第七周作业参考解答及补充

作业

1. (习题 2.1.11)

设 R 是一个环, 子环 $C(R)=\{a\in R\mid ab=ba\forall b\in R\}$ 称为 R 的中心. 试证明:

(1) 如果 R 是一个除环, 则 $C(R)$ 是一个域;

(2) 令 $\mathbb{H}$ 表示 Hamilton 四元数环, 则 $C(\mathbb{H})=\mathbb{R}$.

proof

(1) 除环的子环自然是除环, $C(R)$ 和 R 中所有元素交换, 故 $C(R)$ 本身是交换环, 从而是域.

(2) 设 $\alpha=a+ib+jc+kd\in C(\mathbb{H})$, 则有

$$\alpha\cdot i=i\cdot\alpha$$
$$\alpha\cdot j=j\cdot\alpha$$

得到 $b=c=d=0$, 即 $\alpha\in\mathbb{R}$.

$\square$

2. (习题 2.1.12)

设 K 是一个域. 如果 $C(R)$ 包含一个同构于 K 的子域, 则称环 R 为 K-代数. 试证明：加法群 $(R,+)$ 通过 R 的乘法成为一个 K-向量空间.

proof

见 1.4.9 和 2.1.8 的注记. $C(R)$ 包含一个和 K 同构的子域, 等价地说就是有一个域同态 $K\to R$. $\square$

注:

$C(R)$ 包含一个同构于 K 的子域, 即存在同态 $K\xrightarrow{\varphi}R$ 使得 $\varphi(K)\subseteq C(R)$(这是因为域出发的同态一定是单的). 这和之前说的是一样的.

3. (习题 2.1.13)

设 R 是一个 K-代数, $\dim_K(R)$ 称为 R 的维数. 试证明：

(1) 矩阵环 $M_n(K)$ 是一个 n^2 维 K-代数;

(2) 任意 n 维 K-代数必同构于 $M_n(K)$ 的子环;

(3) 如果 R 是一个有限除环, 则 R 是有限域上的有限维代数.

proof

(1) $M_n(K)$ 是 n^2 维 K-线性空间, 只需验证

$$k_1M_1k_2M_2 = k_1k_2M_1M_2, k_1, k_2 \in K, M_1, M_2 \in M_n(K).$$

这是根据 $M_n(K)$ 的定义. 事实上 $C(M_n(K)) = \{kI_n \mid k \in K\} \cong K$.

(2) 由教材例 1.4.3, 对任意的环 R, 我们用 $\mathrm{End}_{\mathsf{Ab}}(R)$ 表示加法群的自同态环 (关于加法和复合). 有一个自然的环同态,

$$R \to \mathrm{End}_{\mathsf{Ab}}(R), \quad r \mapsto \lambda_r$$

其中 $\lambda_r : R \to R$, $a \mapsto ra$, 即左乘 r 这个自同态 (这里换成右乘也是一样的). 这是一个单同态, 所以 R 同构于 $\mathrm{End}_{\mathsf{Ab}}(R)$ 的一个子环.

那么当 R 是 n 维 K-代数时, λ_r 还是 K-线性映射. 因此有单射 $R \hookrightarrow \mathrm{Hom}_K(R) \cong M_n(K)$.

(3) R 是有限除环, 因此 $C(R)$ 是有限域 (2.1.11). 根据定义 R 是一个 $C(R)$-代数, 且 R 有限, 故是有限维的 ($|R| = [R : C(R)]|C(R)|$).

□

4. (习题 2.1.14)

设 K 是一个域, R 是一个有限维 K-代数. 试证明:

(1) $\forall \alpha \in R$, 存在非零多项式 $f(x) \in K[x]$ 使得 $f(\alpha) = 0$;

(2) 如果 R 是除环, $\alpha \neq 0$, 则 α 的极小多项式 $\mu_\alpha(x) \in K[x]$ 不可约;

(3) 如果 R 是除环, K 是代数闭域 (即 $K[x]$ 中次数大于零的多项式在 K 中必有根), 则 $R = K$.

历史上, 有限维可除 K-代数的分类是一个热门话题. 当 K 是实数域时, R 必同构于实数域, 复数域或 Hamilton 四元数环之一 (Frobenius 定理); 当 K 是有限域时, R 必为交换环 (Wedderburn 定理).

零多项式是平凡的, 因此 (1) 我做了修改. 在域扩张中, 这样的元素称为 K 上的代数元 (algebraic element), 或者称 α 在 K 上代数 (algebraic over K). 给定域扩张 L/K, 若 $\forall \alpha \in L$ 都在 K 上代数, 则称该扩张是代数扩张.

proof

(1) 设 $\dim_K R = n$. 则 $1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^n$ 线性相关. 或者考虑线性映射 $r \mapsto \alpha r$. 那么它对应的矩阵的特征多项式满足条件 (Cayley-Hamilton Theorem).

(2) 按定义, μ_α 是满足 α 的次数最小的 (首一) 多项式. 假设 μ_α 可约, 即 $\mu_\alpha(x) = f(x)g(x)$, $\deg(f), \deg(g) > 0$, 则 $0 = \mu_\alpha(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$. 由于除环无零因子, 故 $\deg(\mu_\alpha) = \deg(f) + \deg(g)$, 且 $f(\alpha) = 0$ 或 $g(\alpha) = 0$. 不妨设 $f(\alpha) = 0$, 但 $\deg(f) < \deg(\mu_\alpha)$ 与极小矛盾.

(3) 代数闭域等价于任意多项式可分解成一次多项式的乘积. 这和代数基本定理是类似的. 此时 $K[x]$ 中的不可约多项式即为所有一次多项式. 由 (2), $\forall \alpha \in R$, 极小多项式 $\mu_\alpha(x) = x - k_\alpha, k_\alpha \in K$. 因此 $\alpha = k_\alpha \in K$. 即 $R = K$.

$\square$

课上的补充内容