**集合习题：**

将球面去掉一点以后，余下的点所成的集合和整个平面上的点所成的集合是对等的。

由直线上某些互不相交的开区间作为集A的元素，则A至多为可数集

所有系数为有理数的多项式组成一可数集

设A是平面上以 有理点(即坐标都是有理数)为中心 ， 有理数为半径的园的全体，则

A是可数集

增函数的不连续点最多是可数多个

设找出使(0,1)和[0,1]之间一一对应的一种方法：

记(0,1)中有理数全体R={r1,r2,..}

把[0,1]的无理数x，映射为本身；把0映射成r1,1映射成r2,把ri映射成r(i+2)

i=1,2,3,4....。则这就是一个一一映射

设A是一可数集合，则A的所有有限子集做成的集合亦可数

将一个无限集合A映射到A和有理数集上

[0,1]上的全体无理数作成的集合其基数为c，全体有理数作成的集合其基数为a

证明：设全体无理数作成的集合为A，从A中取一子集B={,....}，将偶次项映射成相应成B，将奇次项映射成有理数。

两个基数相等的集合对等

记每项取值为0或1的数列全体所成的集合为T，求证T的基数为c

{x:sup } = ;

{x:sup } =;

{x:{fn(x)}有界} = ;

上限集：={x|存在于无穷多个An,使x}

下极限：An= liminfAn = = {x|当n充分大后都有x }

**第二章：点集**

第一章介绍了集合的概念及其运算。那里的集合只提到其中的元素，以及元素的个数（有限，可数无限，不可数无限等），没有涉及集合各个元素之间的关系。这一章研究的点集，是具有结构的集合；

一个数列的极限是由数列的元素与极限值无穷接近(距离)所定义的。因此，若在一般的点集E中也有距离，那么就可借助这一距离定义极限了。(距离的重要性)

设X是一个集合，若对于X中的任意两个元素x,y都有唯一确定的 实数 d(x,y)与之对应，且这一对应关系满足下列条件：

1.d(x,y)>=0.d(x,y)=0当且仅当x=y

2.d(x,y)<=d(x,z)+d(z,y),对任意z都成立。

则称d(x,y)是x,y之间的距离，称(X,d)为度量空间或距空间（定义了距离的空间）

两个非空点集A，B的距离定义为 d(A,B) = inf d(P,Q) p,Q

一个非空点集E的直径定义为

设E为Rn中一点集， 如果,则称点集E为有界点集（空间也作为有界点集）

E有有界点集的充要条件是存在常数K，对所有x

**聚点，内点，界点：**

内点：如果存在P0的某一邻域U(p0)，使U(p0)

外点：如果P0是E的补集的内点，则P0是E的外点

界点：如果P0即非E的内点又非E的外点，则称为界点。

聚点：如果P0的任一领域内都含有无穷多个属于E的点，则称 P0为E的一个聚点。

孤立点:如果P0属于E但不是E的聚点，则称P0是E的孤立点(如果E只含一个点x0，那么x0是一个孤立点，E也是一闭集)

开核：E的全体内点所成的集合

导集：E的全体聚点所成的集合,记为E'

边界：E的全体界点所成的集合，记为

孤立点：{x:存在U(x),U(x)E={x}}

闭包：EE'，记为

聚点：存在E中互异的点所成的点列{Pn}，使得Pn->P0(n->)

Bolzano-Weierstrass：设E是一个有界的无限集合，则E至少有一个聚点

**开集，闭集，完备集：**

E的每一点都是内点，则E就是开集

E的每一个聚点都属于E，则称E为闭集，E',一个无聚点的集合它也是闭集

任意多个开集之并仍是开集，有限多个开集之交仍是开集

任意多个闭集之交仍为闭集，有限多个闭集之并仍为闭集

设F1，F2是R1中两个互不相交的闭集。则存在两个互不相交的开集G1，G2，使得G1F1

G2F2

两个闭集F1，F2不相交并不能推出它们之间的距离d(F1,F2)=inf d(P,Q)>0,P Q

设M是距离空间X中一集合，若M的任意开覆盖都有有限的子覆盖，则称M是紧集

设M是Rn中的紧集，则M是Rn中的有界闭集

自密集：E（集合中每个点都是这个集合的聚点）

完备集:E=E'(E的聚点集合就是E本身) (完备集是特殊的闭集, 完备集就是没有相邻接的余空间的闭集)

**直线上的开集、闭集及完备集的构造：**

非空开集是一系列开区间的和集。

设G是直线上的开集，如果开区间(a,b)间

开集构造定理：直线上任一个非空开集可以表示成有限个或可数个互不相交的构成区间的和集

设A 是直线上的闭集，称A的余集的构成区间为A的余区间或邻接区间

直线上的闭集F或者是全直线，或者是从直线上挖掉有限个或可数个互不相交的开区间所得到的集

**康托尔三分集：**

将闭区间[0,1]三等分，去掉中间的开区间(1/3,2/3)，剩下两个闭区间[0,1/3],[2/3,1]，又把这两个闭区间各三等分，去掉中间的两个开区间，即(1/9,2/9),(7/9,8/9)。一般地，当进行到第n次时，一共去掉2^(n-1)个开区间...

康托尔集P是完备集（因为P中任何两个之间根本不存在公共端点，故没有孤立点，故P自密，又P是闭集，因此是一完备集）

设X是距离空间，M是X的子集，如果X的任意非空开集中均有开邻域不含M中的点，则称M是疏朗集或无处稠密集（即M无法包含X的任意一个开集，即不存在X的子集N，使的NM）。其中康托尔集P是一疏朗集

P的余集是可数个互不相交的开区间，其长度之和为1.

P的基数为c

总结:康托尔三分集是一个测度为零且基数为c的疏朗完备集

分形(破碎)几何学是研究不规则几何图形性质的几何学。分形具有分数的维数、。

分形的一个重要特征是自相似性（其局部与整体彼此相似）。其次，分形是无穷操作或迭代的结果，呈现出一种特别的精细结构。

分形的豪斯多夫维数。假设我们把分形图形分成N个相等的部分，每一部分在线性尺度上都是原来图形的1/m,那么这个图形的维数就是logN/logm.

习题：

设f(x)是（-）上的实值连续函数，则对于任意常数a，E={x|f(x)>a}是一开集，而E={x|f(x)>=a}总是一闭集。

每个闭集必是可数个开集的交集；每个开集可以表示成可数个闭集的和集

测度论：

长度公理：设有实数直线上的一些点集所构成的集合族，若对于每个E，都对应一个实数m,使得

（非负性）m(E)>=0;

（有限可加性）如果E1，E2....En两两不相交，那么m(E1E2..)=m(E1)+m(E2)+...+m(En) （正则性）m([0,1])=1

勒贝格测度公理：对于实数直线上的一部分集合族都对应一个实数,满足

(非负性) m(E)>=0

(可列可加性) 如果E1，E2....En，...两两不相交，那么m(E1E2.....)=m(E1)+m(E2)+...+m(En)+....;

(正则性) m([a,b])=b-a

因为有理数集是可数个点的集合，每点的测度是0.所以其勒贝格测度是0。

那么测度该如何确定呢？首先想到的是内填外包法。因此对Rn中可列可加测度的确定，以及一个集合是否可测的判定，也可以采用内填外包方法。因此在第一节将引入外测度概念。

当外测度等于内测度时，集合可测。但这种方法比较麻烦，因此在第二节中采用了卡拉泰奥多里的条件作为判定集合是否可测的依据。在第三节中，将对可测集类作探讨，引入了博雷尔集的概念（概率论中用处很大）。第四节中将提及不可测集。

**外测度：**

m\*E=inf,其中（E）

外测度具有以下三条基本性质

1.m\*E>=0,当E为空集时，则m\*E=0;

2.设A(单调性)

3.m\*()<= (次可数可加性)

任何集合都有外测度，但外测度不具有可列可加性

证明:E为[0,1]中的全体有理数，则m\*E=0.

**可测集：**

在Rn中的确存在互不相交的一列集合{Ai}，使得m\*()<

任意一个开区间都满足测度公理，都是可测集，而Rn是可数个开区间的并集，所以Rn可测

可测集的测度可以是

设E为Rn中的点集，如果对任一点集T都有m\*T=m\*(TE)+m\*(T)（卡拉泰奥多里条件）,则称E是可测的，这时E的外测度即成为E的测度。记为mE可测集全体记为

集合E可测的充要条件是对于任意AE,B,总有m\*(A)=m\*A+m\*B

E可测的充要条件是

设E1，E2都可测，则E1.E1也可测.E1-E2也可测

若F其中G是一开集，F是一闭集，且m(G\F)<,则E是一可测集

**可测集类：**

凡外测度为零之集皆为可测，称为零测度集

零测度集之任何子集仍为零测度集

有限个或可数个零测度集之和集仍为零测度集

区间I（不论开，闭或半开半闭区间）都是可测集合，且mI=|I|

凡开集，闭集皆可测

任何非空开集都可表示为可数多个互不相交的左开右比区间之并（在R1则可表示为有限个或可数多个开区间之并，其中可包含无界的区间）,而区间是可测的。

设为Rn中某些集合所成的集合类.如果Rn,并且对于可数并以及作差运算是封闭的，则称为Rn上的一个代数（代数实际上是一个集族/集合类，这个集族对于一些运算是封闭的）

显然Rn中可测集全体所成的集合是一代数

设是Rn中某些集合所成的集族。称Rn上所有包含的代数的交集为 由生成的代数，。显然是包含的最小代数

由Rn中所有开集(记为)生成的代数记为并称中的集合为博雷尔集

由于开集必然是可测集，所以全体开集属于可测集类而是一代数。故

凡博雷尔集都是可测集

从区间出发经过一系列并、交、差等运算得到的集合，都是博雷尔集

设集合G可表示为一列开集{}之交集：

G=.则称G为型集

设集合F可表示为一列闭集{}之并集：

F=。则称F为型集

显然型集以及型集都是博雷尔集

博雷尔集已经很接近可测集类了，但仍有一些集合是可测集但不是博雷尔集

设E是任一可测集，则一定存在型集G以及型集F，使得EG，F，使得

m(G-E)=0,m(E-F)=0.该定理告诉我们：只要有了全部型集或型集F(他们只是博雷尔集合类的一部分)和全部零测集，那么一切可测集都可以获得。

任一可测集（包含测度为无穷），总可表示为可数个互不相交的有界可测集的并

A= (m(Ai)<)

若E是一可测集，则

mE=inf{mG:G是一开集，EG}(外正规性)

mE=sup{mK:K是一紧集，K}(内正规性)

**不可测集：**

**基数是用来描述集合点的多少，而测度是描述集合的长度**

习题：

2.可数点集的外侧度为零（利用）

3.设E是直线上一有界集合，m\*E>0,则对任意小于m\*E的正数c，恒有E的子集E1.使m\*E1=c

4.康托尔三分集的测度为零

8.若E可测，则对于任意>0,恒有开集G及闭集F，使F.而m(G-E)<

9.设E,存在两列可测集{An},{Bn}.使得An且m(Bn-An)->0(n->),则E可测

11.设E若对任意的>0，存在闭集FE，使得m\*(E-F)<

12.直线上所有可测集合所作成的类的基数等于直线上的所有集合类的基数

**可测函数：**

设f(x)是定义在可测集E实函数，如果对于任意有限实数a，E[f>a]都是可测集，则称f(x)为定义在E上的可测函数。(在说某个函数是否可测时一定要说明在哪个集合上，不然是没意义的)

区间[a,b]上的连续函数和单调函数都是可测函数。

设f(x)的定义域E可分为有限个互不相交的可测函数集E1，E2，...,Es，E=,使f(x)在每个Ei上都等于某个常数ci,，则称f(x)为简单函数。

若f(x)在E上非负可测，则存在可测简单函数列{},使得对任意x，有(x)<=(x)

k=1,2,...,且

若f(x)在E上可测，则存在可测简单函数列{}，使得对任意xE,

若f(x)还在E上有界，则上述收敛可以是一致的

设是一个与集合E的点x有关的命题，如果存在E的子集M,满足mM=0.使得，则称几乎处处成立。

设{fn(x)}是E上一列可测函数，则F(x)=,G(x)=也在E上可测

其中F(x)== () ;G(x)= = ()

**叶果洛夫定理：**

设m(E)<,{fn}是E上一列几乎处处收敛于一个几乎处处有限的函数f的可测函数列，则对任意存在子集，使{fn}在上一致收敛，且m(E\)<.(该定理告诉我们，凡是满足定理假设的几乎处处收敛的可测函数列，即使不一致收敛，也是“基本上”一致收敛的，因此在许多场合它提供了处理极限交换问题的有力工具)

**可测函数的构造：(可测函数与连续函数关系)**

lusin定理：设f(x)是E上几乎处处有限的可测函数，则对任意存在闭子集E,使f(x)在上是连续函数，且m(E\)<(简而言之，在E上几乎处处有限的可测函数是“基本上连续”的函数)。其逆定理也成立

{}一致收敛于f(x),且{}是连续的，则f(x)也是连续函数

**依测度收敛：**

设{fn(x)}是ERn上的一列几乎处处有限的可测函数，若有E上几乎处处有限的可测函数f(x)满足下列关系：

对任意=0,则称函数列{fn(x)}依测度收敛于f，记为fn(x)f(x)

其文字意义为（事先给定任意一误差不论多小，使得|fn(x)-f(x)|大于的点虽然可能很多，但这些点所成之集合的测度随着n无限增大而趋于零）

几乎处处收敛与依测度收敛之间不存在推导关系；但在mE<条件下，依测度收敛弱于几乎处处收敛。

里斯定理：设在E上{fn}依测度收敛于f,则存在子列{}在E上几乎处处收敛与f

勒贝格定理：设

(1) mE<;

(2){}是E上几乎处处有限的可测函数列

(3){}是E上几乎处处收敛于几乎处处有限的函数f

则 (x)f(x)

设(x)f(x)，(x)g(x),则f(x)=g(x)在E上几乎处处成立

若fn(x)几乎处处收敛于f(x),则对于任意k

设E，f(x)是E上几乎处处有限的可测函数，证明：存在定义在R上的一列连续函数{gn(x)},使得 gn(x)=f(x) a.e. 于E

**依测度收敛可通过里斯定理转换成几乎处处收敛，几乎处处收敛可通过找出一个零测集使得它在余集上收敛**

**习题：**

1.f(x)在E上为可测函数的充要条件是对任一有理数r，集E[f>r]可测

2.设f(x),fn(x)(n=1,2,3...)是定义在区间[a,b]上的实函数，k为正整数，则是E中使fn(x)收敛于f(x)的点集

3.设{fn(x)}为E上可测函数列，证明它的收敛点集与发散点集都是可测的

6.设f(x)是()上的连续函数，g(x)为[a ,b]上的可测函数，则f(g(x))是可测函数。

7.设函数列{fn(x)}在E上"基本上"一致收敛于f(x),证明fn(x)几乎处处收敛于f(x)

9.设函数列{fn(x)}在E上依测度收敛于f，且fn(x)<=g(x)a.e于E，n=1,2....，则f(x)<=g(x)在E上几乎处处成立（找出一点集E0使得f(x)<=g(x),且m(E0)=0)

10.设在E上(x)f(x)，且(x)<=(x)几乎处处成立，则fn(x)几乎处处收敛于f(x)

单调序列的子列收敛，则序列本身收敛到同一极限

11.设在E上(x)f(x).而fn(x)=g(x)a.e.成立，n=1,2,...则有gn(x)=>f(x)

**积分论：**

黎曼积分与极限可交换的条件太严：（一列黎曼可积函数的极限函数在一致收敛的条件下才可交换）

积分运算不完全是微分运算的逆运算（任一黎曼可积函数的变动上限积分F(x)在f(x)的所有连续点都有F'(x)=f(x)，即积分后再微分可还原。但一个可微函数F(x)的导函数f(x)即使有界也不一定黎曼可积(沃尔泰拉例子)）

黎曼积分和()

勒贝格积分和()

第二节：定义非负简单函数的勒贝格积分

第三节：通过可测函数与简单函数的关系，介绍非负可测函数的积分

第四节：讨论一般的可测函数的勒贝格积分

第五节：研究勒贝格积分和黎曼积分的关系

**非负简单函数的勒贝格积分：**

设E为可测集，为E上的一个非负简单函数，即E表示有限个互不相交的可测集E1，E2，..,EK之并，而在每个Ei上非负常数值ci，也就是说

, (x)是Ei上的特征函数

。在E上的勒贝格积分，定义为dx =

**非负可测函数的勒贝格积分：**

设E是一可测集，f(x)是E上的一个非负可测函数，f(x)在E上的勒贝格积分定义为dx=sup{dx :是E上的简单函数且x时，0<=<=f(x)}.若dx<,则称f(x)在E上勒贝格可积

设A为可测集，则f(x)在A上的勒贝格积分定义为f在A上的限制f在A上的勒贝格积分，我们有dx = dx

列维Levi:设E为一可测集，为E上的一列非负可测函数，当x时对于任一自然数n,有fn(x)<=fn+1(x),令f(x) =

则 .

逐项积分定理：设E为可测集，为E上的一列非负可测函数，

则dx =

法图引理：设E为可测集，为E上的一列非负可测函数

则

**一般可测函数的勒贝格积分**

可测集E上L可积函数的全体所成之集记作L（E）

若f则mE(|f|=)=0,即|f(x)|< a.e.于E

设f是E上的可测函数，g是E上的非负L可积函数，且|f(x)|<=g(x)a.e.于E，则f也在E上L可积且 |dx|<=dx

积分的绝对连续性： 设E为一可测集，f,则对于任意的>0,存在,使得对于任意的可测集A，只要mA<,就有

|dx|<=

积分的可数可加性：

勒贝格控制收敛定理:设E为可测集，{fn}为E上的一列可测函数，F是E上的非负L可积函数，如果对于任意的自然数n,|fn(x)|<=F(x)a.e.于E且f(x)a.e.于E

则

**黎曼积分和勒贝格积分**

(L)

f(x)在[a,b]上R可积

设f(x)是[a,b]上的一个有界函数，则f(x)在[a,b]上R可积的充要条件为f(x)在[a,b]上a.e.连续，即f(x)的不连续点全体成一零测度集

勒贝格积分是黎曼积分的推广，对于非负函数而言L积分也是R反常积分的推广,但一般情况下不是黎曼反常积分的推广，主要是因为L积分是绝对收敛的积分而收敛的R反常积分并不一定绝对收敛

令为f(x)在点x处的振幅，即,则对于任意 x,的充要条件是f(x)在x处连续

设f(x)是[a,b]上的一个有界函数，若f(x)在[a,b]上R可积，则f(x)在[a,b]上L可积，且

(L)

f(x)在[a,b]上有界可测，则f(x)在[a,b]上L可积

设f(x)在[a,b]上L可积，则f(x)为E上几乎处处有限的可测函数。

勒贝格积分的几何意义，富比尼（Fubini）定理

设E是一点集，是中一固定点，则中的点集{y} 称为E关于x0的截面，记为

设F1,F2为闭集，G1,G2为开集，则F1XF2, G1XG2分别为和开集

截面定理： 设E是可测集，则

(1)对于中几乎所有的点x，是中可测集

(2)m作为x的函数，它是上a.ex有定义的可测函数。

(3)mE =

该定理给我们提供了一个由低维测度求高维测度的工具

设A,B分别是中的可测集，则AXB是中的可测集且m(AXB) = mAmB

(下方图形) 设f(x)是E的非负函数，则中的点集{(x,z)|x,0<=z<f(x)}

称为f(x)在E上的下方图形，记为G(E,f)

(非负可测函数积分的几何意义) 设f(x)为可测集E上的非负函数，则

(1)f(x)是E上的可测函数充要条件是G(E,f)是可测集

(2)当f(x)在E上可测时，

(富比尼,Fubini)

(1)设f(P)=f(x,y)在XB(A,B分别为中的可测集)上非负可测，则对a.e.的xA，

f(x,y)作为y的函数在B上可测，且 (1)

(2) f(P)=f(x,y)在AXB则对a.e的x,(x,y)作为y的函数在B上可积，又作为x的函数在A上可积且(1)成立（(2)说的是可积条件下可推得可测(1)）

从富比尼定理知，只要重积分有限，它就和两个累次积分相等

习题：

2.设在Cantro集P0上定义函数为f(x)=0.而在P0的余集中长为1/3^n的构成区间上定义为n（n=1,2,...）,试证f(x)可积，并求其积分值

3.设f(x)在E上可积，en=E[|f>=n|],则lim nm = 0