$ обозн-ют следующим обр-ом:

$$P_n(m) = P(X = m) = P_{n,m}(p) = C_n^m p^m q^{n-m} = P_{n,m}$$

Числа $P_{n,m}(p)$ интерпретируются как вер-сти получить ровно $m$ успехов в $n$ незав-ых и-иях с 2 исходами.

Заметим, что $P_n(m)$ равна коэф-ам при $x^m$ разложения бинома $(q-px)^n$ по степеням $x$. Поэтому сов-сть вер-ей $P_n(m)$, $m=0,1,2,\dots,n$ наз-ют биномиальным законом распр-ия вер-ей случайной величины X (биномиальным распределением или распр-ем бернулли)

Пример 1

Опр-ть вер-сть 3 поражений цели в серии из 8 выстрелов, если вер-сть поражения при одном выстреле $p=0{,}6$

Реш-ие

$n=8$, $m=3$

$p=0{,}6 \Rightarrow q=1-p=1-0{,}6=0{,}4$

$P_8(3)=C_8^3\cdot p^3\cdot q^{8-3}=C_8^3\,p^3\,q^5=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot0{,}6^3\cdot0{,}4^5=0{,}124$

Пример 2

Вер-сть того, что расход электр-гии в продолжении 1 суток не превысит устан. нормы $p=0{,}75$. Найти вер-сть того, что в ближ-их 6 суток расход электр-гии в течение 4 суток не превышает нормы.

Реш-ие:

Вер-сть норм.-ого расхода электр-гии в продолжении каждых из 6 суток пост-на $p=0{,}75$, $\Rightarrow$ вер-сть перерасхода электр-ва в каждые сутки $q=1-0{,}75=0{,}25$

$P_6(4)=C_6^4\cdot p^4\cdot q^{6-4}=C_6^2\cdot0{,}75^4\cdot0{,}25^2=0{,}3$

② Вновь будем считать, что n незав-ых исп-ий в каждом из к-ых вер-сть появл-ия соб. A пост-но и равно p: $0<p<1$

Поставим 2 вопрос: при каком m достиг-ся максим. вер-сть $P_n(m)$, т.е каково наивер-щее число $m_0$ наст-ия соб A в серии из n эл-ов. ?

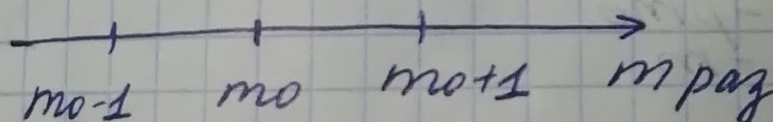
Опр-ие: Число наст-ий соб-ия в n незав исп-ях наз-ся наивероятн-шим если вер-сть осущ-ся соб-ия - это число раз наибольшее.

Можно док-ть (самост-но), что это число $m_0$ удов-ет двойному нер-ву:

$$\boxed{pn - q \le m \le np + p}$$

Д-во

Согласно опр-ию наивер числа вер-сть наступ соб A $(m_0+1)$ и $(m_0-1)$ раз не должна превышать $P_n(m_0)$




① $P_n(m_0) \geq P_n(m_0+1)$

② $P_n(m_0) \geq P_n(m_0-1)$

Используя ф. Бернулли запишем нер-во

① $P_n(m_0) = C_n^{m_0} p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \geq C_n^{m_0+1} p^{m_0+1} q^{n-m_0-1}$

Исп-уя св-во $a^{n+1} = a^n \cdot a$ преобразуем выр-ие в прав. части нер-ва следующим образом:

$p^{m_0+1} = p^{m_0} p$

$q^{n-m_0-1} = q^{n-m_0} \cdot \frac{1}{q}$, тогда имеем

$C_n^{m_0} \cancel{p^{m_0}} \cancel{q^{n-m_0}} \geq C_n^{m_0+1} \cancel{p^{m_0}} p \cancel{q^{n-m_0}} \frac{1}{q} \quad | \cdot q$

$C_n^{m_0} q \geq C_n^{m_0+1} p \quad (*)$

Т.к $C_n^{m_0} = \frac{n!}{(n-m_0)!m_0!} = \frac{n!}{m_0!(n-m_0-1)!(n-m_0)}$

$C_n^{m_0+1} = \frac{n!}{(m_0+1)!(n-m_0-1)!} = \frac{n!}{m_0!(m_0+1)(n-m_0-1)!}$

Подставим полученные зн-ия $C_n^{m_0}$ и $C_n^{m_0+1}$ в $(*)$, проведем сокращения

$\frac{\cancel{n!}}{\cancel{m_0!}\cancel{(n-m_0-1)!}(n-m_0)} q \geq \frac{\cancel{n!}}{\cancel{m_0!}(m_0+1)\cancel{(n-m-1)!}} p$

$\frac{q}{n-m_0} \geq \frac{p}{m_0+1} \quad (**)$

Разрешим $(**)$ отн-но $m_0$

$q(m_0+1) \geq p(n-m_0)$

$qm_0 + q \geq pn - pm_0$

$(q+p)m_0 \geq pn - m$

$m_0 \geq \frac{pn-m}{q+p}$

Т.к $q+p=1$, то имеем $\boxed{m_0 \geq pn - q}$ $(V)$

Таким образом, док-ли 1 из частей нер-ва. Ан-но, док-ся и правая часть (на основании нер-ва 2 и формулы Бернулли)

$P_n(m_0) = C_n^{m_0} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \geq C_n^{m_0-1} p^{m_0-1} q^{n-m_0+1}$

$C_n^{m_0} \cancel{p^{m_0}} \cancel{q^{n-m_0}} \geq C_n^{m_0-1} \frac{\cancel{p^{m_0}}}{p} \cancel{q^{n-m}} q$

$C_n^{m_0} p \geq C_n^{m_0-1} q$

$C_n^{m_0-1} = \frac{n!}{(m_0-1)!(n-m_0+1)!} = \frac{n!}{(m_0-1)!(n-m_0)!(n-m_0+1)}$

$C_n^{m_0} = \frac{n!}{(m_0-1)!m_0(n-m_0)!}$

$\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(m_0-1)!}m_0\cancel{(n-m_0)!}} p \geq \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(m_0-1)!}\cancel{(n-m_0)!}(n-m_0+1)} q$

$\frac{p}{m_0} \geq \frac{q}{n-m_0+1}$

$pn - pm_0 + p \geq qm_0$

$(-p-q)m_0 \geq -p-pn$

$\boxed{m_0 \leq pn+p}$ (ⅴⅴ)

Объединяя (ⅴ) и (ⅴⅴ) получим $pn - q \leq m_0 \leq pn+p$

Длина интервала $pn+p-pn+q=1 \Rightarrow$

при целых $pn-q$ или $pn+p$ имеем 2 зн-ия $p$, при к-рых вер-сть $P_n(m)$ макс-на.

Для расссм-ого примера 1 имеем:

$n=8$

$p=0,6$

$q=0,4$

$\left.\begin{aligned} np-q &= 8\cdot 0,6-0,4=4,4 \\ np+p &= 8\cdot 0,6+0,6=5,4 \end{aligned}\right\} m_0=5$

Так. обр, $np-q \leq m_0 \leq np+p$,

$4,4 \leq m_0 \leq 5,4$

$m_0=5$

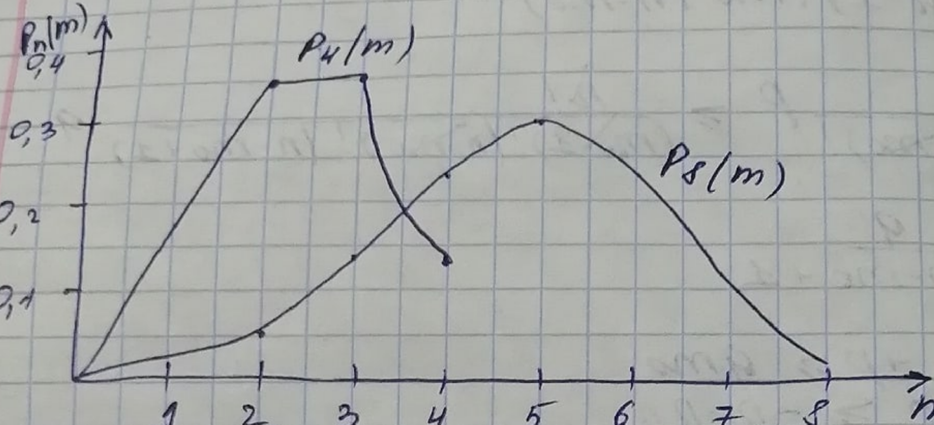
Пусть $n=4$, $p=0,6$, $q=0,4$, тогда получим

$np-q=4\cdot 0,6-0,4=2$ } $m_0=2$

$np+p=4\cdot 0,6+0,6=3$ } $m_0=3$, т.е

получим 2 зн-ия $m_0$

| m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_8(m)$ | 0,0007 | 0,008 | 0,04 | 0,124 | 0,232 | 0,28 | 0,21 | |
| $P_4(m)$ | 0,0256 | 0,1536 | 0,3456 | 0,3456 | 0,1296 | | | |




Т.к все возможные исходы сложного (?) сост-щие в том, что соб A появи-ся 0 раз, 1 раз, ... n раз несовм-ны и образуют полную группу соб-ий, то

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1$$

Это соотношение м.б выведено и без учета теоретико-вероятн-ых собр-ий, поскольку по формуле бинома Ньютона

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = (p+q)^n = 1^n = 1$$

Поэтому при ↑ n ~~максимум~~ максимум вер-сти $P_n(m)$ смещается вправо, а сами значения $P_n(m)$ ↓

## 3 Третий вопрос:

? Опр-ть вер-ть того, что соб-ие A наступит в серии из n исп-ий не менее k раз.

7

Обозначим вер-сть появл-ия соб-ия не менее $k$ раз при $n$ опытах $R_{n,k}$.

$$R_{n,k} = \sum_{m=k}^{n} P_n(m) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_n(m)$$

Вер-сть появления соб-ия хотя бы 1 раз при $n$ опытах будет: $R_{n,1} = 1 - q^n$

Кол-во $n$ опытов, к-ое надо произвести для того, чтобы с вер-ю не меньше $P$ можно было утв-ть, что данное соб-ие произойдет по крайней мере 1 раз находится по формуле:

$$n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$$, где $p$ - вер-сть появл-ия этого соб-ия в каждом опыте.

---

Д/з на вторник:

по Ефим-ву: 1.78, 1.79, 1.80, 1.81, 1.61, 1.96.

ЭУ: глава 4 (п. 4.1)

По Зарубину: гл 3.6 (с 99-101)

Схема упор-ых разбиений.