Поэтому при ↑ n максимум вер-сти $P_n(m)$ смещается вправо, а сами значения $P_n(m)$ ↓

7.04.20 3 Третий вопрос:

? Опр-ть вер-ть того, что соб-ие A наступит в серии из n исп-ий не менее k раз.

Обозначим вер-сть появл-ия соб-ия не менее k раз при n опытах $R_{n,k}$

$$R_{n,k} = \sum_{m=k}^{n} P_n(m) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_n(m)$$

(через противоположное событие)

вер-сть появл-ия соб-ия хотя бы 1 раз при n опытах: $\boxed{R_{n,1} = 1 - q^n}$

4) Эту вероятность целесообразно выч-ть через противоположное соб-ие B.

При проведении n опытов интересующее соб-ие A не появи-ся ни одного раза

По формуле Бернулли: $P(B) = P_n(0) = C_n^0 \cdot p^0 \cdot q^{n-0} = q^n$

Тогда интересующая нас вер-сть:

$R_{n,1} = 1 - P(B) = 1 - q^n$ Ч.т.д

5) Кол-во n опытов, к-ые надо произвести для того, чтобы с вер-тью не меньше P можно было утв-ть, что данное соб-ие произойдет по крайней мере 1 раз, находится по формуле:

$$\boxed{n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}}$$, где p - вер-сть появления этого соб-ия в каждом опыте (вер-сть успеха, к-ая не изменяется).

Док-во:

$R_{n,1}$ - это вер-сть того, что данное соб-ие произойдет по крайней мере 1 раз, т.е 1 раз и больше. По условию

$R_{n,1} \geq P$ (*)

Т.к $R_{n,1} = 1 - q^n$, а $q = 1 - p$, то имеем

$R_{n,1} = 1 - (1-p)^n \Rightarrow$ (*) можно записать след-им образом:

$$1 - (1-p)^n \geq P$$

$$(1-p)^n \leq 1 - P$$ | логариф-ем обе части по основанию e

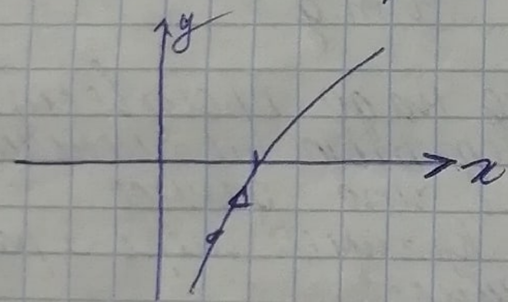
$$\ln(1-p)^n \leq \ln(1-P)$$

$$n \cdot \ln(1-p) \leq \ln(1-P)$$

? Д-ть самост-но:

Т.к $p + q = 1$, то $1 - p < 1$

Рассмотрим график $\log_a x = y$



В нашем случае $a = e = 2,7 > 1$

Точка $1 - p < 1$ по x соответствует отриц. зн-ию y.

А при делении на отриц. число в нер-ве меняется знак на против-ый

$$n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$$

ч.т.д.

Пример 1

Вер-сть отказа каждого прибора при использовании не зависит от отказа остальных приборов и равна 0,2

Исп-но 9 приборов

Незав. исп. Теорем ч.1

...обу 102, 103. до Пуассона

Найти вер-сть того, что:

1) при использовании 9 приборов не откажет ни один прибор $P_9(0)$

2) откажут менее 3 приборов из 9: $B=\{x<3\}$

3) при исп-нии 9 приборов откажут не менее 6: $C=\{x\geq 6\}$

Решение:

1) $m=0$ $\quad P_9(0)=C_9^0\cdot p^0\cdot q^9=0{,}8^9=0{,}1342$, т.к

$p=0{,}2$

$q=1-0{,}2=0{,}8$

$n=9$

2) $m=0,1,2$

$$P(B)=P_9(0)+P_9(1)+P_9(2)=\sum_{m=0}^{2}P_9(m)=$$

$$=C_9^0p^0q^9+C_9^1\cdot p^1q^8+C_9^2p^2q^7=0{,}7383$$

3) $C=\{x\geq 6\}$

Вер-сть $R_{9,6}$ можно посчитать по 2 формулам:

- $R_{9,6}=\sum_{m=0}^{9}P_9(m)=P_9(6)+P_9(7)+P_9(8)+P_9(9)=0{,}0031$
- через против. соб-ие

$$R_{9,6}=1-\sum_{m=0}^{5}P_9(m)=0{,}031$$

Проводить вычисления следует по той формуле, к-ая проще (меньше слаг-ых)

Пример 2 (самост-но)

Вер-сть брак. изделия 0,005. Чему равна вер-сть того, что из 10000 наудачу взятых изделий окажется брак-ных?

а) ровно 40
б) не более 70

Решение:
$n=1000$
$p=0{,}005$
$q=0{,}995$

а) $P_{1000}(40)=C_{1000}^{40}\cdot p^{40}\cdot q^{960}=C_{1000}^{40}\cdot 0{,}005^{40}\cdot 0{,}995^{960}$

б) $B=\{x\le 70\}$

$P_{1000,0}=\sum_{m=0}^{70}P_{1000}(m)=1-\sum_{m=71}^{1000}P_{1000}(m)$

Обобщение формулы Бернулли

Полученные в формуле Бернулли можно обобщить:

1. Независимые испытания с несколькими исходами

В каждом испытании происходит 1 и только 1 из k незав-ых соб-ий $A_1, A_2, \ldots A_k$ с вер-ми $p_1, p_2, \ldots p_k$ соотв-но

Вер-сть появл-ия m_1 соб A_1, m_2 соб-ия A_2, …, m_k соб-ия A_k в n испытаниях равна

$P_n(m_1, m_2, \ldots m_k)=\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_k}\cdot p_1^{m_1}\, p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{m_k}$

или

(1) $$P_n(m_1, m_2, \ldots m_k)=\frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\ldots m_k!}\cdot p_1^{m_1}\, p_2^{m_2}\ldots p_k^{m_k}$$

Замечание: здесь $m_1+m_2+\ldots m_k=n$, т.е $\sum_{i=1}^{k}m_i=n$

$P_n(m_1, m_2 \dots m_k)$ явл-ся коэф-ом при $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k}$ в разложении полинома $(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k)^n$ по степеням $x_1, x_2, \dots x_k$ вер-сти

(1) - полиномиальное распределение

Эти распределения находят применение в инженерном деле, естествознании и экон-их задачах.

2. Независимые испытания с разной вероятностью исходов

В каждом k-ом испытании соб. A появл-ся с разн вер-тью p_k и соотв $q_k = 1 - p_k$ не появл-ся, т.е с вер-тью осуществления соб. A от испытания к испытанию меняется.

В этом случае формула Бернулли не применима.

$p_k = P_k(A)$ - это вер-сть появл-ия соб A в k-ом испытании в послед-сти незав-ых исп-ий, тогда вер-сть осущ-ия ровно m успехов появл-ия соб A в n исп-иях = коэф. x^m в разложении по степеням x производящей функции $G_n(x)$

$$\boxed{G_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (q_k + p_k x)} \quad (2)$$

Искомые коэф-ты $P_n(m)$ вычисляются дифференц-ем по x производ-ей ф-ии:

$$\boxed{P_n(m) = \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m G_n(x)}{d x^m} \right|_{x=0}} \quad (3)$$

Пример

Пусть $n=3$

Найдем выр-ие для $P_3(m)$

$m=0,1,2,3$

p – вер-сть успеха

$q=1-p$ – вер-сть неуспеха

Производ. ф-ция $G_3(x)=\prod_{k=1}^{3}(q_k+p_k x)$

Распишем произв. ф-цию:

$G_3(x)=(q_1+p_1x)\cdot(q_2+p_2x)\cdot(q_3+p_3x)=$

$=$ | перемножим и приведем подобные при x в степенях $0,1,2,3$ | $=q_1q_2q_3x^0+(q_1q_2p_3+q_1q_3p_2+$

$+q_2q_3p_1)x+(p_1p_3q_2+p_2p_3q_1+$

$+p_1p_2q_3)x^2+p_1p_2p_3x^3$

$P_3(0)=q_1q_2q_3$

$P_3(1)=$ | по формуле (3) | $=\frac{1}{1!}\frac{dG_3(x)}{dx}=$

$(q_1q_2p_3+q_1q_3p_2+q_2q_3p_1)+2(p_1p_3q_2+p_2p_3q_1+p_1p_2q_3)x+$

$+3(p_1p_2p_3)x^2\Big|_{x=0}=q_1q_2p_3+q_1q_3p_2+q_2q_3p_1$

$P_3(2)=\frac{1}{2!}(2(p_1p_3q_2+p_2p_3q_1+p_1p_2q_3)+6(p_1p_2p_3)x)\Big|_{x=0}=$

$=p_1p_3q_2+p_2p_3q_1+p_1p_2q_3$

$P_3(3)=\frac{1}{3!}\frac{d^3G_3(x)}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{1}{6}(6(p_1p_2p_3))\Big|_{x=0}=p_1p_2p_3$

Замечание: третью производную берем от второй

Значение искомых вер-ей в этом случае, т.е в случае незав-мых испытаний с разной вер-тью исходов, а именно $P_n(m)$ можно получить с использованием $G_n(x)$, 102, 103. до пуассона

не проводя вычисления по формуле (3), а несколько иначе, используя соотношение (4)

$$\boxed{G_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (q_k + p_k \cdot x) = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) x^m} \quad (4)$$

Алгоритм получ-ия иск. вер-ей $P_n(m)$

1) Расписываем произведения в развернутом виде (v), т.е перемножаем соотв. двучлены, приводим подобные члены и выделяем в скобках коэф-ты при x^m

2) Расписываем сумму $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) \cdot x^m$ (vv) в виде $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) \cdot x^m = P_n(0) \cdot x^0 + P_n(1) \cdot x + P_n(2) x^2 + \ldots + P_n(n) \cdot x^n$

3) А затем приравниваем коэф-ты при одинаковых степенях x в полученных значениях (v) и (vv)

Д/З: к пятнице по Гмурману 1.80
1.81
1.61 (решить по формуле размещения с повторениями)
1.96
1.103

ЭУ: гл 4 (п 4.1 – 4.4)

Зарубина: стр 46–55 (!!! стр. 52 теорема 2.6)
с 101–103

схема упорядоченных разбиений