

# 孙笑涛《抽象代数》习题解答（自制）

MathPlus

2024 年 10 月 24 日

仅供学习交流使用, 本人对此未做出任何学术贡献.

## 目录

<b>第 1 章 群环域</b>	<b>2</b>
习题 1.1 教材 p8-p9	2
习题 1.2 教材 p13-p14	7
习题 1.3 教材 p17-p18	15
习题 1.4 教材 p21-p22	19
<b>第 2 章 唯一分解整环</b>	<b>26</b>
习题 2.1 教材 p28-p29	26
习题 2.2 教材 p35-p36	33
习题 2.3 教材 p41-p42	37
习题 2.4 教材 p48-p49	40
<b>第 3 章 域扩张</b>	<b>42</b>
习题 3.1 教材 p52-54	42
习题 3.2 教材 p59	44
习题 3.3 教材 p64	44
习题 3.4 教材 p67-68	46
<b>第 4 章 群论初步</b>	<b>48</b>
习题 4.1 教材 p72	48
习题 4.2 教材 p77	49
习题 4.3 教材 p80	50
习题 4.4 教材 p84	50
习题 4.5 教材 p87-p88	51
<b>第 5 章 模论初步</b>	<b>54</b>
习题 5.1 教材 p91	54
习题 5.2 教材 p95-p96	55
习题 5.3 教材 p101	56
<b>参考文献</b>	<b>57</b>

约定:

1. 由于教材中的  $\subset$  符号意义有些歧义, 我们统一用  $\subseteq$  表示子集,  $\subsetneq$  表示真子集, 比如2.1.5中我对符号进行了修正.
2. 习题中也有其他错误, 对教材原文修改的地方我用红色标出
3. 环都是有 1 的. 如果看到把  $n$  看作  $R$  的元素, 请看1.2.1最后的注记.
4. 文中出现的教材指 [孙 22]
5. 对称群的乘法以教材为准, 见1.3.5注记.
6. PID 中的命题  $(a, b) = ua + vb$  统一称为 Bézout's Identity. 主要是 Bézout's Theorem 现在都指代数几何里的一个定理了. 教材里的那个 Bézout's Theorem 感觉有些太普通了, 还是别叫它定理了吧...

## 第 1 章 群环域

### 习题 1.1 教材 p8-p9

1.1.1 设  $K$  是一个域, 试证明下述结论:

- (1) 如果  $a \cdot c = b \cdot c$ ,  $c \neq 0_K$ , 则  $a = b$  (乘法消去律);
- (2)  $\forall a, b \in K$ , 如果  $a \cdot b = 0_K$ , 则  $a = 0_K$  或  $b = 0_K$ ;
- (3)  $(a^{-1})^{-1} = a$  ( $\forall a \in K, a \neq 0_K$ );
- (4)  $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$  ( $a \neq 0_K, b \neq 0_K$ );
- (5)  $(-a)^{-1} = -a^{-1}$  ( $\forall a \neq 0_K$ );
- (6)  $\forall a \neq 0_K, m, n \in \mathbb{Z}$ , 则  $a^{m+n} = a^m \cdot a^n, a^{mn} = (a^m)^n$ ;

*proof*

(1) 由于  $c \neq 0$ , 故可在原式左右同乘  $c^{-1}$ , 得

$$\begin{aligned} a \cdot c \cdot c^{-1} &= b \cdot c \cdot c^{-1} \\ \implies a &= b. \end{aligned}$$

这告诉我们逆元的存在性强于乘法消去律, 乘法消去律已经可以保证乘法逆运算是良定的. 这对加法也是一样的道理, 见1.2.1的 (1).

也可以用分配律得到

$$a \cdot c = b \cdot c \implies (a - b) \cdot c = 0_K.$$

要得到  $a = b$  需要使用 (2), 即域  $K$  是没有零因子 (zero-divisor) 的. 由于  $c \neq 0_K$ , 则  $a - b = 0_K$ , 即  $a = b$ .

注: 无零因子的非零交换环称为整环 (integral domain), 见教材 2.1 节 p23.

(2) 只需证明当  $a \neq 0_K$  时有  $b = 0_K$ , 同 (1), 在等式  $a \cdot b = 0_K$  两端左乘  $a^{-1}$  即可.

这告诉我们域  $\implies$  整环. 结合 (1) 知一个环是整环的条件已经可以推出乘法消去律.

(3) 即要证明  $a^{-1}$  的逆元是  $a$ , 这是根据定义以及逆元的唯一性得到, 教材在域, 环, 群三处定义下的注记都有提及. 事实上只要  $a$  在某一个幺半群 (monoid) 中关于这个运算有逆元, 该结论都会成立, 如 1.2.1 的 (3).

(4) 即要证明  $a \cdot b$  的逆元是  $a^{-1} \cdot b^{-1}$ . 此处需要交换律, 因此验证半边逆就够了.

$$(a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a^{-1}) \cdot (b \cdot b^{-1}) = 1_K.$$

非交换的情形为  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ , 见 1.3.2.

(5) 即要证明  $-a$  的逆元是  $-a^{-1}$ . 我们用一下 1.2.1 的 (6)

$$(-a)(-a^{-1}) = aa^{-1} = 1_K, \quad (-a^{-1})(-a) = a^{-1}a = 1_K.$$

这样这一条对一个环中的单位都成立.

(6) 首先需要明确定义, 教材关于  $a^n$  的定义并不清晰, 包括后面 1.2.1 中的  $na$  也是. 事实上, 这种和  $\mathbb{Z}$  有关的东西都应该由递归定义给出, 相对应的证明要用归纳法.

严格来说, 这是定义了一个映射

$$\mathbb{Z} \times K^* \rightarrow K^*, (n, a) \mapsto a^n,$$

这里  $K^* = K \setminus \{0_K\}$  (见 1.3.2), 自然数的部分应由递归定义给出,

$$a^0 := 1_K, \quad a^{n+1} := a^n \cdot a, \quad n \in \mathbb{N},$$

负整数的部分定义为

$$a^n := (a^{-1})^{-n}, \quad n < 0.$$

由该定义可以验证对任意整数  $n \in \mathbb{Z}$  均有  $a^{n+1} = a^n \cdot a$  以及  $a^{-n} = (a^{-1})^n$ , 这样在使用这两个等式的时候不用再区分正负了.

回到原题, 对任意的  $m \in \mathbb{Z}$ , 先用归纳法证明  $n \in \mathbb{N}$  的情形, 负整数的情形可以结合定义得到.

$n = 0$  时根据定义左右均为  $a^m$ , 假设对  $n$  有  $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ , 根据定义有

$$a^{m+n+1} = a^{m+n} \cdot a = a^m \cdot a^n \cdot a = a^m \cdot a^{n+1}.$$

由归纳法知

$$\forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^{m+n} = a^m \cdot a^n. \quad (*)$$

当  $n < 0$  时, 则存在  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  使得  $m + kn < 0$ , 则有

$$\begin{aligned}
 a^{m+n} &= a^{m+kn+(-(k-1)n)} \\
 &\stackrel{(*)}{=} a^{m+kn} \cdot a^{-(k-1)n} \\
 &= (a^{-1})^{-m-kn} \cdot a^{n-kn} \\
 &\stackrel{(*)}{=} (a^{-1})^{-m} \cdot (a^{-1})^{-kn} \cdot a^n \cdot a^{-kn} \\
 &= a^m \cdot (a^{-1})^{-kn} \cdot (a^{-1})^{-n} \cdot a^{-kn} \\
 &\stackrel{(*)}{=} a^m \cdot (a^{-1})^{-kn-n} \cdot a^{-kn} \\
 &= a^m \cdot a^{(k+1)n} \cdot a^{-kn} \\
 &\stackrel{(*)}{=} a^m \cdot a^{(k+1)n-kn} = a^m \cdot a^n.
 \end{aligned}$$

这里我避免使用了乘法交换律, 这样该结论对一般的环也成立.

同样地, 由于  $a^{m(n+1)} = a^{mn+m} = a^{mn} \cdot a^m = (a^m)^n \cdot a^m = (a^m)^{n+1}$ , 对  $n$  归纳可得

$$\forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^{mn} = (a^m)^n. \quad (**)$$

当  $n < 0$  时,

$$\begin{aligned}
 a^{mn} &= a^{-(m \cdot (-n))} \\
 &= (a^{-1})^{m \cdot (-n)} \\
 &\stackrel{(**)}{=} ((a^{-1})^m)^{-n} \\
 &= (a^{-m})^{-n} = ((a^{-m})^{-1})^n
 \end{aligned}$$

由于  $a^{-m} \cdot a^m \stackrel{(*)}{=} a^0 = 1_K$ , 即括号内确实为  $a^m$ , 故上式等于  $(a^m)^n$ .

**1.1.2** 设  $K$  是一个域, 证明:  $K$  的任意一组子域 (可以无限多个) 的交集仍是子域. 如果  $K_i \subseteq K$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) 是满足条件  $K_i \subseteq K_{i+1}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) 的子域, 则它们的并集也是  $K$  的子域.

*proof*

令  $F = \bigcap_i K_i$  由子域定义, 需要验证

$$\begin{aligned}
 \forall a, b \in F, a - b &\in F \\
 \forall a, b \in F^*, ab^{-1} &\in F^*, F^* = F \setminus \{0\}.
 \end{aligned}$$

由于  $K_i$  均为子域, 且  $a, b \in F \subseteq K_i$ , 故

$$\forall i \in \mathbb{N}, a - b \in K_i.$$

因此

$$a - b \in \bigcap_i K_i = F.$$

$F^*$  的部分同理, 故  $F$  为子域.

若还满足  $\forall i \in \mathbb{N}, K_i \subseteq K_{i+1}$ , 令  $L = \bigcup_i K_i$ , 如果  $a, b \in L$ , 则存在  $K_i$  和  $K_j$  使得  $a \in K_i, b \in K_j$  记  $r = \max(i, j)$ , 则  $a, b \in K_r$ . 由于  $K_r$  为子域, 可得

$$a - b \in K_r \subseteq L.$$

$L^*$  同理, 故  $L$  为子域.

**1.1.3** 令  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$  表示  $\mathbb{C}$  中包含  $\mathbb{Q}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$  的最小子域, 证明  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ .

*proof*

该题本应该是域扩张的题, 此处我们只用定义来证明.

由于  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ , 我们有  $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}] \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ . 反过来,  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ , 故有  $\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ ,  $\sqrt{3} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ . 因此  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ . 故两者相等.  
注: 证明过程给出了一个  $\mathbb{Q}$ -线性空间的基变换实际上, 从而两者将同构 (见 1.4.9).

**1.1.4** 设  $\mathbb{N}$  是所有正整数的集合,  $\mathbb{Q}$  是有理数域. 因  $\mathbb{Q}$  是可数集, 故存在双射  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ . 令  $f^{-1}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$  表示  $f$  的逆映射, 利用有理数的加法和乘法, 可通过双射  $f$  定义  $\mathbb{N}$  上的运算如下:  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ ,

$$n \oplus m = f^{-1}(f(n) + f(m)), \quad n \star m = f^{-1}(f(n)f(m)),$$

试证明:  $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, \oplus, \star)$  是域, 并求它的零元和单位元.

*proof*

验证域公理, 加法交换律和乘法交换律易得.

结合律:  $\forall n, m, l \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} (n \oplus m) \oplus l &= f^{-1}\left(f(f^{-1}(f(n) + f(m))) + f(l)\right) \\ &= f^{-1}(f(n) + f(m) + f(l)) \\ &\stackrel{!}{=} n \oplus (m \oplus l); \\ (n \star m) \star l &= f^{-1}\left(f(f^{-1}(f(n)f(m))) \cdot f(l)\right) \\ &= f^{-1}(f(n)f(m)f(l)) \\ &= n \star (m \star l). \end{aligned}$$

其中! 处是因为计算出来的结果关于  $n, m, l$  是轮换对称的, 后面同理.

零元为  $f^{-1}(0)$ :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} n \oplus f^{-1}(0) &= f^{-1}(f(n) + f(f^{-1}(0))) \\ &= f^{-1}(f(n) + 0) \\ &= f^{-1}(f(n)) = n. \end{aligned}$$

$n$  的负元为  $f^{-1}(-f(n))$ :

$$\begin{aligned} n \oplus f^{-1}(-f(n)) &= f^{-1}\left(f(n) + f(f^{-1}(-f(n)))\right) \\ &= f^{-1}(f(n) - f(n)) \\ &= f^{-1}(0). \end{aligned}$$

单位元为  $f^{-1}(1)$ :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} n \star f^{-1}(1) &= f^{-1}(f(n) \cdot f(f^{-1}(1))) \\ &= f^{-1}(f(n)) = n. \end{aligned}$$

$n$  的逆元为  $f^{-1}(\frac{1}{f(n)})$ :

$$\begin{aligned} n \star f^{-1}(\frac{1}{f(n)}) &= f^{-1}\left(f(n) \cdot f(f^{-1}(\frac{1}{f(n)}))\right) \\ &= f^{-1}(f(n) \cdot \frac{1}{f(n)}) \\ &= f^{-1}(1). \end{aligned}$$

分配律:  $\forall n, m, l \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} n \star (m \oplus l) &= f^{-1}\left(f(n) \cdot f(f^{-1}(f(m) + f(l)))\right) \\ &= f^{-1}(f(n) \cdot (f(m) + f(l))) \\ &= f^{-1}(f(n)f(m) + f(n)f(l)) \\ &= f^{-1}(f(n)f(m)) \oplus f^{-1}(f(n)f(l)) \\ &= n \star m \oplus n \star l. \end{aligned}$$

**1.1.5** 证明: 在域的定义中, 加法的交换律可以由其他条件推出. 提示: 按两种方式展开  $(1+1) \cdot (a+b)$ .

*proof*

一方面

$$(1+1) \cdot (a+b) = 1 \cdot (a+b) + 1 \cdot (a+b) = a+b+a+b;$$

另一方面

$$\begin{aligned} (1+1) \cdot (a+b) &= (1+1) \cdot a + (1+1) \cdot b \\ &= a+a+b+b. \end{aligned}$$

故有  $a+b+a+b = a+a+b+b$ . 消去两端的一个  $a$  和一个  $b$  即得加法交换律.

**1.1.6** 设  $p > 2$  是素数,  $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}$  是  $\mathbb{Z}$  的模  $p$  剩余类域. 试计算:

- (1)  $\bar{2}$  在  $\mathbb{F}_p$  中的逆元  $\bar{2}^{-1}$ ;
- (2)  $\overline{p-1} \cdot \overline{p-2}$ ;
- (3)  $\overline{p-2}$  在  $\mathbb{F}_p$  中的逆元  $\overline{p-2}^{-1}$ .

*proof*

(1) 只需找到能被 2 整除的  $1+kp (k \in \mathbb{Z})$ . 由于素数  $p > 2$ ,  $p+1$  即可. i.e.  $\bar{2}^{-1} = \frac{1}{2}(p+1)$ .

(2)  $\overline{p-1} \cdot \overline{p-2} = \overline{-1} \cdot \overline{-2} = \bar{2}$ .

$$(3) \text{ 由 (1), } \overline{p-2}^{-1} = \overline{-2}^{-1} = \overline{-\frac{1}{2}(p+1)} = \overline{\frac{1}{2}(p-1)}.$$

## 习题 1.2 教材 p13-p14

1.2.1 设  $R$  是一个环, 试证明下述结论:

- (1) (加法消去律) 如果  $a + c = b + c$ , 则  $a = b$ ;
- (2)  $\forall a \in R$ , 有  $a \cdot 0_R = 0_R$ ;
- (3)  $-(-a) = a$ ,  $a(b - c) = ab - ac$  ( $\forall a, b, c \in R$ );
- (4)  $-(a + b) = (-a) + (-b)$  ( $\forall a, b \in R$ );
- (5)  $a(-b) = (-a)b = -(ab)$  ( $\forall a, b \in R$ );
- (6)  $(-a)(-b) = ab$  ( $\forall a, b \in R$ );
- (7)  $\forall a \in R, m, n \in \mathbb{Z}$ , 有  $(m + n)a = ma + na$ ,  $(mn)a = m(na)$ ;
- (8)  $\forall a, b \in R, n \in \mathbb{Z}$ , 有  $n(a + b) = na + nb$ ,  $n(ab) = a(nb)$ ;
- (9)  $\forall a, b \in R, m, n \in \mathbb{Z}$ , 有  $(ma) \cdot (nb) = mn(a \cdot b) = (mna) \cdot b$ ;
- (10) (二项式定理)  $\forall a, b \in R$ , 设  $ab = ba$ ,  $n$  是正整数, 则

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

*proof*

(1) 两边同加  $-c$ .

(2) 由于

$$a \cdot 0_R = a \cdot (0_R + 0_R) = a \cdot 0_R + a \cdot 0_R.$$

再用一下负元消去即可,  $0_R \cdot a = 0_R$  同理.(需要用到: 分配律, 零元定义, 负元存在. 与之对比,  $0_R \cdot 0_R = 0_R$  只需要用到分配律, 零元和单位元, 因此在半环 (semiring) 中 (2) 是不成立的, 这里半环要求 0 和 1 存在)

(3) 前一个为负元定义 (教材 p9 的注记); 后一个先由分配律,

$$a(b - c) = ab + a(-c),$$

又由于

$$a(-c) + ac = a(c + (-c)) = a \cdot 0_R \stackrel{(2)}{=} 0$$

得  $a(-c) = -ac$ , 这也是 (5) 的证明. 这里要注意仅使用  $-a \stackrel{(*)}{=} -1_R \cdot a$  也无法将负号提到前面, 需要  $R$  是交换环或者说明  $-1_R \cdot a = a \cdot (-1_R) = -a$ . (\*) 的证明如下

$$-1_R \cdot a + a = -1_R \cdot a + 1_R \cdot a = (-1_R + 1_R) \cdot a = 0_R \cdot a \stackrel{(2)}{=} 0_R.$$

右乘  $-1_R$  同理.

(4) 利用  $-a = -1_R \cdot a$  和分配律展开即可.

(5) 见 (3).

(6) (3) 和 (5) 的推论.

(7) 参考 1.1.1 的 (6), 明确定义:

$$0a := 0_R, (n+1)a := na + a, n \in \mathbb{N}$$

以及

$$na := -((-n)a), n < 0.$$

一样的, 可以验证对任意整数  $n \in \mathbb{Z}$  都有  $(n+1)a = na + a$  和  $na = -((-n)a)$ . 先对  $n$  归纳得

$$(m+n)a = ma + na, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \quad (i)$$

然后  $n < 0$ , 存在  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  使得  $m+kn < 0$ ,

$$\begin{aligned} (m+n)a &= (m+kn - (k-1)n)a \\ &\stackrel{(i)}{=} (m+kn)a + (- (k-1)n)a \\ &= -(-m-kn)a + (n-kn)a \\ &\stackrel{(i)}{=} -((-m)a + (-kn)a) + na + (-kn)a \\ &\stackrel{(4)}{=} ma + (kn)a + na + (-kn)a = ma + na. \end{aligned}$$

第二个式子可直接利用第一个证明,  $m=0$  根据定义左右均为  $0_R$ ,  $m>0$  有,

$$\begin{aligned} (mn)a &= \left( \sum_{i=1}^m n \right) a \\ &= \sum_{i=1}^m (na) \\ &= m(na). \end{aligned}$$

$m < 0$  利用  $mn = (-m)(-n)$ , 做同样的操作.

(8) 对  $n$  归纳, 由于加法有交换律,

$$\begin{aligned} (n+1)(a+b) &= n(a+b) + a + b \\ &= na + nb + a + b \\ &= (n+1)a + (n+1)b. \end{aligned}$$

得

$$n(a+b) = na + nb, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

当  $n < 0$  有

$$n(a+b) = -(-n(a+b)) = -((-n)a + (-n)b) \stackrel{(4)}{=} na + nb.$$

第二个等式使用分配律,  $n=0$  根据定义左右均为  $0_R$ ,  $n>0$ ,

$$n(ab) = \sum_{i=1}^n ab = a \sum_{i=1}^n b = a(nb).$$

$n < 0$ , 用  $n = -(-n)$ ,  $n(ab) = -a((-n)b) \stackrel{(5)}{=} a(nb)$ . 同样的也会有  $n(ab) = (na)b$ .



(9) (7) 和 (8) 的推论,

$$\begin{aligned}
 (ma) \cdot (nb) &\stackrel{(8)}{=} m(a \cdot (nb)) \\
 &\stackrel{(8)}{=} m(n(ab)) \\
 &\stackrel{(7)}{=} mn(ab) \\
 &\stackrel{(8)}{=} (mna) \cdot b.
 \end{aligned}$$

(10) 对  $n$  归纳,

$$\begin{aligned}
 (a+b)^n \cdot (a+b) &= \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \right) \cdot (a+b) \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i a + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} \\
 &\stackrel{ab=ba}{=} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i+1} b^i + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} \\
 &= a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \left( \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) a^{n-i+1} b^i + b^{n+1} \\
 &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i.
 \end{aligned}$$

(7)-(9) 中实际上需要用归纳法证明的只有

$$\begin{aligned}
 n(a+b) &= na + nb, \\
 (m+n)a &= ma + na, \\
 (mn)a &= m(na),
 \end{aligned}$$

这三条加上  $1a = a$ , 是在说任何一个 Abel 群都是  $\mathbb{Z}$ -模 (见教材 5.1 节). 再反过来看 1.1.1 的 (6), 加上  $(ab)^n = a^n b^n$ , 也是在说  $K^*$  是  $\mathbb{Z}$ -模, 因为  $K^*$  关于域的乘法是 Abel 群.

另一方面, 可以先定义

$$N: \mathbb{Z} \rightarrow R, \quad n \mapsto n1_R$$

这是一个自然的环同态 (使用归纳法证明)

$$\begin{aligned}
 N(m+n) &= N(m) + N(n); \\
 N(mn) &= N(m) \cdot N(n).
 \end{aligned}$$

然后利用这个环同态得到 (注意用到的  $n(ab) = (na)b$  的证明是直接使用分配律的, 因此不存在循环论证.  $N$  表示使用了这个环同态,  $dis$  表示使用了分配律,  $ass$  表示使用了结合律):

$$\begin{aligned}
 n(a+b) &= n(1_R(a+b)) = (n1_R)(a+b) \stackrel{dis}{=} (n1_R)a + (n1_R)b = na + nb. \\
 (m+n)a &= (m+n)(1_R a) = ((m+n)1_R)a \stackrel{N}{=} (m1_R + n1_R)a \stackrel{dis}{=} (m1_R)a + (n1_R)a \\
 &= ma + na. \\
 (mn)a &= (mn)(1_R a) = (mn1_R)a \stackrel{N}{=} (m1_R n1_R)a \stackrel{ass}{=} (m1_R)((n1_R)a) \\
 &= (m1_R)(na) = m(1_R(na)) = m(na).
 \end{aligned}$$

这个同态是唯一的, 因为我们要求环同态要把 1 映到 1, 因此  $\mathbb{Z}$  在  $\mathbf{Ring}$  中是始对象 (initial object),  $\mathbf{Ring}$  表示环范畴. 因此  $\mathbb{Z}$  可以认为是任意环  $R$  的一个子环,  $n$  可看作是  $R$  中的元素  $n1_R$ . 所以此后在没有歧义的情况下, 默认 0 就指零元, 1 指么元.

**1.2.2** 假设集合  $R$  上有两个运算, 除加法的交换律外满足环的所有其他公理. 利用分配律证明: 加法是交换的 (从而  $R$  是环).

*proof*

这和1.1.5是一道题.

**1.2.3** 设  $X$  是集合,  $P(X)$  表示  $X$  的所有子集形成的集合, 在  $P(X)$  上定义“加法”和“乘法”:  $A + B = A \cup B - A \cap B$ ,  $A \cdot B = A \cap B$ . 证明: 在这些运算下  $P(X)$  是一个环, 且  $2A = 0 (\forall A \in P(X))$ .

*proof*

这里  $A + B$  为对称差,  $A + B = A \cup B - A \cap B = (A - B) \cup (B - A)$ . 用  $A^c$  表示  $A$  的补集. 那么,

$$A + B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

(i)  $(P(X), +)$  是 Abel 群. 交换律由定义是显然的.

结合律:

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= (((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) \cap C^c) \cup (((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B))^c \cap C) \\ &= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \\ &= A + (B + C). \quad (\text{轮换对称, 见1.1.4的结合律证明}) \end{aligned}$$

零元为  $\emptyset$ ,

$$A + \emptyset = \emptyset + A = A \cup \emptyset - A \cap \emptyset = A.$$

负元为  $A$  本身,

$$A + A = A \cup A - A \cap A = A - A = \emptyset.$$

即  $2A = 0$ .

(ii)  $(P(X), \cdot)$  是 (交换) 幺半群, 单位元是  $X$ . 由于  $\cdot$  就是交集  $\cap$ , 因此这一点是显然的.

(iii) 分配律:

$$\begin{aligned} (A + B) \cdot C &= ((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) \cap C \\ &= (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \\ A \cdot C + B \cdot C &= (A \cap C \cap (B \cap C)^c) \cup ((A \cap C)^c \cap B \cap C) \\ &= (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C). \end{aligned}$$

故有  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ . 另一部分证明类似.

因此  $(P(X), +, \cdot)$  为一个 (交换) 环.

**1.2.4** 设  $R$  是一个环,  $S \subseteq R$  是一个非空子集. 试证明

$$C(S) := \{a \in R \mid ax = xa, \forall x \in S\}$$

是  $R$  的一个子环.

*proof*

该子环称为子集  $S$  的中心化子 (centralizer). 当  $S = R$  时就是中心 (2.1.11).

$\forall a, b \in C(S)$ , 需要验证

$$a - b \in C(S), \quad ab \in C(S), \quad 1 \in C(S).$$

其中  $1 \in C(S)$  是显然的. 对  $\forall x \in S$

$$\begin{aligned} (a - b)x &= ax + bx = xa + xb = x(a - b), \\ (ab)x &= a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab). \end{aligned}$$

因此  $a - b, ab \in C(S)$ ,  $C(S)$  是子环.

**1.2.5** 证明: 如果在环  $R$  中  $1 - ab$  可逆, 则  $1 - ba$  也可逆.

*proof*

设  $1 - ab$  的逆为  $c$ , 则  $ab = 1 - c^{-1}$ .

考虑形式级数

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} x^i$$

则有

$$\begin{aligned} (1 - ba)^{-1} &= \sum_{i=0}^{+\infty} (ba)^i \\ &= 1 + b \left( \sum_{i=0}^{+\infty} (ab)^i \right) a \\ &= 1 + b(1 - ab)^{-1} \\ &= 1 + bca. \end{aligned}$$

验证  $1 + bca$  确实是  $1 - ba$  的逆:

$$\begin{aligned} (1 - ba)(1 + bca) &= 1 - ba + bca - b(abc)a \\ &= 1 - ba + bca - b(c - 1)a \\ &= 1 - ba + bca - bca + ba = 1 \\ (1 + bca)(1 - ba) &= 1 + bca - ba - b(cab)a \\ &= 1 + bca - ba - b(c - 1)a \\ &= 1. \end{aligned}$$

**1.2.6** 如果环  $R$  满足条件:  $\forall x \in R, \quad x^2 = x$ , 证明  $R$  是交换环.

*proof*

条件  $x^2 = x$  称为乘法是幂等 (idempotent) 的. 考虑

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = x + 1,$$

或者直接带入  $-x$ , 得

$$-x = x^2 = x.$$

再考虑

$$(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y = x + y,$$

得

$$xy = -yx = yx.$$

**1.2.7** (华罗庚恒等式) 设  $a, b$  是环  $R$  中的元素. 如果  $a, b, ab-1$  可逆, 证明  $a-b^{-1}$ ,  $(a-b^{-1})^{-1}-a^{-1}$  也可逆, 且有下列恒等式:

$$((a-b^{-1})^{-1}-a^{-1})^{-1} = aba - a.$$

*proof*

由于  $a, b, ab-1$  均可逆, 即  $a, b, ab-1 \in U(R)$ .  $U(R)$  为环  $R$  的单位群 (1.3.2). 故

$$a-b^{-1} = (ab-1)b^{-1} \in U(R),$$

那么只需证明华罗庚恒等式. 直接验证即可由 1.2.5,  $(ba-1)^{-1} = b(ab-1)^{-1}a-1$  以及 1.3.2 证明的 (1).

$$\begin{aligned} ((a-b^{-1})^{-1}-a^{-1})^{-1} &= (((ab-1)b^{-1})^{-1}-a^{-1})^{-1} \\ &= (b(ab-1)^{-1}-a^{-1})^{-1} \\ &= ((b(ab-1)^{-1}a-1)a^{-1})^{-1} \\ &= a(b(ab-1)^{-1}a-1)^{-1} \\ &= a(ba-1) \\ &= aba - a. \end{aligned}$$

**1.2.8** (多项式矩阵的带余除法) 设  $A \in M_n(K)$  是一个给定的  $n$  阶矩阵. 对任意多项式矩阵  $A(x) \in M_{n \times m}(K[x])$ , 证明存在唯一的  $B(x) \in M_{n \times m}(K[x])$ ,  $R \in M_{n \times m}(K)$  使得  $A(x) = (xI_n - A)B(x) + R$ .

*proof*

先证唯一性, 若存在  $B'(x) \in M_{n \times m}(K[x])$  和  $R' \in M_{n \times m}(K)$  也满足条件, 则有

$$(xI_n - A)(B(x) - B'(x)) = R' - R \in M_{n \times m}(K).$$

设

$$B(x) - B'(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_kx^k, \quad B_i \in M_{n \times m}(K), 0 \leq i \leq k.$$

将左边展开得

$$\begin{aligned}
 B_k &= 0, \\
 -AB_k + B_{k-1} &= 0 \implies B_{k-1} = 0, \\
 -AB_{k-1} + B_{k-2} &= 0 \implies B_{k-2} = 0, \\
 &\vdots \\
 -AB_1 + B_0 &= 0 \implies B_0 = 0, \\
 -AB_0 &= R' - R = 0.
 \end{aligned}$$

再证存在性, 将  $A(x)$  写成多项式的形式,

$$A(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_kx^k, \quad A_i \in M_{n \times m}(K), 0 \leq i \leq k.$$

我们对  $k$  归纳,  $k=0$  时,  $A(x) = A_0$  为常数矩阵, 取  $B(x) = O_{n \times m}$  (零矩阵),  $R = A_0$  即可.

假设对任意  $k$  次多项式  $A(x)$  有  $B(x) \in M_{n \times m}(K[x])$ ,  $R \in M_{n \times m}(K)$  使得  $A(x) = (xI_n - A)B(x) + R$ . 考查  $k+1$  的情形:

$$\begin{aligned}
 A(x) &= A_0 + x(A_1 + A_2x + \cdots + A_{k+1}x^k) \\
 &= A_0 + x((xI_n - A)\tilde{B}(x) + \tilde{R}) \\
 &= (xI_n - A)x\tilde{B}(x) + xI_n\tilde{R} - A\tilde{R} + A\tilde{R} + A_0 \\
 &= (xI_n - A)(x\tilde{B}(x) + \tilde{R}) + A\tilde{R} + A_0.
 \end{aligned}$$

取  $B(x) = x\tilde{B}(x) + \tilde{R} \in M_{n \times m}(K[x])$ ,  $R = A\tilde{R} + A_0$  即可.

**1.2.9** 设  $m > 0$  是任意整数,  $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$  是  $\mathbb{Z}$  的模  $m$  剩余类环. 试证明:  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$  可逆当且仅当  $(a, m) = 1$  (即:  $a$  与  $m$  互素).

*proof*

$\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$  可逆,

$$\iff \exists \bar{b} \in \mathbb{Z}, \quad \bar{a}\bar{b} = \bar{1}$$

$$\iff ab = 1 + km, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\iff (a, m) = 1. \quad (\text{Bézout's Identity})$$

注: 一般用记号  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  表示模  $m$  剩余类环.(理想和商环, 教材 2.1 节 p25) 若  $(a, m) = 1$ , 则  $\bar{a}$  是加法群  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$  的生成元, 即  $\bar{a}$ (在加法群) 的阶 (教材 1.3 节, p17) 是  $m$ .

**1.2.10** 设  $R$  是仅有  $n$  个元素的环, 试证明对任意  $a \in R$  有

$$na := \underbrace{a + a + \cdots + a}_n = 0.$$

*proof*

该题的证明归结为一句话, 加法群的阶  $(R, +)$  为  $n$ , 故  $na = 0$ .

注: 有限群  $G$  内任一元素  $a$ , 有  $|a| \mid |G|$  (教材 4.1 节 p70 推论 4.1.3), 因此必有  $a^{|G|} = e$ , 在这道题就是  $na = 0$ .

**1.2.11** 环  $R$  中非零元  $x$  称为幂零元 (nilpotent), 若存在  $n > 0$  使  $x^n = 0$ . 证明:

- (1) 如果  $x$  是幂零元, 则  $1 - x$  是可逆元;
- (2)  $\mathbb{Z}_m$  有幂零元当且仅当  $m$  可以被一个大于 1 的整数的平方整除.

*proof*

(1) 注意到

$$1 = 1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$$

(2) " $\Rightarrow$ ": 若  $\mathbb{Z}_m$  有幂零元  $\bar{a}$ , 则存在  $n > 1 (a \neq 0)$  使得  $\bar{a}^n = \bar{a}^n = \bar{0}$ . 即  $m \mid a^n$ . 取素数  $p \mid m$ , 则  $p \mid a^n$ , 故  $p \mid a$ . 因此, 若  $m$  的素因数分解为  $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ , 其中  $p_1, p_2, \cdots, p_r$  为互异的素数,  $e_1, e_2, \cdots, e_r \geq 1$ , 则  $p_i \mid a, 1 \leq i \leq r$ , 故有  $p_1 p_2 \cdots p_r \mid a$ . 因此有  $p_1 p_2 \cdots p_r \leq a < m$ , 故必有某个  $e_i > 1$ , 即  $\exists 1 \leq i \leq r, e_i \geq 2$ , 这样  $p_i^2 \mid m$ .

" $\Leftarrow$ ": 反过来, 若  $m$  可以被某个大于 1 的平方整除, 则上述  $e_i$  中必有一个大于 1, 此时取  $a = p_1 p_2 \cdots p_r, \bar{a}$  为  $\mathbb{Z}_m$  的幂零元.

注: 有关初等数论整除相关的部分请自行查阅书籍.

**1.2.12** 设  $R$  是一个环, 如果  $(xy)^2 = x^2 y^2 (\forall x, y \in R)$ , 则  $R$  是交换环.

*proof*

先考虑

$$((x+1)y)^2 = (x+1)^2 y^2 \implies xy^2 = yxy,$$

再将上式中  $y$  换成  $y+1$ ,

$$x(y+1)^2 = (y+1)x(y+1) \implies xy = yx.$$

**1.2.13** 如果环  $R$  满足条件:  $x^6 = x (\forall x \in R)$ . 证明:

- (1)  $x^2 = x (\forall x \in R)$ ;
- (2)  $R$  是一个交换环.

*proof*

(1) 先带入  $-x$ ,

$$-x = (-x)^6 = x^6 = x \implies 2x = 0.$$

考虑  $(x+1)^6$ ,

$$(x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1 = x + 1,$$

得到

$$6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x = 0.$$

利用  $2x = 0$  消去含  $2x$  的项得

$$x^4 + x^2 = 0.$$

两边乘  $x^2$  得

$$x + x^4 = 0.$$

再相减得  $x^2 = x$ .

(2) 由 (1) 和 1.2.6.

### 习题 1.3 教材 p17-p18

**1.3.1** 设  $G$  是一个群, 对于任意的  $a, b \in G$ , 证明  $ab$  的阶和  $ba$  的阶相等.

*proof*

若  $|ab| = n < \infty$ , 则

$$(ba)^n = b \cdot (ab)^n \cdot b^{-1} = bb^{-1} = e.$$

且对  $1 \leq k < n$ ,  $(ba)^k = b(ab)^k b^{-1} \neq e$ . 因此  $|ba| = n$ . 反之亦然.

若  $|ab| = \infty$ , 则

$$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, (ba)^n = b(ab)^n b^{-1} \neq e.$$

故  $|ba| = \infty$ . 反之亦然.

事实上, 群  $G$  内  $g$  和  $h = aga^{-1}$  阶相等.  $h$  称为  $g$  的一个共轭 (conjugate, 教材 p77).

$$\sigma_a : G \rightarrow G, \quad g \mapsto aga^{-1}$$

是群  $G$  的一个自同构. 而对一般的群同态  $\varphi : G \rightarrow G'$ ,  $|g| < \infty \implies |\varphi(g)| < \infty$  且  $|\varphi(g)| \mid |g|$ . 因此若  $\varphi$  为同构, 则  $|g| = |\varphi(g)|$  (包括左右为无穷的情况).

**1.3.2** 设  $R$  是一个环,  $U(R)$  表示  $R$  中所有可逆元集合, 试证明:  $U(R)$  关于环  $R$  的乘法是一个群 (称为  $R$  的单位群).

*proof*

(1) 这里首先需要验证运算的封闭性,  $\forall a, b \in U(R)$ , 有  $(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = 1$ , 故  $ab \in U(R)$  且  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

(2)  $1 \in U(R)$ , 因为  $1 \cdot 1 = 1$  的确可逆;

(3) 由于乘法是  $R$  上的乘法, 故结合律成立;

(4) 若  $a \in U(R)$ , 则由 1.1.1 的 (3),  $a^{-1} \in U(R)$  且  $(a^{-1})^{-1} = a$ ;

注: 一般  $U(R)$  也记作  $R^*$ , 比如  $K$  是域时,  $K^* = K \setminus \{0\}$ .

**1.3.3** 证明除了单位元之外所有元素的阶都是 2 的群一定是交换群.

*proof*

由于任意  $a^2 = e$ , 故  $a = a^{-1}$ .

考虑

$$(ab)^2 = e \implies ab = b^{-1}a^{-1} = ba.$$

或直接验证

$$ab = ab \cdot (ba)^2 = abbaba = ba$$

**1.3.4** 令  $C(\mathbb{R}) = \{\text{所有连续函数: } \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}\}, \forall f, g \in C(\mathbb{R}),$

$$f + g \in C(\mathbb{R}), \quad f \cdot g \in C(\mathbb{R})$$

定义:  $\forall x \in \mathbb{R}, (f + g)(x) = f(x) + g(x), (f \cdot g)(x) = f(g(x)),$  证明  $(C(\mathbb{R}), +)$  是交换群.  
 $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$  是否为环?

*proof*

$(C(\mathbb{R}), +)$  的零元为零函数  $\mathbf{0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0, (f + \mathbf{0})(x) = f(x) + 0 = f(x) = 0 + f(x) = (\mathbf{0} + f)(x), \forall x \in \mathbb{R}.$

$f \in C(\mathbb{R})$  的负元为  $-f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -f(x), (f + (-f))(x) = ((-f) + f)(x) = f(x) - f(x) = 0 = \mathbf{0}(x).$

由于  $f + g$  为逐点定义, 故交换律和结合律依赖于  $\mathbb{R}$  的加法, 是平凡的. 故  $(C(\mathbb{R}), +)$  是 Abel 群.

若  $f$  不是  $\mathbb{R}$ -线性函数, 如  $f(x) = x^2$ , 则  $(f \cdot (g + h))(x) = f((g + h)(x)) = f(g(x) + h(x)) \neq f(g(x)) + f(h(x)).$  故  $C(\mathbb{R}, +, \cdot)$  不是环.

**1.3.5** 写出对称群  $S_3$  的乘法表.

*proof*

记  $\text{id}_{S_3} = e$ , 令  $a = (1\ 2), b = (1\ 2\ 3),$  有  $a^2 = e, b^3 = e, abab = e \iff ba = ab^2.$  乘法表如下:

	$e$	$a$	$b$	$b^2$	$ab$	$ab^2$
$e$	$e$	$a$	$b$	$b^2$	$ab$	$ab^2$
$a$	$a$	$e$	$ab$	$ab^2$	$b^2$	$b$
$b$	$b$	$ab^2$	$b^2$	$e$	$a$	$ab$
$b^2$	$b^2$	$ab$	$e$	$b$	$ab^2$	$a$
$ab$	$ab$	$b^2$	$a$	$ab^2$	$e$	$b$
$ab^2$	$ab^2$	$b$	$ab$	$a$	$b^2$	$e$

注: 可以看到  $S_3$ , 若取  $a = (1\ 2), b = (1\ 2\ 3),$  则  $S_3$  可以由  $a, b$  生成, 即考虑所有可能的乘积, 一般可以表示为  $S_3 = \langle a, b \rangle, a = (1\ 2), b = (1\ 2\ 3).$

若不给  $a, b$  加任何限制, 便得到一个自由群 (free group)  $F(\{a, b\})$ . 一般地, 任意一个集合  $A$  都可以生成一个自由群  $F(A), A$  就是生成元组成的集合. 可以证明任何一个群都同构于某个自由群的商群, 而对应的正规子群便是由生成元满足的某些关系确定 (将  $A$  看成字母表,  $\Sigma_A$  表示单词的集合, 这些关系可以表示为一些满足  $w = e$  单词  $w \in \Sigma_A$ ). 把这些  $w$  组成的集合记为  $\mathcal{R}, A$  和  $\mathcal{R}$  将唯一确定一个群  $G, (A | \mathcal{R})$  称为  $G$  的一个展示 (presentation). 以  $S_3$  为例,  $S_3$  的一个展示为  $(\{a, b\} | a^2, b^3, abab).$

由于这本教材没有讲自由群, 所以想要了解的话需要查阅别的教材.(可参考



[Alu09]II.§5 和 II.§8.2)

BTW, 这本教材和很多教材一样, 会把集合  $A$  对称群  $S_A$  上的乘法写成  $f \cdot g := f \circ g$ , 这个其实会有点不舒服. 正常我们习惯于说: 映射  $f: X \rightarrow Y$  和  $g: Y \rightarrow Z$  的复合是  $g \circ f$ . 这在范畴的定义也是习惯于这样, 复合会写成这样:

$$\text{Hom}_C(X, Y) \times \text{Hom}_C(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_C(X, Z), (f, g) \mapsto g \circ f.$$

这样说的的好处在于一眼能感觉出这个运算是不可交换的 (个人感觉). 如果引入范畴的记号,  $S_A$  会记作  $\text{Aut}_{\text{Set}(A)}$ , 其中  $\text{Set}$  表示集合范畴. 那么  $S_A$  上的乘法按范畴的定义来写应该是:

$$S_A \times S_A \rightarrow S_A, (f, g) \mapsto f \cdot g := g \circ f$$

可以看到和  $f \cdot g := f \circ g$  刚好是反过来的. 没有使用范畴语言的话就还好, 不会出现前后不自洽的问题, 但如果介绍了范畴语言, 那应该注意  $S_A$  上乘法的定义要和范畴定义不能冲突, 这一点 [Hum03] 就做的很好. 它的范畴定义故意反了过来, 它写成  $\text{Hom}_C(Y, Z) \times \text{Hom}_C(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_C(X, Z)$ .

那么哪一个才对呢, 事实上都是对的, 你总能验证  $S_A$  确实是一个群. 原因在于, 当你只考虑所有的同构时, 就得到一个子范畴, 这是一个群胚 (groupoid), 它是一个自反范畴, 所以顺序就没区别了. 但我个人认为还是统一一下比较好, 主要是复合是不可交换的,  $f \circ g$  和  $g \circ f$  一般不等. 为了方便还是按照教材为准吧, 使用  $f \cdot g = f \circ g$ . (尽管我是有点不习惯的)

**1.3.6** 证明: 一个群  $G$  不会是两个真子群 (不等于  $G$  的子群) 的并.

*proof*

反证, 假设  $H_1, H_2 \subsetneq G$  且  $G = H_1 \cup H_2$ , 则  $\exists h_1 \in G \setminus H_2 \subseteq H_1, h_2 \in G \setminus H_1 \subseteq H_2$ , 有  $h_1 h_2 \in G = H_1 \cup H_2$ , 矛盾. (不妨设  $h_1 h_2 \in H_1 \implies h_2 \in H_1$ )

**1.3.7-1.3.9** 为群的其他三种定义.

**1.3.7** 一个非空集合  $G$  带有满足结合律的“乘法”运算, 我们称之为半群. 如果  $G$  是一个半群, 且满足如下性质:

- (1)  $G$  含有右单位元  $1_r$  (即:  $a \cdot 1_r = a, \forall a \in G$ );
- (2)  $G$  中的每个元素  $a$  有右逆 (即: 存在  $b \in G$ , 使得  $a \cdot b = 1_r$ ).

试证明:  $G$  是一个群.

*proof*

先证右逆为逆,

$$\begin{aligned} \forall a \in G \exists b \in G, ab &= 1_r, \\ \implies \exists c \in G, bc &= 1_r, \\ \implies ba &= (ba)1_r = (ba)(bc) = b(ab)c = b1_r c = bc = 1_r. \end{aligned}$$

再证右单位为单位,

$$1_r a = (ab)a = a(ba) = a1_r = a.$$

**1.3.8** 证明: 半群  $G$  是群的充要条件是:  $\forall a, b \in G$ ,  $ax = b$  和  $ya = b$  都有 (唯一) 解.

*proof*

(1) " $\Leftarrow$ ": 取定一个  $a \in G$ , 方程  $ax = a$  的解设为  $e_a$ . 对  $\forall b \in G$ , 方程  $ya = b$  有解  $y_b$ , 则有

$$be_a = (y_b a)e_a = y_b(ae_a) = y_b a = b.$$

即  $e_a$  是  $G$  的右单位, 记为  $1_r$ , 又因为  $\forall a \in G$ , 方程  $ax = 1_r$  有解, 即  $a$  有右逆, 由 1.3.7 知  $G$  是群.

(2) " $\Rightarrow$ ": 若  $G$  是群, 则方程  $ax = b$  的唯一解为  $a^{-1}b$ , 方程  $ya = b$  的唯一解为  $ba^{-1}$ .

**1.3.9** 证明:

(1) 在群中左右消去律都成立: 如果  $ax = ay$ , 则  $x = y$ ; 如果  $xa = ya$ , 则  $x = y$ .

(2) 左右消去律都成立的有限半群一定是群.

*proof*

设  $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . 对  $\forall 1 \leq i, j \leq n$ ,

$$a_i a_1, a_i a_2, \dots, a_i a_n$$

互异, 否则存在  $a_k \neq a_l$  使得  $a_i a_k = a_i a_l$ , 由消去律得  $a_k = a_l$  矛盾. 因此  $\exists 1 \leq t \leq n$ ,  $a_i a_t = a_j$ , 即方程  $a_i x = a_j$  有解. 同理方程  $ya_i = a_j$  也有解, 由 1.3.8,  $G$  是群.

**1.3.10** 证明: 偶数阶有限群  $G$  中必有 2 阶元.

*proof*

设  $|G| = 2n$ . 对  $e \neq g \in G$ ,  $|g| = 2 \iff g = g^{-1}$ . 定义  $G$  上的一个等价关系

$$g \sim g' \iff g = g' \vee g' = g^{-1}.$$

考虑商集  $G/\sim = \{\bar{g} \mid g \in G\}$ , 用  $\#S$  表示集合  $S$  的元素个数 (基数) 防止混淆. 若  $|g| = 2$  或  $g = e$ , 则  $\#\bar{g} = 1$ , 否则  $\#\bar{g} = 2$ . 因此若  $m$  为  $G$  中阶为 2 的元素的个数, 则  $2n = m + 1 + 2(\#(G/\sim) - m - 1)$ , 故  $2n - m - 1$  为偶数, 因此  $m > 0$ .

注: 当然可以用 Sylow 定理一步到位.

**1.3.11** 证明:  $GL_2(\mathbb{R})$  中的元素  $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  的阶分别是 4 和 3. 但  $xy$  是无限阶元.

*proof*

用  $I_n$  表示  $n$  阶单位阵, 计算可得

$$x^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

故  $|x| = 4$ , 同理,

$$y^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

$|y| = 3$ . 最后是  $xy$ ,

$$xy = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, (xy)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (xy)^3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \dots$$

可以用归纳法证明

$$(xy)^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2, \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

故  $|xy| = \infty$ .

**1.3.12** 证明群的任意多个子群的交仍是子群.

*proof*

设  $G$  是群, 记  $I$  为指标集,  $H_i < G, \forall i \in I$ . 验证  $H = \bigcap_{i \in I} H_i < G$ : 首先  $e_G \in H$ ,  $H \neq \emptyset$ ,

$$\begin{aligned} \forall a, b \in H = \bigcap_{i \in I} H_i &\implies \forall i \in I, a, b \in H_i \\ &\implies ab^{-1} \in H_i, \quad \forall i \in I \\ &\implies ab^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i = H. \end{aligned}$$

注: 教材中并未提及这个判断子群的命题, 但其实是最常用的.

**命题 (子群的判定)** 设  $G$  是一个群,  $\emptyset \neq S \subseteq G$ , 则  $S < G$  ( $S$  是  $G$  的子群的记号) 当且仅当

$$\forall a, b \in S \iff ab^{-1} \in S.$$

证明可参考 [Alu09]p79.

## 习题 1.4 教材 p21-p22

**1.4.1** 设  $\varphi: G \rightarrow G'$  是群同态, 试证明:

- (1)  $\ker(\varphi) := \{g \in G \mid \varphi(g) = e'\}$  ( $e' \in G'$  表示的单位元) 是  $G$  的子群 (称为群同态  $\varphi$  的核);
- (2)

$$\varphi(G) = \{\varphi(g) \mid \forall g \in G\} \subset G'$$

是  $G'$  的子群 (称为群同态  $\varphi$  的像).

*proof*

教材命题 1.4.1 的 (1)(5) 直接使用.

(1)  $e \in \ker(\varphi)$  非空, 直接验证

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \ker(\varphi), \varphi(ab^{-1}) &= \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = e'e' = e' \\ \implies ab^{-1} &\in \ker(\varphi). \end{aligned}$$

(2)  $e' \in \varphi(G)$  非空, 直接验证

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \varphi(G), \exists a, b \in G, x &= \varphi(a), y = \varphi(b) \\ \implies xy^{-1} &= \varphi(a)(\varphi(b))^{-1} = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(ab^{-1}) \in \varphi(G). \end{aligned}$$

**1.4.2** 令  $G$  是函数  $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{x-1}{x}$  关于函数的合成生成的一个群 (即群乘法为函数合成), 证明  $G$  同构于  $S_3$ .

*proof*

由 1.3.5 的注记, 只需验证  $f^2 = \text{id}, g^3 = \text{id}, fgfg = \text{id}$ .

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x. \\ g^2(x) &= g(g(x)) = 1 - \frac{1}{(1 - \frac{1}{x})} = -\frac{1}{x-1} \\ g^3(x) &= g(g^2(x)) = 1 - \left(\frac{1}{-\frac{1}{x-1}}\right) = 1 + x - 1 = x. \\ (fg)(x) &= f(g(x)) = \frac{x}{x-1}, \\ (fgfg)(x) &= (fg)^2(x) = 1 + \frac{1}{\frac{x}{x-1} - 1} = 1 + x - 1 = x. \end{aligned}$$

**1.4.3** 设  $R \xrightarrow{\varphi} R'$  是环同态, 证明集合  $\ker(\varphi) = \{x \in R \mid \varphi(x) = 0_{R'}\}$  满足:

- (1)  $\ker(\varphi)$  是  $(R, +)$  的子群;
- (2)  $\forall a \in \ker(\varphi), x \in R$  有  $ax \in \ker(\varphi), xa \in \ker(\varphi)$ . ( $\ker(\varphi)$  称为环同态  $\varphi$  的核.)

*proof*

(1) 即 1.4.1(1);

(2) 直接验证

$$\forall a \in \ker(\varphi), x \in R, \varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a) = \varphi(x)0_{R'} = 0_{R'}$$

另一半同理.

注: 满足 (1)(2) 的  $R$  的子集称为  $R$  的一个理想 (ideal), 教材 p25 定义 2.1.4.

**1.4.4** 设  $K$  是一个域,  $\phi: K[x] \rightarrow K[x]$  是  $K$  的多项式环之间的环自同态. 如果对于任意的  $k \in K, \phi(k) = k$ , 试证明:  $\phi$  是满同态的充分必要条件是存在  $a, b \in K (a \neq 0)$  使得  $\phi(x) = ax + b$ .

proof

- (1) " $\implies$ ": 记  $f(x) = \phi(x)$ , 若  $\phi$  是满的, 则存在  $g(x) \in K[x]$  使得  $\phi(g(x)) = x$ , 则  $x = \phi(g(x)) \stackrel{!}{=} g(\phi(x)) = g(f(x))$ , ! 处是根据环同态的定义以及  $\phi(k) = k, \forall k \in K$  得到. 考查次数  $1 = \deg(g(f(x))) = \deg(g) \cdot \deg(f)$  (域没有零因子). 因此  $\deg(f) = \deg(g) = 1$ , i.e.  $\phi(x) = f(x) = ax + b, \exists a \neq 0, b \in K$ .
- (2) " $\impliedby$ ": 若存在  $a \neq 0, b \in K$  使得  $\phi(x) = ax + b$ , 则令  $y = ax + b$  得到  $x = a^{-1}(y - b)$ . 那么对任意的  $f(x) \in K[x]$ , 存在  $g(x) = f(a^{-1}(x - b)) \in K[x]$  使得  $\phi(g(x)) = g(\phi(x)) = g(y) = f(a^{-1}(y - b)) = f(x)$ .

**1.4.5** 证明实数的加法群  $(\mathbb{R}, +)$  和正实数的乘法群  $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$  同构.

proof

注意到  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto e^x$  是同构.  $f^{-1}(x) = \ln x$ .

注: 事实上, 由  $f(x+y) = f(x)f(y)$  并利用归纳法和同态定义可以直接推出  $f(x) = a^x, a = f(1), x \in \mathbb{Q}$ , 若有连续性则可以延拓到  $\mathbb{R}$  上.

**1.4.6** 证明有理数的加法群  $(\mathbb{Q}, +)$  和正有理数的乘法群  $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$  不同构.

proof

反证, 假设存在同构  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$ , 则设  $2 = f(a) = f(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}) = f(\frac{a}{2}) \cdot f(\frac{a}{2}) = f(\frac{a}{2})^2$  矛盾.

**1.4.7** 证明有理数域  $\mathbb{Q}$  和实数域  $\mathbb{R}$  的自同构都只有恒等映射.

proof

不妨设  $\sigma: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  是同构, 根据定义, 有  $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1, \sigma(-a) = -\sigma(a), \sigma(a^{-1}) = (\sigma(a))^{-1}$ . 因此先用归纳法得到  $\sigma|_{\mathbb{N}} = \text{id}_{\mathbb{N}}$ , 用负元延拓到  $\mathbb{Z}$ , 再用逆元延拓到  $\mathbb{Q}$  得  $\sigma = \text{id}_{\mathbb{Q}}$ . 事实上, 这个推导对于任何特征 0 的域都是对的, 即  $\mathbb{Q}$  是特征 0 最小域 (环的特征见教材 2.1 节 p27 定义 2.1.5).

对  $\mathbb{R}$ , 首先若  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是同构, 有上面可知  $\phi|_{\mathbb{Q}} = \text{id}_{\mathbb{Q}}$ . 另外, 可以证明  $\phi$  保序结构, 即  $x \geq 0 \implies \phi(x) \geq 0$ . 这是因为对  $x > 0$  总有  $\phi(x) = \phi(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = \phi(\sqrt{x})^2 > 0$ . 保序则保极限, 即对单调有界有理数列  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$  (实际上保序就可以保持  $\mathbb{R}$  上的拓扑结构,  $\phi$  是连续的). 由于  $\mathbb{Q}$  在  $\mathbb{R}$  中稠密, 从而  $\phi = \text{id}_{\mathbb{R}}$ .

一般情况下子域的自同构是不一定能延拓到扩域上, 比如考虑  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  的共轭自同构 (类似复共轭,  $\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$ ), 它不能延拓到  $\mathbb{R}$  上.

综上可得,  $\text{Aut}_{\text{Ring}}(\mathbb{R}) = \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$  是平凡群. (由于  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  并不是 Galois 扩张, 因此没有用符号  $\text{Gal}(\mathbb{R}/\mathbb{Q})$ , Ring 表示环范畴)

**1.4.8** 证明:  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  都是  $\mathbb{R}$  的子域. 它们是同构的域吗?

*proof*

由教材命题 1.4.1 的 (9), 两个域若存在同态则一定是单同态, 即只有两种可能, 一个域为另一个域的扩张或两者同构. 我们断言这两个域之间不存在同态.

假设存在同态  $\varphi: \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ , 则设  $\varphi(\sqrt{2}) = a + b\sqrt{5}$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}$ . 注意到由同态定义有  $\varphi(2) = 2$ , 立刻有

$$2 = \varphi(2) = \varphi(\sqrt{2})^2 = (a + b\sqrt{5})^2 = a^2 + 5b^2 + 2ab\sqrt{5}$$

这要求  $a^2 + 5b^2 = 2$  且  $ab = 0$ , 这是不可能的, 矛盾.

**1.4.9** 设  $K, L$  是两个域, 如果  $L$  是  $K$  的子域, 则  $K$  称为  $L$  的扩域,  $K \supset L$  称为域扩张, 试证明:

- (1) 域的加法和乘法使得  $K$  是一个  $L$ -向量空间 ( $[K : L] = \dim_L(K)$  称为域扩张  $K \supset L$  的次数);
- (2) 如果  $K \supset \mathbb{R}$  是一个二次扩张 (即  $[K : \mathbb{R}] = 2$ ), 则  $K$  必同构于复数域  $\mathbb{C}$ .

*proof*

- (1)  $(K, +)$  是一个 Abel 群, 这一点无需再说明. 乘法在这里可能有些歧义, 此处是要验证乘法限制在  $L \times K$  上, 即

$$\cdot : L \times K \rightarrow K, \quad (l, k) \mapsto lk$$

是数乘. 即要验证

$$\begin{aligned} (l_1 l_2)k &= l_1(l_2 k), \\ (l_1 + l_2)k &= l_1 k + l_2 k, \\ l(k_1 + k_2) &= lk_1 + lk_2, \\ 1k &= k = k1. \end{aligned}$$

这些都由域的定义得到.

这也说明若同态  $K_1 \rightarrow K_2$  保持  $L(K_1, K_2$  为  $L$  的两个扩域), 则一定是  $L$ -线性映射.

事实上, 若有环同态  $R \xrightarrow{\varphi} S$ , 则  $S$  上自动有一个  $R$ -模结构

$$R \times S \rightarrow S, \quad (r, s) \mapsto rs = \varphi(r)s$$

$rs$  是数乘,  $\varphi(r)s$  是  $S$  中的乘法.

这道题对应的同态其实就是包含 (inclusion)  $L \xhookrightarrow{i} K$ .

- (2) 由 (1), 扩域  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  的自同构一定是  $\mathbb{R}$ -线性的. 设同构  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , 则有  $f(x + yi) = x + yf(i)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , 且保持乘法, 即

$$\begin{aligned} f((x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)) &= f(x_1 + iy_1) \cdot f(x_2 + iy_2) = (x_1 + y_1 f(i)) \cdot (x_2 + y_2 f(i)) \\ \implies f(x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i) &= x_1 x_2 + y_1 y_2 f(i) \cdot f(i) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) f(i) \\ \implies x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) f(i) &= x_1 x_2 + y_1 y_2 f(i) \cdot f(i) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) f(i) \\ \implies f(i) \cdot f(i) &= -1. \end{aligned}$$

因此  $f(i) = \pm i$ . 也就是说  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  的自同构都只有恒等映射和共轭, 即  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

由线性代数的结论, 可以直接得到  $K$  和  $\mathbb{C}$  是作为线性空间同构, 但这是不够的, 只有上述两个线性映射是域同构, 需要做基变换转为恒等或共轭才能保持乘法. 事实上只要存在一个基变换就能变回恒等映射, 恒等映射总是同构, 但前提是承载集合 (underlying set) 要一样. 比如  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  和  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  作为  $\mathbb{Q}$ -线性空间也是同构的, 但他们之间没有域同态.

可取  $K$  的一组基为  $1, \alpha$ , 其中  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . 不可避免地要考虑  $\alpha^2$  的结果, 由于  $1, \alpha$  是基, 因此  $\alpha^2$  可以被线性表出, 即  $\alpha^2 = x + y\alpha$ . 由于  $\alpha \notin \mathbb{R}$ , 有  $y^2 + 4x < 0$ , 解二次方程得到  $\alpha = \frac{y \pm i\sqrt{|y^2 + 4x|}}{2}$ . 故映射

$$f: K \rightarrow \mathbb{C}, u + v\alpha \mapsto u + v \frac{y \pm i\sqrt{|y^2 + 4x|}}{2}$$

是域同构.

**1.4.10** 设  $d$  是一个非零整数, 且  $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ . 证明:

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \supset \mathbb{Q}$$

是一个二次扩张 ( $d < 0$  时,  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  称为虚二次域,  $d > 0$  时称为实二次域).

*proof*

只需验证  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  确实是一个域. 这样它自动就是一个 2 维的  $\mathbb{Q}$ -线性空间.

加法:

$$(a_1 + b_1\sqrt{d}) + (a_2 + b_2\sqrt{d}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{d}$$

容易验证结合律,  $0 = 0 + 0\sqrt{d}$ ,  $-(a + b\sqrt{d}) = (-a) + (-b)\sqrt{d}$ . 乘法:

$$(a_1 + b_1\sqrt{d}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{d}) = a_1a_2 + b_1b_2d + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{d}$$

其中  $1 = 1 + 0\sqrt{d}$ , 逆元做一次分母有理化

$$(a + b\sqrt{d})^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{d}} = \frac{a - b\sqrt{d}}{a^2 + b^2d} = \frac{a}{a^2 + b^2d} + \frac{-b}{a^2 + b^2d}\sqrt{d}$$

, 结合律是容易验证的 (计算出的结果是轮换对称的, 参考1.1.4和1.2.3).

**1.4.11** 设  $L \supset K$  是一个域扩张, 证明: 下述集合

$$\text{Gal}(L/K) = \{L \xrightarrow{\sigma} L \mid \sigma \text{ 是域同构, 且 } \sigma(a) = a \text{ 对任意 } a \in K \text{ 成立}\}$$

关于映射的合成是一个群 (称为域扩张  $L \supset K$  的伽罗瓦群).

*proof*

$\text{Gal}(L/K) \subseteq \text{Aut}(L)$ , 只需说明  $\text{Gal}(L/K)$  是子群.

$\forall \varphi, \psi \in \text{Gal}(L/K)$ , 由于  $\psi|_K = \text{id}_K$ , 因此  $\psi^{-1}|_K = \text{id}_K$ , 故  $(\varphi \circ \psi^{-1})|_K = \text{id}_K$ , 即

$$\varphi \circ \psi^{-1} \in \text{Gal}(L/K).$$

**1.4.12** 求  $\text{Gal}(\mathbb{Q}[\sqrt{d}]/\mathbb{Q})$ , 此处  $d \in \mathbb{Z}, \sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ .

*proof*

同 1.4.9, 若  $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}[\sqrt{d}]/\mathbb{Q})$ , 则  $\sigma \in \text{Aut}_{\mathbb{Q}\text{-Vect}}(\mathbb{Q}[\sqrt{d}])$ , 因此  $\sigma(a + b\sqrt{d}) = a + b\sigma(\sqrt{d})$ . 然后由于保持乘法得到  $\sigma(\sqrt{d}) \cdot \sigma(\sqrt{d}) = d$ , 得到  $\sigma(\sqrt{d}) = \pm\sqrt{d}$ . 因此  $\text{Gal}(\mathbb{Q}[\sqrt{d}]/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , 两个同构分别为  $\text{id}$  和共轭.

**1.4.13** 设  $V = (V, +)$  是一个加法群,  $\text{Hom}(V)$  表示它的自同态环. 对任意域  $K$ , 如果存在一个数乘运算  $K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ , 使得加法群  $V = (V, +)$  成为一个  $K$ -线性空间, 则称该数乘运算是加法群  $V = (V, +)$  上的一个  $K$ -线性空间结构. 试证明:

(1) 如果存在一个环同态  $\varphi: K \rightarrow \text{Hom}(V)$ , 则数乘运算

$$K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v := \varphi(\lambda)(v)$$

是  $V$  上的一个  $K$ -线性空间结构;

(2) 如果在  $V$  上存在  $K$ -线性空间结构  $\phi: K \times V \rightarrow V$ , 则映射

$$\varphi: K \rightarrow \text{Hom}(V), \lambda \mapsto \phi(\lambda, \cdot)$$

是一个环同态, 其中  $\phi(\lambda, \cdot): V \rightarrow V$  定义为  $v \mapsto \phi(\lambda, v) := \lambda \cdot v$ ;

(3) 对任意域  $K$ , 整数加法群  $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$  上不存在  $K$ -线性空间结构.

*proof*

(1) 验证数乘的四条:

(i) 由于  $\varphi$  是环同态, 因此  $\varphi(1) = 1_{\text{Hom}(V)} = \text{id}_V$ . 故  $\forall v \in V$  有  $1v = \varphi(1)(v) = \text{id}_V(v) = v$ .

(ii)  $\forall a, b \in K, v \in V$   $(a+b)v = (\varphi(a+b))(v) = (\varphi(a) + \varphi(b))(v) = \varphi(a)(v) + \varphi(b)(v) = av + bv$ .

(iii)  $\forall a \in K, v, w \in V$   $a(v+w) = \varphi(a)(v+w) = \varphi(a)(v) + \varphi(a)(w) = av + aw$ .

(iv)  $\forall a, b \in K, v \in V$   $(ab)v = \varphi(ab)(v) = (\varphi(a) \circ \varphi(b))(v) = \varphi(a)(\varphi(b)(v)) = a(bv)$ .

(2) (1) 的反向.

(i)  $\forall a \in K, v, w \in V$   $\varphi(a)(v+w) = \phi(a, v+w) = a(v+w) = av + aw = \phi(a, v) + \phi(a, w) = \varphi(a)(v) + \varphi(a)(w)$  这说明  $\varphi(a)$  保持加法.

(ii)  $\forall a \in K, v \in V$   $\varphi(a)(kv) = \phi(a, kv) = a(kv) = (ka)v = \phi(ka, v) = \varphi(ka)(v)$  这说明  $\varphi(a)$  保持数乘.

由 (i)(ii) 知  $\varphi$  是良定义的 (well-defined). 同时 (ii) 也说明  $\varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ .

(iii) 由  $\phi$  是数乘, 即  $1v = v, \forall v \in V$ . 也就是说  $\phi(1, \cdot) = \text{id}_V$ .



$$(iv) \forall a, b \in K, v \in V, \varphi(a+b)(v) = \phi(a+b, v) = (a+b)v = av + bv = \phi(a, v) + \phi(b, v) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

(3) 用反证法, 假设  $(\mathbb{Z}, +)$  上存在一个  $K$ -线性空间结构, 即存在一个环同态  $\varphi: K \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z})$ .

但是  $\text{Hom}(\mathbb{Z})$  和整数环  $\mathbb{Z}$  是同构的 (教材例 1.4.4). 我们又知道域出发的环同态一定是单的 (教材命题 1.4.1 的 (9)), 也就是说存在一个域  $K$  到  $\mathbb{Z}$  的单同态, 这是不可能的. 由 1.4.7, 一定有  $n \mapsto n, \forall n \in \mathbb{Z}$ , 而同态一定会把单位映到单位, 但  $\mathbb{Z}$  中只有  $\pm 1$  是单位.

1.4.7 也说明了环同态是保特征的, 因此  $\text{Char}(K) = \text{Char}(\mathbb{Z}) = 0$ , 从而  $\mathbb{Q} \subseteq K$ . 这样也可以看出矛盾.

注:(1)(2) 即一个模结构的两种等价表述, 在群作用 (教材 4.5 节) 也会看到类似的定义.

**1.4.14 证明:** 在整数集合  $\mathbb{Z}$  上存在运算  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (a, b) \mapsto a \oplus b$ , 使得  $(\mathbb{Z}, \oplus)$  是一个交换群, 但它与整数加法群  $(\mathbb{Z}, +)$  不同构. 提示: 利用  $\mathbb{Q}$  是可数集和上题中的问题 (3).

*proof*

类似 1.1.4, 存在一个可数集之间的双射  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ , 由  $\mathbb{Q}$  的环结构导出  $(\mathbb{Z}, \oplus, \star)$ . 则同态

$$f^{-1}: \mathbb{Q} \rightarrow (\mathbb{Z}, \oplus, \star)$$

会自然诱导出一个  $\mathbb{Q}$ -线性空间结构 (1.4.9 的 (1)). 由 1.4.13 的 (3),  $(\mathbb{Z}, \oplus)$  和  $(\mathbb{Z}, +)$  不同构.

注: 对于  $\mathbb{Z}$  还有一个重要的结论,  $\mathbb{Z}$  的 (含幺) 环结构是唯一的. 更严格来说, 在  $(\mathbb{Z}, +)$  上添加乘法, 那么只能得到唯一的环结构.(可参考 [Alu09]III.2.15, 2.16)

## 第 2 章 唯一分解整环

### 习题 2.1 教材 p28-p29

2.1.1 设  $R$  是一个交换环,  $I \subsetneq R$  是一个理想. 证明

$$\sqrt{I} = \{r \in R \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ 使得 } r^m \in I\}$$

也是  $R$  的理想 (称为理想  $I$  的根).

注: 这题的根理想定义有误, 应是  $\mathbb{N}$  而不是  $\mathbb{Z}$ . 一旦出现负整数意味着有可逆元, 从而  $\sqrt{I}$  是单位理想了.

*proof*

可以清楚地看出  $I \subseteq \sqrt{I}$ . 先验证加法子群,

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \sqrt{I}, \exists m, n \in \mathbb{N}, a^m, b^n \in I, \\ \implies (a - b)^{m+n} \in I \end{aligned}$$

这是因为单项  $a^i b^j$  的指数  $i + j = m + n$ , 故  $i < m$  和  $j < n$  不能同时成立, 即  $i \geq m$  或  $j \geq n$ , i.e.  $a^i \in I$  或  $b^j \in I$ . 从而  $(a - b)^{m+n} \in I$ ,  $a - b \in \sqrt{I}$ .

再验证吸收律 (交换验证单边即可),

$$\forall a \in \sqrt{I}, r \in R, \exists m \in \mathbb{N}, a^m \in I \implies (ar)^m = a^m r^m \in I$$

因此  $ar \in \sqrt{I}$ .

注: 零理想的根  $\sqrt{\{0\}} = \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n = 0\}$  是所有幂零元 (nilpotent) 组成的理想, 叫做  $R$  的幂零根 (nilradical), 一般记作  $\mathfrak{N}(R)$ . 可以证明  $\mathfrak{N}(R) = \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ 是素理想}} \mathfrak{p}$ . (可以参考 [AM94]p5)

2.1.2 设  $R$  是一个交换环,  $p > 0$  是一个素数. 如果  $p \cdot x = 0 (\forall x \in R)$ . 试证明:  $(x + y)^{p^m} = x^{p^m} + y^{p^m} (\forall x, y \in R, m > 0)$

*proof*

事实上, 这个  $p$  就是环  $R$  的特征. 若  $\text{Char}(R) \neq p$ , 则由  $p = 0$ ,  $\text{Char}(R) < p$ . 那么  $(p, \text{Char}(R)) = 1$ , 有 Bézout's Identity 得到  $1 = 0$ , 这就没什么考虑的必要性了.

对特征  $p$  的交换环, 有一个特别的同态  $F$  称为 Frobenius 自同态,

$$F : R \rightarrow R, \quad a \mapsto a^p$$

我们说明这确实是一个同态.

保持乘法是因为交换环, 不平凡的是保持加法.

$$(a + b)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} b + \cdots + b^p.$$

其中  $1 \leq i \leq p - 1$  时,

$$\binom{p}{i} = \frac{p(p-1) \cdots (p-i+1)}{1 \cdot 2 \cdots i}$$

由于  $p$  是素数,  $1, 2, \dots, i$  都不整除  $p$ , 而  $\binom{p}{i}$  是整数, 因此只能是  $i! \mid (p-1) \cdots (p-i+1)$ .

所以  $p \mid \binom{p}{i}$ . 而  $p = 0$ , 故  $(a+b)^p = a^p + b^p$ .

因此  $\varphi: R \rightarrow R, x \mapsto x^{p^m}$  也是自同态,  $\varphi = F^m$ , 这里  $F^m$  表示复合  $m$  次.

注: Frobenius 一般在域中使用的多一些. 虽然对交换环 Frobenius 都是可以定义的, 但是整环才能保证 Frobenius 是单射. Frobenius 一般不是满的, 但对有限域就是自同构了.

**2.1.3 证明:** 只有有限个元素的整环一定是一个域.

*proof*

整环  $R$  有乘法消去律 1.1.1, 而 1.3.9 告诉我们, 满足消去律的有限半群是群. 因此  $(R \setminus \{0\}, \cdot)$  是群, 即  $R$  是一个域.

**2.1.4 证明:** 只有有限个理想的整环是一个域.

*proof*

事实上条件可以再减弱一点, 一个 Artin 整环一定是域.

设  $a \neq 0$ , 考虑理想降链

$$(a) \supseteq (a^2) \supseteq \cdots$$

因此  $\exists n \in \mathbb{Z}_{>0}, (a^n) = (a^{n+1})$ . 即有  $a^n \in (a^{n+1})$ , 那么  $\exists b \in R, a^n = a^{n+1}b$ , 从而  $ab = 1_R$ .

注: Artin 环定义为任意理想降链稳定的环, i.e. 若有理想降链

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$$

则存在  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  使得  $\forall m > n, I_m = I_n$ , 也就是说从某一个  $n$  开始就稳定了  $I_n = I_{n+1} = \cdots$ . 这个条件称为 descending chain condition(d.c.c.), 与之对应的是 ascending chain condtion(a.c.c.), 满足 a.c.c. 的正是 Noether 环.

**2.1.5 理想  $P \subsetneq R$  称为素理想, 如果:  $ab \in P \Rightarrow a \in P$  或  $b \in P$ . 试证明:  $P \subsetneq R$  是素理想当且仅当  $R/P$  没有零因子.**

*proof*

(1) " $\Rightarrow$ ":

$$\forall \bar{a}, \bar{b} \in R/P, \bar{a}\bar{b} = \overline{ab} = \bar{0} \Rightarrow ab \in P \Rightarrow a \in P \text{ 或 } b \in P \Rightarrow \bar{a} = \bar{0} \text{ 或 } \bar{b} = \bar{0}.$$

(2) " $\Leftarrow$ ":

$$ab \in P \Rightarrow \bar{a}\bar{b} = \overline{ab} = \bar{0} \Rightarrow \bar{a} = \bar{0} \text{ 或 } \bar{b} = \bar{0} \Rightarrow a \in P \text{ 或 } b \in P.$$

注:

1. 零理想  $(0)$  是素理想.

2. 一个交换环的 (Krull) dimension 定义为最长素理想链的长度, 其中, 若有素理想链

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

他的长度定义为  $n$ . (可参考 [AM94]p89, [Alu09]p153)

交换 Artin 环 (2.1.4) 是 0 维的 Noether 环. 0 维即意味着所有的素理想都是极大理想.

3. 对交换环  $R$ ,  $\text{Spec}(R) := \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ 是 } R \text{ 的素理想}\}$  称为  $R$  的素谱 (spectrum).  $\text{Spec}(R)$  上有一个 Zariski 拓扑. (这个就不给参考书了, 自行搜索或查阅代数几何相关书籍吧)

**2.1.6** 理想  $m \subsetneq R$  称为极大理想, 如果  $R$  中不存在真包含  $m$  的非平凡理想 (即: 如果  $I \supsetneq m$  是  $R$  的理想, 则必有  $I = R$ ). 试证明: 当  $R$  是交换环时,  $m \subsetneq R$  是极大理想当且仅当  $R/m$  是一个域. 特别, 交换环中的极大理想必为素理想.

*proof*

(1) " $\Rightarrow$ ":

$$\begin{aligned} \forall \bar{0} \neq \bar{a} \in R/m &\Rightarrow a \notin m \Rightarrow m \subsetneq m + (a) \Rightarrow m + (a) = R = (1) \\ &\Rightarrow \exists x \in m, b \in R, x + ab = 1 \Rightarrow \overline{ab} = \overline{1 - x} = \bar{1}. \end{aligned}$$

(2) " $\Leftarrow$ ":

$$\begin{aligned} m \subsetneq I \subseteq R &\xRightarrow{\text{ideal}} \exists a \in I \setminus m \text{ i.e. } \bar{a} \neq 0 \Rightarrow \exists b \in R, \bar{a}\bar{b} = \overline{ab} = \bar{1} \\ &\Rightarrow \exists x \in m \subsetneq I, ab = 1 + x \Rightarrow 1 = ab - x \in I \Rightarrow I = (1) = R. \end{aligned}$$

或者用同态基本定理, 包含  $m$  的理想和  $R/m$  的理想有一个一一对应, 而域的理想只有  $\{0\}$  和本身.

注: (1) 中用到了理想的和. 若  $I, J$  都是  $R$  的理想,  $I + J := \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$ . 可以验证这确实是一个理想, 类似可以定义一族理想  $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$  的和,

$$\sum_{\alpha \in A} I_\alpha = \left\{ \sum_{\alpha \in A} i_\alpha \mid i_\alpha \in I_\alpha, \text{ 且只有有限个 } i_\alpha \neq 0 \right\}$$

即考虑所有可能的有限和.

另外  $\bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$  也是一个理想. 还有一个是理想的积, 相对要复杂一些,

$$\begin{aligned} IJ &:= (\{ij \mid i \in I, j \in J\}) \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^n i_k j_k \mid \exists n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n, i_k \in I, j_k \in J \right\} \end{aligned}$$

他是所有乘积  $ij$  生成的理想. 那么一族理想的乘积就是考虑所有可能的有限乘积生成的理想.

**2.1.7** 设  $I \subsetneq \mathbb{Z}$  是整数环的非零理想, 证明下述结论等价

(1)  $I$  是极大理想;

- (2)  $I$  是素理想;  
 (3) 存在素数  $p$  使得  $I = (p)\mathbb{Z} = \{ap \mid \forall a \in \mathbb{Z}\}$ .

*proof*

1. (1)  $\implies$  (2): 由于域一定是整环, 由 2.1.5 和 2.1.6 知极大理想是素理想.  
 2. (2)  $\implies$  (3): 由于  $\mathbb{Z}$  是 PID (带余除法可证), 故存在整数  $p$  使得  $I = (p)$ . 由于是素理想, 因此  $ab \in (p) \implies a \in (p)$  或  $b \in (p)$ . 即

$$p \mid ab \implies p \mid a \text{ or } p \mid b$$

则  $p$  是素数 (若不然,  $p = qr$ , 取  $a = q, b = r$  即导出矛盾).

3. (3)  $\implies$  (1): 设  $I = (p) \subsetneq J$ , 则存在  $n \in J \setminus I$ . 由于  $p$  是素数, 故有  $(n, p) = 1$ . 由 Bézout's Identity,  $\exists u, v \in \mathbb{Z}$  使得  $nu + pv = 1$ , 从而  $1 \in J, J = \mathbb{Z}$ . (这和 2.1.6 的证明是类似的)

或直接用  $\mathbb{Z}/(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  是域.

**2.1.8** 设  $p \in \mathbb{Z}$  是素数, 证明  $(p)\mathbb{Z}[x] = \{pf(x) \mid \forall f(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$  是整系数多项式环的素理想, 但不是  $\mathbb{Z}[x]$  的极大理想.

*proof*

事实上若  $I$  是  $R$  的理想, 我们有

$$\frac{R[x]}{IR[x]} \cong \frac{R}{I}[x]$$

这是根据同态基本定理得到, 考虑同态

$$\varphi: R[x] \rightarrow \frac{R}{I}[x], \quad a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mapsto \overline{a_0} + \overline{a_1}x + \cdots + \overline{a_n}x^n$$

可以验证这确实是一个同态. 事实上, 它是  $R \twoheadrightarrow R/I \hookrightarrow \frac{R}{I}[x]$  的一个延拓.  
 回到原题, 有

$$\frac{\mathbb{Z}[x]}{(p)\mathbb{Z}[x]} \cong \mathbb{Z}_p[x]$$

这里  $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  是域. 因此  $\mathbb{Z}_p[x]$  是 PID, 自然是整环, 但不是域 ( $x$  没有逆). 因此由 2.1.5 和 2.1.6,  $(p)\mathbb{Z}[x]$  是素理想但不是极大理想.

注: 给定环同态  $R \xrightarrow{\varphi} S$ , 其中  $R$  是交换环. 若  $\varphi(R) \subseteq C(S)$  (2.1.11), 根据我们之前 1.4.9 说过的, 首先  $S$  上有一个  $R$ -模结构. 其次有

$$(r_1s_1)(r_2s_2) = \varphi(r_1)s_1\varphi(r_2)s_2 = \varphi(r_1)\varphi(r_2)s_1s_2 = \varphi(r_1r_2)s_1s_2 = (r_1r_2)(s_1s_2).$$

即数乘和  $S$  本身的乘法是相容的. 这样的结构我们称为一个  $R$ -代数 ( $R$ -algebra), 这也是 2.1.12 介绍的东西. 因此一个  $R$ -代数就是带有加法, ( $R$ -) 数乘, 乘法的一个代数结构. 当  $S$  本身就是交换环时, 此时乘法是交换的, 且  $C(S) = S$ , 这样会变得简单很多. 这时  $S$  称为一个交换  $R$ -代数, 这也是交换代数会考虑的情形. 我们会把  $S$  看作一个有序对  $(S, \varphi)$ , 一个交换  $R$ -代数  $S$  也叫做一个  $R$ -(交换) 环. 那么交换  $R$ -代数构成的范畴是交换环范畴的余切片范畴 (coslice category).

而这里提到的延拓其实是多项式环的泛性质 (universal property), 或者说是自由交换  $R$ -代数的泛性质, 因为  $R[x]$  就是一个的自由交换  $R$ -代数.(可参考 [Alu09]III.§6.3)

**2.1.9** 映射  $D: R[x] \rightarrow R[x]$  定义如下:  $\forall f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ,

$$D(f) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

$\forall a \in R, f, g \in R[x]$ , 试证明:

$$(1) D(f+g) = D(f) + D(g), D(af) = aD(f);$$

$$(2) D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g).$$

( $D(f)$  称为  $f(x)$  的导数. 记为  $f'(x) = D(f)$ ,  $f^{(m)}(x) = \overbrace{D \cdots D}^m(f)$  称为  $f(x)$  的  $m$  次导数).

*proof*

按定义验证. 设  $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ,  $g = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ .

(1) 不妨设  $n \geq m$ , 且令  $b_k = 0, k > m$ .

$$\begin{aligned} D(f+g) &= D\left(\sum_{k=0}^n (a_k + b_k)x^k\right) = \sum_{k=1}^n k(a_k + b_k)x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^m k b_k x^{k-1} = D(f) + D(g). \end{aligned}$$

$$D(af) = D\left(\sum_{k=0}^n a a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^n k a a_k x^{k-1} = a \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = aD(f).$$

这里能把  $a$  提出来是因为  $k$  作为  $k1$ (1.2.1的注记), 有  $ka = ak$ .

(2)

$$\begin{aligned} D(f \cdot g) &= D\left(\sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i+j=k} a_i b_j x^k\right) = \sum_{k=1}^{n+m} \sum_{i+j=k} k a_i b_j x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+m} \sum_{i+j=k} (i+j) a_i b_j x^{i+j-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+m} \sum_{i+j=k} (i a_i x^{i-1}) b_j x^j + a_i x^i (j b_j x^{j-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+m-1} \sum_{(i-1)+j=k} (i a_i) b_j x^k + a_i (j b_j) x^k \\ &= D(f) \cdot g + f \cdot D(g). \end{aligned}$$

**2.1.10** 如果  $F$  是特征零的域, 则  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \deg(f) = 0$  或  $f(x) = 0$ (即常数); 如果  $F$  的特征是  $p > 0$ , 则  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$  存在  $g(x) \in F[x]$  使得  $f(x) = g(x^p)$ .

proof

$\text{Char}(F) = 0$ , 即  $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, n \neq 0$  (1.2.1的注记), 那么

$$f'(x) = na^{n-1} + \cdots + a_1 = 0 \implies 1 \leq k \leq n, ka_k = 0 \implies 1 \leq k \leq n, a_k = 0$$

故  $f(x) = a_0$ ,  $\deg(f) = 0$  或  $f = 0$ , 反过来是平凡的.

若  $\text{Char}(F) = p$ , 则  $p = 0$ , 那么设  $\deg(f) = n = kp + r, 0 \leq r < p, k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} f &= a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p + \cdots + a_{2p}x^{2p} + \cdots + a_{kp}x^{kp} + a_nx^n. \\ \implies f' &= a_1 + \cdots + pa_px^{p-1} + \cdots + kpa_{kp}x^{kp-1} + \cdots + na_nx^{n-1} \\ &= a_1 + \cdots + (p-1)a_{p-1}x^{p-2} + (p+1)a_{p+1}x^p + \cdots + (kp-1)a_{kp-1}x^{kp-2} \\ &\quad + (kp+1)a_{kp+1}x^k + \cdots + na_nx^{n-1}. \end{aligned}$$

此时  $f' = 0$  有  $f = a_0 + a_px^p + \cdots + a_{kp}x^{kp} = g(x^p)$ . 这里  $g = a_0 + a_px + \cdots + a_{kp}x^k$ .  
反过来也是类似的.

**2.1.11** 设  $R$  是一个环, 子环  $C(R) = \{a \in R \mid ab = ba \forall b \in R\}$  称为  $R$  的中心. 试证明:

- (1) 如果  $R$  是一个除环, 则  $C(R)$  是一个域;
- (2) 令  $\mathbb{H}$  表示 Hamilton 四元数环, 则  $C(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ .

proof

(1) 除环的子环自然是除环,  $C(R)$  和  $R$  中所有元素交换, 故  $C(R)$  本身是交换环, 从而是域.

(2) 设  $\alpha = a + ib + jc + kd \in C(\mathbb{H})$ , 则有

$$\alpha \cdot i = i \cdot \alpha$$

$$\alpha \cdot j = j \cdot \alpha$$

得到  $b = c = d = 0$ , 即  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**2.1.12** 设  $K$  是一个域. 如果  $C(R)$  包含一个同构于  $K$  的子域, 则称环  $R$  为  $K$ -代数. 试证明: 加法群  $(R, +)$  通过  $R$  的乘法成为一个  $K$ -向量空间.

proof

见1.4.9和2.1.8的注记. 域上的模就是线性空间.

注:  $C(R)$  包含一个同构于  $K$  的子域, 即存在同态  $K \xrightarrow{\varphi} R$  使得  $\varphi(K) \subseteq C(R)$  (这是因为域出发的同态一定是单的). 这和之前说的是一样的.

**2.1.13** 设  $R$  是一个  $K$ -代数,  $\dim_K(R)$  称为  $R$  的维数. 试证明:

- (1) 矩阵环  $M_n(K)$  是一个  $n^2$  维  $K$ -代数;
- (2) 任意  $n$  维  $K$ -代数必同构于  $M_n(K)$  的子环;
- (3) 如果  $R$  是一个有限除环, 则  $R$  是有限域上的有限维代数.

*proof*

(1)  $M_n(K)$  是  $n^2$  维  $K$ -线性空间, 只需验证

$$k_1 M_1 k_2 M_2 = k_1 k_2 M_1 M_2, k_1, k_2 \in K, M_1, M_2 \in M_n(K).$$

这是根据  $M_n(K)$  的定义. 事实上  $C(M_n(K)) = \{kI_n \mid k \in K\} \cong K$ .

(2) 由教材例 1.4.3, 对任意的环  $R$ , 我们用  $\text{End}_{\text{Ab}}(R)$  表示加法群的自同态环 (关于加法和复合). 有一个自然的环同态,

$$R \rightarrow \text{End}_{\text{Ab}}(R), \quad r \mapsto \lambda_r$$

其中  $\lambda_r : R \rightarrow R, a \mapsto ra$ , 即左乘  $r$  这个自同态 (这里换成右乘也是一样的). 这是一个单同态, 所以  $R$  同构于  $\text{End}_{\text{Ab}}(R)$  的一个子环.

那么当  $R$  是  $n$  维  $K$ -代数时,  $\lambda_r$  还是  $K$ -线性映射. 因此有单射  $R \hookrightarrow \text{Hom}_K(R) \cong M_n(K)$ .

(3)  $R$  是有限除环, 因此  $C(R)$  是有限域 (2.1.11). 根据定义  $R$  是一个  $C(R)$ -代数, 且  $R$  有限, 故是有限维的 ( $|R| = [R : C(R)][C(R)]$ ).

**2.1.14** 设  $K$  是一个域,  $R$  是一个有限维  $K$ -代数. 试证明:

- (1)  $\forall \alpha \in R$ , 存在非零多项式  $f(x) \in K[x]$  使得  $f(\alpha) = 0$ ;
- (2) 如果  $R$  是除环,  $\alpha \neq 0$ , 则  $\alpha$  的极小多项式  $\mu_\alpha(x) \in K[x]$  不可约;
- (3) 如果  $R$  是除环,  $K$  是代数闭域 (即  $K[x]$  中次数大于零的多项式在  $K$  中必有根), 则  $R = K$ .

历史上, 有限维可除  $K$ -代数的分类是一个热门话题. 当  $K$  是实数域时,  $R$  必同构于实数域, 复数域或 Hamilton 四元数环之一 (Frobenius 定理); 当  $K$  是有限域时,  $R$  必为交换环 (Wedderburn 定理).

零多项式是平凡的, 因此 (1) 我做了修改. 在域扩张中, 这样的元素称为  $K$  上的代数元 (algebraic element), 或者称  $\alpha$  在  $K$  上代数 (algebraic over  $K$ ). 给定域扩张  $L/K$ , 若  $\forall \alpha \in L$  都在  $K$  上代数, 则称该扩张是代数扩张.

*proof*

(1) 设  $\dim_K R = n$ . 则  $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n$  线性相关. 或者考虑线性映射  $r \mapsto \alpha r$ . 那么它对应的矩阵的特征多项式满足条件 (Cayley-Hamilton Theorem).

(2) 按定义,  $\mu_\alpha$  是满足  $\alpha$  的次数最小的 (首一) 多项式. 假设  $\mu_\alpha$  可约, 即  $\mu_\alpha(x) = f(x)g(x)$ ,  $\deg(f), \deg(g) > 0$ , 则  $0 = \mu_\alpha(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$ . 由于除环无零因子, 故  $\deg(\mu_\alpha) = \deg(f) + \deg(g)$ , 且  $f(\alpha) = 0$  或  $g(\alpha) = 0$ . 不妨设  $f(\alpha) = 0$ , 但  $\deg(f) < \deg(\mu_\alpha)$  与极小矛盾.

(3) 代数闭域等价于任意多项式可分解成一次多项式的乘积. 这和代数基本定理是类似的. 此时  $K[x]$  中的不可约多项式即为所有一次多项式. 由 (2),  $\forall \alpha \in R$ , 极小多项式  $\mu_\alpha(x) = x - k_\alpha, k_\alpha \in K$ . 因此  $\alpha = k_\alpha \in K$ . 即  $R = K$ .



**2.1.15** 证明: 集合  $\mathbb{F}_{3^2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3) \right\}$  关于矩阵的“加法”和“乘法”成为一个 9 元域. 若将定义中的  $\mathbb{F}_3$  换成  $\mathbb{F}_5$ , 上述集合是否是一个 25 元域, 为什么?

*proof*

这个集合是  $\mathbb{F}_3$  上的 2 维线性空间.

$$\mathbb{F}_{3^2} = \left\{ a\lambda + b\xi \mid \lambda = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{F}_3 \right\}$$

其中  $\xi$  的特征多项式为  $x^2 + 1$ , 可以验证它是不可约的. 又因为  $\mathbb{F}_3[x]$  是 PID ( $\mathbb{F}_3[x]$  是域), 故  $(x^2 + 1)$  是极大理想,  $x^2 + 1$  就是  $\xi$  的极小多项式. 则  $\mathbb{F}_{3^2} = \mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 1)$  是域.

但  $x^2 + 1$  在  $\mathbb{F}_5[x]$  中是可约的: 在  $\mathbb{F}_5[x]$  中,

$$x^2 + 1 = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

## 习题 2.2 教材 p35-p36

**2.2.1** 设  $m, n$  是两个正整数, 证明它们在  $\mathbb{Z}$  中的最大公因数和它们在  $\mathbb{Z}[i]$  中的最大公因数相同.

注意这里的相同指的是在相伴的意义下相同.

*proof*

由于  $U(\mathbb{Z}[i]) = \{\pm 1, \pm i\}$ , 在相伴的意义下, 可以假设  $(m, n)$  在  $\mathbb{Z}$  和  $\mathbb{Z}[i]$  中都是正整数, 分别记为  $d$  和  $d'$ .

那么 PID 上 Bézout's Identity 成立, 有

$$d = mu + nv, \quad d' = m\alpha + n\beta.$$

其中  $u, v \in \mathbb{Z}, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ . 设  $\alpha = a_1 + ia_2, \beta = b_1 + ib_2$ , 由于我们假设的是  $d' \in \mathbb{Z}_{>0}$ , 故  $d' = ma_1 + nb_1$ , 从而  $d \mid m, d \mid n \implies d \mid d'$ . 反过来也有  $d' \mid d$ , 所以  $d = d'$ .

**2.2.2** 设  $R$  是整环,  $p \in R$  称为一个素元如果它生成的理想  $P = (p)R$  是素理想. 证明:  $R$  中素元必为不可约元.

*proof*

由定义  $(p) \neq (1)$ , 因此  $p$  不可逆. 设  $p = ab$ , 则  $ab \in (p)$ , 由素理想知  $a \in (p)$  或  $b \in (p)$ , 不妨设  $a \in (p)$ , 则  $(a) \subseteq (p)$ . 另一方面  $(p) \subseteq (a)$ , 因此  $(p) = (a)$ , 从而  $b$  是单位.

注:  $x \sim y \iff \exists u \in U(R), x = uy \iff (x) = (y) \iff x \mid y$  且  $y \mid x$ .

**2.2.3** 设  $R$  是一个主理想整环 (PID),  $0 \neq r \in R$ . 证明: 在  $R$  中仅有有限个理想包含  $r$ .

*proof*

$R$  是 PID, 即对任意理想  $I$ , 存在  $a \in R$ , 理想  $I = (a)$ . 理想  $I$  包含  $r$  指  $r \in I$ , 它等价于  $(r) \subseteq I = (a) \iff a \mid r$ . 又因为 PID 是 UFD, 因此又唯一分解  $r = p_1 p_2 \cdots p_n$ , 从而  $r$  因子个数在相伴的意义下 (2.2.2 的注记) 有限 ( $\leq 2^n$ ), 即包含  $r$  的理想有限.

**2.2.4** (辗转相除法) 设  $R$  是欧氏环,  $a, b \in R$  非零. 由带余除法得

$$a = q_1 b + r_1, b = q_2 r_1 + r_2, r_1 = q_3 r_2 + r_3, \cdots, r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$$

满足  $\delta(r_k) < \delta(r_{k-1}) < \cdots < \delta(r_2) < \delta(r_1) < \delta(b)$ . 试证明:

- (1) 存在  $k$  使得  $r_{k+1} = 0$ ;
- (2)  $r_k$  是  $a, b$  的一个最大公因子;
- (3) 求  $u, v \in R$  使得  $r_k = ua + vb$ .

*proof*

(1) 由于  $\delta(b) < \infty$ , 且  $\delta(r_k)$  是严格递减的自然数序列, 因此  $\delta(k) \leq \delta(b) - k$ , 取  $k > \delta(b)$  即可.

(2) 由 (1) 知最后一个等式为  $r_{k-1} = q_{k+1} r_k$ . 且

$$(a, b) = (bq_1 + r_1, b) = (b, r_1) = (q_2 r_1 + r_2, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{k-1}, r_k) = r_k.$$

(3) 根据辗转相除法的算式反过来表示  $r_k$ .

$$\begin{aligned} r_k &= r_{k-2} - q_k r_{k-1} = u_1 r_{k-2} + v_1 r_{k-1}, \quad u_1 = 1, v_1 = -q_k \\ &= u_1 r_{k-2} + v_1 (r_{k-3} - q_{k-1} r_{k-2}), \quad (r_{k-3} = q_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1}) \\ &= u_2 r_{k-3} + v_2 r_{k-2}, \quad u_2 = -q_k, v_2 = 1 + q_k q_{k-1} \\ &= \cdots \\ &= u_k a + v_k b \end{aligned}$$

递归关系是  $u_i = v_{i-1}, v_i = u_{i-1} - v_{i-1} q_{k-i+1}$ .

注: (1) 是著名的无穷递降的思路, 即递归的得到一系列对象且对应着一个严格递减的自然数序列, 根据自然数有下界 0 来得到矛盾或得出某个结论.

另外 (3) 的题干表述可能有些问题, 这里并不需要把  $u, v$  具体表达出来.

**2.2.5** 设  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid \forall a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ , 定义:  $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$ . 试证明:

- (1)  $U(R) = \{1, -1\}$ ;
- (2)  $R$  中任意元素都有不可约分解;
- (3)  $3, 2 + \sqrt{-5}, 2 - \sqrt{-5} \in R$  是不可约元;
- (4)  $9 = 3 \cdot 3 = (2 + \sqrt{-5}) \cdot (2 - \sqrt{-5})$  是 9 的两个不相同的不可约分解.

*proof*

(1) 验证  $N$  满足  $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ , 这和复数中  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  是类似的, 且  $N(\alpha) \in \mathbb{N}$ . 那么若  $\alpha$  是单位, 则存在  $\beta$  使得  $\alpha\beta = 1$ , 故  $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta) = N(1) = 1$ , 故只能有  $N(\alpha) = N(\beta) = 1$ , 解得  $\alpha = \pm 1$ .

(2) 因为  $R$  是 Noether 环.(由 Hilbert's Basis Theorem)

或者可以用  $N(\alpha)$  保持乘法的特性. 对任意  $\alpha \in R$ , 若它不可约, 则已经是一个分解了; 否则  $\alpha = \beta\gamma$ , 其中  $\beta, \gamma$  不是单位, 且有  $N(\alpha) = N(\beta)N(\gamma)$ . 因此  $N(\beta), N(\gamma) < N(\alpha)$ , 由于  $N(\alpha) < \infty$ , 因此这样分解是有限的, 这和 Noether 环  $\implies$  存在分解的过程是类似的.

(3) 由于  $N(3) = N(2 + \sqrt{-5}) = N(2 - \sqrt{-5}) = 9 = 3^2$ , 若它们可约, 则存在  $\alpha$  使得  $N(\alpha) = 3$ , 这是不可能的.

另外, 若  $N(\alpha)$  是素数, 则一定不可约, 但是反过来不对, 比如这里 9 并不是素数.

(4) 由 (3).

注:

1. 这个  $N$  是范数 (norm). 它其实是  $\mathbb{Q}$ -线性映射  $\beta \mapsto \alpha\beta$  所对应矩阵的行列式. 这个概念在模论和代数数论都有提及.

2. (1) 和 (2) 的结论是可以推广的, 对于一个代数数域  $K/\mathbb{Q}$  (即  $\mathbb{Q}$  的有限扩张),  $\alpha \in \mathcal{O}_K$  是单位当且仅当  $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = 1$ . 其中  $\mathcal{O}_K$  是对应的代数整数环.  $\mathcal{O}_K$  是存在不可约分解的环. 其证明方法和 (2) 几乎一模一样. 具体细节参考代数数论的教材.

**2.2.6** 令  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  分别表示实数域和复数域, 试证明:

(1) 若  $R$  是由关于  $\cos t$  和  $\sin t$  的实系数多项式组成的函数环, 则  $R \cong \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ ;

(2)  $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$  是唯一分解整环 (提示: 证明其为 ED);

(3)  $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$  不是唯一分解整环.

*proof*

(1) 考虑同态

$$\varphi: \mathbb{R}[x, y] \rightarrow R = \mathbb{R}[\cos t, \sin t], \quad x \mapsto \cos t, y \mapsto \sin t,$$

这自然是一个满同态, 由同态基本定理, 关键在于证明

$$\ker(\varphi) = (x^2 + y^2 - 1)$$

若多项式  $f(x, y)$  满足  $\varphi(f) = f(\cos t, \sin t) = 0$ , 将  $f$  看成是关于  $y$  的多项式

$$f(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_n(x)y^n, \quad a_i(x) \in \mathbb{R}[x], \quad 0 \leq i \leq n$$

由于  $x^2 + y^2 - 1$  关于  $y$  是首一的, 因此可以做带余除法, 得  $f = gq + r$ , 其中  $r(x, y) = r_0(x) + r_1(x)y$ . 带入  $x = \cos t, y = \sin t$  得  $r(\cos t, \sin t) = 0$ , 即

$$r_0(\cos t) + r_1(\cos t) \sin t = 0$$

做代换  $t \mapsto -t$ , 得

$$r_0(\cos t) - r_1(\cos t) \sin t = 0$$

两式相加得  $r_0 = 0$ , 相减得  $r_1 = 0$ , 从而  $r = 0$ . 因此  $f \in (x^2 + y^2 - 1)$ , 即  $\ker(\varphi) \subseteq (x^2 + y^2 - 1)$ . 另一方面  $x^2 + y^2 - 1 \in \ker(\varphi)$ , 故  $\ker(\varphi) = (x^2 + y^2 - 1)$ .

(2) 做基变换  $u = x + iy, v = x - iy$ , 他有逆变换  $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2i}$ . 因此有同构  $\mathbb{C}[u, v] \cong \mathbb{C}[x, y]$ . 从而

$$\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1) \cong \mathbb{C}[u, v]/(uv - 1)$$

而同态

$$\mathbb{C}[u, v] \rightarrow \mathbb{C}[u, u^{-1}], u \mapsto u, v \mapsto u^{-1}$$

是满的, 且 kernel 是  $(uv - 1)$ , 证明类似于 (1). 因此

$$\mathbb{C}[u, v]/(uv - 1) \cong \mathbb{C}[u, u^{-1}]$$

这个环称为 Laurent 多项式环, 这个环上可以做带余除法, 非零多项式的次数定义为最高次数 - 最低次数. 即  $f = a_n u^n + a_{n+1} u^{n+1} + \cdots + a_m u^m, n, m \in \mathbb{Z}, n < m$  的次数为  $\deg(f) = m - n$ . 因此这是一个 ED, 从而是 UFD.

(3) 由 (2),  $\mathbb{C}[\cos t, \sin t]$  是 UFD, 用待定系数, 假设

$$\cos t = (a_1 \cos t + a_2 \sin t + a_3)(b_1 \cos t + b_2 \sin t + b_3)$$

其中  $a_i, b_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, 3$ . 我们要忽略掉  $a_1 = b_3 = 1$  其余都是 0 这种平凡的情况, 左右展开得到

$$a_1 b_1 - a_2 b_2 = 0,$$

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0,$$

$$a_1 b_1 + a_3 b_3 = 0,$$

$$a_1 b_3 + a_3 b_1 = 1,$$

$$a_2 b_3 + a_3 b_2 = 0.$$

由第一个式子得  $b_1 = \frac{a_2}{a_1} b_2$ , 带入第二个式子得  $a_2 = \pm i a_1$ , 从而  $b_1 = \pm i b_2$ .

由一, 三又能得到  $a_2 b_2 = -a_3 b_3$ , 类似地, 带入第五个式子, 有  $a_3 = \pm a_2, b_2 = \pm b_3$ .

再用四, 五得  $a_1 b_3 = a_3 b_1 = \frac{1}{2}$ .

把上述关系带入

$$\begin{aligned} \cos t &= a_1 b_3 (\cos t \pm i \sin t \pm i) (\pm i \cos t \pm \sin t + 1) \\ &= \frac{1}{2} (\cos t \pm i \sin t \pm i) (\pm i \cos t \pm \sin t + 1) \end{aligned}$$

检查正负号, 得到结果

$$\cos t = \frac{1}{2} (\cos t + i \sin t - i) (i \cos t + \sin t + 1)$$

类似有

$$1 - \sin t = \frac{1}{2} (\cos t + i \sin t - i) (\cos t - i \sin t + i).$$

带入  $-t$  就是  $1 + \sin t$  的分解.

但这种方法比较难检查等式右边的因式确实为不可约元, 我们可以利用同构  $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1) \cong \mathbb{C}[u, u^{-1}]$ , 那么等式变为

$$x = \frac{1}{2}(u + u^{-1}) = \frac{u^{-1}}{2}(u - i)(u + i)$$

注意到  $U(\mathbb{C}[u, u^{-1}]) = \mathbb{C} \cup \{u^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . 右边为两个都是一次的且常数项不为 0, 容易验证不可逆 (注意这里  $x = \frac{1}{2}(u + u^{-1})$  次数为 2). 对  $1 - \sin t$  同理.

因此  $\cos t$  和  $1 \pm \sin t$  无法在  $\mathbb{R}[\cos t, \sin t]$  中分解 (分解出的系数中一定带  $i$ ). 这样就有  $\cos^2 t = \cos t \cos t = (1 - \sin t)(1 + \sin t)$ . 因此不是 UFD.

注: (2) 中若允许正次数到无穷的话, 则该环称为 Laurent 形式级数域 (可以验证确实是一个域).

另外, 可以说  $x^2 + y^2 - 1$  是单位圆的“极小多项式”. 但这种说法是有些不合理的, 因为这样  $a_{ij}x^i y^j$  次数将定义成  $i + j$ ,  $f(x, y)$  的次数定义成单项次数的最大值, 一旦这么定义就无法做带余除法, 就无法得到满足某个点或点集 (一般是代数集, 即某些多项式的共同零点) 的多项式是其极小多项式的倍数.

域扩张中的极小多项式和不可约是一样的, 这是由于  $K[x]$  是一个 PID, 不可约元对应极大理想, 从而对应极小多项式.

## 习题 2.3 教材 p41-p42

**2.3.1** 设  $F$  是一个域,  $F[[x]]$  是系数在  $F$  中的形式幂级数环, 试证明:

- (1)  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$  在  $F[[x]]$  中可逆  $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$ ;
- (2)  $F[[x]]$  中任意不可约元  $p(x)$  均与  $x$  相伴, 即  $p(x) \sim x$ ;
- (3)  $F[[x]]$  是主理想整环, 它是欧氏整环吗? 如果是, 请写出一个欧氏映射.

*proof*

(1) 按定义, 存在  $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  使得  $fg = 1$ . 则

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1, \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 &= 0, \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

因此  $a_0 \neq 0$ .

反过来, 若  $a_0 \neq 0$ , 由  $F$  是域,  $a_0$  可逆. 即存在  $b_0 \in F$ ,  $a_0 b_0 = 1$ . 我们可以通过上

面的无穷个方程组递归的解出  $b_k (k \geq 1)$ .

$$\begin{aligned} b_1 &= -a_1 b_0^2, \\ b_2 &= -a_2 b_0^2 - a_1 b_1 b_0, \\ &\vdots \\ b_k &= -\sum_{i=1}^k a_i b_{k-i} b_0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

从而存在  $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  为  $f$  的逆.

(2) 设  $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ .  $p$  不可约则不是可逆元, 由 (1),  $a_0 = 0$ , 因此  $p(x) = x p_1(x)$ . 又因为不可约, 且  $x$  不是可逆元, 因此  $p_1$  是可逆元, 故  $p(x) \sim x$ .

(3)

**2.3.2** 设  $F$  是一个域,  $p(x) \in F[x]$  不可约, 令  $I = p(x)F[x]$  表示由  $p(x)$  生成的理想, 试证明: 商环  $F[x]/I$  是一个域, 且环同态

$$\varphi: F[x] \rightarrow F[x]/I, \quad f(x) \mapsto \overline{f(x)}$$

诱导了域嵌入  $\varphi|_F: F \hookrightarrow F[x]/I, a \mapsto \bar{a}$  (如果将  $F$  与它的像等同, 则  $\bar{x} \in F[\bar{x}] := F[x]/I$  是  $p(x)$  在扩域  $F[\bar{x}]$  中的一个根).

*proof*

**2.3.3** 设  $F$  是一个域,  $K \subset F$  是一个子域,  $f(x), g(x) \in K[x]$ . 试证明:  $f(x), g(x)$  在  $K[x]$  中互素  $\Leftrightarrow f(x), g(x)$  在  $F[x]$  中互素.

*proof*

**2.3.4** 设  $F$  是特征零的域,  $f(x) \in F[x]$  不可约. 证明  $f(x)$  与  $f'(x)$  互素.

*proof*

**2.3.5** 设  $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$  是一个二元域. 证明:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbb{F}_2[x]$$

没有一次因子 (即不被一次多项式整除)  $\Leftrightarrow a_n \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i\right) \neq 0$ . 写出  $\mathbb{F}_2[x]$  中所有次数不超过 3 的所有不可约多项式.

proof

**2.3.6** 设  $p$  是素数,  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)\mathbb{Z}$ ,  $a \mapsto \bar{a}$ , 是商同态. 证明:

(1) 映射

$$\phi_p : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{F}_p[x], \quad f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i \mapsto \bar{f}(x) = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i x^i$$

是环同态;

(2) 对于首项系数为 1 的多项式  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ , 如果存在素数  $p$  使  $\bar{f}(x)$  在  $\mathbb{F}_p[x]$  中不可约, 则  $f(x)$  在  $\mathbb{Z}[x]$  中也不可约.

proof

**2.3.7** 设  $R, A$  是两个环,  $C(A) \subset A$  是  $A$  的中心,  $\psi : R \rightarrow C(A)$  是一个环同态. 证明:  $\forall u \in A$ , 存在唯一环同态  $\psi_u : R[x] \rightarrow A$  满足:

$$\psi_u(x) = u, \quad \psi_u(a) = \psi(a) \quad (\forall a \in R).$$

所以,  $\forall f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ , 它在  $\psi_u$  下的像

$$\psi_u(f(x)) = \psi(a_n)u^n + \psi(a_{n-1})u^{n-1} + \cdots + \psi(a_1)u + \psi(a_0) \in A$$

称为  $f(x)$  在  $u \in A$  的取值, 记为  $f(u) := \psi_u(f(x))$ .

proof

**2.3.8** 设  $R$  是一个交换环,  $f(x) \in R[x]$ . 证明:  $f(x)$  是环  $R[x]$  中的零因子当且仅当存在  $0 \neq r \in R$  使得  $r \cdot f(x) = 0$ .

proof

**2.3.9** 证明多项式  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$  在  $\mathbb{Z}[x]$  中不可约, 但是对任意的素数  $p$ , 它在  $\mathbb{F}_p[x]$  中总是可约的.

proof

**2.3.10** 设  $f(x) \in \mathbb{R}(x)$  是一个有理函数. 如果对任意整数  $m \in \mathbb{Z}$  必有  $f(m) \in \mathbb{Z}$ , 试证明  $f(x)$  必为多项式. 这样的  $f(x)$  是否必为有理系数多项式? 请证明你的结论.

proof

## 习题 2.4 教材 p48-p49

**2.4.1** 设  $F$  是一个域,  $R = F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , 令  $R_m \subset R$  表示所有  $m$  次齐次多项式的集合 (并上零多项式). 证明:  $R_m$  是域  $F$  上的  $\binom{m+n-1}{m}$  维向量空间.

*proof*

**2.4.2** 证明:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$  是  $m$  次齐次多项式当且仅当  $f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ( $t$  是一个新的不定元).

*proof*

**2.4.3** 设  $F$  是一个域,  $K \supset F$  是  $F$  的一个扩域, 试证明:  $a \in K$  是多项式  $f(x) \in F[x]$  的重根  $\Leftrightarrow f(a) = 0, f'(a) = 0$ .

*proof*

**2.4.4** 设  $F$  是一个无限域,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$  是一非零多项式. 试证明: 存在  $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ , 使  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$ .

*proof*

**2.4.5** 设  $\psi: R \rightarrow A$  是环同态,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in A^n$  满足:

$$u_i u_j = u_j u_i, \quad u_i \psi(a) = \psi(a) u_i \quad (\forall a \in R, 1 \leq i, j \leq n).$$

请直接验证取值映射  $\psi_u: R[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow A$ ,

$$f = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} a_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \mapsto \psi_u(f) := \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \psi(a_{i_1 i_2 \dots i_n}) u_1^{i_1} u_2^{i_2} \dots u_n^{i_n},$$

是一个环同态.

*proof*

**2.4.6** 设  $K$  是一个域,  $A = \{(a_{ij})_{n \times n} | a_{ij} \in K[\lambda]\}$  是  $n$  阶  $\lambda$ -矩阵环,  $u = \lambda \cdot I_n \in A$  表示对角线上全为  $\lambda$  的矩阵. 试证明: 如果  $R = M_n(K)$ ,  $\psi: R \rightarrow R$  是恒等映射, 则取值映射  $\psi_u: R[x] \rightarrow A$  是一个环同构.

*proof*

**2.4.7** 设  $R$  是一个无零因子的非交换环,  $\psi: R \rightarrow R$  是恒等映射. 证明存在  $u \in R$  使得  $\psi_u: R[x] \rightarrow R$ ,  $f(x) \mapsto f(u)$ , 不是一个映射.



*proof*

**2.4.8** 设  $K$  是一个域,  $M_m(K)$  是  $m$ -阶矩阵环,  $\psi : K \rightarrow M_m(K)$  定义为  $\psi(a) = a \cdot I_m$  (对角线元素为  $a$  的数量矩阵). 令

$$u = (A, B) \in M_m(K) \times M_m(K), \quad AB \neq BA,$$

试证明  $\psi_u : K[x_1, x_2] \rightarrow M_m(K)$ ,  $f(x_1, x_2) \mapsto f(A, B)$ , 不是一个映射.

*proof*

## 第 3 章 域扩张

## 习题 3.1 教材 p52-54

**3.1.1** 设  $K$  是特征零的域,  $f(x) \in K[x]$  是次数大于零的首项系数为 1 的多项式,  $d(x) = (f(x), f'(x))$  是  $f(x)$  与  $f'(x)$  的最大公因子. 令

$$f(x) = d(x) \cdot g(x).$$

证明:  $g(x)$  与  $f(x)$  有相同的根且  $g(x)$  没有重根.

*proof*

**3.1.2** 设  $K \subset L$  是域扩张,  $\alpha \in L$  是域  $K$  上的代数元. 令  $K[x] \xrightarrow{\psi_\alpha} L$ ,  $f(x) \mapsto f(\alpha)$ , 表示多项式在  $x = \alpha$  的取值映射. 试证明:

- (1)  $\ker(\psi_\alpha)$  由极小多项式  $\mu_\alpha(x)$  生成;
- (2)  $\psi_\alpha$  诱导了域同构  $\mathbb{K}[x]/(\mu_\alpha(x)) \cong K[\alpha]$ .

*proof*

**3.1.3** 设  $E = \mathbb{Q}[u]$ ,  $u^3 - u^2 + u + 2 = 0$ . 试将  $(u^2 + u + 1)(u^2 - u)$  和  $(u - 1)^{-1}$  表示成  $au^2 + bu + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ) 的形式.

*proof*

**3.1.4** 求  $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$  (提示: 证明  $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}[\sqrt{3}]] = 2$ ).

*proof*

**3.1.5** 设  $p$  是一个素数,  $z \in \mathbb{C}$  满足  $z^p = 1$  且  $z \neq 1$ , 试证明  $[\mathbb{Q}[z] : \mathbb{Q}] = p - 1$ .

*proof*

**3.1.6** 证明:

- (1)  $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$  是一个循环群;
- (2)  $z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$  是  $U_{12}$  的一个生成元, 但  $[\mathbb{Q}[z] : \mathbb{Q}] = 4$ ;
- (3) 求  $z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$  在  $\mathbb{Q}$  上的极小多项式.

*proof*

**3.1.7** 设  $E = K[u]$  是一个代数扩张, 且  $u$  的极小多项式的次数是奇数. 证明:  $E = K[u^2]$ .

*proof*

**3.1.8** 设  $E_1, E_2$  是域扩张  $K \subset L$  的中间域 (即:  $K \subset E_i \subset L$ ), 且  $[E_i : K] < +\infty$ . 令  $E = K[E_1, E_2] \subset L$  是由  $E_1, E_2$  生成的子域. 证明:

$$[E : K] \leq [E_1 : K] \cdot [E_2 : K].$$

*proof*

**3.1.9** 设  $K \subset L$  是代数扩张,  $E \subset L$  是中间子环 (即:  $K \subset E \subset L$ ). 证明:  $E \subset L$  必为子域 (所以任何有限扩张  $K \subset L$  的中间子环必为域).

*proof*

**3.1.10** 设  $L = K(u)$ ,  $u$  是  $K$  上的超越元,  $E \neq K$  是  $K \subset L$  的中间域. 证明:  $u$  是  $E$  上的代数元.

*proof*

**3.1.11** 设  $p$  是素数,  $K \subset L$  是  $p$  次扩张. 证明:  $K \subset L$  必为单纯扩张 (即: 存在  $u \in L$ , 使  $L = K[u]$ ).

*proof*

**3.1.12** 设域扩张  $K \subset L$  满足条件:

- (1)  $[L : K] < +\infty$ ;
- (2) 对任意两个中间域  $K \subset E_1 \subset L, K \subset E_2 \subset L$ , 必有  $E_1 \subset E_2$  或者  $E_2 \subset E_1$ .

证明:  $K \subset L$  必为单纯扩张 (即: 存在  $u \in L$ , 使  $L = K[u]$ ).

*proof*

**3.1.13** 设  $\alpha = 2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ , 给出一个首项系数为 1 的最低次数的多项式  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  使  $f(\alpha) = 0$ .

*proof*

**3.1.14** 设  $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}]$ , 证明:  $x^5 - 5$  在  $K[x]$  中不可约.

*proof*

**3.1.15** 设  $k$  是特征  $p > 0$  的域,  $x, y$  是  $k$  上的代数无关元. 令  $K = k(x^p, y^p)$ ,  $L = k(x, y)$ . 试证明  $[L : K] = p^2$ .

*proof*

## 习题 3.2 教材 p59

**3.2.1** 解释说明  $3^\circ$  角可以由尺规作出, 但是  $1^\circ$  角不可作.

*proof*

**3.2.2** 设  $\zeta_{17} = \cos(2\pi/17) + i \sin(2\pi/17)$ ,  $L = \mathbb{Q}[\zeta_{17}]$ . 请利用高斯关于  $\cos(2\pi/17)$  的公式写出  $\mathbb{Q} \subset L$  的中间域使  $L = \mathbb{Q}[\zeta_{17}]$  成为  $\mathbb{Q}$  上的一个二次根塔.

*proof*

## 习题 3.3 教材 p64

**3.3.1** 设  $f(x) = x^2 + ax + b \in K[x]$  不可约,  $E = K[u_1]$  (其中  $f(u_1) = 0$ ) 证明:  $E$  必包含  $f(x) = 0$  的另一个根 (所以  $E$  是  $f(x)$  的分裂域).

*proof*

**3.3.2** 设  $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ ,  $u_1 = \sqrt[3]{2}$ . 证明:  $E = \mathbb{Q}[u_1]$  不包含  $f(x) = 0$  的其他两个根.

*proof*

**3.3.3** 设  $L$  是  $n$  次多项式  $f(x) \in K[x]$  的分裂域, 证明:  $[L : K] \leq n!$ .

*proof*

**3.3.4** 构造  $x^5 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$  的一个分裂域  $L$ , 并求  $[L : \mathbb{Q}]$ .

*proof*

**3.3.5** 确定多项式  $x^{p^n} - 1 \in \mathbb{F}_p[x]$  在  $\mathbb{F}_p$  上的分裂域 ( $n \in \mathbb{N}$ ).

*proof*

**3.3.6** 设  $L$  是可分多项式  $f(x) \in K[x]$  的一个分裂域,  $K \subset E \subset L$  是任意中间域. 证明: 对任意单同态  $\varphi: E \rightarrow L$ , 若  $\varphi|_K = \text{id}_K$ , 则  $\varphi$  一定可以延拓成域同构  $\bar{\varphi}: L \rightarrow L$ .

*proof*

**3.3.7** 令  $f(x) = (x^2-2)(x^2-3)$ ,  $K = \mathbb{Q}[x]/(x^2-2) = \mathbb{Q}[u_1]$ , 此处  $u_1 = \bar{x} \in \mathbb{Q}[x]/(x^2-2)$ . 试证明:

- (1)  $K$  是一个域, 且  $x^2-3$  在  $K[x]$  中不可约;
- (2)  $L = K[x]/(x^2-3) = K[u_2]$  (此处  $u_2 = \bar{x} \in K[x]/(x^2-3)$ ) 是  $f(x) = (x^2-2)(x^2-3)$  的分裂域, 且  $[L:\mathbb{Q}] = 4$ .

*proof*

**3.3.8** 设  $p \in \mathbb{Z}$  是一个素数,  $F$  是一个域,  $c \in F$ . 求证:  $x^p - c$  在  $F[x]$  中不可约当且仅当  $x^p - c$  在  $F$  中无根.

*proof*

**3.3.9** 设  $f(x)$  是  $\mathbb{Q}[x]$  中奇数次的不可约多项式,  $\alpha$  和  $\beta$  是  $f(x)$  在  $\mathbb{C}$  中的两个不同的根. 试证明  $\alpha + \beta \notin \mathbb{Q}$  且  $\alpha\beta \notin \mathbb{Q}$ .

*proof*

**3.3.10** 设  $K = \mathbb{Q}[u]$ ,  $u^3 + u^2 - 2u - 1 = 0$ . 验证  $\alpha = u^2 - 2$  也是多项式  $x^3 + x^2 - 2x - 1$  的根. 试确定  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ , 并证明:  $K$  是  $\mathbb{Q}$  的正规扩张.

*proof*

**3.3.11** 证明:  $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]$  是  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  的正规扩张, 但不是  $\mathbb{Q}$  的正规扩张.

*proof*

**3.3.12** 设  $f(x) \in K[x]$  不可约,  $\text{Char}(K) = p > 0$ . 证明: 存在不可约的可分多项式  $g(x) \in K[x]$  使得  $f(x) = g(x^{p^n})$  ( $n$  是某个整数). 由此证明  $f(x)$  在分裂域中的每个根都是  $p^n$  重根.

*proof*

**3.3.13** 设  $L = K[\alpha]$ ,  $\alpha$  是多项式  $x^d - a \in K[x]$  的根. 如果  $\text{Char}(K) = 0$ , 且  $K$  包含全部  $d$  次单位根, 则  $K \subset L$  是正规扩张.

proof

**3.3.14** 设  $k$  是特征  $p > 0$  的域,  $x, y$  是  $k$  上的代数无关元. 令  $K = k(x^p, y^p)$ ,  $L = k(x, y)$ . 试证明:

- (1)  $\text{Gal}(L/K) = \{1\}$  (但  $[L : K] = p^2$ );
- (2)  $K \subset L$  有无穷多个中间域;
- (3)  $K \subset L$  不是单扩张, 即不存在  $\alpha \in L$  使得  $L = K[\alpha]$ .

proof

### 习题 3.4 教材 p67-68

**3.4.1** 设  $p > 2$  是素数,  $\alpha \in \mathbb{C}$  是  $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$  的根. 证明: 域  $L = \mathbb{Q}[\alpha]$  的自同构群  $G$  是一个  $p-1$  阶的循环群.

proof

**3.4.2** 设  $K = \mathbb{Q}$ ,  $L = K[\sqrt[3]{2}]$ . 证明:  $G = \text{Gal}(L/K) = \{1\}$  (所以  $L^G = L \neq K$ ). 如果令  $\bar{L} = K[\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}]$ , 试证明:  $\text{Gal}(\bar{L}/K) \cong S_3$ . 并求出中间域  $K \subset K[\sqrt{-3}] \subset \bar{L}$  对应的子群  $H \subset \text{Gal}(\bar{L}/K)$ , 即: 求  $H \subset \text{Gal}(\bar{L}/K)$  使得  $\bar{L}^H = K[\sqrt{-3}]$ . (提示:  $H = \text{Gal}(\bar{L}/K[\sqrt{-3}]) \cong A_3$ .)

proof

**3.4.3** 设  $K \subset L$  是有限, 可分, 正规扩张,  $G = \text{Gal}(L/K)$ . 设

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_i \subset K_{i+1} \subset \cdots \subset K_m = L$$

是一个子域链, 令

$$\{1\} = G_m \subset G_{m-1} \subset G_{m-2} \subset \cdots \subset G_{i+1} \subset G_i \subset \cdots \subset G_0 = G$$

是其对应的子群链, 其中  $G_i = \text{Gal}(L/K_i)$ . 证明:

- (1)  $K_i \subset K_{i+1}$  是正规扩张  $\Leftrightarrow \forall \eta \in G_i, \eta(K_{i+1}) = K_{i+1}$  (提示: 应用推论 3.3.4).
- (2)  $\forall \eta \in G_i$ , 则  $\eta \cdot G_{i+1} \cdot \eta^{-1} \subset G_i$  是一个子群, 且

$$\eta(K_{i+1}) = L^{\eta G_{i+1} \eta^{-1}},$$

此处  $\eta \cdot G_{i+1} \cdot \eta^{-1} := \{\eta \cdot x \cdot \eta^{-1} \mid \forall x \in G_{i+1}\}$ .

- (3) 如果  $K_i \subset K_{i+1}$  是正规扩张,  $\forall \eta \in G_i$ , 令

$$\bar{\eta} = \eta|_{K_{i+1}} : K_{i+1} \rightarrow K_{i+1},$$

则  $\bar{\eta} \in \text{Gal}(K_{i+1}/K_i)$ , 映射  $G_i \xrightarrow{\phi} \text{Gal}(K_{i+1}/K_i), \eta \mapsto \bar{\eta}$ , 是满同态, 而且  $\ker(\phi) = G_{i+1}$ .

proof

## 第 4 章 群论初步

### 习题 4.1 教材 p72

**4.1.1** 设  $G$  是一个群, 定义映射  $G \xrightarrow{\varphi} G, x \mapsto x^{-1}$ . 试证明:  $\varphi$  是  $G$  的自同构当且仅当  $G$  是阿贝尔群.

*proof*

**4.1.2** 证明: 子群  $H \subset G$  是正规子群当且仅当,  $\forall g \in G, gHg^{-1} \subset H$ .

*proof*

**4.1.3** 设  $G \xrightarrow{\varphi} G'$  是群同态,  $K = \ker(\varphi)$  是同态  $\varphi$  的核. 试证明:

- (1) 对于任意子群  $H' \subset G', H = \varphi^{-1}(H') \subset G$  是子群, 且包含  $K$ .
- (2) 当  $\varphi$  是满射时,  $H' \mapsto \varphi^{-1}(H')$  建立了集合

$$\Gamma' = \{H' \subset G' \mid H' \text{ 是子群}\},$$

与集合  $\Gamma = \{H \subset G \mid H \text{ 是 } G \text{ 的子群, 且 } H \supset K\}$  之间的双射, 此时  $H' \subset G'$  是正规子群当且仅当  $\varphi^{-1}(H') \subset G$  是正规子群.

*proof*

**4.1.4** 设  $H, N$  都是  $G$  的正规子群, 并且  $N \subseteq H$ . 令  $\bar{H} = H/N, \bar{G} = G/N$ .

- (1) 证明  $\bar{H}$  是  $\bar{G}$  的正规子群.
- (2) 证明  $G/H \cong \bar{G}/\bar{H}$ .

*proof*

**4.1.5** 设  $H \subset G$  是  $G$  的子群,  $K \triangleleft G$ , 试证明:

- (1)  $H \cdot K = \{hk \mid \forall h \in H, k \in K\}$  是  $G$  中包含  $H$  和  $K$  的子群;
- (2)  $H$  在商同态  $G \rightarrow G/K, (g \mapsto \bar{g})$  下的像是  $(H \cdot K)/K$ ;
- (3)  $\varphi: H \rightarrow (HK)/K, (\varphi(h) = \bar{h})$  的核是  $H \cap K$ ;
- (4)  $\varphi$  诱导群同构  $H/(H \cap K) \cong (HK)/K$ .

*proof*



## 习题 4.2 教材 p77

**4.2.1** 设群  $G = AB$ , 其中  $A, B$  都是  $G$  的 Abel 子群 (即交换子群), 且  $AB = BA$ . 令  $G^{(1)}$  表示  $G$  的换位子群, 证明:

- (1)  $\forall a, x \in A, b, y \in B$ , 总有  $[x^{-1}, y^{-1}][a, b][x^{-1}, y^{-1}]^{-1} = [a, b]$ ;
- (2)  $G^{(1)}$  是 Abel 群.

*proof*

**4.2.2** 证明:

- (1)  $S_n = \langle (12), (13), \dots, (1n) \rangle$ , 即  $S_n$  由对换  $(12), (13), \dots, (1n)$  生成;
- (2)  $S_n$  可由  $(12)$  和  $(123\dots n)$  生成, 即

$$S_n = \langle (12), (123\dots n) \rangle.$$

*proof*

**4.2.3** 证明: 循环  $\pi = (12\dots n) \in S_n$  的  $k$  次幂  $\pi^k$  是  $d$  个互不相交的循环之积, 每个循环的长度为  $q = \frac{n}{d}$ , 其中  $d = (n, k)$  是  $n$  和  $k$  的最大公因子.

*proof*

**4.2.4** 设  $A_n = \{\pi \in S_n \mid \varepsilon_\pi = 1\} \subset S_n$ , 证明:

- (1)  $A_n \triangleleft S_n$  (即  $A_n$  是  $S_n$  的正规子群);
- (2)  $A_n$  由 3-循环生成, 事实上,  $A_n = \langle (123), (124), \dots, (12n) \rangle$ . (提示: 利用  $(ab) \cdot (bc) = (abc)$ ,  $(ab) \cdot (cd) = (ab) \cdot (bc) \cdot (bc) \cdot (cd)$ .)

*proof*

**4.2.5** 群  $G$  中的两个元素  $x, y$  称为在  $G$  中共轭, 如果存在  $a \in G$ , 使  $axa^{-1} = y$ . 试证明:

- (1)  $\forall \pi \in S_n, \alpha = (i_1 i_2 \dots i_r) \in S_n$  有公式

$$\pi \cdot \alpha \cdot \pi^{-1} = (\pi(i_1) \pi(i_2) \dots \pi(i_r)).$$

- (2) 所有 3-循环在  $S_n$  中相互共轭. (所以  $S_n$  中包含 3-循环的正规子群必包含  $A_n$ .)
- (3) 如果  $n \geq 5$ , 则所有 3-循环在  $A_n$  中相互共轭, 即对于任意 3-循环  $x, y \in A_n$ , 存在  $a \in A_n$ , 使  $axa^{-1} = y$ .

*proof*

**4.2.6** 证明: 对任意给定整数  $n > 0$ , 在同构意义下仅有有限个  $n$  阶群. (提示: 任意  $n$  阶群均同构于  $S_n$  的一个子群.)

*proof*

**4.2.7** 证明: 所有 4 阶群  $G$  都是交换群. 在同构意义下,  $G$  要么是循环群, 要么同构于下述克莱因 4 元群:

$$V_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subseteq S_4.$$

(提示: 如果  $x^2 = 1$  对  $G$  中所有元成立, 则  $\forall a, b \in G$ , 有  $abab = 1 \implies ab = b^{-1}a^{-1} = b(b^{-1})^2 \cdot (a^{-1})^2 a = ba$ .)

*proof*

**4.2.8** 找出交错群  $A_4$  的所有子群.

*proof*

### 习题 4.3 教材 p80

**4.3.1** 设  $G = \langle \alpha \rangle$  是  $n$  阶循环群, 试证明:

- (1)  $\alpha^m$  是  $G$  的生成元 (即  $G = \langle \alpha^m \rangle$ )  $\Leftrightarrow (m, n) = 1$ ;
- (2) 若  $\mathbb{Z}_n$  表示模  $n$  的剩余类环,  $U(\mathbb{Z}_n)$  是它的单位群, 则

$$\bar{m} \in U(\mathbb{Z}_n) \Leftrightarrow (m, n) = 1;$$

- (3) 设  $\text{Aut}(G)$  表示群  $G$  的自同构群, 则  $\text{Aut}(G) \cong U(\mathbb{Z}_n)$ .

*proof*

**4.3.2** 设  $F$  是一个域,  $F^* = F \setminus \{0\}$ , 证明乘法群  $F^*$  的任何有限子群都是循环群.

*proof*

**4.3.3** 设  $K$  是特征零的域,  $L$  是多项式  $x^n - 1 \in K[x]$  的分裂域. 试证明:  $\text{Gal}(L/K)$  同构于  $U(\mathbb{Z}_n)$  的一个子群. 特别地,  $\text{Gal}(L/K)$  总是交换群.

*proof*

### 习题 4.4 教材 p84

**4.4.1** 设  $E$  是  $x^4 - 2$  在  $\mathbb{Q}$  上的分裂域.

- (1) 试求出  $E/\mathbb{Q}$  的全部中间域;
- (2) 试问哪些中间域是  $\mathbb{Q}$  的伽罗瓦扩张, 哪些域彼此共轭?

*proof*

**4.4.2** 设  $K \supset F$  是伽罗瓦扩张,  $f(x)$  是  $\alpha \in K$  在  $F$  上的极小多项式,  $g(x) = \prod_{\sigma \in \text{Gal}(K/F)} (x - \sigma(\alpha))$ . 证明:  $g(x) \in F[x]$  并且存在正整数  $n$  使得  $g = f^n$ .

*proof*

**4.4.3** 设  $\xi = e^{\frac{2\pi i}{13}}, \alpha = \xi + \xi^4 + \xi^3 + \xi^{12} + \xi^9 + \xi^{10}$ , 证明:

- (1)  $\text{Gal}(\mathbb{Q}[\xi]/\mathbb{Q})$  同构于乘法群  $\mathbb{F}_{13}^* = \mathbb{F}_{13} \setminus \{0\}$ .
- (2)  $[\mathbb{Q}[\xi] : \mathbb{Q}[\alpha]] = 6$ .
- (3) 求  $\alpha$  在  $\mathbb{Q}$  上的极小多项式.

*proof*

**4.4.4** 设  $p > 2$  是素数,  $\xi_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}, \xi_{p^2}$  为  $p^2$  次本原单位根.

- (1) 求  $\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}$  的扩张次数, 并证明  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}) \cong F_p^*$ ;
- (2) 求  $\mathbb{Q}(\xi_{p^2})/\mathbb{Q}$  的扩张次数, 并确定  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{p^2})/\mathbb{Q})$  (提示: 该群是  $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^*$ );
- (3) 试确定  $\mathbb{Q}(\xi_{p^2})/\mathbb{Q}(\xi_p)$  的扩张次数, 并证明这是一个伽罗瓦扩张.

*proof*

**4.4.5** 设  $\xi_n$  是  $n$  次本原单位根 (即  $\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ).

- (1) 证明  $\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q}$  是伽罗瓦扩张;
- (2) 当  $n = 12$  时, 求伽罗瓦群  $\text{Gal}(\mathbb{Q}[\xi_n]/\mathbb{Q})$ ;
- (3) 设  $n > 2$  为奇数, 证明  $\mathbb{Q}[\xi_n] \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}[\xi_n + \xi_n^{-1}]$ .

*proof*

## 习题 4.5 教材 p87-p88

**4.5.1** 设  $\text{Aut}(X)$  表示集合  $X$  的自同构群. 试证明:

- (1) 若  $G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x$ , 是群  $G$  在  $X$  上的一个作用,  $\forall g \in G$ , 定义映射  $X \xrightarrow{\rho(g)} X, x \mapsto g \cdot x$ . 则  $\rho(g) \in \text{Aut}(X)$  且映射

$$\rho: G \rightarrow \text{Aut}(X), g \mapsto \rho(g)$$

是群同态.

- (2) 若  $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(X)$  是一个群同态, 则映射

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto \rho(g)(x)$$

是一个群作用.

*proof*

**4.5.2** 20 阶群中共有多少个 5 阶元?

*proof*

**4.5.3** 证明 15 阶的群一定是循环群.

*proof*

**4.5.4** 证明 6 阶非 Abel 群一定同构于  $S_3$ .

*proof*

**4.5.5** 证明 12 阶群共有 5 个同构类, 即 12 阶群本质上只有 5 个.

*proof*

**4.5.6** 设  $p, q$  是两个不同的素数, 则  $pq$  或  $p^2q$  阶群一定不是单群. (事实上:  $p^a q^b$  阶群一定是可解群.)

*proof*

**4.5.7** 证明 200 阶群一定不是单群.

*proof*

**4.5.8** 设  $H$  为群  $G$  的有限子群.

- (1) 证明:  $(h_1, h_2)(x) = h_2 x h_1^{-1}$  定义了  $H \times H$  在群  $G$  上的作用;
- (2) 证明:  $H$  为  $G$  的正规子群当且仅当上述作用的每条轨道都恰有  $|H|$  个.

*proof*

**4.5.9** 试证明若  $|G| < 60$  且  $G$  是一个单群, 那么  $G$  一定是素数阶的循环群.

*proof*

**4.5.10** 若  $G$  是 60 阶单群, 那么  $G$  一定同构于  $A_5$ , 从而得到阶数最小的非交换单群是  $A_5$ .

*proof*

## 第 5 章 模论初步

### 习题 5.1 教材 p91

**5.1.1** 设  $R \xrightarrow{\varphi} R'$  是环同态,  $M$  是一个  $R'$ -模. 证明:

$$R \times M \rightarrow M, \quad (a, x) \mapsto \varphi(a)x,$$

定义了  $M$  的一个  $R$ -模结构使得  $M$  成为一个  $R$ -模.

*proof*

**5.1.2** 设  $M$  是一个  $R$ -模,  $\text{Ann}(M) = \{a \in R \mid ax = 0, \forall x \in M\}$ , 证明:

- (1)  $\text{Ann}(M) \subset R$  是理想;
- (2) 对任意理想  $I \subset R$ , 若  $I \subset \text{Ann}(M)$ , 则  $R/I \times M \rightarrow M, (\bar{a}, x) \mapsto ax$ , 定义了  $M$  的一个  $R/I$ -模结构.

*proof*

**5.1.3** 设  $M = (M, +, 0)$  是加法群,  $\text{End}(M) = \{M \xrightarrow{\varphi} M \mid \varphi \text{ 是群同态}\}$  是  $M$  所有群自同态组成的环. 试证明:

- (1)  $\text{End}(M) \times M \rightarrow M, (\varphi, x) \mapsto \varphi \cdot x := \varphi(x)$ , 是  $M$  的一个  $\text{End}(M)$ -模结构. (因此,  $M$  是一个  $\text{End}(M)$ -模.)
- (2) 设  $R$  是一个环, 则  $M$  有一个  $R$ -模结构  $R \times M \rightarrow M, (a, x) \mapsto ax$  的充要条件是存在环同态  $R \xrightarrow{\eta} \text{End}(M)$  使得  $ax = \eta(a)(x)$  对任意  $a \in R, x \in M$  成立.

*proof*

**5.1.4** 设  $M = (M, +, 0)$  是任意加法群, 证明:  $M$  有唯一的  $\mathbb{Z}$ -模结构.

*proof*

**5.1.5** 设  $R$ -模  $M$  的模结构由环同态  $R \xrightarrow{\eta} \text{End}(M)$  确定,  $\varphi \in \text{End}(M)$ . 试证明:  $M \xrightarrow{\varphi} M$  是  $R$ -模同态当且仅当  $\varphi \circ \eta(a) = \eta(a) \circ \varphi, \forall a \in R$ .

*proof*

**5.1.6**  $R$ -模  $M$  称为不可约模, 如果  $M \neq 0$  且  $M$  没有非平凡子模. 证明:  $R$ -模  $M$  不可约当且仅当存在极大左理想  $I \subset R$  使得  $M \cong R/I$ .

*proof*

**5.1.7** (舒尔 (Schur) 引理) 证明: 如果  $M_1, M_2$  是不可约  $R$ -模, 则任何非零模同态  $M_1 \rightarrow M_2$  必为同构.

*proof*

**5.1.8** (同态基本定理) 设  $\varphi: M \rightarrow M'$  是  $R$ -模同态. 证明:  $\varphi$  的核

$$\ker(\varphi) = \{x \in M \mid \varphi(x) = 0\}$$

和像  $\text{Im}(\varphi) = \{\varphi(x) \mid \forall x \in M\}$  必为子模, 且  $\varphi$  的诱导映射

$$\bar{\varphi}: M/\ker(\varphi) \rightarrow \text{Im}(\varphi), \bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x),$$

必为同构.

*proof*

## 习题 5.2 教材 p95-p96

**5.2.1** 设  $R$  是任意环, 证明:  $R^m \cong R^n$  当且仅当存在  $A \in M_{m \times n}(R), B \in M_{n \times m}(R)$  使得  $AB = I_m, BA = I_n$ .

*proof*

**5.2.2** 设  $R$  是交换环,  $\eta: R^n \rightarrow R^n$  是满同态. 证明  $\eta$  必为双射. 如果  $\eta$  是单射, 它一定是满射吗?

*proof*

**5.2.3** 设  $R$  是交换整环,  $e_1, e_2, \dots, e_n \in R^n$  是一组基. 令

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)A, \quad A \in M_n(R).$$

证明:

(1)  $f_1, f_2, \dots, f_n$  生成一个秩为  $n$  的子模  $K \subset R^n$  的充要条件是  $\det(A) \neq 0$ ;

(2)  $\forall \bar{x} \in R^n/K$ , 则  $\det(A) \cdot \bar{x} = 0$ .

*proof*

**5.2.4** 设  $K \subset \mathbb{Q}[\lambda]^3$  是由  $f_1 = (2\lambda - 1, \lambda, \lambda^2 + 3), f_2 = (\lambda, \lambda, \lambda^2), f_3 = (\lambda + 1, 2\lambda, 2\lambda^2 - 3)$  生成的  $\mathbb{Q}[\lambda]$ -子模. 试求  $K$  的一组基.

*proof*

**5.2.5** 设  $R$  是欧氏环 ( $\delta: R^* \rightarrow \mathbb{N}$ ),  $A \in M_n(R)$  且  $\det(A) \neq 0$ . 证明: 存在可逆矩阵  $P \in M_n(R)$  使得

$$PA = \begin{pmatrix} d_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ & d_2 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ & & d_3 & \cdots & b_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$$

是上三角矩阵且  $d_i \neq 0$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $\delta(b_{ji}) < \delta(d_i)$ .

*proof*

### 习题 5.3 教材 p101

**5.3.1** 设  $M$  是主理想整环  $R$  上的挠模. 证明:  $M$  是不可约  $R$ -模当且仅当  $M = R \cdot z$ ,  $\text{ann}(z) = (p)$ ,  $p \in R$  不可约.

*proof*

**5.3.2** 设  $M$  是主理想整环  $R$  上的有限生成挠模,  $M$  称为不可分解模, 如果  $M$  不能写成两个非零子模的直和. 证明:  $M$  不可分解当且仅当  $M = R \cdot z$ ,  $\text{ann}(z) = (p^e)$ ,  $p \in R$  不可约.

*proof*



## 参考文献

- [Alu09] P. Aluffi. *Algebra: Chapter 0*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2009.
- [AM94] M.F. Atiyah and I.G. MacDonald. *Introduction To Commutative Algebra*. Addison-Wesley series in mathematics. Avalon Publishing, 1994.
- [Hun03] T.W. Hungerford. *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2003.
- [孙 22] 孙笑涛. 抽象代数. 科学出版社, 2022.