第十六周作业参考解答及补充

作业

1. (习题 4.4.1)

设 E 是 x^4-2 在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域.

(1) 试求出 $E/\mathbb{Q}$ 的全部中间域;

(2) 试问哪些中间域是 $\mathbb{Q}$ 的伽罗瓦扩张, 哪些域彼此共轭?

proof

(1) 和??, ??类似, $E=\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2},i](\zeta_4=i)$, $[E:\mathbb{Q}]=4\cdot 2=8$. 这是一个 Galois 扩张, 求中间域等价求 $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ 的子群, 记

$$\alpha:E\to E,\ \sqrt[4]{2}\mapsto\sqrt[4]{2}i,\ i\mapsto i,\ \beta:E\to E,\ \sqrt[4]{2}\mapsto\sqrt[4]{2},\ i\mapsto -i$$

那么 $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})=(\alpha,\beta\mid\alpha^4,\beta^2,\alpha\beta\alpha\beta)=D_8(??)$. 根据 Sylow 定理它有 2 阶和 4 阶子群, 2 阶的有

$$\langle\beta\rangle,\langle\alpha\beta\rangle,\langle\alpha^2\rangle,\langle\alpha^2\beta\rangle,\langle\alpha^3\beta\rangle$$

4 阶的有

$$\langle\alpha\rangle,\langle\alpha^2,\beta\rangle,\langle\alpha^2,\alpha\beta\rangle$$

因此共有 8 个中间域, 按上面的顺序计算不动域 E^H 依次为

$$\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}],\ \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}(1+i)],\ \mathbb{Q}[\sqrt{2},i],\ \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}i],\ \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}(1-i)]$$

$$\mathbb{Q}[i],\ \mathbb{Q}[\sqrt{2}],\ \mathbb{Q}[\sqrt{2}i]$$

(2) E^H/K 是有限可分扩张 (??的注记以及 Galois 对应), 因此和 Galois 扩张之间只差正规性, 根据 Galois 理论的基本定理, $H\lhd\mathrm{Gal}(E/K)\iff E^H/K$ 正规, 因此只需找出 (1) 中正规子群对应的不动域 E^H:

$$E^{\langle\alpha^2\rangle}=\mathbb{Q}[\sqrt{2},i],E^{\langle\alpha\rangle}=\mathbb{Q}[i],E^{\langle\alpha^2,\beta\rangle}=\mathbb{Q}[\sqrt{2}],E^{\langle\alpha^2,\alpha\beta\rangle}=\mathbb{Q}[\sqrt{2}i]$$

共轭子群对应共轭域: $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}(1+i)]$ 和 $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}(1-i)]$, $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]$ 和 $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}i]$. 因为 $\beta\langle\alpha\beta\rangle\beta^{-1}=\langle\alpha^3\beta\rangle$, $\alpha\langle\beta\rangle\alpha^{-1}=\langle\alpha^2\beta\rangle$.

□

2. (习题 4.4.3)

设 $\xi=e^{\frac{2\pi i}{13}},\alpha=\xi+\xi^4+\xi^3+\xi^{12}+\xi^9+\xi^{10}$, 证明:

(1) $\mathrm{Gal}\,(\mathbb{Q}[\xi]/\mathbb{Q})$ 同构于乘法群 $\mathbb{F}_{13}^{*} = \mathbb{F}_{13} \setminus \{0\}$.

(2) $\big[\mathbb{Q}[\xi] : \mathbb{Q}[\alpha]\big] = 6$.

(3) 求 α 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式.

proof

(1) 3.4.1.

(2) 由 3.4.1, 这是一个 Galois 扩张, $\mathbb{Q}[\alpha]$ 是中间域. 记 $\sigma_i \in \mathrm{Gal}\,(\mathbb{Q}[\xi]/\mathbb{Q})$ 是同构 $\xi \mapsto \xi^i$. 而 α 的每一项恰好是子群 $\langle\sigma_4\rangle$ 里的元素, 也就是说 $\sigma_4(\alpha) = \alpha$. 那么根据 Galois 理论基本定理, $\mathbb{Q}[\xi]^{\langle\sigma_4\rangle} = \mathbb{Q}[\alpha]$, $\big[\mathbb{Q}[\xi] : \mathbb{Q}[\alpha]\big] = |\langle\sigma_4\rangle| = 6$.

(3) 由 (2) 知 $\big[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}\big] = 2$, 极小多项式次数为 2, 因此计算 α^2.

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= 3\xi^2 + 3\xi^8 + 3\xi^6 + 3\xi^{11} + 3\xi^5 + 3\xi^7 + 2\xi^4 + 2\xi^{10} + 2\xi^3 + 2\xi + 2\xi^{12}\\ &\quad + 2\xi^9 + 6\\ &= 3(-1-\alpha) + 2\alpha + 6\\ &= -\alpha + 3\end{aligned}$$

记 $\beta = \xi^2 + \xi^5 + \xi^6 + \xi^7 + \xi^8 + \xi^{11}$. 这里使用了

$$0 = \frac{\xi^{13}-1}{\xi-1} = 1 + \xi + \cdots + \xi^{12} = \alpha + 1 + \beta.$$

因此 α 的极小多项式是 $x^2 + x - 3$.

□

3. (习题 4.4.4)

设 $p > 2$ 是素数, $\xi_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$, ξ_{p^2} 为 p^2 次本原单位根.

(1) 求 $\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}$ 的扩张次数, 并证明 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}) \cong F_p^*$;

(2) 求 $\mathbb{Q}(\xi_{p^2})/\mathbb{Q}$ 的扩张次数, 并确定 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{p^2})/\mathbb{Q})$(提示: 该群是 $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^*$);

(3) 试确定 $\mathbb{Q}(\xi_{p^2})/\mathbb{Q}(\xi_p)$ 的扩张次数, 并证明这是一个伽罗瓦扩张.

proof

(1) 3.4.1.

(2) 由 4.3.3, $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{p^2})/\mathbb{Q}) \cong U(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) = p(p-1)$.

(3) 由 (2), $[\mathbb{Q}(\xi_{p^2}):\mathbb{Q}(\xi_p)][\mathbb{Q}(\xi_p):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\xi_{p^2}):\mathbb{Q}]=p(p-1)$. 从而 $[\mathbb{Q}(\xi_{p^2}):\mathbb{Q}(\xi_p)]=p$. 它是 Galois 扩张是因为 $\mathbb{Q}(\xi_{p^2})/\mathbb{Q}$ 是 Galois 扩张.

$\square$

注:

对于 Galois 扩张 L/K, 对中间域 E 来说, L/E 总是 Galois 扩张, 这是因为 L 是 K 上可分多项式 $f(x)$ 的分裂域, 从而也能看成 $f(x)\in E[x]$ 的分裂域.