26.03.20

Рассмотрим пространство элементарных исходов Ω. Элементы некоторой σ-алгебры F, заданной на Ω – это событие, а F – поле событий.

$F = \{A_1, A_2, \dots A_n \dots\}$, где $A_n \subset \Omega$, A_n – элемент F

Сигму-алгебру F принято называть сигмой-алгеброй событий.

Любая σ-алгебра событий содержит достоверное Ω и невозможное $\emptyset$ событие.

Отличие: в случае конечного и счетного пространства элементарных исходов Ω в качестве σ-алгебры событий обычно рассматривают множество всех подмн-в Ω (булеан семейство)

Если в условии 2 ($J = A \vee \bar{A}$) мн-во событий заменить на конечное, то получим определение алгебры событий.

Любая σ-алгебра событий обязана являться алгеброй событий.
Обратное утверждение неверно.

Замечание: с точки зрения повседневной практики подмн-во пространства Ω элементарных исходов не явл-ся событиями представляющими собой чистую математическую абстракцию и в практических задачах никогда не встречаются, поэтому под событием будем понимать произвольное подмн-во пространства Ω элементарных исходов, под σ-алгеброй событий – совокупность всех подмн-в множества Ω.

Аксиоматическое определение вероятности

Для того чтобы понять смысл аксиоматического определения вероятности рассмотрим классическую схему. В этом случае вероятность любого элементарного исхода w_i, $i = \overline{1, N}$

$$P(w_i) = \frac{1}{N}$$

Вероятность $P(A) = \frac{N_A}{N}$, где N_A - число исходов, благопр-их событию A.

Вероятность P(A) можно записать в следующем виде

$$P(A) = \sum_{w_i \in A} P(w_i)$$, где суммирование ведется по всем значениям индекса i, при которых элементарные исходы w_i образуют событие A.

Однако задать вероятность события по такому принципу уже в случае геом. схемы нельзя, так как при этом вероятность любого элементарного события равна нулю.

Поэтому следует дать определение вероятности события для любого простр-ва элементарных исходов Ω, не связанное с вероятностями элементарных исходов, а учитывающее св-ва вероятности событий, которые имеют место для всех предыдущих определений вероятности события (классического, геометрического, статистического).

Этими св-ва являются следующие:

1) $P(A) \geq 0$

2) $P(\Omega) = 1$

3) $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_m) = P(A_1) + \ldots + P(A_m)$, если события $A_1, \ldots, A_m$ попарно несовместны

Именно эти три св-ва лежат в основе аксиоматического определения вероятности. При этом св-во 3 формулируется для суммы счетного мн-ва попарно несовместных событий.

Опр-ие: Пусть каждому событию A (т.е подмн-ву A пространства эл-ых исходов Ω, принадлежащему σ-алгебре F) ...

$A \subset \Omega$
A - элемент F
Ω - элемент F

$F = \{A_1, A_2, \ldots A_k, \ldots A_n\}$ явл-ся системой подмн-в мн-ва Ω - пространство элементарных событий, т.е $A_k \subset \Omega$
$A_k \in F \quad k = \overline{1, n}$

... поставлено в соответствие число $P(A)$. Числовую функцию P (заданную на σ-алгебре F) называют вероятностью (или вероятн-ой мерой), если она удовлетворяет следующим аксиомам:

A1 Аксиома неотрицательности

$$P(A) \geq 0$$

A2 Аксиома нормированности

$P(\Omega) = 1$

А3 Аксиома аддитивности

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятности этих событий

(расширенная аксиома сложения для любых попарно несовместных событий

$A_1, \dots A_n \dots$

$A_i \cap A_j = 0, \; i \neq j, \; i, j = 1, 2, \dots)$

Теорема: вероятность $\sum A_i = \sum P(A_i)$

Значение $P(A)$ наз-ся вероятностью события A.

если пространство элементарных исходов Ω явл-ся конечным или счетным мн-ом, то каждому элементарному исходу $w_i \in \Omega$ $i = 1, 2 \dots$ можно поставить в соответствие число $P(w_i) = p_i \geq 0$, так что

$$\sum_{w_i \in \Omega} P(w_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

Тогда для любого события $A \subset \Omega$ в силу А3 вероятность $P(A) = \sum_{w_i \in A} P(w_i)$, т.е.

вер-сть $P(A) = \sum P(w_i)$ всех элем-ых исходов, к-ые входят в событие A.

Таким образом, определим вер-сть любого соб-ия A, используя вер-сти эл-ых исходов (вероятность элем-ых исходов можно задавать совершенно произвольно, лишь бы они были не отрицательные и в сумме составляли 1)

Именно в этом и состоит идея акс-ого определения вер-сти.

При классическом определении вер-сти используется только (А 1), а св-ва, выражающие (А 2) и (А 3) доказываются

Вывод:

Таким образом, в соответствие с этими аксиомами, вер-сть есть

1) числовая
2) неотрицательная
3) нормированная
4) аддитивная

ф-ия мн-в, принадлежащих классу F.

Здесь в отличие от классического определения нет понятия мощности мн-ва

Опр-ие: тройку объектов (Ω, F, P), сост-ую из простр-ва элем. исх-ов Ω с σ-алгеброй событий F и опред-ой на F вер-сти P наз-ют вероятн. пр-ом

Таким образом, понятие вер-ого пр-ва объединяет хорошо известные физ-ие понятия: исход опыта (ω), соб-ие (F), вер-сть соб-ия (P).

Вероятн-ое пр-во служит матем. моделью любого случ-ого явл-ия. Задание этого вероят-ого пр-ва завершается аксиоматикой ТВ.

Свойства вероятности

Из сформ-ных 3 аксиом выводятся важные следствия (все очевидные св-ва вер-сти док-ся на основе аксиом 1, 2, 3).

Следствия из аксиом:

Прежде всего из очевидного рав-ва $\Omega + \varnothing = \Omega$ и A3 мы заключаем, что

$$P(\Omega) = P(\varnothing + \Omega) = P(\varnothing) + P(\Omega)$$

Таким образом

1. $\boxed{P(\varnothing) = 0}$ – вер-сть невозм. соб-ия $= 0$, т.к $P(\Omega) = 1$ по A2, тогда $1 = P(\varnothing + 1) \Rightarrow P(\varnothing) = 0$

2. $\forall$ соб-ия A $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

   $\Omega = A + \overline{A}$

   $P(\Omega) = P(A + \overline{A})$

   по A3

   $P(A) + P(\overline{A}) = 1, \Rightarrow$

   $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3. Какое бы ни было случ. соб-ие A

   $0 \le P(A) \le 1$

   $P(A) \ge 0$ по A1

   $P(A) \le 1$, т.к $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

4. Если соб-ие A влечет за собой B, т.е $A \subseteq B$, то $P(A) \le P(B)$

5. Пусть A и B 2 произв. соб-ия, тогда

$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)}$ – Теорема сложения для 2-х событий

Из следствия 5 и (А1) следует, что

$P(A+B) \leq P(A)+P(B)$ в силу неотриц. $P(A \cdot B)$.

Ан-но можно показать, что

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cdot B)-P(B\cdot C)-P(A\cdot C)+P(ABC)$$

Д-во:

$$P(A+(B+C))=P(A)+P(B+C)-P(A(B+C))=$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cdot C)-P(AB+AC)=$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$$

ч.т.д.

По индукции можно вывести, что если $A_1, \dots A_n$ произв. соб-ия, то имеет место рав-во:

$$P(\Sigma A_i)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-$$
$$-\dots-P(A_{n-1}A_n)+P(A_1A_2A_3)+\dots+P(A_{n-2}A_{n-1}A_n)-$$
$$-\dots-(-1)^nP(A_1A_2A_3\dots A_n)$$

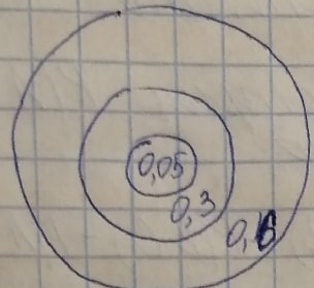
в общем виде

Последний член по-другому $+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\dots A_n)$ - это расширенная теорема сложения

Замечание: в заключении отметим, что акс. подход избавил нас от рассмотрения только равновозможных исходов.

Примеры

1 на прим-ие следствия аксиом (А3 и 2 след-ие)



A_1 - попад. в круг маленький
A_2 - попад. в круг средний
A_3 - попад. в круг большой.

Стрелок производит 1 выстрел. Вер-сти попадания 0,4; 0,3; 0,05.
Опр-ть вер-оть промаха стрелка, т.е непопад-ие в цель.

<u>Реш-ие</u>
Обозначим A - попад-ие
$\overline{A}$ - промах
A_i - попад-ие в круги $i = 1, 2, 3$,

тогда A можно выразить через элем. соб-ия
A_1, A_2, A_3 - несовместные
$\Omega = \{A_1, A_2, A_3, \overline{A}\}$
$A = A_1 + A_2 + A_3$ по A3

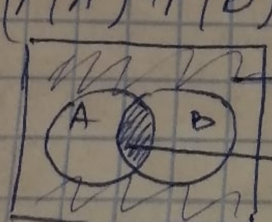
$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0,6 + 0,3 + 0,05 = 0,95$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \overset{\text{по след 2}}{=} 1 - 0,95 = 0,05$

2 На применение 2 и 5 след-ий
На занятие опаздывает - Иванов $= A : P(A) = 0,6$
- Петров $= B : P(B) = 0,7$
При каждом 2-ом опаздании Иванова одн-но опаздывает Петров, т.е $P(A \cdot B) = 0,5$
Опр-ть, что никто не опаздал.

$P(\overline{A+B}) \overset{\text{по след 2}}{=} 1 - P(A+B) \overset{\text{по след 5}}{=}$ т.к совместные

$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cdot B)) = 1 - (0,6 + 0,7 - 0,5) = 0,2$



не опазд-ет никто
$A \cdot B$

Условная вер-сть

27.03.2020

До сих пор мы говорили о безусл-ой вер-сти соб-ий, т.е о вер-сти таких соб-ий, к-ая опр-ся только усл-ями Э, но не другими соб-ми.

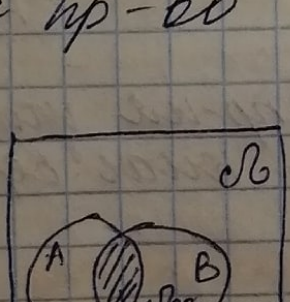
Однако в ряде случаев прих-ся расч-ть вер-сти соб-ий при доп. усл-ии, закл-ся в том, что произ-ло некот. соб-ие другое. Кроме сов-сти тех усл-ий Э, при к-ых интерес. случ. соб-ие A может произойти или нет. Такие вер-сти условные

$P(A/B)$ или $[P_B(A)]$

Это означает вер. соб. A при усл-ии, что B произошло.

Как обр. знание того, что B произошло, повлияет на вер. A?

Усл-ие сост-ее в том, что B произошло, $\leftrightarrow$ измен-ию усл-ий Э, когда из всех элем. соб-ий ост-ся только те, к-ые благ-ны B, а все остальные отбр-ся. Из этого следует, что вместо пр-ва Ω расм-ся новое пр-во Ω_B, соотв-щее соб. B



A·B

Область $A \cdot B$, соотв. перес. A и B благ-на соб-ию A при наличии B и тогда

усл-ая вер-сть осущ-ия соб A при усл-ии, что произ-ло соб B в рез-те данно[го] Э по опр-ию (формула 1) равна

$$(*) \quad P_B(A) = \frac{|A \cdot B|}{|B|} = \frac{N(A \cdot B)}{N(B) \text{ или } N_B(\Omega)}$$

По опр-ию вер-сти (клас-ому) для $A \cdot B$ и B имеем

$$P(A \cdot B) = \frac{|A \cdot B|}{|\Omega|} \Rightarrow |A \cdot B| = P(A \cdot B) \cdot |\Omega| \quad (V)$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} \Rightarrow |B| = P(B) \cdot |\Omega| \quad (W)$$

$$P_B(A) = \ldots$$

В (*) подставим зн-ие из (V), (W), получим

$$P_B(A) = \frac{P(A \cdot B) \cdot \cancel{|\Omega|}}{P(B) \cdot \cancel{|\Omega|}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Таким обр, усл. вер-сть

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}} \quad (1)$$

A, B - наблюд-ые в Э соб-ия, причем $P(B) \neq 0$

$P(B) > 0$

След-но, смысл данного акс. опр-ия усл. вер-сти проясняется при рассм-ии клас. вер-ой схемы.

Ан-но, можно записать

$$P_A(B) = P(B / A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} \quad (2) \quad , P(A) \neq 0$$

Ф (2), (1) экв-ны Т. умн-ия для 2 соб-ий (любых)

Теорема умножения для 2 событий:

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)} \quad (3)$$

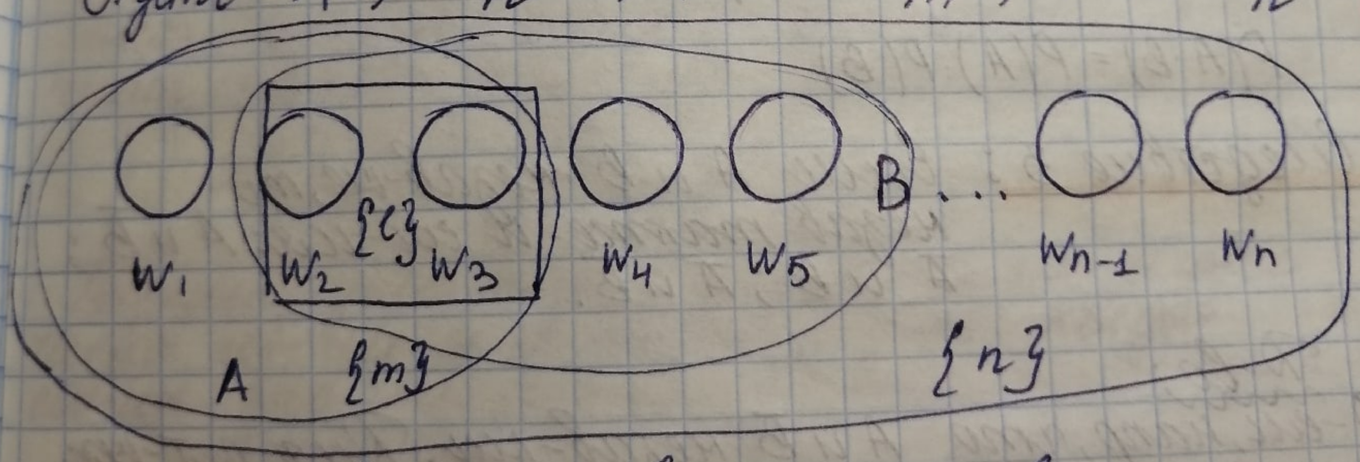
Вероятность произведения 2 событий равна вероятности одного из них (A), умноженной на усл. вер-сть 2-ого при наличии 1-ого ($P(B/A)$).

Сформ. правило наз-ют теоремой (правилом) умн. вер-сти. Заметим, что неважно, какое из соб-ий брать 1-ым или 2-ым

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B)$$

(3) м. быть док-на только для класс.опр-ия вер-сти.

Пусть $P(A)=\frac{m}{n}$, $P(B/A)=\frac{l}{m}$, $P(A\cdot B)=\frac{l}{n}$



$$P(A\cdot B)=\frac{l\cdot m}{n\cdot m}=\frac{l\cdot m}{n\cdot m}=\frac{m}{n}\cdot\frac{l}{m}=P(A)\cdot P(B/A)$$

Независимость событий

Значительную роль в ТВ и её приложениях играет понятие независимость событий.

Говорят, что B не зав-ит от A или события A и B - независимые, если - усл. вер.

$P(B/A) = P(B)$, т.е если наступление соб. A не измен-ет вер-сти B.

Если B - независимой от наст-ия A, то в силу (3) имеем

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = \left| \text{т.к. } P(B/A) = P(B) \right| =$$

$$= P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A/B) \Rightarrow P(A/B) = P(A)$$

Таким образом, для незав. соб. имеем:

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Следствие 1: если B не зав-ит от A, то и A не зависит от B.

Следствие 2: вероятность произв-ия незав. соб-ий равна произв-ию их вероятностей.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Следствие 3: Если A и B - незав-ные, то незав. также и соб-ия: A и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и B; $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Д-во:
Д-ем, напр, что A и $\overline{B}$ незав-мы. Для ост-ых пар док-ся анал-но.

Из алгебры событий знаем, что $A = A \cap \Omega$

$\Omega = B \cup \overline{B}$, тогда $A = A \cap (B \cup \overline{B}) \stackrel{\text{по св-ву дист-сти}}{=}$

$= (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

Таким образом, соб. A можно представить как сумму 2-х пар

$A = A \cdot B + A \cdot \overline{B}$

По теореме сложения для несовм. соб-ий (соб-ие B и $\overline{B}$ несовм) $\Rightarrow$ несовм $A \cdot B$ и $A \cdot \overline{B}$.

$P(A) = P(A \cdot B) + P(A \cdot \overline{B})$

$P(A \cdot \overline{B}) = P(A) - P(A \cdot B)$, т.к по усл-ию соб. A и B незав., то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Тогда $P(A \cdot \overline{B}) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B}) \Rightarrow P(A \cdot \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$, откуда A и $\overline{B}$ - незав-мы.

Опр-ие: неск-ко соб-ий $A_1, A_2, \dots A_n$ наз-ся независимыми, если любое из них не зависит от любой комбинации (произведения) любого числа других.

Для незав. соб теорема умн-ии для произв-ого числа соб-ий $A_1 A_2 \dots A_n$ запиш-ся в виде:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Теорема умножения распр-ся на любое число соб-ий и в том случае, когда соб-ия зав-мы.

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) \cdot \ldots P(A_n / A_1 A_2 \dots A_{n-1}),$$

т.е вер-сть появл-ия неск-их соб-ий равна произв-ию вер-сти 1-ого из них на усл. вер. всех ост-х, причем вер-сть каждого послед. соб-ия вычисл-ся в предп-нии, что все предыдущие уже наступили.

Безразлично, какое соб-ие считать 1 или 2, т.е порядок, в к-ом расп. соб-ия м.б. любым.

Примеры

① A – студент, закон-ил 1 курс и перешел на 2 курс

$P(A)=0{,}9$

B – студент 1 курса закончит институт

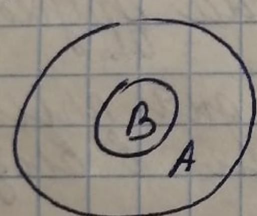
$P(B)=0{,}8$

Опр-ть вер-сть оконч-ия института студ-ом, если он уже перешел на 2 курс, т.е. $P(B/A)$

Реш-ие:

По опр. усл. вер-сти $P(B/A)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(A)}$

$P(A\cdot B)$ – вер-сть студента, законч. 1 курс и законч. институт



$B \subset A$

Любой студент, законч. институт, закон-л 1 курс, но не наоборот $\Rightarrow$

$A\cap B = A\cdot B = B \Rightarrow$

$P(AB)=P(B)=0{,}8 \Rightarrow$

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0{,}8}{0{,}9}=\boxed{0{,}89}$$

② Из урны сод-ей 4б, 3ч шара вынимаются 2 шара. Найти вер-сть, что оба белые.

Реш-ие

1 способ (с исп-ем теоремы умн.)

Предп-им, что $C=\{$оба белые$\}$ как произв-ие 2 соб $C=A\cdot B$, где

$A = \{1 \text{ шар б}\}$

$B = \{2 \text{ шар б}\}$

Найдем $P(C) = P(A \cdot B)$

Т.к A и B зав-ные, применим теорему умн. вер. для зав. соб-ий

$$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

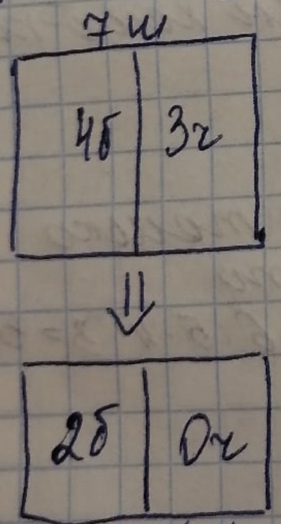
$P(A) = \frac{4}{7}$, $P(B/A)$ - ?

Предположим, что A уже произошло, т.е 1 шар б. После этого всего 6 ш. Из них 3б $\Rightarrow P(B/A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$P(C) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{2}{7}}$$

2 способ (схема „брака-контроля"- гипергеом. распр-ие)

Пусть $C = \{\text{оба белые}\}$



$$P(C) = \frac{N(C)}{N(сл)}$$

Общее число случаев $N(сл) = C_7^2$ (т.к выборки отличаются только составом)

$$N(сл) = C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

$$N(C) = C_4^2 \cdot C_3^0 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$P(C) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

(3) Из 6 карточек образ-ся слово "МАСТЕР"
Наудачу выбирают 4 и выклад-ют слева направо.

Найти вер $P(A)$ того, что пол-ся слово „ТЕМА"

1 способ

$$\begin{array}{cccc} \underline{A_1} & \underline{A_2} & \underline{A_3} & \underline{A_4} \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{array}$$

$M = \{M, A, C, T, E, P\}$ $n = 6$

По осн. формуле комб-ки $N(\Omega) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

$N(A) = 1$

$P(A) = \frac{1}{360}$

2 способ (с использованием ф-лы комб-ки)

$A = \{T, E, M, A\}$ $n = 4$

Т.к при записи слов важно не только какие буквы, но и их порядок, то $N(\Omega)$ = это число размещ. $A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

$N(A) = 1$

$P(A) = 1/360$

3 способ (с исп-ем теоремы умн-ия

$A = \{T, E, M, A\}$

$A_i = \{$вынута прав. буква$\}$ $i = \overline{1, 4}$

Тогда $A = A_1 A_2 A_3 A_4$

Т.к A_i - зав-ые, то $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1)$ ·

$\cdot P(A_3 / A_1 A_2) \cdot P(A_4 / A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{360}$

4 Слово "АНАНАС" (здесь буквы повторяются) Решим с помощью теор. умн-ия

$P(A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$

т.к 3 буквы А из всех 6 | т.к 2 Н из 5 | т.к 2б. А из 4 | т.к 1 Н из 3 ...

Д/з: Вычислить вероятность слов:

1) КНИГА (3 способами)

2) МОЛОКО // Если из него составим слова а) ЛОМ б) ОКО

3) МАТЕМАТИКА (решить как пример выше, как 4)

по Ефим. 1.136, 1.137 + 4 задачи 1.72, 1.74, 1.75, 1.76

ко вторнику.

по теории

- формула полной вер-сти (гипотезы) (ЭУ)

Зарубин – п.3.4 с 93 – 96

- формула Байса (ЭУ)

Битнер 1.10 стр 32 – 34

Зарубин 3.4 стр 96 – 99