

## 第一周作业参考解答及补充

### 作业

#### 1. (习题 1.1.6)

设  $p > 2$  是素数,  $\mathbb{F}_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{p-1}\}$  是  $\mathbb{Z}$  的模  $p$  剩余类域. 试计算:

- (1)  $\overline{2}$  在  $\mathbb{F}_p$  中的逆元  $\overline{2}^{-1}$ ;
- (2)  $\overline{p-1} \cdot \overline{p-2}$ ;
- (3)  $\overline{p-2}$  在  $\mathbb{F}_p$  中的逆元  $\overline{p-2}^{-1}$ .

*proof*

- (1) 只需找到能被 2 整除的  $1 + kp (k \in \mathbb{Z})$ . 由于素数  $p > 2$ ,  $p+1$  即可. i.e.

$$\overline{2}^{-1} = \overline{\frac{1}{2}(p+1)}.$$

- (2)  $\overline{p-1} \cdot \overline{p-2} = \overline{-1} \cdot \overline{-2} = \overline{2}$ .

- (3) 由 (1),  $\overline{p-2}^{-1} = \overline{-2}^{-1} = \overline{-\frac{1}{2}(p+1)} = \overline{\frac{1}{2}(p-1)}$ .

□

#### 2. (习题 1.2.1)

设  $R$  是一个环, 试证明下述结论:

- (1) (加法消去律) 如果  $a + c = b + c$ , 则  $a = b$ ;
- (2)  $\forall a \in R$ , 有  $a \cdot 0_R = 0_R$ ;
- (3)  $-(-a) = a$ ,  $a(b - c) = ab - ac$  ( $\forall a, b, c \in R$ );
- (4)  $-(a + b) = (-a) + (-b)$  ( $\forall a, b \in R$ );
- (5)  $a(-b) = (-a)b = -(ab)$  ( $\forall a, b \in R$ );
- (6)  $(-a)(-b) = ab$  ( $\forall a, b \in R$ );
- (7)  $\forall a \in R, m, n \in \mathbb{Z}$ , 有  $(m + n)a = ma + na$ ,  $(mn)a = m(na)$ ;
- (8)  $\forall a, b \in R, n \in \mathbb{Z}$ , 有  $n(a + b) = na + nb$ ,  $n(ab) = a(nb)$ ;
- (9)  $\forall a, b \in R, m, n \in \mathbb{Z}$ , 有  $(ma) \cdot (nb) = mn(a \cdot b) = (mna) \cdot b$ ;

(10) (二项式定理)  $\forall a, b \in R$ , 设  $ab = ba$ ,  $n$  是正整数, 则

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

*proof*

(1) 两边同加  $-c$ .

(2) 由于

$$a \cdot 0_R = a \cdot (0_R + 0_R) = a \cdot 0_R + a \cdot 0_R.$$

再用一下负元消去即可,  $0_R \cdot a = 0_R$  同理.

(3) 前一个为负元定义 (教材 p9 的注记); 后一个先由分配律,

$$a(b - c) = ab + a(-c),$$

又由于

$$a(-c) + ac = a(c + (-c)) = a \cdot 0_R \stackrel{(2)}{=} 0$$

得  $a(-c) = -ac$ , 这也是 (5) 的证明. 这里要注意仅使用  $-a \stackrel{(*)}{=} -1_R \cdot a$  也无法将负号提到前面, 需要  $R$  是交换环或者说明  $-1_R \cdot a = a \cdot (-1_R) = -a$ .

(\*) 的证明如下

$$-1_R \cdot a + a = -1_R \cdot a + 1_R \cdot a = (-1_R + 1_R) \cdot a = 0_R \cdot a \stackrel{(2)}{=} 0_R.$$

右乘  $-1_R$  同理.

(4) 利用  $-a = -1_R \cdot a$  和分配律展开即可.

(5) 见 (3).

(6) (3) 和 (5) 的推论.

(7) (7)-(9) 和习题 1.1.1 的 (6) 类似, 首先需要明确定义, 教材在这里并没有强调递归定义, 事实上, 这种和  $\mathbb{Z}$  有关的东西都应该由递归定义给出, 相对应的证明要用归纳法. (就算不用归纳法, 至少要把正负整数分开证, 很多同学直接用一行证明, 这是不行的)

严格来说, 这是定义了一个映射

$$\mathbb{Z} \times R \rightarrow R, (n, a) \mapsto na,$$

其中

$$0a := 0_R, (n+1)a := na + a, n \in \mathbb{N},$$

以及

$$na := -((-n)a), n < 0.$$

(注意  $na$  不是  $R$  上的乘法, 有同学甚至写了  $\mathbb{Z} \subseteq R$  然后直接乘法分配律,  $R$  中是否有整数是不知道的)

由该定义可以验证对任意整数  $n \in \mathbb{Z}$  均有  $(n+1)a = na + a$  以及  $na = -((-n)a)$ , 这样在使用这两个等式的时候不用再区分正负了.

回到原题, 对任意的  $m \in \mathbb{Z}$ , 先用归纳法证明  $n \in \mathbb{N}$  的情形, 负整数的情形可以结合定义得到.

$n = 0$  根据定义左右均为  $ma$ , 假设对  $n$  有  $(m+n)a = ma + na$ , 根据定义有

$$(m+n+1)a = (m+n)a + a = ma + na + a = ma + (n+1)a.$$

由归纳法知

$$(m+n)a = ma + na, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \quad (\text{i})$$

当  $n < 0$  时, 存在  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  使得  $m+kn < 0$ ,

$$\begin{aligned} (m+n)a &= (m+kn - (k-1)n)a \\ &\stackrel{(?)}{=} (m+kn)a + (- (k-1)n)a \\ &= -(-m-kn)a + (n-kn)a \\ &\stackrel{(?)}{=} -((-m)a + (-kn)a) + na + (-kn)a \\ &\stackrel{(4)}{=} ma + (kn)a + na + (-kn)a = ma + na. \end{aligned}$$

第二个式子可直接利用第一个证明,  $m = 0$  根据定义左右均为  $0_R$ ,  $m > 0$  有,

$$\begin{aligned} (mn)a &= \left( \sum_{i=1}^m n \right) a \\ &= \sum_{i=1}^m (na) \\ &= m(na). \end{aligned}$$

$m < 0$  利用  $mn = (-m)(-n)$ , 做同样的操作.

(8) 对  $n$  归纳, 由于加法有交换律,

$$\begin{aligned} (n+1)(a+b) &= n(a+b) + a+b \\ &= na + nb + a + b \\ &= (n+1)a + (n+1)b. \end{aligned}$$

得

$$n(a+b) = na + nb, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

当  $n < 0$  有

$$n(a+b) = -(-n(a+b)) = -((-n)a + (-n)b) \stackrel{(4)}{=} na + nb.$$

第二个等式使用分配律,  $n = 0$  根据定义左右均为  $0_R$ ,  $n > 0$ ,

$$n(ab) = \sum_{i=1}^n ab = a \sum_{i=1}^n b = a(nb).$$

$n < 0$ , 用  $n = -(-n)$ ,  $n(ab) = -a((-n)b) \stackrel{(5)}{=} a(nb)$ . 同样的也会有  $n(ab) = (na)b$ .

(9) (7) 和 (8) 的推论,

$$\begin{aligned} (ma) \cdot (nb) &\stackrel{(8)}{=} m(a \cdot (nb)) \\ &\stackrel{(8)}{=} m(n(ab)) \\ &\stackrel{(7)}{=} mn(ab) \\ &\stackrel{(8)}{=} (mna) \cdot b. \end{aligned}$$

(10) 对  $n$  归纳,

$$\begin{aligned} (a+b)^n \cdot (a+b) &= \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \right) \cdot (a+b) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i a + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} \\ &\stackrel{ab=ba}{=} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i+1} b^i + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \left( \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) a^{n-i+1} b^i + b^{n+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i. \end{aligned}$$

□

注:

(7)-(9) 中实际上需要用归纳法证明的只有

$$\begin{aligned}n(a+b) &= na+nb, \\(m+n)a &= ma+na, \\(mn)a &= m(na),\end{aligned}$$

这三条加上  $1a = a$ , 是在说任何一个 Abel 群都是  $\mathbb{Z}$ -模 (见教材 5.1 节). 再反过来看 1.1.1 的 (6), 加上  $(ab)^n = a^n b^n$ , 也是在说  $K^*$  是  $\mathbb{Z}$ -模, 证明过程中用到了  $K^*$  关于域的乘法是 Abel 群.

另一方面, 可以先定义

$$N: \mathbb{Z} \rightarrow R, \quad n \mapsto n1_R$$

这是一个自然的环同态 (使用归纳法证明)

$$\begin{aligned}N(m+n) &= N(m) + N(n); \\N(mn) &= N(m) \cdot N(n).\end{aligned}$$

然后利用这个环同态得到 (注意用到的  $n(ab) = (na)b$  的证明是直接使用分配律的, 因此不存在循环论证.  $N$  表示使用了这个环同态,  $dis$  表示使用了分配律,  $ass$  表示使用了结合律):

$$\begin{aligned}n(a+b) &= n(1_R(a+b)) = (n1_R)(a+b) \stackrel{dis}{=} (n1_R)a + (n1_R)b = na + nb. \\(m+n)a &= (m+n)(1_Ra) = ((m+n)1_R)a \stackrel{N}{=} (m1_R + n1_R)a \stackrel{dis}{=} (m1_R)a + (n1_R)a \\&= ma + na. \\(mn)a &= (mn)(1_Ra) = (mn1_R)a \stackrel{N}{=} (m1_Rn1_R)a \stackrel{ass}{=} (m1_R)((n1_R)a) \\&= (m1_R)(na) = m(1_R(na)) = m(na).\end{aligned}$$

这个同态是唯一的, 因为我们要求环同态要把 1 映到 1, 因此  $\mathbb{Z}$  在  $\mathbf{Ring}$  中是始对象 (initial object),  $\mathbf{Ring}$  表示环范畴. 因此  $n$  可看作是  $R$  中的元素  $n1_R$ . 所以此后在没有歧义的情况下, 默认 0 就指零元, 1 指幺元.

### 3. (习题 1.2.9)

设  $m > 0$  是任意整数,  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$  是  $\mathbb{Z}$  的模  $m$  剩余类环. 试证明:  $\bar{a} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  可逆当且仅当  $(a, m) = 1$  (即:  $a$  与  $m$  互素).

*proof*

$\bar{a} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  可逆,

$$\iff \exists \bar{b} \in \mathbb{Z}, \quad \bar{a}\bar{b} = \bar{1}$$

$$\iff ab = 1 + km, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\iff (a, m) = 1. \quad (\text{Bézout's Identity})$$

□

**注:**

一般用记号  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  表示模  $m$  剩余类环.(理想和商环, 教材 2.1 节 p25)

若  $(a, m) = 1$ , 则  $\bar{a}$  是加法群  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$  的生成元, 即  $\bar{a}$ (在加法群) 的阶是  $m$ .

#### 4. (习题 1.2.10)

设  $R$  是仅有  $n$  个元素的环, 试证明对任意  $a \in R$  有

$$na := \underbrace{a + a + \cdots + a}_n = 0.$$

*proof*

该题的证明归结为一句话: 加法群的阶  $(R, +)$  为  $n$ , 故  $na = 0$ . □

**注:**

有限群  $G$  内任一元素  $a$ , 有  $|a| \mid |G|$  (Lagrange 定理, 教材 4.1 节 p70 推论 4.1.3), 因此必有  $a^{|G|} = e$ , 在这道题就是  $na = 0$ .

有些同学没有说明使用了 Lagrange 定理, 也没有证明这些子集  $b + \langle a \rangle = \{b + ma \mid m \in \mathbb{Z}\}$ ,  $b \in R$  (这里的  $\langle a \rangle$  是对于加法群  $(R, +)$  而言, 由  $a$  生成的子群,  $\langle a \rangle = \{ma \mid m \in \mathbb{Z}\}$ ) 确实构成了  $R$  的一个分划 (partition), 而是直接使用/推出这些结论, 我觉得这样的证明是不完整的. 至少要说明一下

$$b + \langle a \rangle \cap b' + \langle a \rangle \neq \emptyset \implies b + \langle a \rangle = b' + \langle a \rangle$$

这个证明不难, 由交集非空

$$\implies \exists x \in b + \langle a \rangle \cap b' + \langle a \rangle$$

$$\implies \exists m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, x = b + m_1 a = b' + m_2 a$$

$$\implies b = b' + (m_2 - m_1) a \in b' + \langle a \rangle$$

$$\implies \forall z \in b + \langle a \rangle, z = b + ma = b' + (m + m_2 - m_1) a \in b' + \langle a \rangle$$

$$\implies b + \langle a \rangle \subseteq b' + \langle a \rangle$$

同理  $b' + \langle a \rangle \subseteq b + \langle a \rangle$ , 因此  $b + \langle a \rangle = b' + \langle a \rangle$ .

另外, ”设  $r$  是使得  $ra = 0_R$  的最小正整数” 是需要说明的 (这个  $r$  就是  $a$  的阶).

先要说明  $\exists k \in \mathbb{Z}_{>0}$  使得  $ka = 0_R$ , 也就是说  $|a| < \infty$ . 用反证法, 假设这样的正整数不存在, 则

$$\langle a \rangle = \{ma \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

中必两两互不相等 (否则不妨设  $i < j$  使得  $ia = ja$ , 即  $(j-i)a = 0_R$ , 矛盾).

而  $R$  中只有  $n$  个元素, 这样就已经矛盾了. 因此存在  $k \in \mathbb{N}$  使得  $ka = 0_R$ . 也就是说  $\{m \in \mathbb{N} \mid ma = 0_R\} \subseteq \mathbb{N}$  非空. 由  $\mathbb{N}$  的良序性, 存在一个最小的  $r$  使得  $ra = 0_R$ . 这样  $\langle a \rangle = \{0, a, 2a, \dots, (r-1)a\}$  恰有  $r$  个元素 (如果还不放心这里是否有相等元素, 在用一次反证就可以了, 和上面证两两不等类似).

### 5. (习题 1.3.2)

设  $R$  是一个环,  $U(R)$  表示  $R$  中所有可逆元集合, 试证明:  $U(R)$  关于环  $R$  的乘法是一个群 (称为  $R$  的单位群).

*proof*

- (1) 这里首先需要验证运算的封闭性,  $\forall a, b \in U(R)$ , 有  $(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = 1$ , 故  $ab \in U(R)$  且  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

很多同学漏了这一条, 这里的乘法是  $R$  上的乘法限制在  $U(R)$  上, 即

$$\cdot : U(R) \times U(R) \rightarrow R, (a, b) \mapsto ab \in R,$$

- (2)  $1 \in U(R)$ , 因为  $1 \cdot 1 = 1$  的确可逆;  
 (3) 由于乘法是  $R$  上的乘法, 故结合律成立;  
 (4) 若  $a \in U(R)$ , 则由习题 1.1.1 的 (3),  $a^{-1} \in U(R)$  且  $(a^{-1})^{-1} = a$ ;

□

### 6. (习题 1.3.5)

写出对称群  $S_3$  的乘法表.

*proof*

记  $\text{id}_{S_3} = e$ , 令  $a = (12)$ ,  $b = (123)$ , 有  $a^2 = e$ ,  $b^3 = e$ ,  $abab = e \iff ba = ab^2$ .

乘法表如下:

	$e$	$a$	$b$	$b^2$	$ab$	$ab^2$
$e$	$e$	$a$	$b$	$b^2$	$ab$	$ab^2$
$a$	$a$	$e$	$ab$	$ab^2$	$b^2$	$b$
$b$	$b$	$ab^2$	$b^2$	$e$	$a$	$ab$
$b^2$	$b^2$	$ab$	$e$	$b$	$ab^2$	$a$
$ab$	$ab$	$b^2$	$a$	$ab^2$	$e$	$b$
$ab^2$	$ab^2$	$b$	$ab$	$a$	$b^2$	$e$

□

注:

可以看到  $S_3$ , 若取  $a = (1\ 2)$ ,  $b = (1\ 2\ 3)$ , 则  $S_3$  可以由  $a, b$  生成, 即考虑所有可能的乘积, 一般可以表示为  $S_3 = \langle a, b \rangle$ ,  $a = (1\ 2)$ ,  $b = (1\ 2\ 3)$ .

若不给  $a, b$  加任何限制, 便得到一个自由群 (free group)  $F(\{a, b\})$ . 一般地, 任意一个集合  $A$  都可以生成一个自由群  $F(A)$ ,  $A$  就是生成元组成的集合. 可以证明任何一个群都同构于某个自由群的商群, 而对应的正规子群便是由生成元满足的某些关系确定 (将  $A$  看成字母表,  $\Sigma_A$  表示单词的集合, 这些关系可以表示为一些满足  $w = e$  单词  $w \in \Sigma_A$ ). 把这些  $w$  组成的集合记为  $\mathcal{R}$ ,  $A$  和  $\mathcal{R}$  将唯一确定一个群  $G$ ,  $(A \mid \mathcal{R})$  称为  $G$  的一个展示 (presentation). 以  $S_3$  为例,  $S_3$  的一个展示为  $(\{a, b\} \mid a^2, b^3, abab)$ .

由于这本教材没有讲自由群, 所以想要了解的话需要查阅别的教材.

## 7. (习题 1.3.11)

证明:  $GL_2(\mathbb{R})$  中的元素  $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  的阶分别是 4 和 3. 但  $xy$  是无限阶元.

proof

用  $I_n$  表示  $n$  阶单位阵, 计算可得

$$x^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

故  $|x| = 4$ , 同理,

$$y^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$



$|y| = 3$ . 最后是  $xy$ ,

$$xy = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, (xy)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (xy)^3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \dots$$

可以用归纳法证明

$$(xy)^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2, \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

故  $|xy| = \infty$ . □

### 8. (习题 1.3.12)

证明群的任意多个子群的交仍是子群.

*proof*

设  $G$  是群, 记  $I$  为指标集,  $H_i < G, \forall i \in I$ . 验证  $H = \bigcap_{i \in I} H_i < G$ :

$$\begin{aligned} \forall a, b \in H = \bigcap_{i \in I} H_i &\implies \forall i \in I, a, b \in H_i \\ &\implies ab^{-1} \in H_i, \quad \forall i \in I \\ &\implies ab^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i = H. \end{aligned}$$
□

**注:**

很多同学认为“任意多”是有限个, 即只考虑  $H = \bigcap_{i=1}^n H_i$ , 也有同学考虑了  $H = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i$ , 这也是不够的, 这里是允许不可数无穷的.

## 课上的补充内容

### 1. (子群的判定)

设  $G$  是一个群,  $\emptyset \neq S \subseteq G$ , 则  $S < G$  ( $S$  是  $G$  的子群的记号) 当且仅当

$$\forall a, b \in S \iff ab^{-1} \in S.$$

### 2. (Bézout's Identity)

对  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,

$$(m, n) = 1 \iff \exists u, v \in \mathbb{Z} \quad mu + nv = 1.$$