Введение

11.02

Задача любой науки сост-ит в явл-ии и исслед-ии закон-ей, к-ым подчин-ся реальные процессы.

ТВ - это матем. наука, изучающая закономерности случ-х явл-ий.

Понятие случ-ей сформ-ся под возд-ем повседневного опыта. Оно против-но понятию детерминированности.

Случайные явл-ия - явл-ия с неопр-ым исходом, происход-ие при неоднократном воспроизв-ии опред-го комплекса усл-ий; при воспр-ии одного и того же опыта случ. явл. каждый раз протекает по-иному.

Очевидно, что в природе, в экономике нет явл-ий, в к-ых не присутствовали бы эл-ты случайности.

Сущ-ют 2 подхода к из-ию этих явл:
Один из них классический (детерминистский) сост. в том, что выд-ся осн. факторы, опред. данное явление, а влияние мн-ва ост-ых второст-ых факторов, прив-их к случ-ым откл-ям его рез-та, пренебрегают.

Таким образом, выявл-ся осн. закон-сти, свойств. данному явл-ию, позв-ие одн-но пред-ть рез-т по зад-ым усл-иям.
Этот подход часто исп-ся в естеств. (точных) науках.

Однако такой подход неприемлем при исслед-ии многих примеров (в особ. техн. соц-экон-х дисциплинах).

В этих явл-иях необх-мо учит-ть не только осн-ые факторы, но и мн-во второст. фак-ов, привод-их к случ. изм-иям и искажению рез-ов, т.е тех фак-ов, к-ые и вносят элемент неопр-сти в из-ие явл-ия.

Поэтому другой подход в из-ии явл сост. в том, что эл. неопр. тр. ет спец. мет-ов их изучения.

ТВ заним-ся изуч-ем специф. зак-ей, наблюд-ых в случ-ых явл-иях.

МС - это раздел мат-ки, изуч-ий мат. методы сбора, систем-ции, обр-ки и интерпритации рез-ов наблюд-ий с целью выявления статист. зак-ей.

МС опирается на ТВ

ТВ изучает зак-ти случ. явл на основе абстр. описания действ-сти (теор. вероятн. модели)

Любая точная наука изучает не сами явл-ия, протек-ие в пр-де, об-ве, а их матем. модели.

Матем. модель - описание явл-ий при помощи набора строгоопр-ых символов и операций над ними.

ТВ также рассм-ет не сами реал-ые явл-ия, а их упр-ые схемы (матем. модели)

Предмет в ТВ - мат. модели случ. явл-ий.

МС опер-ет непоср-но рез-ами набл-ий над случ-ыми явл-иями, пред-ыми выборку из нек-ой конечной или гипот-ки беск-ой генер-ой совок-сти.

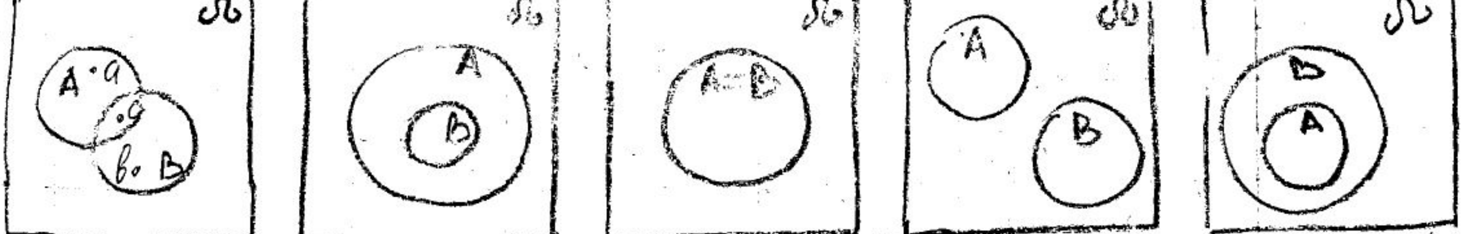
Исп-уя рез-ты получ. ТВ мат. ст-ка позв-ет не только (выявить) оценить зн-ие иск-ых хар-к, но и выявить ст-нь точн-сти, получ-ых при обр-ке данных выводов.

Если говорить кратко, ТВ позв-ет находить вер-сти сложных событий через вер-сти простых соб-ий, связ-ых с ними каким-либо обр-ом,

МС по наблюденным зн-ям (по выборке) оценивать вер-сти этих соб-ий либо осущ-ть проверку предп-ий (гипотеза) отн-но этих вер-ей.

Из-ие вер-ых моделей позв-ет понять разл-ие св-ва случ-ых явл-ий на абстр-ом и обобщенном ур-не, не прибегая к эксперименту.

В МС наоборот, исследование связ-но с конкр-ыми данными и идет от практики (наблюд-ия) к гипотезе и её проверке.



$a \in A$
$b \in B$
$c \in A$ и $c \in B$

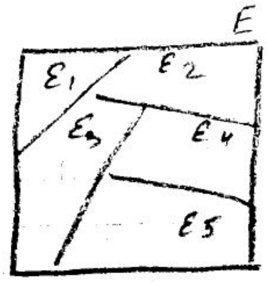
$|A| > |B|$

$|A| = |B|$

$A \cap B = \varnothing$

$|B| > |A|$

$C = A \cup B$ (хотя бы 1-ому из мн-в) $\bar{B}$ (доп-ие B до Ω)
$D = A \cap B$ (и A, и B)
$E = A \setminus B$ ($\in A$ и $\notin B$)



$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i = E$$

$$\mathcal{E}_i \wedge \mathcal{E}_j = 0 \quad i \neq j;\ i,j = \overline{1,n}$$

Элем. событие

$A = O \cdot O$

$\Omega = \{OP;\ PP,\ OO,\ PO\}$

$A = \{$выпадение 2-х О$\}$

$A = \{OO\}$

$B = \{$выпадение хотя бы 1 О$\}$

$B = \{OP;\ OO,\ PO\}$

$B = O \cdot P + O \cdot O + P \cdot O$

Пример 1.12

Из мн-в пар выбирают 1-у пару

События:

A – мужу > 30 лет

B – муж старше жены

C – жене > 30

Выяснить смысл событий:

а) $A \cdot B \cdot C$ – муж старше жены, причем оба старше 30

$X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$ б) $A \setminus A \cdot B$ – мужу > 30, но он не старше жены

$A \cap \overline{A \cdot B} = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) =$

$\underbrace{(A \wedge \overline{A})}_{\varnothing} \vee (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B}$

в) $A \cdot \overline{B} \cdot C$ = обоим > 30, но муж не старше жены

г) $A \cdot \overline{C} \subset B$

Д/З гл. 1 № 1.1
№ 1.2 + вопросы 1–4, 5, 6, 8, 9, 10, 11
№ 1.3

13.02.

При большом числе наблюд-ий случ. возд-ия в знач. мере нейтр-ся и получ. рез-т оказ-ся практ-ки неслуч-ым, предсказ-ым. Это утв-ие и яв-ся базой для практ. исп-ия вероятн-ых и мат-стат-их методов иссл-ия.

Цель указ-ых методов состоит в том, чтобы, минуя сложное зак-ую и невозм. иссл-ие отд-го случ. яв-ия, изучить закон-сти массовых случ. яв-ий, прогн-ть их хар-ки, влиять на ход этих яв-ий, контр-ть их, огран-ть область действ-ия случ-сти.

Таким образом, ТВ в абстр. форме отр-ет зак-сти, присущие случ. событиям мас-ого хар-ра. Эти зак-сти играют искл-но важную роль в естеств-ии, физике, экон-ке, воен. деле, астр-ии, геод-зии, общей теории связи и др.

ТВ яв-ся матем. основой таких спец. дисциплин, как мат. ст-ка, теория мас-ого обсл-ия, теория случ. пр-ов, теория инфор-ции и т.д.

Понятие случайного события (С.С)
Простр-во элем-ных исходов.

В основе ТВ лежит понятие события, к-ое связано с провед-ем нек-ого эксп-та.

Понятие эксп-та (исп-ие, опыт) в ТВ также явл-ся одним из осн-ных пон-ий. Оно неск-ко отли-ся от пон-ия исп-ия в физике или химии. Часто при провед-нии физ.исп-ия не все его возм-ые исходы заранее изв-ны. В отличие от этого в ТВ предп-ся, что изв-ен пер-нь всевозм-ных исходов.

ТВ явл-ся разд-ом мат-ки, в к-ом из-ют матем. модели случ-ных эксп-ов, т.е в таких эксп-ов, исх-ды к-ых нельзя одн-но опр-ть усл-ями провед-я опыта. При этом предп-ся, что Э. м.б повторен хотя бы теор-ки при неизм. усл-иях произв. число раз, а исходы Э. обл-ют стат. уст-ю. (при ↑ числа исп-ий n частота $\frac{n_A}{n}$ практ-ки прин-ет зн-ия близкие к некот пост-ому числу; n_A — число опытов, в к-ых наступило соб-ие А).

Опр. 1 Любой наблюд-ый рез-т Э — исход опыта (ω). Каждый конкр. исход может наступить или не наст-ть. Это элем. случ. соб-ие. (или элем. соб-ие, или элем. исход).

Элем. исход - любой прост-ий (недел-ый), в рамках данного опыта исход. Элем. соб-ия наз-ют также эл-ами, точками, случаями. Элем соб-ия расм-ся как неразложимые и взаимоискл-ие исходы

Опр. 2 Предп-им, что при дан. сов-сти усл-ий, опред-их Э, рез-ами Э м.б. конечное число исходов $w_1, w_2, \dots w_n$, взаимоиск-их, т.е рез-ом конкр Э явл-ся 1 исход. w_i, $i = \overline{1, n}$

Тогда полная сов-сть исх-ов мн-ва $\Omega = \{w_1, w_2, \dots w_n\}$ наз-ся простр-ом элем. исходов (пр-ом исх-ов Э., или пр-ов (мн-ом) эл.соб).

элементы данного мн-ва $w_i \in \Omega$ $i = \overline{1, n}$ - элем. соб-ия в пр-ве Ω (или элем. исх-ами.

Замечание: Э. счит-ся зад-ным, если опр-ен комплекс (сов-сть) усл-ий, в к-ых он провод-ся, а также указ-ны события, наст-ия или ненаст-ие к-ых можно наблюдать в данном Э.

Тогда под исп-ем понимается вып-ие опр-ого компл. усл-ий, в к-ых набл-ся то или иное явл-ие, фикс-ся тот или иной рез-т.

Так обр, мн-во исходов опыта обр-ет пр-во элем. исп-ов, если вып-ные след. треб-ия:

1. в рез-те О. 1 из исх-ов об-но происх-ит.

2. появл-ие 1 из исх. иски-ет появл-ие ост-ных.

3. в рамках дан. О. разд-ть элем. исх. на более мелкие сост-ие нельзя, т.е элем соб-я неразложимы.

Обозначим через $E(\Omega)$ - Э.,к-ому соответ пр-во эл.соб-ий Ω

Рассмотрим примеры:

① Опыт сост-ит в 2-кратном подбр-ии монеты. Зап-ть пр-во элем.исх-ов.

$$\begin{matrix} I & II \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & 2 \end{matrix} \quad N = n_1 \cdot n_2$$

$$Г \begin{cases} Г \\ Ц \end{cases} \qquad Г \cdot Ц = (Г; Ц)$$

$$Ц \begin{cases} Г \\ Ц \end{cases}$$

$A_1 = \{Г\}$

$A_2 = \{Ц\}$

$Ц \cdot Г = A_1 \cdot A_2$

$\Omega = \{w_{ГГ}; w_{ГЦ}; w_{ЦГ}, w_{ЦЦ}\} = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\} =$

$= \{(Г;Г); (Г;Ц); (Ц,Г), (Ц,Ц)\}$

$A = \{ГГ, ГЦ, ЦГ\}$

$A = ГГ + ГЦ + ЦГ$

② Опыт состоит в однокр. подбр-ии 2 монет

$\Omega = (ГЦ, ЦГ, ГГ, ЦЦ)$

③ При двухкр. подбр. кубика мн-во

Ω сод-ит 36 исходов

$\Omega = \{w_{ij}, i,j = \overline{1,6}\}$, w_{ij} - исход оп при к-ом выпало сначала i, затем j очков

I $\downarrow$ 6 II $\downarrow$ 6

$N = n_1 \cdot n_2 = 36$

1 — 1, 2, 3, 4, 5, 6
2
3
4
5
6

Каждый из 6 возм. исх при 1 брос-нии может сочет-ся с каждым из 6 исх-ов при 2 бросании.

Понятие случайного соб-ия. Клас-ия случ. соб.

Практ-ки наиб. интерес пред-ют не элем. соб., а некот. их сов-сти, явл-ся подмн-вами Ω - случайные события

Опр. 3 Любой факт, к-рый м.б. наблюдаем в опыте, наз-ся <u>исходом</u>.

Любой набор эл-ных исходов или иначе, произвольное подмн-во простр-ва элем-ых исходов, наз-ся событием. Элем-ные исходы, к-рые явл-ся эл-ми подмн-ва (события) наз-ся эл-ми исходами благоприятствующими данному событию или образующими это событие.

Определение события => следует уточнить для случая, когда Ω-не явл-ся счетным мн-ом.

Данное опр-ие вводится по 2 причинам.

1. Осн-ая цель - наглядно показать, как физич. понятие случайного события формализуется в мат понятиях теории мн-в и описать операции над событиями.

2. Это определение вполне удовлет-но можно применять для реш-ия практических задач.

В то время, как строгое опр-ие соб-ия служит лишь для построения теории вероятностей, как раздела современной мат-ки, оперирующие лишь безупречными, но сложными для стороннего читателя понятиями.

Часто говорят, что событие произошло, если в рез-те опыта появился какой-либо из эл-ых исходов ω.

$A \subset \Omega \quad A \subseteq \Omega$

Опыт состоит в том, что происходит 8 выстрела в мишень
- промах
- попадание

Классификация случайных событий

Событие 1. $A = \varnothing$ наз-ся невозможным, т.к. в нем нет ни одного исхода.

Событие, к-ое к-ое никогда не происходит в данном опыте.

2. $A = \Omega$ - достоверное, т.к всегда реализ-ся

один из исходов $w \in \mathcal{B}$
Событие, сост-ее из всех эл-ных исходов - достоверное. Оно всегда происходит в данном опыте.

3. $A = B$ - два события A и B - равные в том случае, когда они состоят из одних и тех же эл-х исходов. Они могут быть совместными или несовместными.

События A и B совм-ые, если $A \cap B \neq \varnothing$, т.е. эти события имеют одинаковые эл-ные исходы и тогда, если в рез-те опыта реал-ся один из таких исходов, то при этом наступают и событие A, и событие B

A и B - несовм-ые, если $A \cap B = \varnothing$, т.е. появл-ие одного из событий A или B, искл-ет возм-сть появл-ия другого события B или A.
Мн-во эл-ых исходов м.б. конечным и беск-ым.

4. Неск-ко событий $A_1, A_2, \ldots A_n$ наз-ся попарно-несовместными (или просто несовм-ые) если появл-ие каждого из них искл-ет появл-ие каждого из ост-ых, а в этом случае такие события $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ образуют группу несовм-ых событий (Нет ни одной пары несовм. событий.)

Пример

1 Из ящика с деталями наудачу извл-ют деталь.

$A = \{$появл-ие станд. детали$\}$

$B = \{$появл-ие нестанд. детали$\}$

A и B - несовместны

② Опыт подбр-ия монеты

$A = \{Г\}$
$B = \{Ц\}$

A и B - несовместные

И в 1-ом, и во 2-ом примере эта группа несовм-ных событий

Группа событий наз-ся группой совм-ных событий, если совм-ны хотя бы 2 события из этой группы.

③ Выстрел по мишени

$A_1 = \{$попадание в 10$\}$
$A_2 = \{$поп-ие в 8$\}$
$A_3 = \{$поп-ие в 6$\}$
$A_4 = \{4\}$
$A_5 = \{2\}$
$A_6 = \{$промах$\}$

$A_1 - A_6$ - образуют группу несовм-ных соб-ий.

④ Произв-ся 3 выстрела по мишеням

$A_1 = \{$промах$\}$
$A_2 = \{$1 поп-ие$\}$
$A_3 = \{$2 поп-ия$\}$
$A_4 = \{$3 поп-ия$\}$

$A_1 - A_4$ - обр-ют группу совм-ных событий.

⑤ Эксперимент состоит в подбрасывании 1 раз прав-ой 6-ти гранной игральной кости.

Тогда пр-во эл-ных исходов $\Omega = \{w_i, i=\overline{1,6}\}$, где w_i - эл-ое событие (исход), к-ое обозн-ет выпадение очков на верхней грани кости.

• Ук-ть состав подмн-в соотв-х след-им событиям:

$A = \{w_i \in \Omega \mid i \text{ - кратно } 3\} = \{w_3, w_6\}$

$B = \{w_i \in \Omega \mid i \text{ - нечетное}\} = \{w_1, w_3, w_5\}$

$C = \{w_i \in \Omega \mid i > 7\} = \varnothing$ невозм. событие

$D = \{w_i \in \Omega \mid i < 7\} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\} = \Omega$

$E = \{w_i \in \Omega \mid i = 5\} = \{w_5\}$

$F = \{w_i \in \Omega \mid i \text{ - дробь}\} = \varnothing$

$M = \{w_i \in \Omega \mid 0 < i < 1{,}5\} = \{w_1\}$

• Опр-ть эл-ные события в событиях A, B - M.

• Ук-ть пары совместимых событий

A и B совм-мн, т.к $A \cap B = \{w_3, w_6\} \cap \{w_1, w_3, w_5\} =$

$= \{w_3\} \neq \varnothing$

A и C - несовм мн

A и D - совм-мн $= \{w_3, w_6\}$ и т.д.

Рассмотреные группы явл-ся группой совместимых событий, например A и B

События C и F явл-ся несовм-ыми со всеми др-ими соб-ями. Событие невозм-ое не м.б совместным ни с одним из возм-ых событий. Для несовм. событий появл-ие одного из них искл-ет возм-сть появл-ия другого.

5. 2 события, одно из к-ых обязательно произойдет в этом опыте, а наступление этого события исключает возможность наступления второго, наз-ют против-ыми событиями.

Пример, A - попадание, $\bar{A}$ - промах
B - работа уч-ка эл. цепи
$\bar{B}$ - разрыв цепи и т.д.

Алгебраические операции над событиями.

Т.к по опр-ию, события явл-ся множествами только с опред-ой физ-ой природой эл-ов - элементарные события (исходы), то над ними можно производить все теоретико-мн-ые операции.

если A сод-ся в B

1. $A \subseteq B$, то событие A влечет за собой B, т.е из того что происходит A, следует, что происх-ит B.

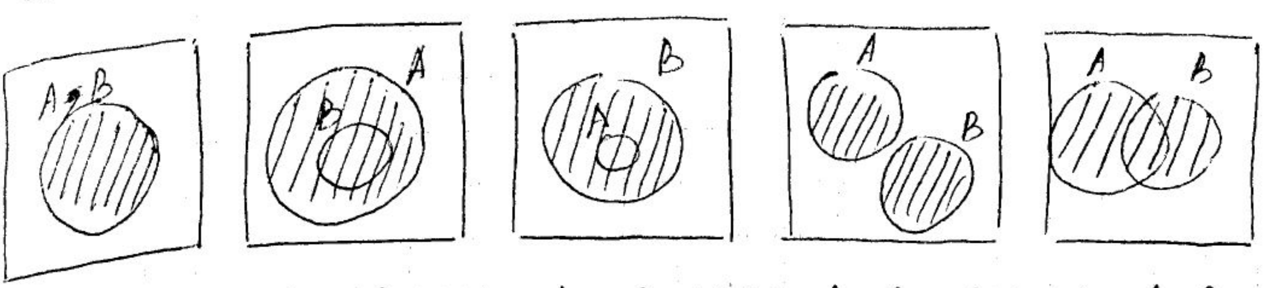
$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{3, 4, 5, 6\}$

2. $A = B$, то A и B тожд-ны, в этом случае $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

3. $C = A \vee B$, C - объединение A и B; событие C состоит в наступлении хотя бы 1 из событий A или B.

Замечание: геом. интерп-ия осн-ых действий над событиями м.б. пред-на в виде диаграмм Эйлера-Венна



$|A|=|B|$ $C=A\vee A=A$ $B\subseteq A$ $C=A\vee B=A$ $A\subseteq B$ $C=A\vee B=B$ $A\cap B=\varnothing$ $C=A\cup B$ $C=A\vee B$

В алгебре соб-ий оп-ция „$\vee$" читается „или" и может обозн-ся также „+" и опр-ся, как операция суммы.

Оп-ция „+" („$\vee$") м.б. распр-на на любое число событий.

Пусть даны события $A_1, A_2, \dots A_n$ (т.е A_i, $i=\overline{1,n}$) тогда „$\vee$" этих событий $C=A_1\vee A_2\vee\dots\vee A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ Также C, поскольку оно пред-ет собой „+" исходных событий, можно записать $C=\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$

4. Операция пересечения (произв-ия) событий

$C=A\cap B=A\cdot B$ - соб-ие C состоит в наступлении соб-ий A и B, т.е обоих соб-ий.

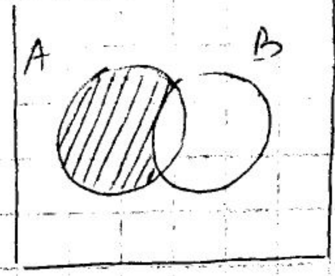
„$\cap$" или „$\cdot$" - союз И

Оп-ция м.б. распр-на на любое число соб-ий, если имеем A_i, $i=\overline{1,n}$, то соб-ие C, сост-ее в наст-ии всех этих событий, обозн-ся

$$C=\bigcap_{i=1}^{n} A_i=\prod_{i=1}^{n} A_i=A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n$$

5. $C=A-B=A\setminus B$ - разность A и B
Соб-ие C происх-ит, когда A происходит, а

B-не происходит, двухместная оп-ция.



6. $C=\bar{A}$ - дополнение соб-ия A или дополн-ие события A до достоверного или событие, против-ое соб-ию A, т.е C состоит в том, что A не происходит, тогда можно записать $\bar{A}=\Omega \setminus A$

7. Если для событий A_i, $i=\overline{1,n}$ верно, что $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$, то эти события образуют полную группу событий. Этот факт можно записать и так $\sum_{i=1}^{n} A_i=\Omega$ - полная группа событий

На практике часто интер-ся наст-ем 2 несовм-ых соб-ий, обр-их полную группу событий (противоположные), т.е $A+\bar{A}=\Omega$

Полная группа событий м.б полной группой попарно несовместных соб-ий и полной группой совм-ых событий

Соб-ия обр-ют полн. гр. несовм. соб-ий, если их сумма есть Ω (дост соб-ие) и нет ни одной пары среди этих событий несовм-ых, т.е $A_1, A_2, \dots A_n$. Они обр-ют полн. гр. несов. соб, если $\sum_{i=1}^{n} A_i=\Omega$ и $A_i \cap A_j=\emptyset$ при $i \neq j$, $i,j=\overline{1,n}$

Соб-ия $A_1, A_2, \dots A_n$ обр-ют полн. гр. совм. соб-ий если их сумма равна Ω и есть хотя бы одна пара совм-ых соб-ий.

Если соб-ия обр-ют полную гр-пу, то опыт не может окончиться ни одним этих соб-ий, т.е в рез-те опыта обяз-но произойдет хотя бы одно из соб-ий этой группы.

К полной гр-пе соб-ий можно прибавить еще какие-угодно события, любые исходы опыта, от этого полнота гр соб. не утрачив-ся

Пр 1

Бросание игральной кости

$A = \{w_1, w_2\}$

$B = \{w_2, w_3, w_4\}$

$C = \{\overset{w_4}{w_5}, w_6\}$

данные события A, B, C обр-ют полн. гр-пу совм-ых событий, т.к $A+B+C = \{w_i, i = \overline{1,6}\} = \Omega$

$A \cap B = \{w_2\} \neq \varnothing$ - пара совм-ых соб-ий

Пр 2

По цели произв-ся 3 выстрела

$A = \{$промах$\}$

$B = \{$1 попад-ие$\}$

$C = \{$2 поп-ия$\}$

$D = \{$3 поп-ия$\}$

Соб-ия обр-ют полн гр-пу соб-ий.

При реш-ии разл-ых задач, связ-ых с событиями часто приходится пред-ть сложные события в виде комбинации более простых соб-ий, применяя „+", „·", „–" (задание события в виде формулы, что потом удобно исп-ть при выч-ий вероятн-ости сложного события, если известны вер-ти простых соб-ий, используя теоремы сложения и умн-ия вероятностей)

Пример: пусть по мишени произв-ся 3 выстрела.

A_i = {попадание в мишень при i-ом выстреле} $i=\overline{1,3}$

$\overline{A_i}$ = {промах при i-ом выстреле}

Рассмотрим ряд сложных событий.

1) B сост-ит в том, что в рез-те 3 выстрелов будет ровно 1 поп-ие.
Представим это соб-ие комб-ей прост. соб-ий. Учтем, что элем. соб-ие через соб-ие A_i, $\overline{A_i}$ можно записать так

$\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}A_3 = \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ – исход опыта.
(элем. соб-ие – это промах при 1, 2 в, попадание при 3 в-ле) тогда соб-ие B имеет вид

$$B = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2\overline{A_3}$$

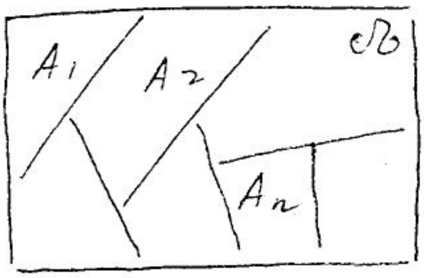
C = (не менее 2 попад-ий)

$$C = A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3 + A_1A_2A_3$$

(хотя бы 1 поп-ие) (1) $D = B + C$ или (2) $D = A_1 + A_2 + A_3$ (если преобр-ть)

Замечание: расчет вер-сти соб-ия D в зависимости от исх-ых данных можно проводить и по ф-ле (1), и по ф-ле (2), применяя соотв формулу теоремы сложения: для совм-ых или несовм-ых событий.

8. Если события $A_1, A_2, \dots A_n$ явл-ся разбиением пр-ва элем-ых событий Ω, то они представляют собой полную группу попарнонесовм-ых событий. 27.02.20



Сумма $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

$A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j;\ i,j = \overline{1,n}$

Свойства алгебры событий

1. Коммутативность

$$A + B = B + A$$
$$A \cdot B = B \cdot A$$

2. Ассоциативность

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$
$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C = A \circ B \circ C$$

3. Дистрибутивность

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A + BC = (A + B) \cdot (A + C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

4. З-ны де Моргана

$$\overline{(A + B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$
$$\overline{(A \cdot B)} = \overline{A} + \overline{B}$$

5. Из опр-ий опер-ций над событиями вытекают очевидные рав-ва:

$$A + \Omega = \Omega \quad A + \varnothing = A \quad A + A = A$$
$$A \cdot \Omega = A \quad A \cdot \varnothing = \varnothing \quad A \cdot A = A$$

Если $A \subset B$, то $A + B = B$
$A \cdot B = A$

Класс событий, замкнутый отн-но опер-ий $\cup, \cap, \overline{}$ наз-ся алгеброй событий, т.е событий F - алгебра событий, если удовл-ет след-им условиям:

1) дополнение любого соб-ия из F также принадлежит F.

2) достоверное соб-ие $\Omega \in F$

3) для 2 любых событий из F объед-ие, перес-ие также $\in F$

Классическое опр-ие вер-сти

В ТВ каждый исход Э. рассм-ся как случайность $w \in \Omega$, это озн-ет, что заранее неизвестно какой из возможных исходов будет иметь место при проведении Э.

Для практ деят-сти важно уметь сравн-ть события по степени возм-сти их наступления

Числен. мера степени объективной возм-сти наступ-ия события — вероятность события. Это опр-ие кач-но отраж-щее понятие вер-сти соб-ия не явл-ся матем-им.
Чтобы оно таким стало, необх-мо опр-ть его колич-но.

! Для колич. опис-ия ст-ни объект-ой возможности наступ-ия того или другого наблюд-го в Э. соб-ия A вводится специальная числовая функция (хар-ка) $P(A) \geq 0$, называемая вероятностью события A.

Пусть исходы конеч-ого Э образуют:
- полную группу
- несовм. стн
- равновозможны, т.е исходы имеют одинаковую возм-сть наступления (несколько событий в данном опыте наз-ся равновозможными, если по усл-ям симметрии есть основание считать, что никакое из них не явл-ся объективно более возможным, чем другие.

Такие исходы наз-ся элем исходами (элем. событиями в теоретико-мн-ве трактовке событий), случаями или шансами.

Если Опыт обладает симметрией возм-ых исходов, то случаи представляют собой исчерпывающий набор его возм-ых и искл-их друг друга исходов. Про такой опыт говорят, что он сводится к „схеме случаев" (схеме урн)
Тогда
Согласно клас-ому опр-ию вер-сть наступ-ия любого события $A = \{w_i, w_j, \dots, w_k\}$, где

$\geq i, j, k \geq 1$, $A \subseteq \Omega$, Ω - конечное мн-во равновозможных исходов $w_1, w_2, \dots w_n$
$w_i, w_j \dots w_k$ - благоприятные исходы, т.е. исходы, при к-рых A наступает,

представляет собой отн-ие числа случаев благопр-щих A (m) к общему числу всех возможных случаев (n)

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1)$$

или $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{\mu[A]}{\mu[\Omega]}$

Классическое опр-ие (точнее клас. формула) вер-сти (1) долгое время с 17 века вплоть до 19 в. рассматривалось как опр-ие вер-сти, так как в то время методы ТВ прим-сь в основном к азартным играм, к-рые свод-сь к схеме случаев (или в задачах, к-рые искусственно свод-сь к этой схеме)

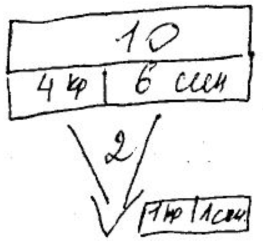
! В наст. время формальное опр-ие вер-сти не дается. Это понятие первично и не определяется, а при его пояснении исп-ют понятие отн-ой частоты соб-ия.

Поэтому клас. опр-ие (клас. ф-лу) вер-сти (1) следует рассм-ть не как опр-ие, а как метод выч-ия вер-сти для испытаний, свод-ся к схеме случаев.

Для успешного реш-ия задач с исп-ем клас. опр-ия вер-сти необ-мо знать осн-ые правила и формулы комбинаторики (раздела мат-ки, изуч-его в частности методы реш-ия комб-ых задач, т.е. на подсчет числа разл-ых комбинаций)

Пример (на схему брака контроля — гипергеом-ое распр-ие)

Пусть в к-ке 10 карандашей, из них 4 кр и 6 син. Наугад вынимают 2 кар-ша, что один из них кр, другой — синий



$A = \{1 \text{ кр и } 1 \text{ син}\}$

$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$

$N(\Omega) = C_{10}^2$

$N(A) = C_4^1 \cdot C_6^1$

$P(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^1}{C_{10}^2}$

Пример.

Бросают 3 игр-ые кости. Опр-ть, какова вер-сть выпадения суммы цифр $=4$.

Реш-ие:

$A = \{\text{выпадение на 3 костях } S = 4\}$

$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$

I	II	III
6	6	6

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 6 \\ \hline 216 \end{array}$$

$N(\Omega) = 6^3 = 216$

$A = \{(2,1,1); (1,1,2); (1,2,1)\}$

$N(A) = 3$

$P(A) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$

$M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $n = 6$

$n = |M|$ – объем выборки
Надо выбрать 3 ц., чтобы записать рез-т Э, причем ц. могут повт-ся (макс. кр-сть = М)
Порядок выбора эл-ов и записи их важен, т.к выборки различ-ся:

1. или составом эл-ов
2. или порядком след-ия эл-ов
3. причем эл-ты могут повт-ся

то они пред-ют собой размещения из n эл-ов по m с повт-ями – $\tilde{A}_n^m$

Число таких размещений опр-ся как $\tilde{A}_n^m = n^m$

Так. обр, в данном случае $N(сь) = \tilde{A}_n^m = n^m =$

$= 6^3 = 216$

$N(A)$ – это число перестановок из 3 цифр (2, 1, 1) с повторениями.
Такую задачу можно сформ-ть след-им образом: сколькими сп-ами можно расставить в ряд две 1 и одну 2.

$\tilde{P}_3 = ?$ $k = 2$
$"1" - 2 = n_1$
$"2" = 1 = n_2$

$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ $2+1 = 3$

$$C(n_1, n_2, \dots n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \dots n_k!} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots n_k}$$

$N(A) = C_3(2, 1) = \frac{3!}{2!} = 3$
$P(A) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$

1. Вероятность достоверного события = 1
Действ-но, если событие дост-но, то каждый элем. исход благопр-ет событию.
В этом случае $m = n$

$$P(A) = \frac{n}{n} = 1 \ ; \ A = \Omega$$

2. Вер-сть невозм. соб-ия = 0. Если соб-ие невозм-но, то ни один из эл-ых исходов испытания не благ-ет событию.

$m = 0$

$P(A) = \frac{0}{n} = 0 \ , \ A = \varnothing$

3. В-сть случ. соб-ия - есть полож-ое число м/у 0 и 1. Действ-но, случ-ому событию благ-ет лишь часть из общего числа эл-ых исходов э-та.
В этом случае $0 < m < n$

$$0 < \frac{m}{n} = P(A) < 1$$

В общем случае вер-сть любого соб-ия удовл-ет $0 \le P(A) \le 1$, причем
$P(\Omega) = 1$
$P(\varnothing) = 0$

Соб-ия, вер-сти к-ых очень малы, т.е близки к 0 или очень велики, т.е близки к 1 наз-ся соотв-но практ-ки невозм-ными (достоверными).

Частота событий и её св-ва

Пусть проведена серия n исп-ий, в к-ых A могло произойти или не произойти.

Частота A - отношение числа исп-ий, в к-ых появ-сь соб-ие A (m) к числу всех испытаний n

$P^*(A) = \frac{m}{n}$

Очевидны след-ие св-ва частоты:

1) частота случ. соб-ия закл-ся м/у 0 и 1
2) частота $\Omega = 1$
3) $P^*(\varnothing) = 0$
4) частота суммы 2 несовм-ых соб-ий A и B $(A \cap B = \varnothing)$ равна сумме частот этих событий

$$P^*(A+B) = P^*(A) + P^*(B)$$

Пусть в n исп-ях A появ-ся m раз
B — k раз, тогда

$$P^*(A) = \frac{m}{n}$$
$$P^*(B) = \frac{k}{n}$$

Т.к. A и B несовм-ные, то нет опытов, в к-ых они появились бы одн-но. След-но, событие $A+B$ появ-ся $m+k$ раз.

$$P^*(A+B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P^*(A) + P^*(B)$$
ч.т.д.

Если A и B совм-ны, то необх-но понятие условной частоты.

Геометрическая вер-ть

Чтобы преодолеть нед-ок клас-его опр-ия вер-ти, сост-ий в том, что оно неприме-нимо к э-ам с ∞ числом исходов, вводят геом. вер-ти — вер-ти попадания точки в область (отрезок, часть пл-сти)

Геом вер-ть позв-ет обобщить клас-ое опр-ие вер-ти на случай ∞ мн-в (Ω и $A \subseteq \Omega$)

Опр-ие: пусть Ω — область на пл-сти. Усл-ия оп. таковы, что попадание в любую подобласть $F \subseteq \Omega$ пропор. её площади, тогда вер-ть реализации соб-ия

$A = \{(x,y) \in \Omega \mid (x,y) \in F\}$ - закл-ся в попадание в заданную подобласть F.

$P(A) = \frac{S(F)}{S(\Omega)}$, где $S(F)$, $S(\Omega)$ - площади подобласти и области соответственно.

Формула геом. вер-ти м.б. обобщена на случай пр-ва произв-ой размерности в том, числе и $n = 1$.

Пусть разм-сть пр-ва n, тогда $\Omega = R^n$
Для соб-ия $A = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \Omega \mid (x_1, x_2 \dots x_n) \in F\}$
вер-сть $P(A) = \frac{mes(F)}{mes(\Omega)}$.

$P(A) = P(\{(x, x_2, \dots x_n) \in \Omega \mid (x, x_2 \dots x_n) \in F\}) = \frac{mes(F)}{mes(\Omega)}$,

где $mes(F)$ - мера мн-ва F (длина, площадь, объем и т.д в зав-сти от разм-сти пр-ва Ω.

Пример 1
A = {наугад брошен внутрь полого цил-ра точка упадет во вни-ие в его дно квадрат.}
Опр-ть вер-сть поп-ия точки в $\square$

Решение: