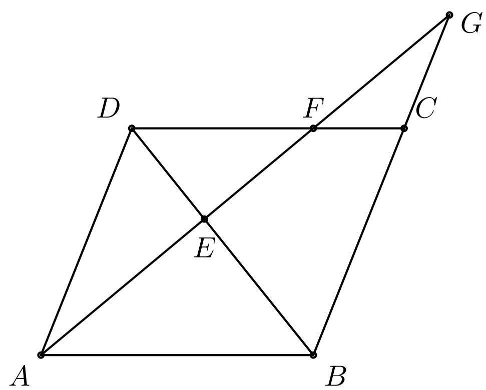
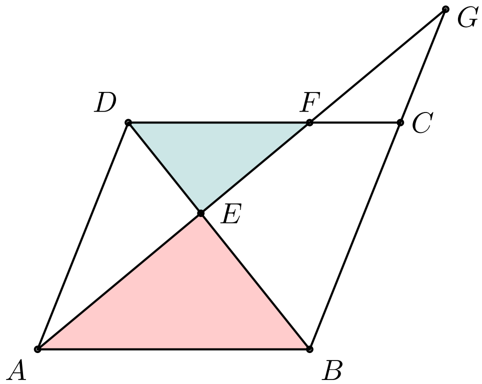
1. 평행사변형 $ABCD$의 한 변 CD위의 임의의 한 점을 F라 하자.

$$\overline{AE}^2 = \overline{EF} \cdot \overline{EG}$$

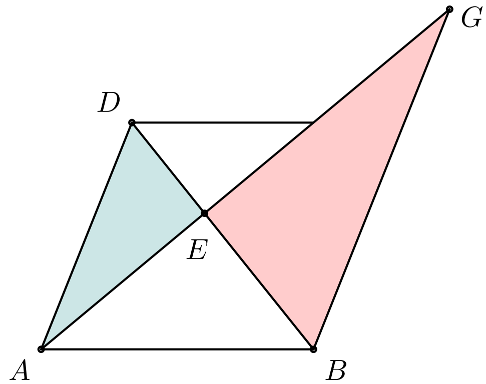
을 보여라.



다음 그림에서 두 색으로 표현된 두 삼각형의 비는 같을 것이다.



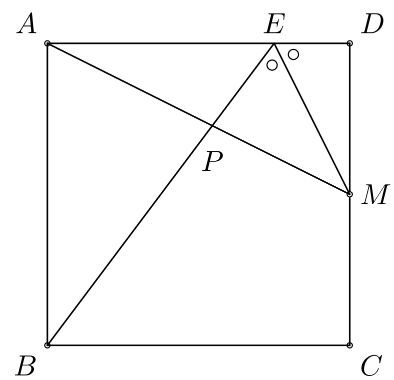
(a) $\frac{\overline{AE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{ED}}$



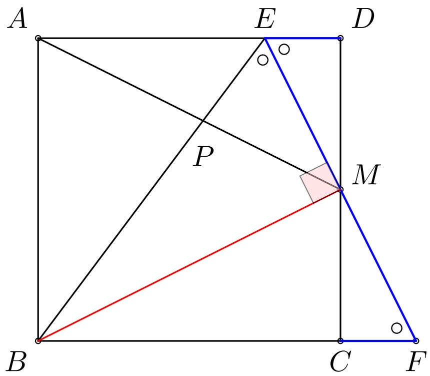
(b) $\frac{\overline{BE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AE}}$

2021학년도 한과영 1-(6) 번, 16회 KMO 3번

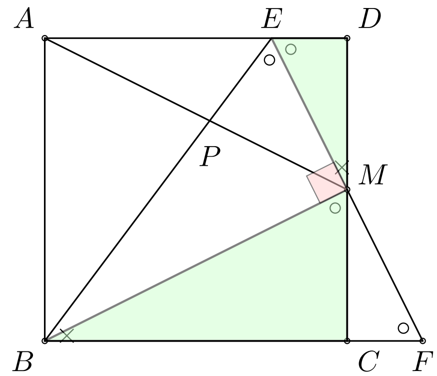
2. 정사각형 $ABCD$의 변 CD의 중점을 M이라 하고, AD 위의 점 E에 대해서 $\angle BEM = \angle DEM$이라고 할 때, $\frac{\overline{EP}}{\overline{BP}}$를 구하여라.



한 변의 길이는 1로 가정한다.

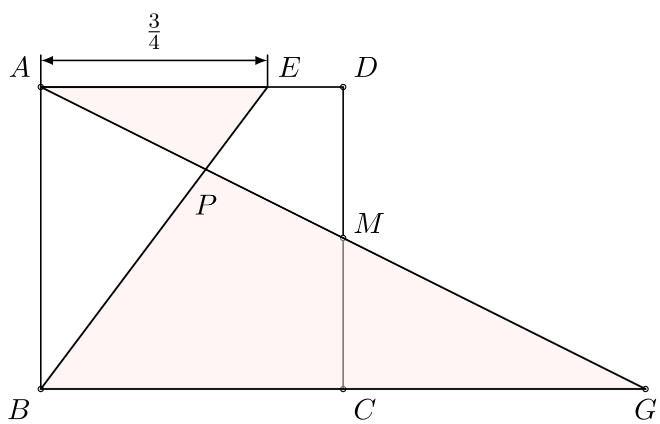


(a) $\overline{BM} \perp \overline{EF}$



(b) $\triangle BCM \sim \triangle MDE \Longrightarrow \overline{ED} = \frac{1}{4}$

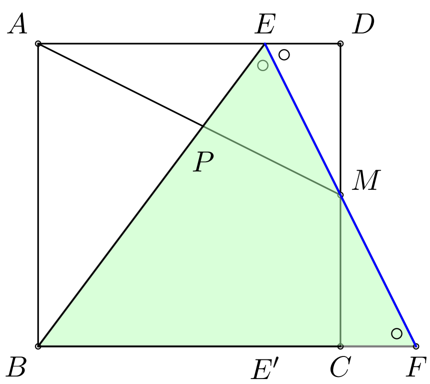
불필요한 부분을 지우고 연장선을 하나 그리면 $\overline{BP} : \overline{EP}$ 가 보인다.



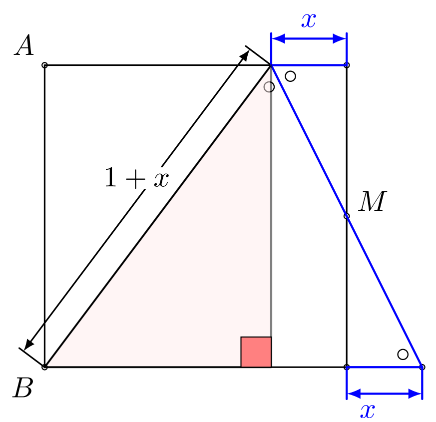
(c) $\overline{BP} : \overline{EP} = \overline{BG} : \overline{AE}$

이 문제를 처음 만났을 때의 풀이는 앞서의 것은 아니었다. 부끄럽게도 이등변삼각형의 중선 (BM)이 밑변(EF)과 수직임을 보지 못했었는데...

이런 점이 기하가 어렵게 느껴지는 이유일터, 추가되는 정보들이 많아지면 간단한 사실조차 알아보기 쉽지 않다. 이번에도 한 변의 길이는 1로 가정한다.

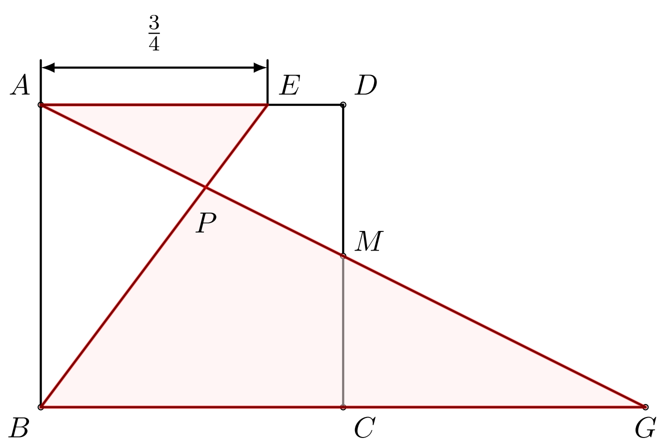


(a) $\overline{BE} = \overline{BF}$



(b) 직각삼각형 $(1+x)^2 = (1-x)^2 + 1$

피타고라스 정리에서 $x = \overline{ED} = \frac{1}{4}$를 얻으면 다음 과정은 앞선 풀이와 같다.

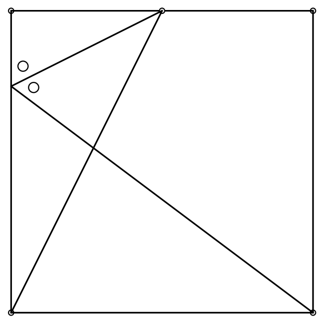


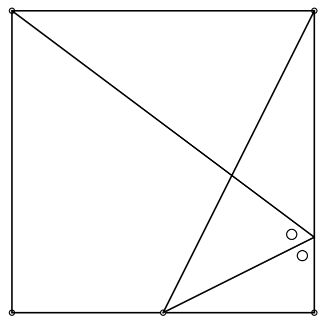
(c) $\overline{BP} : \overline{EP} = \overline{BG} : \overline{AE}$

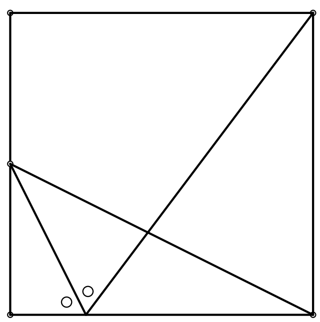
앞서의 풀이보다 이 풀이가 더 긴 것은 아니지만, 어떤 방법이 더 간결할 것인지에 대한 판단에

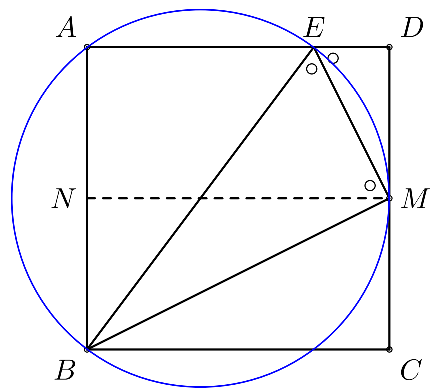
따른 것이 아니었으니 반성이 필요했다. 웃기는 건 나중에 알게된 KMO 공식풀이는 이보다 훨씬 길고 복잡했다는 것이다.

그림을 회전시키면 자신의 풀이도 알아보기 힘들다. 다음 그림들 각각에 대해서 풀이를 만들어 보자.





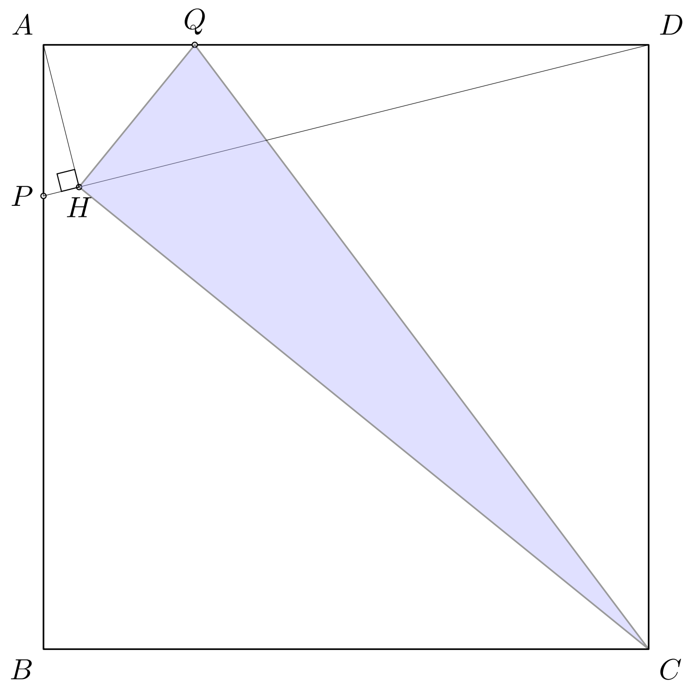


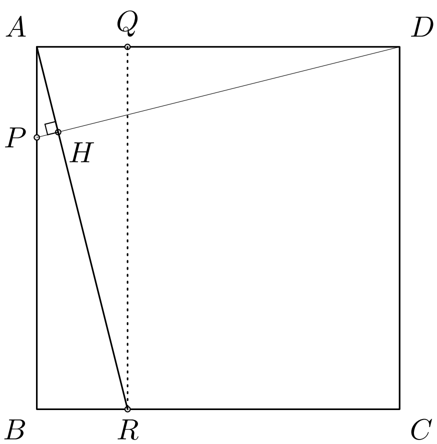


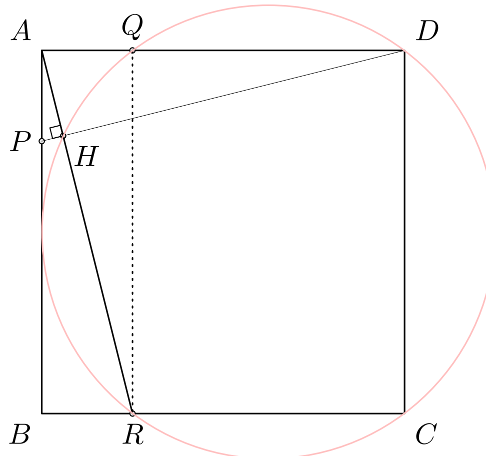
이런 원이 튀어 나왔다! $\angle EMB = 90°$이라는 것, 즉 $\triangle EMB$가 직각삼각형임이 느껴지는가? 그런데 이 원은 어디쓰지?

38회(2024) KMO 중등부 1차 11번

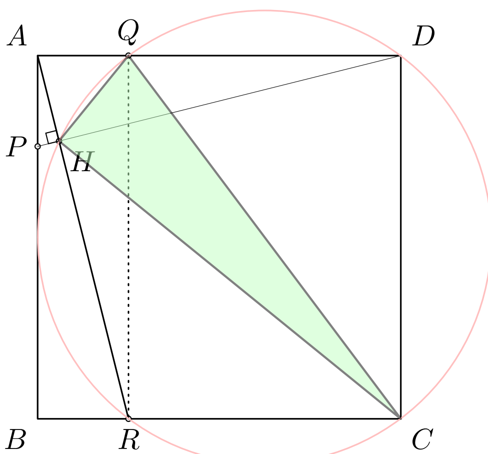
정사각형 $ABCD$에서 변 AB 위의 점 P와 변 AD위의 점 Q는 $\overline{AP} = \overline{AQ} = \frac{\overline{AB}}{5}$를 만족한다. 점 A에서 선분 PD에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 APH의 넓이가 20일 때, 삼각형 HCQ의 넓이를 구하여라.

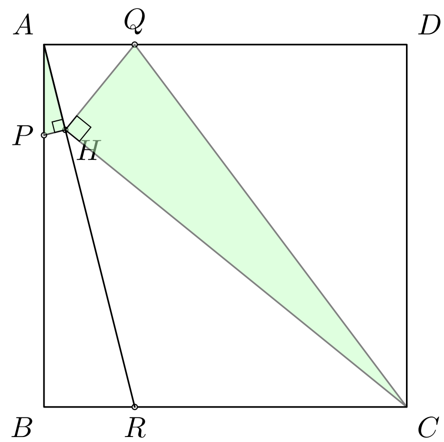

A
Q
D
P
H
B
C



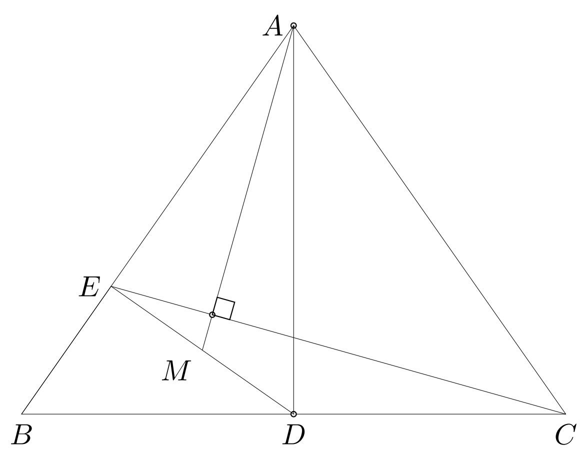


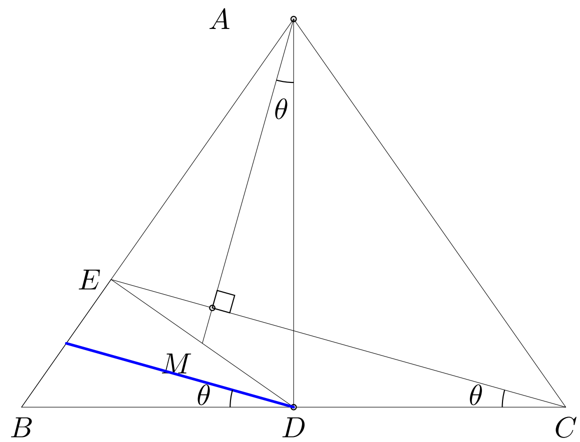
헉, 또 원이 튀어 나왔다. 이번에는 도움이 될까?





$\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하고 선분 DE의 중점은 M이라 하자. 이때 $\overline{AM} \perp \overline{EC}$임을 보여라.




A
θ
E
M
θ
θ
B
D
C

[1] **1**. 원에 내접하는 8각형의 네 변의 길이는 2이고 나머지 네 변의 길이는 3이다. 이 팔각형의 넓이를 구하여라.

[2] **2**. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이고 $\angle B = 40°$이다. 변 BC 위의 점 D를 $\angle ADC = 120°$가 되도록 잡고, 각 C의 이등분선과 변 AB의 교점을 E라 하자. $\angle DEC$는 몇 도인가?

[3] **3**. $\overline{AC} = 35, \overline{BC} = 7$인 삼각형 ABC가 있다. 점 D는 선분 AC 위에 있고 $\angle ABD = 90°$이다. 점 E 또한 선분 AC위에 있고 선분 BD는 $\angle CBE$의 이등분선이다. $\overline{BE} = 5$일 때, $3\overline{CE}$의 값을 구하여라.

[4] **4**. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 10$, $\overline{AC} = 5$이고 $\angle A$의 이등분선 위에 $\overline{AD} = 2$가 되는 점 D를 삼각형의 내부에 잡으면 $\overline{CD} : \overline{BC} = 1 : 3$이 된다. ADC의 넓이를 S라 할 때, $5S^2$를 구하여라.

[5] **5**. 반지름이 10인 원에 내접하는 오각형 $ABCDE$가 있다. $\overline{AB} = 1$, $\angle BAC = \angle ACE = \angle CED = 30^\circ$ 일 때, $\overline{DE}^2$의 값을 구하여라.

[6] **6**. 각 C가 90°인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AB위의 점 M을 중심으로 하고 두 변 AC, BC와 모두 접하는 원의 반지름이 12이다. 변 AB의 B쪽으로의 연장선 위의 점 N을 중심으로 하고 점 B를 지나며 직선 AC와 접하는 원이 직선 AB와 만나는 점을 $D(\neq B)$라 하자. $\overline{AM} = 15$ 일 때, 선분 BD의 길이를 구하여라.

[7] **7**. 내심이 I인 삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, AC와 접하는 점을 각각 D, E라 하고, 삼각형 IBC와 IAC의 외심을 각각 U, V라 하자. 점 D가 선분 UV 위에 있고 선분 BV와 변 AC가 점 K에서 만난다. $\overline{BD} = 32$, $\overline{KE} = 18$일 때, 삼각형 ABC의 내접원의 반지름을 구하여라.

[8] **8**. 삼각형 ABC의 내심 I를 지나고 직선 AI에 수직인 직선이 직선 BC와 점 D에서 만난다. $\overline{AB} = 30, \overline{CA} = 60, \overline{CD} = 50$ 일 때, 선분 BC의 길이를 구하여라.