第五周作业参考解答及补充

作业

1. (习题 2.2.6)

令 $\mathbb{R},\mathbb{C}$ 分别表示实数域和复数域, 试证明：

(1) 若 R 是由关于 $\cos t$ 和 $\sin t$ 的实系数多项式组成的函数环, 则 $R\cong\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$;

(2) $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ 是唯一分解整环 (提示：证明其为 ED);

(3) $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ 不是唯一分解整环.

proof

(1) 考虑同态

$$\varphi:\mathbb{R}[x,y]\to R=\mathbb{R}[\cos t,\sin t],\ x\mapsto\cos t,y\mapsto\sin t,$$

这自然是一个满同态, 由同态基本定理, 关键在于证明

$$\ker(\varphi)=(x^2+y^2-1)$$

若多项式 $f(x,y)$ 满足 $\varphi(f)=f(\cos t,\sin t)=0$, 将 f 看成是关于 y 的多项式

$$f(x,y)=a_0(x)+a_1(x)y+\cdots+a_n(x)y^n,\ a_i(x)\in\mathbb{R}[x],\ 0\leqslant i\leqslant n$$

由于 x^2+y^n-1 关于 y 是首一的, 因此可以做带余除法, 得 $f=gq+r$, 其中 $r(x,y)=r_0(x)+r_1(x)y$. 带入 $x=\cos t,y=\sin t$ 得 $r(\cos t,\sin t)=0$, 即

$$r_0(\cos t)+r_1(\cos t)\sin t=0$$

做代换 $t\mapsto -t$, 得

$$r_0(\cos t)-r_1(\cos t)\sin t=0$$

两式相加得 $r_0=0$, 相减得 $r_1=0$, 从而 $r=0$. 因此 $f\in(x^2+y^2-1)$, 即 $\ker(\varphi)\subseteq(x^2+y^2-1)$. 另一方面 $x^2+y^2-1\in\ker(\varphi)$, 故 $\ker(\varphi)=(x^2+y^2-1)$

(2) 做基变换 $u=x+iy,v=x-iy$, 他有逆变换 $x=\dfrac{u+v}{2},y=\dfrac{u-v}{2i}$. 因此有同构 $\mathbb{C}[u,v]\cong\mathbb{C}[x,y]$. 从而

$$\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)\cong\mathbb{C}[u,v]/(uv-1)$$

而同态

$$\mathbb{C}[u,v]\to\mathbb{C}[u,u^{-1}],\ u\mapsto u,v\mapsto u^{-1}$$

是满的, 且 kernel 是 $(uv-1)$, 证明类似于 (1). 因此

$$\mathbb{C}[u,v]/(uv-1)\cong\mathbb{C}[u,u^{-1}]$$

这个环称为 Laurent 多项式环, 这个环上可以做带余除法, 非零多项式的次数定义为最高次数 $-$ 最低次数. 即 $f=a_nu^n+a_{n+1}u^{n+1}+\cdots+a_mu^m,n,m\in\mathbb{Z},n<m$ 的次数为 $\deg(f)=m-n$. 因此这是一个 ED, 从而是 UFD.

(3) 由 (2), $\mathbb{C}[\cos t, \sin t]$ 是 UFD, 用待定系数, 假设

$$\cos t = (a_1 \cos t + a_2 \sin t + a_3)(b_1 \cos t + b_2 \sin t + b_3)$$

其中 $a_i, b_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, 3$. 我们要忽略掉 $a_1 = b_3 = 1$ 其余都是 0 这种平凡的情况, 左右展开得到

$$\begin{aligned} a_1 b_1 - a_2 b_2 &= 0, \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 &= 0, \\ a_1 b_1 + a_3 b_3 &= 0, \\ a_1 b_3 + a_3 b_1 &= 1, \\ a_2 b_3 + a_3 b_2 &= 0. \end{aligned}$$

由第一个式子得 $b_1 = \dfrac{a_2}{a_1} b_2$, 带入第二个式子得 $a_2 = \pm i a_1$, 从而 $b_1 = \pm i b_2$.

由一, 三又能得到 $a_2 b_2 = -a_3 b_3$, 类似地, 带入第五个式子, 有 $a_3 = \pm a_2$, $b_2 = \pm b_3$.

再用四, 五得 $a_1 b_3 = a_3 b_1 = \dfrac{1}{2}$.

把上述关系带入

$$\begin{aligned} \cos t &= a_1 b_3 (\cos t \pm i \sin t \pm i)(\pm i \cos t \pm \sin t + 1) \\ &= \frac{1}{2} (\cos t \pm i \sin t \pm i)(\pm i \cos t \pm \sin t + 1) \end{aligned}$$

检查正负号, 得到结果

$$\cos t = \frac{1}{2} (\cos t + i \sin t - i)(i \cos t + \sin t + 1)$$

类似有

$$1 - \sin t = \frac{1}{2} (\cos t + i \sin t - i)(\cos t - i \sin t + i).$$

带入 $-t$ 就是 $1 + \sin t$ 的分解.

因此 $\cos t$ 和 $1 \pm \sin t$ 无法在 $\mathbb{R}[\cos t, \sin t]$ 中分解. 这样就有 $\cos^2 t = \cos t \cos t = (1 - \sin t)(1 + \sin t)$. 因此不是 UFD.

注: (2) 中若允许正次数到无穷的话, 则该环称为 Laurent 形式级数域 (可以验证确实是一个域).

课上的补充内容

1. (Noetherian $\iff$ a.c.c.)

R 是诺特环当且仅当 R 满足 a.c.c.

其中 a.c.c. 指若有环 R 的理想升链

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$$

则该链必稳定, 即 $\exists n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 I_n 后的理想都相等, $I_n = I_{n+1} = \cdot$.