

第二周作业参考解答及补充

作业

1. (习题 1.4.1)

设 $\varphi: G \rightarrow G'$ 是群同态, 试证明:

(1) $\ker(\varphi) := \{g \in G \mid \varphi(g) = e'\}$ ($e' \in G'$ 表示的单位元) 是 G 的子群 (称为群同态 φ 的核);

(2)

$$\varphi(G) = \{\varphi(g) \mid \forall g \in G\} \subseteq G'$$

是 G' 的子群 (称为群同态 φ 的像).

proof

教材命题 1.4.1 的 (1)(5) 直接使用.

(1) $e \in \ker(\varphi)$ 非空, 直接验证

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \ker(\varphi), \varphi(ab^{-1}) &= \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = e'e' = e' \\ \implies ab^{-1} &\in \ker(\varphi). \end{aligned}$$

(2) $e' \in \varphi(G)$ 非空, 直接验证

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \varphi(G), \exists a, b \in G, x &= \varphi(a), y = \varphi(b) \\ \implies xy^{-1} &= \varphi(a)(\varphi(b))^{-1} = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(ab^{-1}) \in \varphi(G). \end{aligned}$$

□

2. (习题 1.4.3)

设 $R \xrightarrow{\varphi} R'$ 是环同态, 证明集合 $\ker(\varphi) = \{x \in R \mid \varphi(x) = 0_{R'}\}$ 满足:

(1) $\ker(\varphi)$ 是 $(R, +)$ 的子群;

(2) $\forall a \in \ker(\varphi), x \in R$ 有 $ax \in \ker(\varphi), xa \in \ker(\varphi)$. ($\ker(\varphi)$ 称为环同态 φ 的核)

proof

(1) 即习题 1.4.1(1);

(2) 直接验证

$$\forall a \in \ker(\varphi), x \in R, \varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a) = \varphi(x)0_{R'} = 0_{R'}$$

另一半同理.

□

3. (习题 1.4.5)

证明实数的加法群 $(\mathbb{R}, +)$ 和正实数的乘法群 $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ 同构.

proof

注意到 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto e^x$ 是同构. $f^{-1}(x) = \ln x$.

□

注:

事实上, 由 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 可以先直接推出 $f(x) = a^x, a = f(1), x \in \mathbb{Q}$, 再根据连续性延拓到 \mathbb{R} 上.

4. (习题 1.4.6)

证明有理数的加法群 $(\mathbb{Q}, +)$ 和正有理数的乘法群 $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ 不同构.

proof

反证, 假设存在同构 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$, 则设 $2 = f(a) = f(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}) = f(\frac{a}{2}) \cdot f(\frac{a}{2}) = f(\frac{a}{2})^2$ 矛盾.

□

5. (习题 1.4.9)

设 K, L 是两个域, 如果 L 是 K 的子域, 则 K 称为 L 的扩域, $K \supseteq L$ 称为域扩张, 试证明:

- (1) 域的加法和乘法使得 K 是一个 L -向量空间 ($[K : L] = \dim_L(K)$ 称为域扩张 $K \supseteq L$ 的次数);
- (2) 如果 $K \supseteq \mathbb{R}$ 是一个二次扩张 (即 $[K : \mathbb{R}] = 2$), 则 K 必同构于复数域 \mathbb{C} .

proof

- (1) $(K, +)$ 是一个 Abel 群, 这一点无需再说明. 乘法在这里可能有些歧义, 此处是要验证乘法限制在 $L \times K$ 上, 即

$$\cdot: L \times K \rightarrow K, (l, k) \mapsto lk$$

是数乘. 即要验证

$$\begin{aligned}(l_1 l_2)k &= l_1(l_2 k), \\ (l_1 + l_2)k &= l_1 k + l_2 k, \\ l(k_1 + k_2) &= l k_1 + l k_2, \\ 1k &= k = k1.\end{aligned}$$

这些都由域的定义得到.

这也说明若同态 $K_1 \rightarrow K_2$ 保持 L (K_1, K_2 为 L 的两个扩域), 则一定是 L -线性映射.

(2) 由 (1), 扩域 \mathbb{C}/\mathbb{R} 的自同构一定是 \mathbb{R} -线性的. 设同构 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, 则有 $f(x + yi) = x + yf(i)$, $x, y \in \mathbb{R}$, 且保持乘法, 即

$$\begin{aligned}f((x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)) &= f(x_1 + iy_1) \cdot f(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + y_1 f(i)) \cdot (x_2 + y_2 f(i)) \\ &\implies f(x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i) \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 f(i) \cdot f(i) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) f(i) \\ &\implies x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) f(i) \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 f(i) \cdot f(i) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) f(i) \\ &\implies f(i) \cdot f(i) = -1.\end{aligned}$$

因此 $f(i) = \pm i$. 也就是说 \mathbb{C}/\mathbb{R} 的自同构都只有恒等映射和共轭, 即 $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

由线性代数的结论, 可以直接得到 K 和 \mathbb{C} 是作为线性空间同构, 但这是不够的, 只有上述两个线性映射是域同构, 需要做基变换转为恒等或共轭才能保持乘法. 事实上只要存在一个基变换就能变回恒等映射, 恒等映射总是同构, 但前提是承载集合 (underlying set) 要一样. 比如 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 和 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 作为 \mathbb{Q} -线性空间也是同构的, 但他们之间没有域同态.

可取 K 的一组基为 $1, \alpha$, 其中 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. 不可避免地要考虑 α^2 的结果, 由于 $1, \alpha$ 是基, 因此 α^2 可以被线性表出, 即 $\alpha^2 = x + y\alpha$. 由于 $\alpha \notin \mathbb{R}$, 有 $y^2 + 4x < 0$, 解二次方程得到 $\alpha = \frac{y \pm i\sqrt{|y^2 + 4x|}}{2}$. 故映射

$$f: K \rightarrow \mathbb{C}, u + v\alpha \mapsto u + v \frac{y \pm i\sqrt{|y^2 + 4x|}}{2}$$

是域同构.

注意 K 是域, 也就是说 K 的乘法是已知的, 无法把 K 先看作 \mathbb{R} -线性空间然后重定义向量的乘法, 这在逻辑上是不对的.

□

注:

事实上, 若有环同态 $R \xrightarrow{\varphi} S$, 则 S 上自动有一个 R -模结构

$$R \times S \rightarrow S, \quad (r, s) \mapsto rs = \varphi(r)s$$

rs 是数乘, $\varphi(r)s$ 是 S 中的乘法. 域上的模就是线性空间.

(1) 对应的同态其实就是包含 (inclusion) $L \xrightarrow{i} K$.

6. (习题 1.4.11)

设 $L \supseteq K$ 是一个域扩张, 证明: 下述集合

$$\text{Gal}(L/K) = \left\{ \sigma \in \text{Aut}(L) \mid \sigma(a) = a \text{ 对任意 } a \in K \text{ 成立} \right\}$$

关于映射的合成是一个群 (称为域扩张 $L \supseteq K$ 的伽罗瓦群).

proof

$\text{Gal}(L/K) \subseteq \text{Aut}(L)$, 只需说明 $\text{Gal}(L/K)$ 是子群.

$\forall \varphi, \psi \in \text{Gal}(L/K)$, 由于 $\psi|_K = \text{id}_K$, 因此 $\psi^{-1}|_K = \text{id}_K$, 故 $(\varphi \circ \psi^{-1})|_K = \text{id}_K$, 即 $\varphi \circ \psi^{-1} \in \text{Gal}(L/K)$. □

课上的补充内容

好像没有....