

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

GIOVANNA SACCARO

Análise de divergência de asa utilizando métodos dos painéis e
elementos finitos

São Paulo

2018

GIOVANNA SACCARO

**Análise de divergência de asa utilizando métodos dos painéis e
elementos finitos**

Trabalho de Graduação apresentado como
pré-requisito para obtenção do grau de Ba-
charel em Engenharia Aeroespacial.

Área de Concentração: Engenharia Aeroes-
pacial

Orientador: Prof. Dr. Cesar Monzu Freire

São Paulo

2018

LISTA DE FIGURAS

Figura - 1.1	Testes de voo do <i>AerodromeA</i>	2
Figura - 1.2	Diagrama de Collar (??)	3
Figura - 1.3	Boeing 787 com asa defletida	4
Figura - 2.1	Área de intercessão da Divergência Estática	6
Figura - 2.2	Aerofólio	7
Figura - 2.3	representação das linhas de corrente	7
Figura - 2.4	Resultante aerodinâmica sobre o centro de pressão	8
Figura - 2.5	Distribuição de sustentação sobre a asa	10
Figura - 2.6	Torção em uma asa com raiz engastada	10
Figura - 2.7	Carregamentos aerodinâmicos	11
Figura - 2.8	Estrutura da asa	11
Figura - 2.9	Aerofólio com uma mola torcional	13
Figura - 2.10	Torção de um aerofólio	13
Figura - 2.11	Torção em uma asa com raiz engastada	14
Figura - 3.1	Discretizando o perfil do aerofólio	16
Figura - 3.2	Sistema de coordenadas do aerofólio	16
Figura - 3.3	Folha de vórtices sobre aerofólio	17
Figura - 3.4	Distribuição de dipolos próximos ao bordo de fuga	18
Figura - 4.1	Modelo estrutural da asa	21
Figura - 4.2	Elemento de viga	22
Figura - 4.3	Variáveis para a estimativa da inercia	25
Figura - 4.4	Variáveis para a estimativa da inercia	26
Figura - 4.5	Representação da longarina proposta	27
Figura - 5.1	Condição inicial do problema	30

Figura - 5.2	Condição após deformação estrutural	31
Figura - 5.3	Fluxograma	32
Figura - 6.1	Perfil de aerofólio analisado	33
Figura - 6.2	Aerofólio discretizado por painéis	34
Figura - 6.3	Distribuição de pressão sobre o aerofólio	34
Figura - 6.4	Correção da distribuição de sustentação	36

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Propriedades consideradas na análise estrutural	25
Tabela 6.1	Propriedades calculadas da asa analisada	33
Tabela 6.2	Comparação de resultados com XFOIL	35
Tabela 6.3	Comparação de coeficientes de momento variando angulo de ataque ..	35
Tabela 6.4	Momentos obtidos para velocidade 10 m/s	36
Tabela 6.5	Sustentações obtidas para velocidade 10 m/s	36
Tabela 6.6	Ângulo de cada seção na posição de equilíbrio para velocidade 10 m/s	37
Tabela 6.7	Velocidade de divergência em relação ao numero de seções	37

LISTA DE SIGLAS

CA	- Centro Aerodinâmico
CP	Centro de pressão
2D	bidimensional
3D	tridimensional
CE	Centro Elástico
MEF	Método dos elementos finitos

LISTA DE SÍMBOLOS

V	m/s	Velocidade
V_{∞}	m/s	Velocidade do ar não perturbado pelo corpo
L	N	Sustentação
D	N	Arrasto
M	$N\,m$	Momento
M_0	$N\,m$	Momento no centro aerodinâmico
C_L		Coefficiente de sustentação
C_{mo}		Coefficiente de momento no centro aerodinâmico
q	Pa	Pressão Dinâmica
S	m^2	Área da asa
K_{ϕ}	$N\,m/rad$	Rigidez torcional
E		Modulo de elasticidade
G		Modulo de cisalhamento
I		Momento de Inercia
J		Momento de Inercia polar
F	N	Carregamento vertical
T	$N\,m$	Carregamento Torcional
F	N	Vetor de carregamentos
$[K]$	N/m	Matriz de rigidez da estrutura
d	m	vetor de deslocamentos
\underline{k}	N/m	Matriz de rigidez local (um elemento)
c	m	corda do aerofólio
h	m	curvatura máxima do aerofólio
t	m	espessura máxima do aerofólio
d	m	Diâmetro da longarina
e	m	distancia entre os centros elástico e aerodinâmico
a_1		Inclinação da curva de sustentação
a_w		Inclinação da curva de sustentação da asa
α	rad	ângulo de ataque
α_0	rad	ângulo de ataque inicial

β		ângulo do painel
ϕ	rad	ângulo de torção
Γ		Circulação
ρ	kg/m^3	Densidade do ar

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Fundamentação Teórica	6
2.1	Aerodinâmica	6
2.2	Estrutura	10
2.3	Divergência estática	12
3	Método dos painéis	15
4	Método dos Elementos Finitos	21
4.1	Propriedades da Estrutura	24
4.1.1	Modulo de Elasticidade e Cisalhamento	24
4.1.2	Calculo de inercia	25
4.1.3	Inercia torcional	26
5	Implementação dos Métodos	28
6	Resultados	33
7	Conclusão	39
7.1	Trabalhos futuros	39
	Referências	40
	Anexo 1	41
	Código em MatLab	41

1 INTRODUÇÃO

A aeroelasticidade é uma área do estudo da ciência que analisa os fenômenos de interação entre fluido e estrutura. Como a resposta das estruturas é afetada quando submetida a um escoamento de um fluido, e esse estudo é de grande relevância para diferentes áreas de engenharia, mas em especial para a aeronáutica/aeroespacial pois desempenha um papel significativo na concepção de uma aeronave.

O desempenho de uma aeronave é muito influenciado, tanto pelos fenômenos aeroelásticos, quanto pela variação das cargas resultantes, sejam em voo, turbulências ou manobras em solo. Ambos têm grande influência no *design* estrutural da aeronave.

Hoje em dia, os projetos de aeronaves envolvem análises sofisticadas que melhor asseguram que estes estarão livres de fenômenos aeroelásticos que podem causar falha estrutural durante o voo. Estes resultados analíticos e computacionais, na maioria das vezes, são verificados através de testes em túnel de vento e permitem estimar a região de voo em que a aeronave é capaz de realizar um voo seguro, também conhecido como o envelope de voo da aeronave.

Esse tipo de teste, no entanto, requer tempo e tem um altíssimo custo associado, por isso, é necessário chegar nesta etapa do projeto com uma boa estimativa do desempenho da aeronave. Para isso são feitos os ensaios em escala reduzida (protótipo) e simulações computacionais, que compõem uma fase imprescindível de projeto. Através das simulações é possível analisar uma infinidade de situações que a aeronave poderá ser submetida durante sua vida útil, em um tempo absurdamente menor do que se fosse necessário realizar testes com um modelo físico. Além disso, o custo de fazer esta análise computacional é muito menor. Os testes com modelos físicos então tornam-se essenciais para validação desses dados obtidos e uma vez que seu bom desempenho é garantido a aeronave poderá ser certificada.

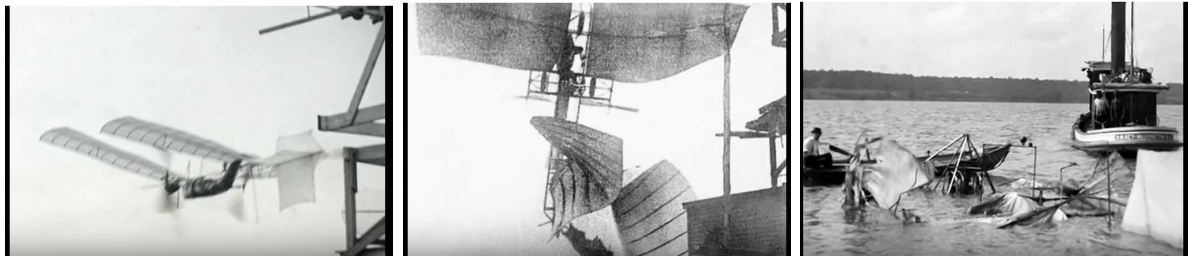


Figura 1.1: Testes de voo do *Aerodrome A*
(fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=M-5DeIvOJ7Y>)

Antigamente, quando as primeiras aeronaves foram desenvolvidas, não existia a possibilidade de simular um modelo antes de testa-lo então a metodologia adotada para avaliar a aeronave era da tentativa e erro. Casualmente, o primeiro incidente aeronáutico de que se tem notícia está relacionado a um problema aeroelástico e implicou na catástrofe da aeronave *Large Aerodrome A*, de Samuel Langley. Acredita-se que na tentativa de voar, alguns meses antes dos irmãos Wright fazerem seu primeiro voo bem sucedido, em 1903, Langley falhou graças ao fenômeno da divergência (??). Quando a aeronave *Large Aerodrome A* foi reconstruída alguns anos mais tarde com uma asa muito mais rígida que a do modelo anterior, esta finalmente conseguiu voar com sucesso.

Nota-se então, que é de extrema importância estimar esses fenômenos aeroelásticos para garantir a segurança do projeto, dado que as deformações excessivas podem levar à destruição de uma estrutura, fato catastrófico para a operação aérea.

A área de estudo da aeroelasticidade busca analisar como as forças de inércia, elásticas e aerodinâmicas agindo simultaneamente sobre um corpo interagem, e as consequências que esta interação é capaz de causar. Entretanto, é muito complicado lidar com as equações que regem o comportamento do fluido e da estrutura –principalmente do fluido devido à não linearidade das Equações de Navier-Stokes – portanto, não existe um procedimento prático ou uma formulação analítica genérica para lidar com fenômenos de fluido-estrutura e é necessário lidar individualmente com cada caso. Collar (??) desenvolveu um diagrama, ilustrado na figura 1.2, que auxilia no entendimento da relação entre as áreas de estudos envolvidas em aeroelasticidade.

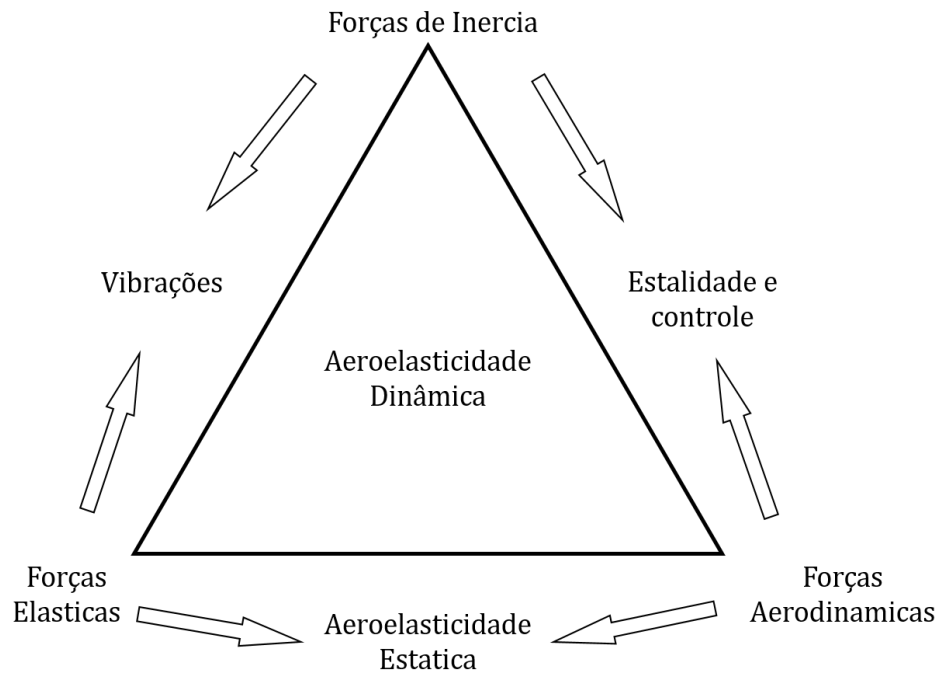


Figura 1.2: Diagrama de Collar (??)
figura adaptada (traduzida)

Neste diagrama cada vértice do triângulo representa uma das áreas que geralmente são tratadas separadamente, inércia, rigidez e aerodinâmica. As forças inerciais são resultantes da aceleração de uma massa, ou corpo rígido que quando submetido a forças mudam seu estado de movimento; as forças elásticas são resultantes das deformações da estrutura, por isso, estão relacionadas a geometria e ao material do qual o corpo é constituído; e as forças aerodinâmicas são resultantes do escoamento no qual o corpo está imerso. A aresta que conecta os conceitos de inércia e rigidez engloba a área de Vibrações Mecânicas. A aresta que conecta as forças de inércia e as forças de origem aerodinâmica consideram que as aeronaves são rígidas e que as forças aerodinâmicas podem ser modeladas em regime permanente e não dependem do movimento da aeronave, isso é aplicado por exemplo em dinâmica de voo e para analisar a estabilidade e controle de aeronaves.

Os conceitos de aeroelasticidade podem ser alocados tanto na aresta entre rigidez e aerodinâmica, sem considerar a inércia da estrutura, no que se denomina Aeroelasticidade Estática, quanto no interior do diagrama, representando a Aeroelasticidade Dinâmica e engloba todos os estudos que a rodeiam.

A aresta inferior é a mais interessante para este trabalho. Segundo Wright e Cooper(??), a aeroelasticidade estática é o estudo de deflexão das estruturas flexíveis da

aeronave, submetida a cargas aerodinâmicas quando o movimento varia pouco com o tempo, sem aceleração e velocidade significativas. Estas cargas induzem flexão e torção na asa, mudando o ângulo de incidência, também conhecido como ângulo de ataque, e consequentemente o escoamento aerodinâmico em torno desta, o que termina por resultar na mudança das cargas e deflexões da estrutura. Este processo se mantém até que atinja o equilíbrio.

Na figura 1.3 é possível visualizar a deflexão causada pelo carregamento aerodinâmico durante o pouso, sobre as asas de um Boeing 787. Este fenômeno ocorre com todas as aeronaves submetidas a carregamentos aerodinâmicos, durante voo, pouso e decolagem, entretanto no modelo 787 é ainda mais notável dado as propriedades elásticas do material compósito que compõe as asas deste. Um fato interessante, que ressalta a relevância do estudo das interações aeroelásticas é que as propriedades elásticas do material foram desenvolvidas de tal forma que a mudança de carregamento deflete a asa para uma posição de equilíbrio que melhorara seu desempenho aerodinâmico e torna a aeronave mais eficiente em voo, proporcionando um maior alcance de voo e economizando combustível. Sendo assim, as cargas deixaram de ser algo que apenas precisam ser "contornadas" para não causar falha, e passaram a ser um item de aperfeiçoamento do design aerodinâmico.



Figura 1.3: Boeing 787 com asa defletida

(fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=wmgcwonA7r0>)

Existem dois fenômenos de aeroelasticidade estática que são críticos à estrutura, o fenômeno da perda de eficiência dos controles, que pode chegar à sua reversão, e também o fenômeno de divergência de asa. Este segundo será abordado mais profundamente neste

trabalho. A divergência ocorre quando os momentos causados por cargas aerodinâmicas superam os momentos restauradores da estrutura e causam a falha estrutural.

Através da combinação de dois diferentes métodos numéricos, neste trabalho será possível calcular a divergência estática utilizando uma rotina programada no MATLAB. Empregando o método dos painéis será possível estimar as forças aerodinâmicas que atuam em uma seção de asa. Associando varias seções de asa, todas inicialmente com o mesmo ângulo de ataque inicial, são calculadas as forças que atuam em cada seção e a partir dessas é possível calcular os deslocamentos estruturais em cada seção com o método dos elementos finitos. Sabendo o deslocamento resultante das forças consegue-se determinar se alguma a asa sofre divergência.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A aeroelasticidade estática que se encontra na intersecção das forças aerodinâmicas e elásticas, engloba o fenômeno da divergência.

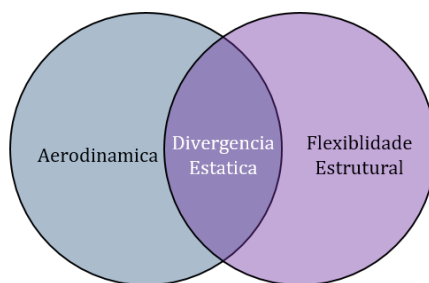


Figura 2.1: Área de intercessão da Divergência Estática

Portanto, antes de apresentar a análise de divergência estática é necessário esclarecer alguns conceitos de aerodinâmica estacionaria e de deformação estrutural, fundamentais para o entendimento do problema.

2.1 Aerodinâmica

É interessante primeiramente estar familiarizado com a ideia de um aerofólio, que nada mais é que uma forma bidimensional que descreve o corte transversal de uma superfície tridimensional, como asa ou empenagem de uma aeronave. Este pode ter diversas formas dependendo da aplicação para qual é proposto, podendo ser simétrico ou assimétrico em torno de sua corda, que é a distância entre o bordo de ataque e o bordo de fuga. Na figura 2.2 estão caracterizadas a linha de curvatura média e a corda do aerofólio. O ângulo de ataque, representado por α , é medido da corda e até direção do ar, que incide com uma velocidade V .

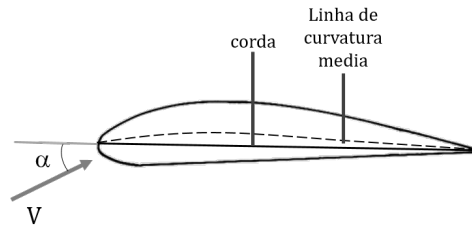


Figura 2.2: Aerofólio

Para o modelo aerodinâmico assumido no trabalho, considera-se que o aerofólio é um corpo esbelto, e isso implica que os efeitos da camada limite não precisam ser considerados, portanto, a viscosidade terá um papel secundário no comportamento do fluido, e com base nisso, pode-se assumir que o fluido é ideal. Outra simplificação que será assumida é a densidade (ρ) constante, isso vale para baixos números de Mach, sem efeitos de compressibilidade, que é o caso neste estudo.

O escoamento em torno de um aerofólio que se movimenta em relação a um fluido é dito estacionário quando a velocidade em qualquer ponto do espaço é constante no tempo. As linhas de corrente caracterizam, a direção do escoamento bidimensional das regiões entorno do aerofólio; a pressão e a velocidade podem mudar ao longo destas.

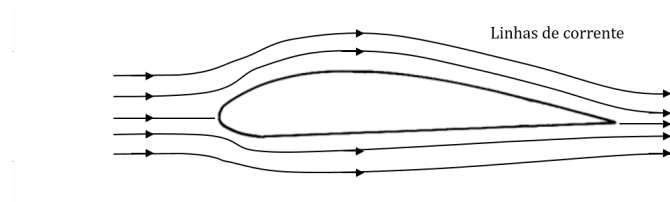


Figura 2.3: representação das linhas de corrente

Quando um corpo possui velocidade relativa ao escoamento e não é simétrico em relação a direção de incidência do fluxo (possui um ângulo de ataque diferente de zero ou é um aerofólio assimétrico), surge uma força de sustentação sobre este. Resumidamente, segundo Wright e Cooper (??) esta força resulta da distribuição de pressão sobre o aerofólio.

$$c_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 \quad (2.1)$$

Manipulando a equação de Bernoulli, para densidade constante e desconsiderando a energia potencial gravitacional, é possível obter a equação 2.1 que é usualmente utilizada

para descrever a distribuição de pressão sobre o aerofólio a partir do termo adimensional coeficiente de pressão c_p . Esta medida é a razão entre a pressão estática local no aerofólio e a pressão dinâmica do escoamento.

A distribuição de pressão agindo sobre o corpo produz uma força total e sua posição sobre a corda é chamada de centro de pressão (CP) como pode ser visto na figura 2.4. Se o ângulo de incidência α varia, a distribuição de pressão muda e consequentemente o CP também mudará de lugar. Esta mudança de posição dificulta análises aeroelásticas então por conveniência esta força é transportada para uma posição de referencia e substituída por duas forças ortogonais e um momento.

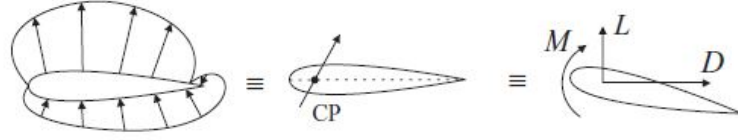


Figura 2.4: Resultante aerodinâmica sobre o centro de pressão

A sustentação é a força normal a velocidade, o arrasto é a força na mesma direção da velocidade e o momento é causado pelo transporte das forças do CP para um ponto de interesse, são então, L , D e M respectivamente.

Para este trabalho são de grande interesse as grandezas de sustentação e de momento de arfagem, pois para uma análise de divergência não é necessário quantizar o arrasto. Usualmente utiliza-se coeficientes adimensionais que relacionam a força com a velocidade, densidade do fluido e a geometria da asa. Os coeficientes de sustentação e momento são equacionado a seguir respectivamente

$$C_L = \frac{L}{q S} \quad (2.2)$$

$$C_M = \frac{M}{q S} \quad (2.3)$$

onde S é a área e q é a pressão dinâmica, a pressão resultante da velocidade do fluido sobre o corpo.

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (2.4)$$

O valor de C_L varia linearmente de acordo com o ângulo de ataque até o ponto de *stall* (quando a camada limite descola da asa), onde o sistema começa a perder sustentação conforme o α aumenta.

$$C_L = a_1(\alpha - \alpha_0) \quad (2.5)$$

A equação 2.5 descreve a curva linear de C_L x α , tem-se α_0 que é o ângulo de ataque no qual a sustentação é zero e a_1 é a inclinação da reta.

O coeficiente de momento C_M pode ser calculado em relação a um determinado ponto e transportado para outro ponto de interesse. Como explicado acima o CP é um ponto que varia conforme o α muda. Por definição o centro aerodinâmico (CA) é o ponto sobre a corda onde o momento aerodinâmico não varia com a variação do ângulo de ataque, portanto é razoável assumir este como o ponto de aplicação da resultante, uma vez que a força aerodinâmica vai variar proporcionalmente ao ângulo de ataque ao mesmo tempo que o momento aerodinâmico permanecerá constante.

O CA, para a maioria dos aerofólios, se encontra em torno de $\frac{1}{4}$ de corda (a partir do bordo de ataque).

Considerando a asa 3D como um conjunto de seções transversais, cada seção contribui com uma parcela da força de sustentação. Esta parcela varia ao longo da envergadura devido à variações no ângulo de ataque da cada trecho da asa, variação no tamanho da corda e ainda efeitos tridimensionais devido aos vórtices de ponta de asa. A força de sustentação total é normal a direção da velocidade e pode ser calculada da seguinte maneira

$$L = qSC_L \quad (2.6)$$

onde S é a área de topo da asa.

A forma que este carregamento varia é chamado de distribuição de sustentação, e é observado na prática que esta força cai para zero nas pontas da asa. Sendo assim, a distribuição pode ser aproximada por uma parábola, como visto na figura 2.5. Este fato será levado em conta na análise das cargas aerodinâmicas da asa analisada.

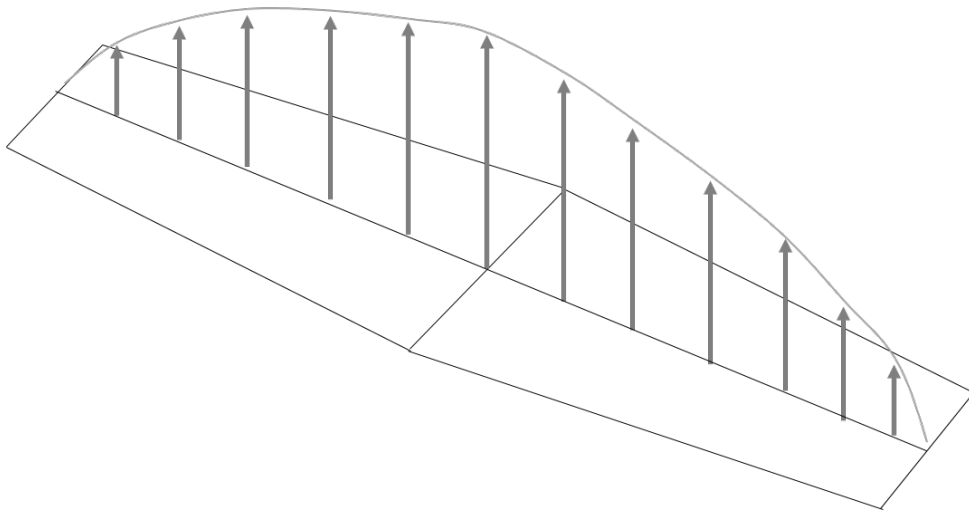


Figura 2.5: Distribuição de sustentação sobre a asa

2.2 Estrutura

Agora que o centro aerodinâmico foi especificado é preciso citar o ponto que é de extrema importância para a visão estrutural do problema: o centro elástico (CE). Este é o ponto para o qual uma força normal à corda é aplicada e a seção não sofre torção, apenas flexão. Sendo assim uma força aplicada em qualquer outro ponto da corda causará uma torção no aerofólio em torno do CE.

A partir desta ideia é possível conceber o conceito de um eixo elástico, um eixo que conecta todos os CE de cada seção transversal. Quando a força é aplicada em um ponto fora deste eixo ocorre uma torção como é visto na figura 2.6.

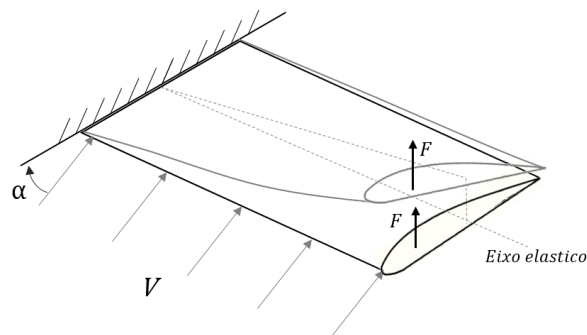


Figura 2.6: Torção em uma asa com raiz engastada

Foi apresentado na seção de aerodinâmica que as forças resultantes do escoamento, são aplicados no CA, e este possui uma distancia e do CE. Sendo assim os carregamentos

aerodinâmicos vão causar torção e flexão na asa.

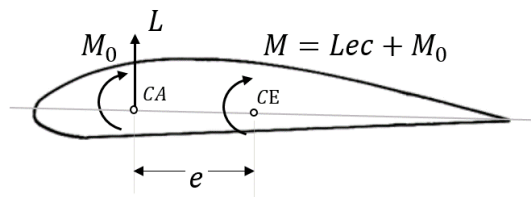


Figura 2.7: Carregamentos aerodinâmicos

A tendência da asa de voltar à sua posição inicial e resistir as forças aplicadas, é chamada de rigidez restauradora da estrutura.

Para o problema analisado, considera-se que este está no regime elástico, e como consequência disso, é possível aproximar a rigidez estrutural em cada direção de deslocamento, por uma mola torcional ou linear que possui uma rigidez equivalente a da estrutura. No caso da divergência o maior interesse é o deslocamento torcional, como será explicado na próxima seção.

Pensando na asa no viés de estrutura, é impossível concebê-la apenas como um contorno em forma de aerofólio, isso seria imaginar que a asa é apenas uma casca em um formato aerodinamicamente eficiente. Entretanto, toda a rigidez estrutural desta parte da aeronave vem dos componentes que se encontram dentro da asa.

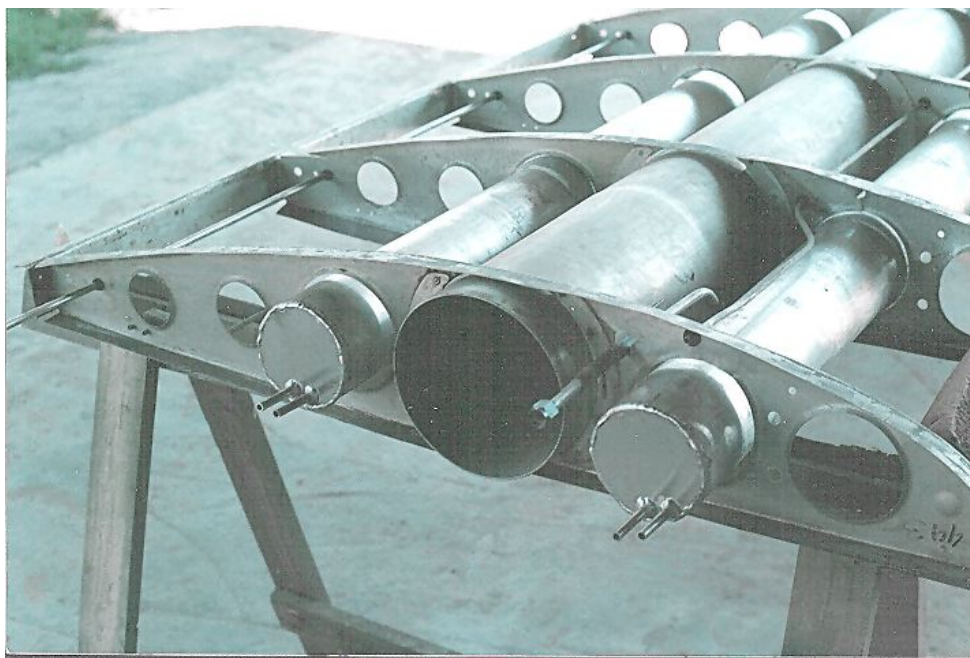


Figura 2.8: Estrutura da asa

Na figura 2.8 pode-se ver as nervuras, que têm o formato do aerofólio e suportam a casca que envolve a asa; e as estruturas tubulares que cruzam as nervuras por toda a extensão da envergadura são as longarinas. Para a análise apresentada aqui, a parte mais importante é a longarina, pois será assumido que uma passa pelo eixo elástico da asa e contribui para a rigidez torcional da estrutura. Como isso foi modelado será explicado mais especificamente no capítulo de Método dos Elementos finitos.

2.3 Divergência estática

Como visto na introdução, a divergência é resultado da interação entre as cargas aerodinâmicas e a estrutura da asa, que causa falha estrutural. Uma asa quando submetida a força de sustentação e a um momento sofre uma flexão e uma torção, o que resulta numa mudança no ângulo de incidência, e conseqüentemente, ocorrerá uma mudança no escoamento; o que alterará os carregamentos aerodinâmicos criando uma nova força de sustentação e um novo momento que reiniciarão o processo. Isso poderá continuar até que atinja uma condição de equilíbrio ou se a velocidade do escoamento suficientemente elevada para causar carregamentos superiores aos que a estrutura suporta, ocorrerá falha.

Divergência é definido como o fenômeno que ocorre quando o momento resultante dos carregamentos aerodinâmicos supera o momento restaurador que a rigidez da estrutura possui, e leva a uma falha estrutural. O tipo mais comum é a divergência torcional na asa.(??) Nas aeronaves modernas, a velocidade de flutter (uma instabilidade aeroelástica dinâmica) costuma ser atingida antes da de divergência, sendo assim esta ultima normalmente não é um problema. Entretanto esta é uma medida útil da rigidez geral da aeronave e precisa ser considerada durante o processo de certificação (CS-25 e FAR-25).

Para o estudo do problema, inicia-se considerando a rigidez da estrutura. Visto que a análise a ser feita esta dentro do regime elástico, pode-se afirmar que existe uma relação proporcional/linear entre o carregamento e o deslocamento, e esta proporção é a rigidez estrutural. Dado isso, faz sentido analisar esta grandeza como se fosse uma mola de rigidez equivalente a da estrutura na direção em que a carga esta sendo aplicada. Por exemplo, para seção de asa com um único grau de liberdade, na direção de rotação entorno de seu centro elástico (note que esta rotação no aerofólio corresponde a torção da asa) pode-se aplicar uma mola torcional que possua uma rigidez equivalente a da estrutura resistindo a um momento que tenta girar essa seção como na figura 2.9.

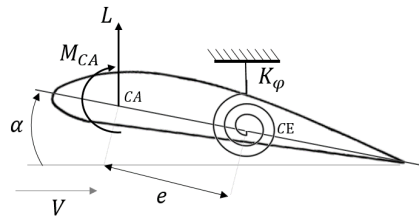


Figura 2.9: Aerofólio com uma mola torcional

É possível notar que o centro elástico é o centro torcional do sistema, isto é

$$CE \equiv CT \quad (2.7)$$

A mola torcional de rigidez K_ϕ , que é posicionada no ponto por onde passa o eixo elástico. A medida e é a distancia entre o eixo aerodinâmico(CA), posicionado a $1/4$ da corda, e o eixo elástico(CE). Inicialmente o aerofólio possui o ângulo de incidência α . O momento na mola é representado por força(sustentação) x distancia, isto é

$$M = Lec + M_o = \frac{1}{2}\rho V^2 ec^2 a_1 \alpha + M_o = qec^2 a_1 \alpha + M_o \quad (2.8)$$

onde tem-se a_1 que é o coeficiente angular da curva de sustentação.

Após a aplicação dos carregamentos o sistema gira entorno do eixo elástico com um ângulo representado por ϕ e tensiona a mola fazendo surgir um momento na mola que gira na direção contraria ao momento aplicado. Este é o chamado momento de restaurador da estrutura. Em uma condição de equilíbrio este momento é igual ao gerado pela força.

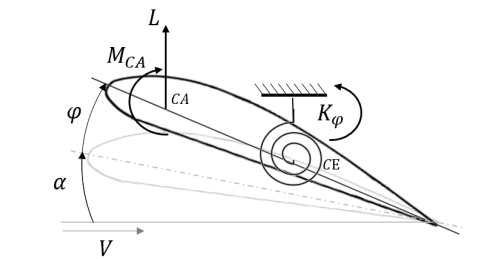


Figura 2.10: Torção de um aerofólio

Considerando o aerofólio com um ângulo de torção ϕ , a equação que descreve a gradeza do momento apos a força de sustentação ser aplicada é

$$M = qec^2a_1(\alpha + \phi) \quad (2.9)$$

A pressão dinâmica q é a chave da análise de divergência. Se a pressão dinâmica do escoamento for suficientemente alta, este processo realimentado pode levar ao colapso da estrutura devido a divergência do movimento da asa. Então em outras palavras, se a velocidade do fluido for suficiente alta, a estrutura ira falhar, caso contrario a asa permanece estaticamente deformada.

Analisando o problema como um todo nota-se que o momento de cada seção resulta na torção da asa ao longo da envergadura. Então, deve-se tomar muito cuidado para não confundir o momento fletor na asa com a torção que surge do momento de arfagem em cada seção.

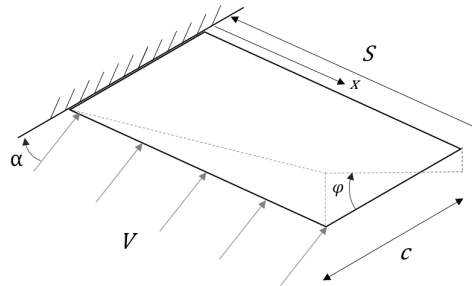


Figura 2.11: Torção em uma asa com raiz engastada

A análise que será feita neste trabalho inicia-se bidimensional, avaliando os carregamentos aerodinâmicos em cada seção de asa, através do método dos painéis. Em seguida associa-se todas as seções analisadas, partindo para uma análise tridimensional, utilizando o método dos elementos finitos, para quantificar as deformações estruturais que estes carregamentos causaram. Esse processo é conhecido como teoria das faixas. No capítulo "Implementação dos Métodos" será explicado mais especificamente como foi feita a modelagem e análise de divergência. Porém antes é necessário entender os métodos dos painéis e elementos finitos.

3 MÉTODO DOS PAINÉIS

A partir deste método será possível estimar os coeficientes de sustentação e de momento no centro aerodinâmico, e então calcular os carregamentos aerodinâmicos sobre a asa.

É possível determinar as características aerodinâmicas de corpos, seja qual for sua forma, espessura e orientação. Para a aplicação deste método serão consideradas apenas as geometrias bidimensionais, isto é, um aerofólio. O método mais básico foi desenvolvido inicialmente entre os anos 50 e 60 por um grupo liderado por Hess (??) e utiliza-se de fontes sobre o aerofólio.

Existem diversas maneiras de se trabalhar com o método dos painéis, basicamente a ideia é discretizar a geometria através de painéis (retas no caso 2D), determinar o ponto no meio de cada painel, chamado de *pontos de controle*, e nestes, aplicar um potencial. A grande questão do método dos painéis é determinar a intensidade destes potenciais.

Primeiramente é preciso conhecer os elementos potenciais mais básicos de interesse, que são fonte, sorvedouro, vórtice e dipolo. Todos podem ser utilizados no método dos painéis, mas é necessário ter cautela pois cada potencial tem um propósito para ser aplicado, por exemplo, as fontes podem ser usadas no método, mas sozinhas, elas não permitem calcular sustentação. O método mais utilizado para cálculo de problemas em que a sustentação é uma grandeza de interesse utiliza-se de vórtices. O método dos painéis com vórtices é uma técnica numérica que se tornou muito utilizada desde a década de 1970 (??). Aparentemente esta foi inicialmente desenvolvida por Rubbert (??) na Boeing para resolver problemas com sustentação.

Neste trabalho optou-se por uma abordagem diferente, ao invés dos vórtices serão utilizados uma combinação de fontes e dipolos que permite obter bons resultados.

A combinação de fonte e dipolo permite obter C_M e C_L de um aerofilo dado um ângulo de ataque, então basicamente o procedimento consiste em definir a geometria, encontrar os pontos de controle e aplicar nestes uma fonte e um dipolo, e em seguida determinar a intensidade do conjunto em cada painel para que não ocorra escoamento

dentro do aerofólio. Para isso é necessário as intensidades de tal forma que o contorno da geometria torne-se uma linha de corrente.

Iniciando o método é necessário discretizar a geometria, a primeira, e mais importante, definição é o sistema de coordenadas. Como mostrado na figura 3.1 a geometria do aerofólio é discretizada com pontos (z,y) e a conexão destes pontos com um segmento de reta é definido como o painel. Para gerar estes, existem diversas maneiras, inclusive o site *AirfoilTools*((?)) disponibiliza geradores de aerofólios NACA em que é possível determinar com quantos pontos a geometria será discretizada. Uma vez que possui-se os pontos, o tem-se N painéis e $N+1$ pontos da extremidade dos painéis, sendo assim, $(z_{j=1}, y_{j=1}), (z_{j=2}, y_{j=2}), \dots, (z_{j=N+1}, y_{j=N+1})$ são computados.

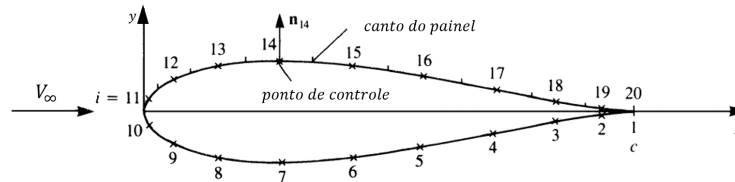


Figura 3.1: Discretizando o perfil do aerofólio

A partir destes pontos é possível determinar a angulação de cada painel β_i . Em seguida é necessário obter-se os pontos de controle no meio de cada painel, que na figura 3.1 estão caracterizados por um x , então são computados $(z_{i=1}, y_{i=1}), (z_{i=2}, y_{i=2}), \dots, (z_{i=N}, y_{i=N})$. Calcula-se normal de cada painel n_i , que aponta para fora, perpendicular a cada painel.

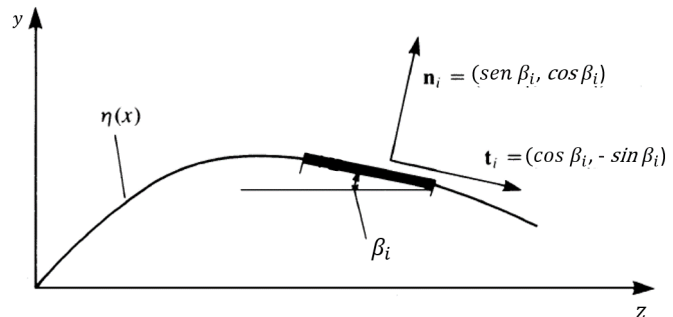


Figura 3.2: Sistema de coordenadas do aerofólio

Como exemplificado na figura 3.2 estas normais não determinadas a partir da angulação de cada painel da seguinte maneira

$$n_i = (\text{sen}\beta_i, \cos\beta_i) \quad (3.1)$$

Uma vez determinada as propriedades geométricas de cada painel, inicia-se de fatos os cálculos fundamentais do método. Para cada ponto de controle aplica-se a condição de contorno que garante que o potencial dentro do aerofólio é nulo, e não existe escoamento internamente. Para isso a componente normal da velocidade do escoamento é zero. A condição de contorno

Segundo Katz (??) para cada painel tanto a intensidade da fonte quanto a do dipolo necessitam ser especificadas, a aplicação do método inicia-se especificando a intensidade da fonte σ_j dada pela equação 3.2

$$\sigma_j = n_j \bullet V_\infty \quad (3.2)$$

A equação 3.2 é o produto escalar entre a direção normal ao painel a direção da velocidade do escoamento.

A velocidade potencial em um ponto arbitrário P, fora da superfície do corpo, como a figura 3.3, dada pela fonte de intensidade constante é dada pela equação 3.3, nas coordenadas de cada painel

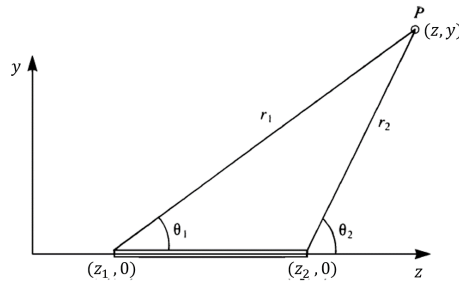


Figura 3.3: Folha de vórtices sobre aerofólio

$$\Phi = \frac{\sigma}{4\pi} \left[(z - z_1) \ln[(z - z_1)^2 + y^2] - (z - z_2) \ln[(z - z_2)^2 + y^2] + 2y \left[\tan^{-1} \frac{y}{z - z_2} - \tan^{-1} \frac{y}{z - z_1} \right] \right] \quad (3.3)$$

Assim como a fonte, o dipolo também possui uma intensidade, representada por μ , que precisa ser considerada para obter os coeficientes desejados. A velocidade potencial do dipolo é dada por 3.4.

$$\Phi = \frac{-\mu}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{y}{z - z_2} - \tan^{-1} \frac{y}{z - z_1} \right] \quad (3.4)$$

Aplica-se estas equações para cada ponto de controle, como se o ponto P estivesse posicionado no meio do painel, para determinar a influencia dos demais painéis em um específico e ajustar a intensidade das fontes e dos dipolos.

$$b_{ij} = \frac{\sigma_j}{4\pi} \left[(z_i - z_j) \ln[(z_i - z_j)^2 + y_i^2] - (z_i - z_{j+1}) \ln[(z_i - z_{j+1})^2 + y_i^2] + 2y_i \left[\tan^{-1} \frac{y_i}{z_i - z_{j+1}} - \tan^{-1} \frac{y_i}{z_i - z_j} \right] \right] \quad (3.5)$$

$$c_{ij} = \frac{-\mu_j}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{y_i}{z_i - z_{j+1}} - \tan^{-1} \frac{y_i}{z_i - z_j} \right] \quad (3.6)$$

Para o dipolo, a influencia do painel sobre ele mesmo é

$$c_{ii} = \frac{1}{2} \quad (3.7)$$

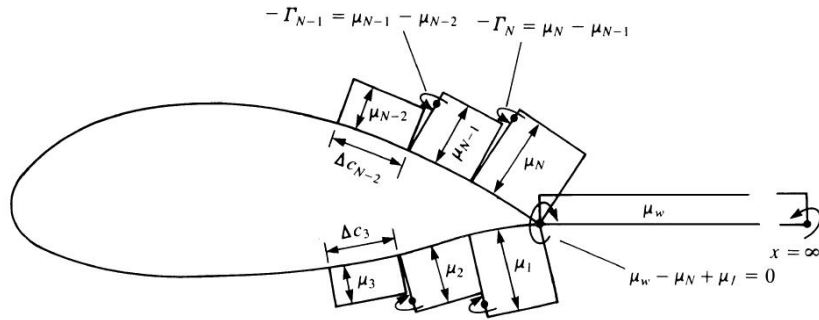


Figura 3.4: Distribuição de dipolos próximos ao bordo de fuga

A determinação de cada coeficiente de influencia resultará em uma matriz NxN, com N+1 incógnitas, sendo o dipolo da esteira μ_W , próximo ao bordo de fuga, a (N+1)-ésima incógnita. Então aplica-se a condição de Kutta 3.8 para garantir o numero de equações igual ao de incógnitas.

$$\mu_1 - \mu_N + \mu_W = 0 \quad (3.8)$$

Desta forma obtêm-se a N+1 equações lineares a serem resolvidas para a influencia dos dipolos.

$$\sum_{j=1}^{N+1} C_{ij} \mu_j = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & C_{1N} & C_{1W} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & C_{2N} & C_{2W} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NN} & c_{NW} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \\ \mu_W \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Para ser possível combinar as fontes e os dipolos nos painéis é necessário ter a mesma quantidade de influencias e de painéis. Para isso substitui-se μ_W por $\mu_N - \mu_1$ e reduzir a ordem da matriz 3.9 para N. A primeira linha por exemplo se torna

$$(c_{11} - c_{1W})\mu_1 + c_{12}\mu_2 + \dots + (c_{1N} - c_{1W})\mu_N \quad (3.10)$$

Apenas a primeira e a ultima coluna mudarão pois tem o termo $c_i W$. É possível reescrever a influencia do dipolo da seguinte maneira

$$\begin{aligned} a_{ij} &= c_{ij}, & j &\neq 1, N \\ a_{i1} &= c_{i1} - c_{iW}, & j &= 1 \\ a_{iN} &= c_{iN} - c_{iW}, & j &= N \end{aligned}$$

E a partir desta definição, combina-se o sistema com as influencias das fontes e tem-se a equação de interesse 3.11

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NN} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{pmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

Uma vez resolvido o sistema de equações, e intensidade dos dipolos μ_j são conhecidas, é possível encontrar a velocidade ao redor da superfície do aerofólio.

$$V_{tj} = \frac{\mu_j - \mu_{j+1}}{\Delta l_j} + V_{t\infty} \quad (3.12)$$

onde Δl_j é a distancia entre os pontos de controle j e j+1. O coeficiente de pressão

pode ser calculado através de 3.13

$$C_{pj} = 1 - \frac{V_{tj}^2}{V_\infty^2} \quad (3.13)$$

A partir disso, calcula-se o C_l e o C_m para cada um dos painéis e a somatória de todos são os coeficientes da geometria do aerofólio.

$$\Delta C_{lj} = \frac{-C_{pj} \Delta l_j \cos \beta_j}{c} \quad (3.14)$$

O coeficiente de momento é calculado considerando que o CA encontra-se a $\frac{1}{4}c$ a partir da equação 3.15 calcula-se este para cada painel.

$$\Delta C_{mj} = \Delta C_{lj} (z_j - 0.25) \cos \alpha \quad (3.15)$$

Uma vez determinados os coeficientes é possível calcular os carregamentos em cada seção. Como isso foi feito, antes de aplicar o MEF é melhor explicado no capítulo 5.

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Para a análise estrutural do problema será utilizado o método dos elementos finitos. De acordo com Logan (??), o Método dos Elementos Finitos consiste em modelar uma estrutura ou domínio, em um caso mais geral, originalmente contínuo, por meio da discretização em unidades básicas (elementos finitos) interligadas por pontos comuns (nós) entre duas ou mais dessas unidades. A representação de um domínio por um conjunto de elementos finitos interligados por pontos nodais é chamada de malha.

Após a discretização de um domínio, através de determinada abordagem é possível definir equações de equilíbrio para cada elemento. Essas equações são combinadas para formar um sistema de equações linearmente dependentes (no caso de problemas estáticos). Visto que, após a aplicação das condições de contorno é possível obter um sistema de equações linearmente independentes para o problema estático, a resolução desse sistema, com o auxílio de adequadas equações de compatibilidade, condições de contorno e iniciais, fornecem uma solução para todo o domínio de forma discreta, em seus nós.

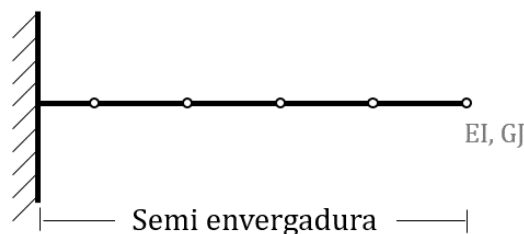


Figura 4.1: Modelo estrutural da asa

Tendo isso em mente, o modelo que será utilizado discretizará a asa inteira como uma viga engastada, com a outra extremidade em balaço. A viga passará pelo eixo elástico da asa portanto antes de aplicar as forças, é necessário transporta-las do CA para o CE. Esta será dividida em elementos de vigas e os carregamentos serão aplicados nos nós, afim

de determinar as deformações resultantes na estrutura. Esta viga possui um modulo de elasticidade E e o Modulo de cisalhamento G do material que a compõe, e as propriedades de momento de inercia I e polar J que dependem do formato da seção transversal da viga. Mais sobre estas propriedades será discutido no fim deste capítulo.

Para modelagem do sistema, apesar do problema de divergência apresentado aqui só considerar o deslocamento torcional, o MEF implementado poderia ser usado para trabalhos futuros e mais complexos pois permite calcular os deslocamentos de flexão, torção e o momento fletor em relação a raiz da asa. Para isso será considerado que um elemento de viga com 2 nós como o da figura 4.2 que possui 3 graus de liberdade em cada nó.

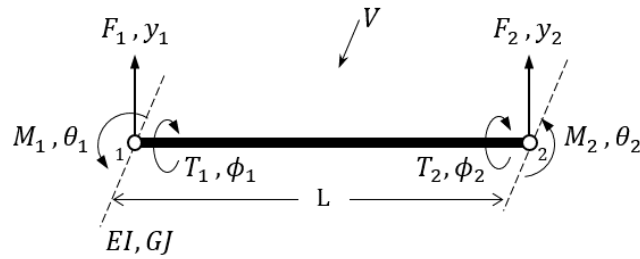


Figura 4.2: Elemento de viga

Onde F , M e T são os carregamentos na direção vertical, o momento fletor e a torção, respectivamente, e y , θ e ϕ os deslocamentos.

A forma geral utilizada para analisar problemas estáticos em regime elástico, isto é, que sofrem deslocamentos e conseguem restituir sua forma inicial, é dada por uma relação linear, bem conhecida, chamada Lei de Hooke. Nesta análise será considerado que o sistema obedece as leis elásticas, até que atinja a divergência.

$$\{F\} = [K] \{d\} \quad (4.1)$$

Para estruturas dentro do regime elástico pode-se pensar na rigidez estrutural como uma mola conectada no nó, que resiste aos esforços na direção em que os carregamentos são aplicados, desta forma a combinação de molas em direções de interesse permite obter uma *rigidez equivalente da estrutura*. Esta é representada pela matriz $[K]$ que

nada mais é que a composição destas "molas". Da equação 4.1 tem-se a relação entre a matriz de rigidez é K , o vetor de forças/carregamentos nodais F e os deslocamentos nodais d .

Para o caso proposto de um elemento com 2 nós e 3 graus de liberdade em cada nó da figura 4.2, a matriz de rigidez para um elemento de viga, segundo (??), é dada pela equação 4.2.

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & -12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 \\ 6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} \\ -12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} & 0 & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} & 0 \\ 6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Esta matriz descreve a rigidez equivalente de um único elemento de viga e é chamada *matriz de rigidez local*, por tanto, para analisar a estrutura como um todo é necessário compor a *matriz de rigidez global* a partir de todas matrizes locais. Para isso é preciso saber onde posicionar cada matriz local de forma que garanta a continuidade do problema.

Uma parte muito importante do problema é aplicar as condições de contorno que neste caso, é garantir que existe um engastamento no primeiro nó da estrutura, para isso é preciso impor essa restrição ao primeiro nó, dizendo que este não pode se deslocar em nenhuma das direções, isso é, não tem os 3 graus de liberdade.

Uma vez que a matriz de rigidez global é obtida é possível aplica-la na equação 4.1. Considerando uma viga dividida em N nós, e $N-1$ elementos, a matriz global será uma matriz quadrada $3N \times 3N$, o vetor F terá N elementos assim como o vetor d .

Neste ponto tem-se todos os valores de F (obtidos previamente com o método dos painéis) e a matriz $[K]$, portanto, resta determinar o vetor deslocamento que é o que

interessa de fato. Note que existem N equações com N incógnitas, desta forma, tem-se um sistema linear a ser resolvido.

Existem diversas maneiras de resolver sistemas lineares e neste trabalho utilizou-se o método de eliminação de Gauss com pivotamento. Este método foi criado por Carl F. Gauss, como o nome sugere, e o mais antigo e ainda o mais utilizado para solução de equação de sistemas lineares. Segundo (??) o método consiste em transformar o sistema (4.1) em um sistema triangular superior por eliminação avante e resolver triangularizando por retrossubstituição.

Inicia-se eliminando a primeira incógnita de cada uma das equações abaixo da primeira (da segunda a ultima) subtraindo a primeira linha multiplicada por um fator que anule a incógnita. Repetindo o procedimento para as demais linhas até que na ultima linha tenha do lado esquerdo apenas uma incógnita com sua constante modificada na ultima etapa de eliminação e do lado direito uma constante também modificada, permitindo calcular a incógnita. Com esta em mão faz-se a retrossubstituição nas equações anteriores.

O único problema que pode ocorrer com esse processo é se um dos elementos da diagonal principal da matriz for nulo, ou tornar-se nulo durante a eliminação. Para solucionar isso utiliza-se o recurso do pivotamento que nada mais que é que a troca de linhas e/ou colunas quando esse erro for detectado.

Após todo este processo obtêm-se o vetor de deslocamentos e método dos elementos finitos termina. Agora basta especificar as constantes utilizadas na matriz \underline{k} .

4.1 Propriedades da Estrutura

4.1.1 Modulo de Elasticidade e Cisalhamento

As grandezas modulo de elasticidade (E) e cisalhamento (G) desempenham grande influencia nos resultados, já que estas descrevem as propriedades da estrutura, e consequentemente como esta reagira aos carregamentos. Entretanto, foge do escopo deste trabalho estimar esses valores com precisão para estrutura da asa. Sendo assim serão utilizados dados de materiais aeronáuticos mas que não necessariamente correspondem ao valor real da estrutura como um todo.

O material escolhido para analise foi o alumínio 7075-T651 (liga 6063) que é utilizado em peças sujeitas aos mais elevados esforços mecânicos em indústria aeronáutica, militar, máquinas entre outros. Suas propriedades estão dispostas na tabela 4.1

Tabela 4.1: Propriedades consideradas na análise estrutural

E	G
[MPa]	[MPa]
70000	26500

4.1.2 Cálculo de inércia

Foi comentado anteriormente que para o cálculo estrutural é necessário definir o valor do momento de inércia (I) da seção transversal da viga, que neste caso é uma asa, e sua seção é um aerofólio. Na literatura é possível encontrar equações já deduzidas, que dependem das dimensões da geometria, porém só para os casos de seção geométricas simples. Como a seção transversal possui uma geometria complexa se faz necessária uma maneira de estimar este valor. Para isso a seção pode ser dividida em vários retângulos.

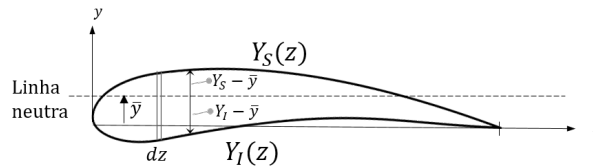


Figura 4.3: Variáveis para a estimativa da inércia

O momento de inércia em relação ao eixo z , de um aerofólio está relacionado com o seu formato dado pelos pontos no extradorso (superior) $Y_s(z)$ e intradorso (inferior) $Y_l(z)$ do aerofólio. Como mostrado na figura ??, I é a integral da contribuição de todas as áreas infinitesimais de retângulos de dimensão dz de largura e $(Y_u - Y_l)$ de altura. A inércia de cada pequena seção retangular é tomada aproximadamente em torno da linha neutra de posição \bar{y} . Colocando isso em uma equação tem-se

$$I = \int_0^c \frac{1}{3} [(Y_u - \bar{y})^3 - (Y_l - \bar{y})^3] dz \quad (4.3)$$

onde \bar{y} é

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_0^c \frac{1}{2} [Y_u^2 - Y_l^2] dz \quad (4.4)$$

e A é a área do aerofólio e c a corda.

Apesar desta maneira numérica de calcular a inércia do aerofólio proporcionar ótimos resultados, pode ser trabalhoso e requerer um esforço computacional razoável.

Existe porem uma aproximação que funciona para grande maioria dos aerofólios que é uma função da espessura máxima(t) e da curvatura máxima (h).

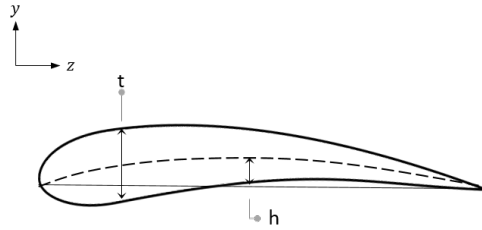


Figura 4.4: Variáveis para a estimativa da inercia

Na figura 4.4 esta representada as posições de espessura máxima e de curvatura máxima de um aerofólio qualquer que nada mais são que

$$t = \max Y_u(z) - Y_l(z) \quad (4.5)$$

$$h = \max[Y_u(z) - Y_l(z)]/2 \quad (4.6)$$

A partir disso tem-se a simplificação para o momento de inercia que proporciona resultados bons e com um consumo computacional mais plausível

$$I = K_I c t(t^2 + h^2) \quad (4.7)$$

Onde K_I possui basicamente o mesmo valor para os aerofólios mais comuns de 0,036 , podendo assim ser assumida como uma constante e a formula passa a ser

$$I = 0,036 c t(t^2 + h^2) \quad (4.8)$$

Esta é a estimativa que será utilizada para este trabalho.

4.1.3 Inercia torcional

O momento polar de inércia J , ou inercia torcional, é uma grandeza muito importante a ser considerada pois em conjunto com o modulo de cisalhamento G , constitui a rigidez torcional da estrutura GJ . Uma coisa fundamental a ser avaliado é que J não vem apenas da seção transversal da "casca" do aerofólio, mas principalmente da rigidez das longarinas. Tendo isso em mente, neste modelo será assumido que existe uma longarina

de seção transversal circular de diâmetro igual a metade da espessura máxima do aerofólio (esta foi apenas a aproximação proposta, a dimensão é arbitrária pois foge do escopo do trabalho quantificar isso com fidelidade). Esta longarina passa pelo eixo elástico e o J total de estrutura é a soma do J da longarina e da casca do aerofólio.

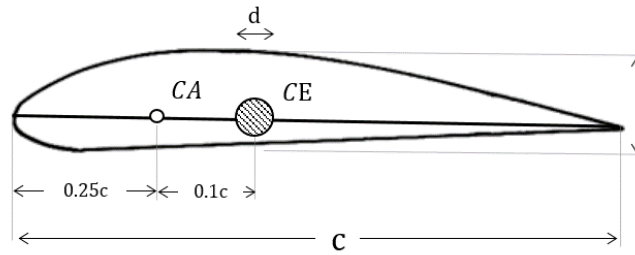
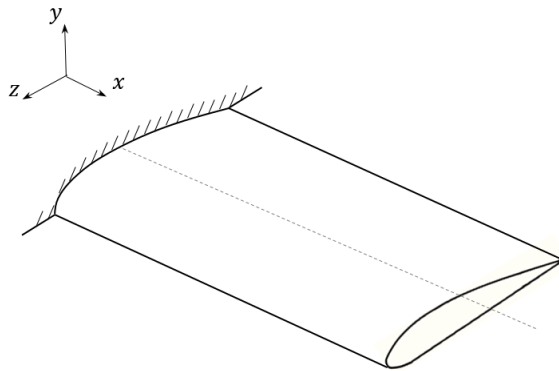


Figura 4.5: Representação da longarina proposta

$$J = \frac{\pi d^4}{32} \quad (4.9)$$

5 IMPLEMENTAÇÃO DOS MÉTODOS

Agora que o embasamento teórico e os métodos matemáticos que serão utilizados foram apresentados, é possível explicar a abordagem adotada para o problema.



Como dito anteriormente, a asa considerada aqui é retangular de seção constante e será modelada como uma viga engastada na raiz. Considera-se somente a metade da envergadura.

Inicia-se a implementação declarando as características desta asa a ser analisada, primeiro, o tipo de seção da asa (tipo de aerofólio), a dimensão da semi-envergadura, o ângulo inicial, que o mesmo para todas as seções, e em quantos N pontos da asa deseja-se fazer a análise.

Em seguida informa-se a densidade atmosférica. Para efetuar os cálculos será assumido uma densidade igual a $1,225 \text{ kg/m}^3$, que de acordo com a ISA (Atmosfera Padrão Internacional), é a densidade do ar ao nível do mar.

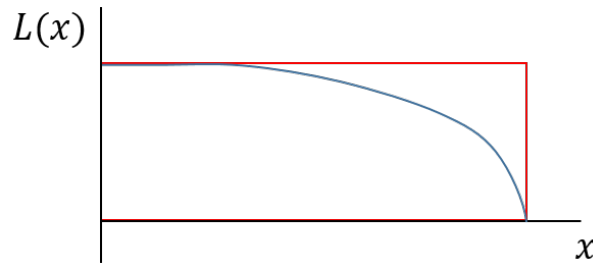
A partir destes *inputs* a asa será fatiada em N seções. O código inicia rodando o método dos painéis para cada uma das seções e calculando os respectivos coeficientes C_L e C_M . Na primeira inteiração, como todos os ângulos iniciais são iguais, os valores obtidos são os mesmos para os N pontos.

Com a equação 2.5 calcula-se o valor da sustentação em cada seção para uma dada velocidade V . A área utilizada para calcular a sustentação local de cada seção é dada por

$$S_{faixa} = \frac{S}{N} c \quad (5.1)$$

onde s é o valor da semi-envergadura e c a corda.

Neste momento é necessário aplicar uma correção no carregamento para garantir a distribuição decaindo para zero na ponta da asa. No gráfico ?? a curva em vermelho indica a distribuição obtida, e em azul a distribuição corrigida/real.



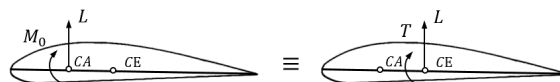
Existem algumas opções de equações que podem ser aplicadas para corrigir o formato da distribuição. De acordo com Wright (??), pode-se corrigir a curva com 5.2 ou 5.3. Nos resultados serão testadas as duas opções e aquela que proporcionar uma curva com maior sustentação próximo a ponta será a escolhida para prosseguir os cálculos, pois trata-se do caso mais crítico.

$$a_W(x) = a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{2s}\right) \quad (5.2)$$

$$a_W(x) = a_1 \left[1 - \left(\frac{x}{s}\right)^2\right] \quad (5.3)$$

onde a_W é a inclinação da curva de sustentação.

Uma vez obtidos a sustentação corrigida, e o momento entorno do CA a partir do coeficiente C_M , é necessário transportar esses carregamentos do CA para o CE, visto que o modelo de elementos finitos proposto é do eixo elástico da estrutura.



Da figura 5 tem-se T que é dado pela soma do momento no CA com o momento que surge da distancia e que a força L esta sendo aplicada 5.4. Como citado anteriormente, neste trabalho o e é considerado 0.1c para efetuar os cálculos.

$$T = M_o + Le \quad (5.4)$$

Aplica-se os carregamentos nos CE de cada seção pois estes são os nós do método dos elementos finitos Na figura abaixo 5.1 é representada a condição inicial do problema onde todas as seções tem mesmo ângulo de ataque. Apesar de na figura só estarem representados 3 nós, a estrutura possui N nós.

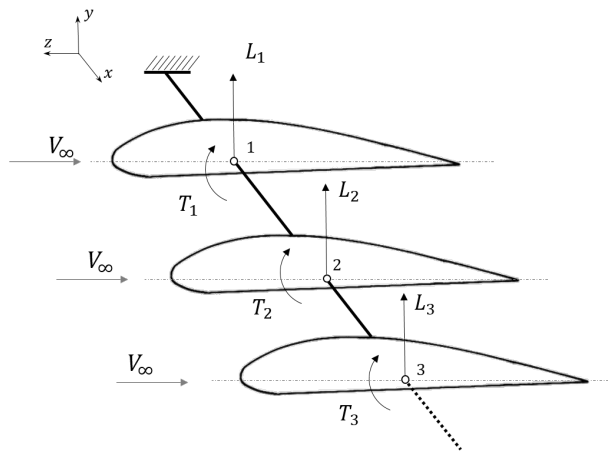


Figura 5.1: Condição inicial do problema

Após aplicar os carregamentos ocorreram deformações na estrutura. No caso estudado, a única deformação que importa é a torção da viga. A torção em cada ponto é somado ao ângulo inicial, e resultam em uma nova configuração.

Como explicado anteriormente no capítulo sobre divergência, uma vez que a configuração muda, os carregamentos aerodinâmicos também irão sofrer alteração e torna-se necessário recalcula-los para esta nova configuração. Na figura 5.2 esta representada o sistema após a primeira interação, onde os ângulos de ataque passam a ser diferentes de zero, e entre si.

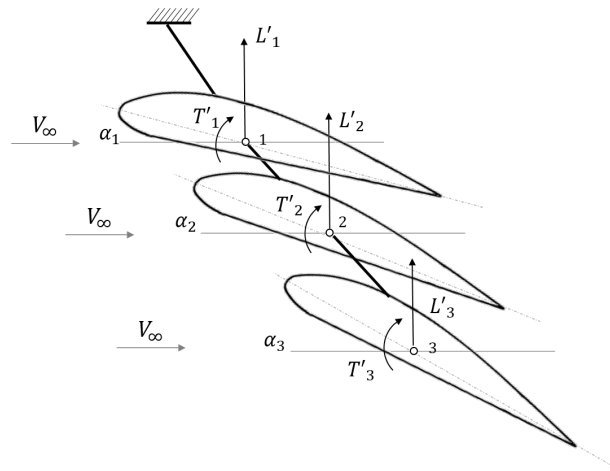


Figura 5.2: Condição após deformação estrutural

Note que na figura 5.2 os carregamentos são representados como L'_i e T'_i (onde $i=1,2,\dots,N$) e não mais como L_i e T_i pois estes não são os mesmos, após as deformações.

Nas interações seguintes a ideia se repete, após a deformação os carregamentos devem ser recalculados e os novos carregamentos são aplicados na nova configuração da estrutura. Isso se mantém até que a asa alcance uma condição de equilíbrio para a velocidade V . Isso é feito comparando o ângulo deformado com o da interação anterior para determinar se ainda esta ocorrendo alteração ou se o sistema esta estabilizado.

No caso da velocidade ser suficientemente elevada, e causar a divergência da asa, a condição adotada para identificar esta situação é se a seção N-1 atingir um ângulo de 90° , assume-se que nesta configuração a asa sofrerá falha.

Então o procedimento que foi anotado no trabalho consiste em:

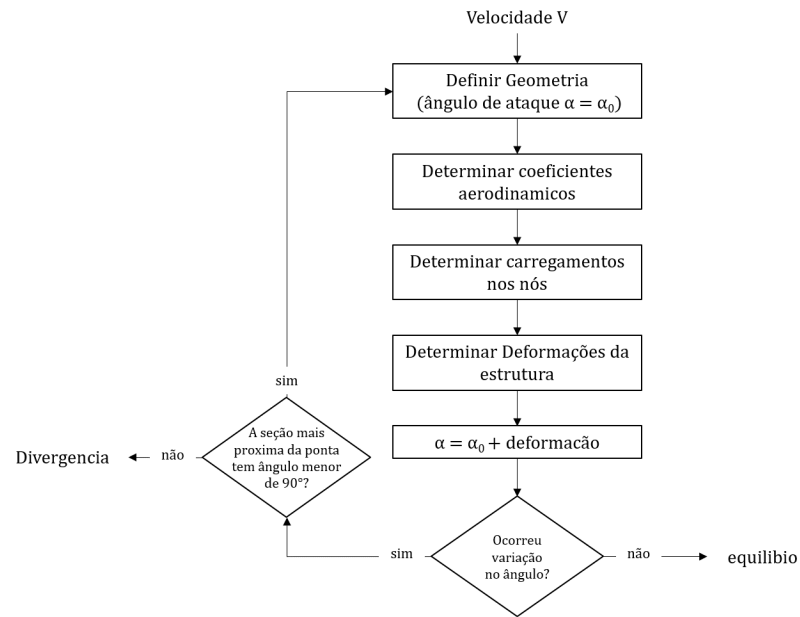


Figura 5.3: Fluxograma

Este procedimento foi programado na linguagem MATLAB, e pode ser analisado com mais detalhe na seção *Anexo1* deste trabalho.

6 RESULTADOS

Como explicado previamente a implementação possui varias possíveis variáveis que permitem analisar diversas asas com diferentes configurações. Para apresentar os resultados é preciso estabelecer um domínio de análise. Sendo assim para exemplificar os resultados foi adotada uma asa com semi-envergadura de 5 metros e um perfil de aerofólio NACA 4412.

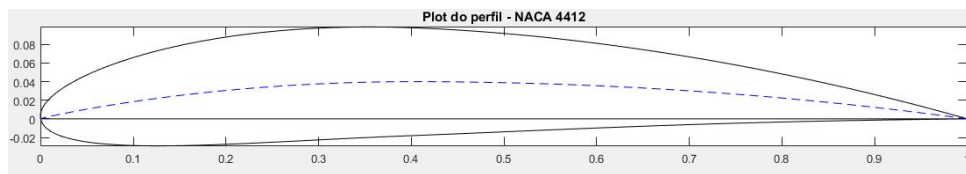


Figura 6.1: Perfil de aerofólio analisado

Os parâmetros estruturais e as características da seção da asa analisada que foram calculados podem ser vistas na tabela 6.1

Espessura	Corda	Curvatura máxima	Momento de Inercia	Momento de inercia Polar
t	c	h	I	J
(m)	(m)	(m)	($kg.m^2$)	($kg.m^2$)
0.12	1	0.04	6.89e-05	7.02e-05

Tabela 6.1: Propriedades calculadas da asa analisada

Em um primeira análise será considerado 10 seções de asa, todas com mesmo ângulo inicial de 5° . Insere-se estes dados iniciais na função *Método dos painéis*. Esta analisará cada seção de uma vez, utilizando 200 painéis para discretizar o aerofólio como na figura 6.2.

A quantidade de painéis é uma variável que pode ser ajustada, e influi nos resultados obtidos. Um ponto interessante sobre a implementação deste método é que os cálculos realizados desconsideram os painéis do bordo de fuga para garantir que a condi-

ção de Kutta, então é importante que estes sejam pequenos o suficiente para não afetarem muito o resultado final, por isso quanto mais painéis utilizados menor serão estes do bordo de fuga e melhores serão os resultados obtidos.

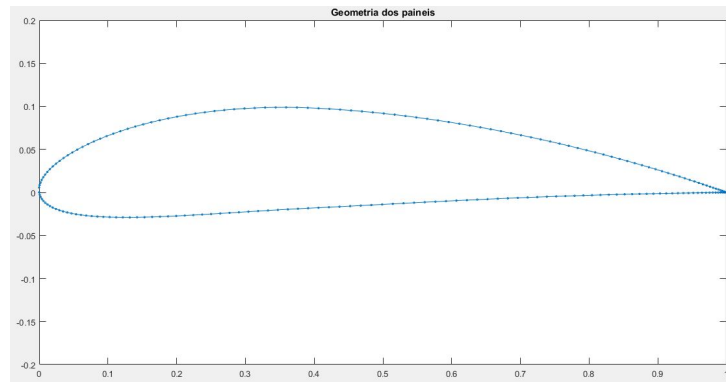


Figura 6.2: Aerofólio discretizado por painéis

Para cada uma das 10 seções são calculados os coeficientes de sustentação C_L e momento C_M e é possível obter a distribuição de pressão sobre o aerofólio. Como em um primeiro momento, todas estão na mesma condição, para todas as seções da asa vale a distribuição de pressão da figura 6.3.

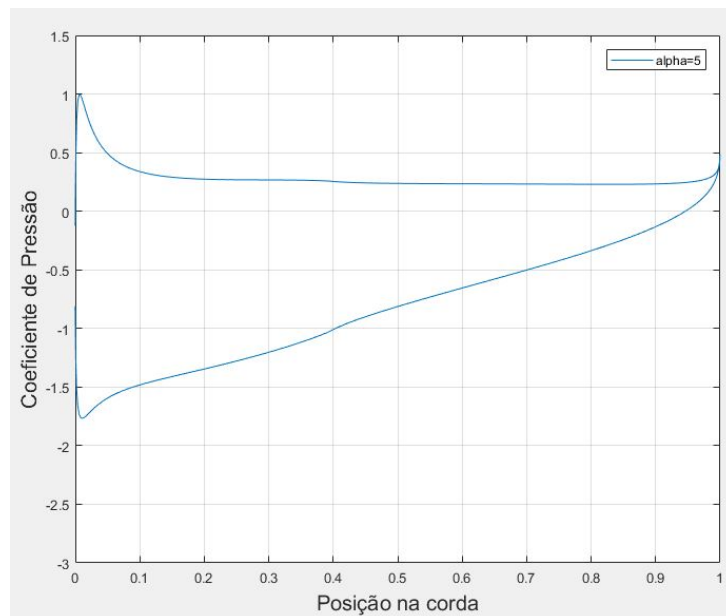


Figura 6.3: Distribuição de pressão sobre o aerofólio

Para validar os cálculos do método dos painéis é possível comparar os resultados com outro software. Para isso será utilizado o XFOIL que é um programa interativo para *design* e análise subsônica de aerofólios isolados (??) desenvolvido pelo MIT.

Os coeficientes iniciais obtidos com o programa desenvolvido e os obtidos com XFOIL nas mesmas condições estão dispostos na tabela 6.2

NACA 4412 – $\alpha=5^\circ$		
	C_L	C_M
XFOIL	1.1113	-0.1196
Método dos painéis	1.1033	-0.1084

Tabela 6.2: Comparação de resultados com XFOIL

Como é possível notar são obtidos valores muito próximos para ambos coeficientes, a diferença esta na segunda casa decimal. Desta forma, é possível afirmar que os resultados são coerentes.

Outra validação que é possível realizar é testar o C_M para diferentes ângulos de ataque, como o calculo esta sendo feito no CA, por definição ele deveria se manter constante. Na tabela 6.3 é possível ver esta análise, e de fato o coeficiente de momento não esta variando significativamente, a pequena variação é dada por conta das aproximações nos cálculos.

α	C_M
5°	-0.1084
10°	-0.1114
15°	-0.1140
20°	-0.1162
30°	-0.1175

Tabela 6.3: Comparação de coeficientes de momento variando angulo de ataque

Uma vez obtidos os coeficientes de cada seção, é possível calcular os carregamentos atuantes no CA de cada aerofólio e obter a distribuição de carregamento sobre a asa. Inicialmente aplica-se a velocidade do fluido de 10m/s.

Primeiramente, é necessário aplicar a correção na distribuição de sustentação para garantir seu formato coerente. Foi proposto testar 2 opções com as equações 5.2 e 5.3. O resultado das duas pode ser visto na figura 6.4 representadas respectivamente pela curva 1 e 2.

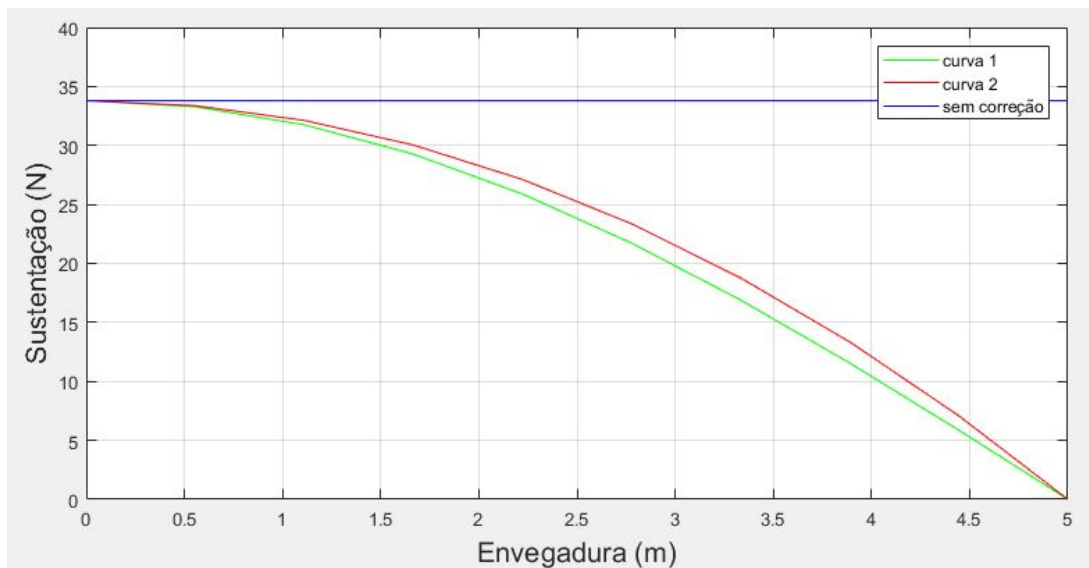


Figura 6.4: Correção da distribuição de sustentação

Como é possível observar a curva 2, dada pela equação 5.3, proporciona uma distribuição com maior sustentação próximo a ponta. Para fins de análise é mais interessante usar esta aproximação, pois representa uma situação mais crítica para a asa. Sendo assim esta que será utilizada aqui.

Com a sustentação e o momento caracterizados para cada seção, basta transportá-los do CA para o CE para fazer os cálculos estruturais. Os carregamentos iniciais que foram calculados e aplicados em cada nó estão dispostos nas tabelas 6.4 e 6.6.

Momento torcional (Nm)									
Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4	Nó 5	Nó 6	Nó 7	Nó 8	Nó 9	Nó 10
-6,70	-6,65	-6,53	-6,33	-6,03	-5,66	-5,20	-4,66	-4,03	-3,32

Tabela 6.4: Momentos obtidos para velocidade 10 m/s

Sustentação (N)									
Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4	Nó 5	Nó 6	Nó 7	Nó 8	Nó 9	Nó 10
33,79	33,39	32,14	30,06	27,14	23,38	18,79	13,36	7,10	0

Tabela 6.5: Sustentações obtidas para velocidade 10 m/s

Na análise realizada aqui, é considerado que a divergência é resultado de apenas 1 grau de liberdade, então só depende do deslocamento torcional do nó. Os resultados de torção obtidos com o MEF implementado estão dispostos na tabela ??.

Os deslocamentos obtidos então são somados aos ângulos de ataque iniciais e o processo se reinicia com um novo ângulo de ataque.

Mantendo a velocidade de 10m/s constante, sabendo que esta não é a velocidade de divergência, é possível obter a posição de equilíbrio da asa nesta velocidade. Para isso basta analisar a mudança de ângulo da asa. O ângulo de descolamento, calculado com MEF, aumenta conforme a carga também aumenta, porém chega um ponto que este começa a decair, indicando que atingiu a posição de equilíbrio.

S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
13,33°	20,76°	27,17°	32,51°	36,76°	39,95°	42,15°	43,47°	44,05°	44,05°

Tabela 6.6: Ângulo de cada seção na posição de equilíbrio para velocidade 10 m/s

Apesar desta ser uma análise interessante para se realizar em todas as velocidades anteriores a velocidade de divergência, notou-se que foi necessário um grande esforço computacional para atingir o equilíbrio. Apenas após 6539 interações (em um tempo de 4253.490 segundos) foi possível obter a configuração final da asa a 10 m/s. Seria possível mas levaria bastante tempo para realizar esta análise completa com 10 nós.

Partindo para outra análise, é possível calcular a velocidade de divergência da asa. Variando a velocidade de 1 em 1m/s e impondo a condição que a divergência é atingida quando a seção mais próxima a ponta (uma antes da ponta) atinge 90°, conclui-se que a divergência da asa para estas condições iniciais é atingida a 168 m/s.

Uma última análise interessante de se fazer é aumentar o número de seções da asa e observar os resultados.

Numero de seções	V_{div} (m/s)
10	168
50	172
75	175
100	173
125	173
150	173

Tabela 6.7: Velocidade de divergência em relação ao número de seções

Como observado na tabela 6.7, conforme aumenta-se o número de seções analisadas a velocidade de divergência converge para um valor. No caso desta análise convergiu

para 173m/s.

Mesmo sabendo que houveram muitas aproximações para nesta implementação, o resultado obtido para velocidade de divergência é um valor coerente.

7 CONCLUSÃO

Pode-se assumir que o objetivo de desenvolver uma ferramenta computacional que permite uma análise de divergência utilizando a combinação de dois métodos computacionais, foi realizado.

7.1 Trabalhos futuros

O maior valor deste trabalho esta nas possibilidades que ele abre, para os trabalhos futuros que podem ser desenvolvidos a partir deste.

Como pode ser notado a ferramenta precisa de aperfeiçoamentos para obter resultados que correspondam mais com a realidade, para isso é necessário um estudo sobre cada parâmetro da estrutura, E da asa, I e J equivalentes, para obter valores que a representem mais fielmente.

O programa apresentado estuda asas retangulares sem enflechamento mas poderia ser modificado para abranger mais casos, como de asas de seção variável.

Outra proposta de trabalho posterior a esse é adapta-lo para estudar reversões de controles que é outro fenômeno aeroelástico estático. Alem disso as funções de Método dos painéis e de MEF poderiam ser utilizadas para um novo programa que permite calcular flutter, que é uma instabilidade aeroelástica dinâmica.

São muitas as opções de trabalhos futuros para tornar esta ferramenta ainda mais rica e poderosa no ponto de vista de análise aeroelástica.

REFERÊNCIAS

- A. R. Collar, “The first fifty years of aeroelasticity,” *Aerospace*, vol. 5, 1978.
- J. R. Wright and J. E. Cooper, *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*. Blucher, 2015.
- J. Hess and A. M. O. Smith, “Calculation of potential flow about arbitrary bodies,” *Prog Aero*, 1967.
- J. D. Andreson, *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill, 2006.
- R. P.E., “Theoretical characteristics of arbitrary wings by a nonplanar vortex lattice method,” *The Boeing Co. report D6-9244*, 1964.
- Airfoiltools, “Airfoiltools - airfoil database search, plot airfoils, compare airfoils,” jul 2018.
- J. Katz and A. Ploykin, *Low-Speed Aerodynamics*. Cambridge University Press, 2001.
- D. L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method*. Thomson, 2007.
- R. M. L. F. Brasil, J. M. Balthazar, and W. Gois, *Metodos Numericos e Computacionais na Pratica de Engenharia e Cienciass*. Blucher, 2015.
- M. Drela and MIT, “Xfoil subsonic airfoil development system,” aug 2018.

ANEXO 1

Código em MatLab

```

%Trabalho de Graduação
%Giovanna Saccaro
%Universidade Federal do ABC
clc
clear all
close all

%Insira o tipo de aerofolio que quer analisar
aerof='4412';
%Insira o numero de seções a serem analisadas
NP=10;
%semi envergadura
span=5;%[m]
alpha0=5;%[graus]
RHO=1.225;%[kg/m^3]

%% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %%

TH=zeros(1,NP);
ALPHA=ones(1,NP)*alpha0;
V=1:200;
ii=1;%contador

while ALPHA(NP-1)<90

    Vinf=V(ii);

    %    ALPHA1=ALPHA;
    ALPHA=ALPHA-TH;

    %dif(Vinf,:)=ALPHA-ALPHA1

    %CARREGAMENTOS AERODINAMICOS
    %Calculo dos coeficientes aerodinamicos ecarregamentos
    % > metodo dos paines
    k=1;

    for i=1:length(ALPHA)
        alpha=ALPHA(i);

        [CL, CM,XP,YP,BA,BF,XBOT,lc,CP,CP_point,cord,t,h] =
metodopaineis(aerof, alpha);

        CPv(:,k)=CP;
        CPptv(:,k)=CP_point;
        CLv(k)=CL;
        CMv(k)=CM;
        k=k+1;
    end
    e=0.1*cord;
    %ajuste da distribuição da sustentação na asa - efeito de ponta de
asa

```

```

n=0:span/(NP-1):span;
for i=1:NP
    CLv1(i)=CLv(i)*cos(pi*(n(i))/(2*span));
end

for i=1:NP
    CLv2(i)=CLv(i)*(1-(n(i)/span)^2);
end

%Lv1=RHO*CLv1*Vinf^2*cord*span/NP/2;
%Lv2=RHO*CLv2*Vinf^2*cord*span/NP/2;
%Lv=RHO*CLv*Vinf^2*cord*span/NP/2;

L=RHO*CLv2*Vinf^2*cord*span/NP/2;

Ma=RHO*CMv*Vinf^2*cord*span/NP/2;

%Transporte das forças do CA para o CE
T= Ma -(e*L);
Lce=L;

%Momento de inercia de area
I= 0.036*cord*t*(t^2+h^2);
%Momento de inercia polar - um eixo cilindrico
J=(pi*(t/2)^4/32)+I;

%DESLOCAMENTOS NA ESTRUTURA
%Calculo dos coeficientes aerodinamicos e carregamentos
% > metodo dos Elementos finitos

[p] = estrutural(NP,span,I,J,Lce,T);
j=1;
for i=1:NP
    th(i)=p(j+2);

    j=j+3;
end

TH=rad2deg(th);

ALPHAM(ii,:)=ALPHA;
THM(ii,:)=TH;
LceM(ii,:)= Lce;
TM(ii,:)=T;
ii=ii+1;

end

disp(Vinf)

```

```

%Função método dos painéis
function [CL, CM, XP, YP, BA, BF, XBOT, lc, CP, CP_point, cord, t, h] =
metodopaineis(aerof, alpha)

%Gerador de aerofolio
iaf.designation = aerof;
iaf.n = 100;
iaf.HalfCosineSpacing = 1;
iaf.is_finiteTE = 0;
iaf.wantFile = 0;
af = naca4gen(iaf);
%Lendo os pontos
XP = [af.xU; af.xL];
YP = [af.zU; af.zL];
EP = flipud(unique([XP, YP], 'rows', 'stable'));

%%
%bordo de fuga e de ataque
k1=length(EP)/2+0.5;
k2=length(EP);
BF=EP(k1,:);
BA=EP(k2,:);

%corda
cord=( (BF(1)-BA(1))^2+(BF(2)-BA(2))^2)^0.5;

TOP= EP(1:k1,:);
XTOP= TOP(:,1);
YTOP= TOP(:,2);
BOT= EP(k1:k2,:);
BOT= flipud(BOT);
XBOT=BOT(:,1);
YBOT=BOT(:,2);
BOT=[XBOT,-YBOT];

%linha de curvatura media
lc = (YTOP + YBOT)/2 ;
%curvatura maxima
h=max(lc);
%espessura maxima
t=max(abs(YTOP-YBOT));
%Area do aerofolio
Area = trapz(XTOP,YTOP)-trapz(XBOT,YBOT);

%%

alp = deg2rad(alpha); % angulo de ataque em rad

NP = size(EP, 1) - 1; % numero de paineis
N = NP + 1; % Paineis + 1

% Posicoes de pontos dos paineis

```

```

for i = 1:NP
    % Extremidades dos paineis - PT1 é ponto1 e PT2 ponto 1 o-----o 2
    PT1(i,:) = EP(i,:);
    PT2(i,:) = EP(i+1,:);

    % angulo de cada painel - theta
    TH(i,1) = atan2(PT2(i,2) - PT1(i,2), PT2(i,1) - PT1(i,1));

    % Pontos nos centros dos paineis o--x--o
    %Ponto de controle que contem a fonte e dipolo
    cop(i,1) = (PT2(i,1) - PT1(i,1))/2 + PT1(i,1);
    cop(i,2) = (PT2(i,2) - PT1(i,2))/2 + PT1(i,2);
end

% coeficientes das fontes
for i = 1:NP
    SIG(i,1) = (cos(alp)*sin(TH(i)) - sin(alp)*cos(TH(i)));
end

%encontrando a influencia de cada painel sobre outro
% o painel i esta sendo "influenciado" e j são os outros paineis
%ex: para o painel 1 encontra-se a influencia do painel 1 até o painel NP
%     e passa para o painel 2, para achar a influencia de 1 ate NP sobre
%     este. e assim por diante.
DL = [];
for i = 1:NP
    TEMP = 0;
    for j = 1:NP

        % transformado as coordenadas dos outros pontos(paineis),
        % para coordenada do painel em questão
        XT = cop(i,1) - PT1(j,1);
        YT = cop(i,2) - PT1(j,2);
        X2T = PT2(j,1) - PT1(j,1);
        Y2T = PT2(j,2) - PT1(j,2);
        X = XT*cos(TH(j)) + YT*sin(TH(j));
        Y = -XT*sin(TH(j)) + YT*cos(TH(j));
        X2 = X2T*cos(TH(j)) + Y2T*sin(TH(j));
        Y2 = 0;

        %armazena as posições dos paineis
        if i == j
            DL(j) = X2;
        end

        % tamanho das linhas
        R1 = sqrt(X^2 + Y^2);
        R2 = sqrt((X - X2)^2 + Y^2);
        %angulos
        TH1 = atan2(Y,X);
        TH2 = atan2(Y,X-X2);

        if i == j %para o painel influenciando ele mesmo:

```

```

        A(i,j) = 0.5;
    else % caso contrario:
        A(i,j) = -(1/(2*pi))*(TH2-TH1);
    end

    if i == j
        TEMP = TEMP + SIG(j)/pi*(X*log(R1));
    else
        TEMP = TEMP + SIG(j)/(2*pi)*(X*log(R1)-(X-X2)*log(R2)+Y*(TH2-
TH1));
    end

end

% colocando os coeficiente de cada painel numa matriz
XW = cop(i,1) - PT2(NP,1);
YW = cop(i,2) - PT2(NP,2);
DTHW = -atan(YW/XW);
A(i,N) = -(1/(2*pi))*DTHW;
A(i,N+1) = TEMP;

end

%condição Kutta
for i = 1:N+1
    A(N,i) = 0;
end

A(N,1) = -1;
A(N,NP) = 1;
A(N,N) = -1;
N = N + 1;

% resolvendo a intensidade dos dipolos em cada painel
sig = A(:,1:N-1)\A(:,N);

% Encontra a velocidade no meio do painel para calcular a pressão
for i = 1:NP
    PHI(i) = cop(i,1)*cos(alp) + cop(i,2)*sin(alp) + sig(i);
end

for i = 1:NP - 1
    R = (DL(i+1) + DL(i))/2;
    VEL = (PHI(i) - PHI(i+1))/R;
    CP(i) = 1 - VEL^2;
    CP_point(i) = PT2(i,1);

    c(i) = (sqrt(sum((PT2(i,:)-PT1(i,:)).^2))); %comprimento dos paineis

    % contribuição de cada painel para sustentação L
    deltaL(i) = -CP(i).*(sqrt(sum((cop(i+1,:)-
cop(i,:)).^2)))*cos(TH(i))./c(i);

```

```

% cl de cada painel
deltaCL(i) = deltaL(i)*c(i);

% contribuição de cada painel para o momento(1/4 da corda)
deltaCM(i) = -deltaCL(i)*((cop(i,1)-0.25)*cos(alp));
end

%cl total
CL =sum(deltaCL);

%cm total
CM = sum(deltaCM);

```



```
%METODO DOS ELEMENTOS FINITOS- esta função calcula os deslocamentos em
uma
%viga dividida em NE elementos com NP nós. Os deslocamentos calculados
são
%a flexão| torção| momento em relação a raiz.
```

```
%autor:Giovanna Saccaro
```

```
%% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %%
```

```
function [p] = estrutural(NP,span,I,J,Lce,T)
```

```
%NP%número de nós
```

```
%numero de elementos
```

```
% NP=4;
```

```
NE=NP-1;
```

```
% span=3;
```

```
% I=1e-7;
```

```
% diam=0.1;
```

```
% J=pi*diam^4/32;
```

```
nglpn=3;%número de graus de liberdade por nó
```

```
nds=NP*nglpn; %número de deslocamentos do sistema
```

```
Nnel=2; %número de nós por elemento
```

```
Ndpel=Nnel*nglpn;%número de deslocamentos por elemento
```

```
%propriedades dos materiais
```

```
E= 70e9;% Módulo de elasticidade de cada barra [Pa]
```

```
%nu=0.32; % coeficiente de Poison
```

```
G=26.5e9;%E/(2*(1+nu)); %mod. Cisalhamento
```

```
m=0:span/(NE):span;%n;
```

```
%
```

```
%
```

```
%coordenadas X dos nós da viga
```

```
for i=1:NP
```

```
    Coord(i)=m(i);
```

```
end
```

```
%conectividade por elemento (n. dos nós de cada elemento)
```

```
%
```

```
for i=1:NE
```

```
    nodel(i,:)=[i i+1];
```

```
end
```

```
%
```

```
% matriz de número de graus de liberdade por nó
```

```
%
```

```
LN=zeros(NP,nglpn);
```

```
%
```

```
%Condições de Contorno
```

```
%(n. de nó restrito e direções restritas ou livres)
```

```
%se fixa = -1; se livre = 0
```

```
%%nos com todos deslocamentos livres não precisa nem declarar
```

```
LN(1,:) = [-1 -1 -1]; % viga engastada no primeiro nó
```

```
EM = ones (NE, 1) * E';
```

```
Ie = ones (NE, 1) * I';
```

```
Je = ones (NE, 1) * J';
```

```
%%
```

```
%Determinação das Matrizes
```

```
%matriz LN
```

```
ngl=0;
```

```
for i=1:NP
```

```
    for j=1:nglpn
```

```
        if LN(i,j) == 0
```

```
            ngl=ngl+1;
```

```
            LN(i,j)=ngl;
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end
```

```
ngr=ngl;
```

```
for i=1:NP
```

```
    for j=1:nglpn
```

```
        if LN(i,j) < 0
```

```
            ngr=ngr+1;
```

```
            LN(i,j)=ngr;
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end
```

```
%inicialização de matrizes e vetores
```

```
K=zeros (nds, nds);
```

```
p=zeros (nds, 1);
```

```
P=zeros (nds, 1);
```

```
%Vetor de Carregamento
```

```
P=ones (NP*3, 1) * 10;
```

```
j=1;
```

```
for i=1:NP
```

```
    P(j)=Lce(i);
```

```
    P(j+1)=Lce(i)*Coord(i); %momento em relação a raiz
```

```
    P(j+2)=T(i);
```

```
    j=j+3;
```

```
end
```

```
%Matriz de rigidez
```

```
for iel=1:NE
    for j=1:Nnel
        nd(j)=ndel(iel,j);
    end
    xini=Coord(nd(1));
    xfim=Coord(nd(2));
    L=abs(xfim-xini);
    %
    I=Ie(iel);
    E=EM(iel);
    J=Je(iel);
    k=[12*E*I/L^3 6*E*I/L^2 0 -12*E*I/L^3 6*E*I/L^2 0;
        6*E*I/L^2 4*E*I/L 0 -6*E*I/L^2 2*E*I/L 0;
        0 0 G*J/L 0 0 -G*J/L
        -12*E*I/L^3 -6*E*I/L^2 0 12*E*I/L^3 -6*E*I/L^2 0;
        6*E*I/L^2 2*E*I/L 0 -6*E*I/L^2 4*E*I/L 0;
        0 0 -G*J/L 0 0 G*J/L];
    %Matriz Global
    %
    kl=0;
    for n=1:Nnel
        kl=kl+1;
        d(kl)=LN(nd(n),1);
        kl=kl+1;
        d(kl)=LN(nd(n),2);
        kl=kl+1;
        d(kl)=LN(nd(n),3);
    end
    for i=1:Ndpel
        for j=1:Ndpel
            K(d(i),d(j))=K(d(i),d(j))+k(i,j);
        end
    end
end
```

```
% Solução do sistema
```

```
%
A=K(1:ngl,1:ngl);
b=(P(1:ngl)-K(1:ngl,ngl+1:nds)*p(ngl+1:nds));
p(1:ngl)=gausspivo(A,b,ngl);
%
```

```

%% Função Gauss Pivo

function f=gausspivo(A,b,n)
% solução sistemas lineares
% método de Gauss com pivotamento
%

% eliminação de Gauss
%
for k=1:n-1
    %inicio pivotamento
    p=k;
    grande=abs(A(k,k));
    for ii=k+1:n
        aux=abs(A(ii,k));
        if aux>grande
            grande=aux;
            p=ii;
        end
    end
    if p ~= k
        for jj=k:n
            aux=A(p,jj);
            A(p,jj)=A(k,jj);
            A(k,jj)=aux;
        end
        aux=b(p);
        b(p)=b(k);
        b(k)=aux;
    end
    %
    % fim pivotamento
    %
    for i=k+1:n
        const=A(i,k)/A(k,k);
        for j=k:n
            A(i,j)=A(i,j)-const*A(k,j);
        end
        b(i)=b(i)-const*b(k);
    end
end
%
% retrossubstituição
%
x(n)=b(n)/A(n,n);
for i=n-1:-1:1
    s=0;
    for j=i+1:n
        s=s+A(i,j)*x(j);
    end
    x(i)=(b(i)-s)/A(i,i);
end
%
%resultado
f=x;

```