12.03.20

Статистическая оценка неизв-ой вероятности

Классич-ой формулой опр-ния вер-сти можно польз-ся только тогда, когда э сводится к равновозм. исходам. Во многих задачах это не так. Например, игральная кость может иметь неправ-ую форму: рождаемость мальчиков, но тем не менее сущ-ет вполне опред-ая вер-сть выпадения опред-ой грани кости неправильной формы или определение вер-сти того, что родивш-ся ребенок окажется мальчиком.

След-но, во всех задачах каждое соб-ие имеет опред. вер-сть.

В этих случаях вер-сть наход-ся опытным путем. Пусть в серии из n опытов соб-ие A появится ровно m раз (проводится незав-ое испытание в одних и тех же условиях), $m \le n$. Тогда величина $\boxed{P^*(A) = \frac{m}{n}}$ - частота события A (r_A)

При ↑ числа испытаний n частота $P^*(A)$ имеет тенденцию к стабилизации в различных сериях испытаний. При дост-но больших n для различных серий опытов величина $P^*(A)$ сохраняет почти пост-ое зн-ие.

Отклонение тем <, чем > число О. в сериях n. Более того, оказ-ся, что для случаев, когда данную задачу можно свести к класс-ому опр-нию вер-сти $P(A)$, т.е применить клас-ое опр-ие вер-сти, эти колебания частоты $P^*(A)$ происходят около зн-ия вер-сти $P(A)$.

если $P^*(A) \neq P(A)$, т.е частота не совпадает с вер-ю, к-ую определили априорно (до опытов), то это означает, что гипотеза о равновозм-ных и-ах была необоснованной.

Говорят, что частота $P^*(A)$ сход-ся по вер-сти $P(A)$.

В дальнейшем увидим, что при $n \to \infty$ вер-сть $P(B)$, сост-его в том, что $B = \{|P^*(A) - P(A)| < \varepsilon\}$, где ε - сколь угодно малое положительное число стремится к 1, т.е. вер-сть $P(B) = P(|P^*(A) - P(A)| < \varepsilon)$ стремится к 1 при $n \to \infty$, т.е $\lim\limits_{n \to \infty} P(|P^*(A) - P(A)| < \varepsilon) = 1$

или другими словами при неогранич-ом числе о. n прак-ки дост-но соб-ие, что $P^*(A) = P(A)$

Более того, если $P^*(A) \neq P(A)$, то гипотеза не обосн-ей.

Сход-сть по вер-сти обозн-ся: $P^*(A) \xrightarrow[n \to \infty]{P} P(A)$

Опр-ие: Вероятность соб-ия A - эмпирический предел $P(A)$, к к-ому стрем-ся частота $P^*(A)$ соб-ия A при неогр-ом ↑ числа опытов.

Данное опр-ие вер-сти соб-ия принято наз-ть статист. опр-ем вер-сти. Можно показать, что при статист. опр-ии вер-сти соб-ия сохр-ся св-ва вер-сти, опред-ые в усл-иях клас. схемы.

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$
3. $P(A+B) = P(A) + P(B)$, если $A \cap B = \varnothing$

С практ. т. зр. статист. опр-ие вер-сти явл-ся наиболее разумным. Однако с позиции ТВ как раздела совр. мат-ки недостаток статист. опр-ия очевиден:

Нельзя провести ∞ число повторений опыта, а при конечном числе повт-ий наблюд-ая частота еств-но будет разной при разн-ом числе повт-ий.

Связь м/у классич. и статист. опр-ями была выявлена ещё в период становления ТВ как теории азартных игр. Было уст-но, что при корректном использовании клас. опр-ия вер-сти соб-ий практ-ки совпадают с их частотами при большом числе повторений Э.

Иными словами даже игроки азартных игр знали о совпадении стат. опр-ия с др-ими: клас. и его обобщением (геом-им)

Собственно говоря, задача опр-ия связи вер-сти с частотой не потеряла акт-сти и в наши дни, когда в ТВ повсеместно исп-ся аксиом-ое опр-ие вер-сти Колмогорова.

Это привело к появлению и широкому внедрению в практику обширн. раздела ТВ — мат. статистики.

Аксиоматическое опр-ие вероятности.

В 20 в. с расширением обл-ей прим-ия ТВ потреб-сь пересм-ие осн-ых базовых понятий и выяснение тех усл-ий, при к-рых возможно исп-ие её рез-ов.

При этом в основу ТВ были положены нек-ые предпосылки (аксиомы), явл-ся обобщением многовекового челов. опыта. Все остальные положения ТВ строятся из этих аксиом так же, как любая сформ-ся матем. наука (геом-ия, теорет. механика и др) по средством дедукции.

Аксиом. постр-ие основ ТВ отправл-ся от осн-ых св-в вер-сти, подмеченных на примерах класс-ого и статист. опр-ий и преодолевает недостатки каждого из них.

Акс. опр-ие вер-сти, так. обр-ом, вкл-ет в себя и класс. и статист. опр-ие как частные случаи.

Акс. теория была сф-на в 1933 году академиком А.Н. Колмогоровым. Подход, предложенный им тесно связывает ТВ с соврем. метрич-ой теор. ф-ий, а также теор. мн-в.

Совр. ТВ основ-ся на понятии вероятн-ого пр-ва, одним из 3 комп-ов к-ого явл-ся сигма-алгебра событий (σ-алгебра)

Сигма-алгебра событий (σ-алгебра)

Выше мы назвали событием любое подмн-во пр-ва элем. исходов Ω. Такое опр-ие допустимо, если Ω - конечное или счетное мн-во.

Оказ-ся однако, что в случае несчетного

мн-ва элем. исходов уже нельзя построить лог-ки непрот-ую теорию, называя соб-ем произв-ое подмн-во мн-ва Ω.

Поэтому соб-ми в данном случае наз-ют не любые подмн-ва элем. и-ов, а только подмн-во из Ω, принад. некоторому классу $\mathcal{F}$. Этот класс в теор. мн-в принято наз-ть σ-алг-ой.

С т. зр. здр. смысла соб-ие - это то, что наблюдают после провед-ия О.

В частн-сти, если можно после О. уст-ть произошли или нет соб. A и B, то можно также сказать произ. или нет $\overline{A}$ и $\overline{B}$, $\vee, \wedge, \setminus$ соб-ий.

Так. обр, σ-алг. соб-ий обязана быть классом подмн-в, замкн-ым отн-но привед. оп-ий над подмн-вами, т.е указанные оп-ции над эл-ами данного класса приводят к эл-ам того же класса (а эл-ами в данном случае явл-ся подмн-ва.

Дадим строгое опр-ие σ-алгебры соб-ий:

Опр-ие: σ-алгебра F - непустая система подмн-в некот. мн-ва

$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots A_k, \dots A_n\}$

$A_k \in \mathcal{F}$

$A_k \subseteq \mathcal{F}$, $k = \overline{1,n}$,

удовл-ее след-им усл-ям:

1. $\mathcal{F}$ замкнуто отн-но оп-ций $\vee, \wedge, \setminus$

2. т.к $J = A \vee \overline{A}$ и $\varnothing - \overline{J}$, то мн-во $J \in \mathcal{F}$ и $\varnothing \in \mathcal{F}$

26.03.20

Рассмотрим пространство элементарных исходов Ω. Элементы некоторой σ-алгебры F, заданной на Ω – это события, а F – поле событий.

$F = \{A_1, A_2, \dots A_n, \dots\}$, где $A_n \subset \Omega$, A_n – элемент F

Сигму-алгебру F принято называть сигмой-алгеброй событий.

Любая σ-алгебра событий содержит достоверное Ω и невозможное $\varnothing$ событие.

Отличие: в случае конечного и счетного пространства элементарных исходов Ω в качестве σ-алгебры событий обычно рассматривают множество всех подмн-в Ω (булеан семейство)

Если в условии 2 ($J = A \vee \bar{A}$) мн-во событий заменить на конечное, то получим определение алгебры событий.

Любая σ-алгебра событий обязана являться алгеброй событий.
Обратное утверждение неверно.

Замечание: с точки зрения повседневной практики подмн-во пространства Ω элементарных исходов не явл-ся событиями представляющими собой чистую математическую абстракцию и в практических задачах никогда не встречаются, поэтому под событием будем понимать произвольное подмн-во пространства Ω элементарных исходов, под σ-алгеброй событий – совокупность всех подмн-в множества Ω.