微积分下册

——习题集

智达社

2022 年 2 月 24 日

前言

此资料源自对课本的总结整理，请在学习好课堂基础知识的基础上阅读这份资料，你将会有不一样的收获。

写于 2022 年春节前一天

2022.1.31

目录

第五章　向量代数与空间解析几何

1) 两个向量数量积的定义

2) 两个向量向量积的定义

3) 两个向量垂直的充要条件以及平行的充要条件

4) 平面方程是怎样的方程，以及平面方程的所有形式（三种形式）

5) 直线方程是怎样的方程，以及直线方程的所有形式（四种形式）

6) 直线和平面的两种特殊位置关系：垂直与平行

7) 已知直线的一般形式，怎样写出过已知直线的平面束的方程

8) 已知直线的点向式方程形式，怎样写出过已知直线的平面束的方程

9) 已知一条直线方程和一个平面的方程 (两者相交)，怎样求出交点坐标

10) P.144, 例题 3 中的 “半球体”、p. 146 页例题 4 中的 “圆锥面和上半球面所围成的闭区域”，p.147 页例题 5 中的 “球面与内接锥面所围成的立体”。

5.1　答案请自行整理

第六章　多元函数微分学

6.1　五个经典的二元函数

例 6.1.1. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 *(0,0)* 处是否连续、可求偏导、可全微分.

证明*:*

记

$$E_1=\{(x,0)\mid x\in\mathbf{R},x\neq 0\},E_2=\{(x,x)\mid x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$$

则在 $(x,y)\in E_1(x,y)\to(0,0)$ 时,

$$f(x,y)=f(x,0)=0\to 0$$

又在 $(x,y)\in E_2$ $(x,y)\to(0,0)$ 时,

$$f(x,y)=f(x,x)=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$$

由于 $f(x,y)$ 趋于两个不同的常数

故当 $(x,y)\to(0,0)$ 时

$f(x,y)$ 的极限不存在, 即 $f(x,y)$ 在点 (*0,0*) 处不连续.

由偏导数的定义, 知

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

所以函数 $f_(x,y)$ 在点（*0,0*）处可偏导.

根据可微分的必要条件得，函数在点（*0,0*）处不可微.

例 6.1.2. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点（*0,0*）处的连续性，是否可偏导，是否可微分

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$|f(x,y)|=\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

因 $(x,y)\to(0,0)$

则

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\to 0$$

即

$$f(x,y)\to 0$$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时,

$$f(x,y)=0$$

综上, $f(x,y)$ 在 *(0,0)* 处连续.

$$\begin{aligned}f_x(0,0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{\Delta x^2+0}}-0}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0\end{aligned}$$

由表示式中 x, y 的对称性知

$$f_y(0,0) = 0$$

故 $f(x,y)$ 在 *(0,0)* 处可偏导且 $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$ 均为 0.

$$\Delta z - \mathrm{d}z = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta z - \mathrm{d}z}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

易知上述极限不存在，故在点（*0,0*）处不可微.

例 6.1.3. 证明函数

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

在点（*0,0*）连续且偏导数存在，但偏导数在（*0,0*）不连续，而 f 在点（*0,0*）可微.

证明*:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \rho^2 \sin\frac{1}{\rho} = 0 = f(0,0)$$

因此 f 在点 *(0,0)* 连续.

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x} = 0$$

同理可得

$$f_y(0,0) = 0$$

所以函数 $f(x,y)$ 在（0,0）处存在偏导数.

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{\rho} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$$

所以 f 在点（0,0）可微且 $\mathrm{d}f|_{(0,0)} = 0$

例 6.1.4. 证明函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点（0,0）的连续性、是否可偏导、是否可全微分.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2} = 0 = z(0,0)$$

所以函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点（0,0）连续.

由于当 $\Delta x\to 0$ 时,

$$\frac{z(0+\Delta x,0)-z(0,0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

极限不存在，因而 $z=(x,y)$ 在点（0,0）关于 x 的偏导数不存在

同理可证它关于 y 的偏导数也不存在

根据可微分的必要条件得，函数在点（0,0）处不可微

例 6.1.5. 证明函数 $f(x,y)=z=xy$ 在点（0,0）的连续性、是否可偏导、是否可全微分

证明:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$$

即函数 z 在点（0,0）处连续

由偏导数定义可得

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

所以函数 $f_(x,y)$ 在点（*0,0*）处可偏导.

$$\Delta z-\mathrm{d}z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y=\Delta x\Delta y$$

从可微分的必要条件考虑:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-\mathrm{d}z}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

易知上述极限为 *0*，故函数在点（*0,0*）处可微.

从可微分的充分条件考虑:

f 对 x 的偏导数

$$f_x=y$$

f 对 x 的偏导数

$$f_y=x$$

显然 f 的偏导数在点 $(0,0)$ 处连续，即 f 在点（*0,0*）处具有连续的偏导数

故函数在点（*0,0*）处可微.

6.2　几个经典例题

例 6.2.1. 写出 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 点的极限.

定义：设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 $D,P_0\,(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，如果存在常数 A, 使得对于任意给定的正数 ε, 总存在正数 δ, 只要点 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}\ (P_0,\delta)$, 就有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $P(x,y)$(在 D 上) 趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时的极限, 记作

$$\lim_{p\to P_0} f(P)=A, \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

例 6.2.2. 写出 $z=f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续的定义及其性质.

定义: 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 $D, P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，且 $P_0(x_0,y_0)\in D$
如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续, 如果 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续, 则称 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处间断 (P_0 称为 $f(x,y)$ 的间断点) 如果 D 是区域且 $f(x,y)$ 在 D 的每一点处都连续, 则称 $f(x,y)$ 在 D 上连续或者称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数, 记作 $f\in C(D)$.

例 6.2.3. $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 两个偏导数的定义.

定义：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义, 当 y 固定在 y_0, 而 x 在 x_0 处取得增量 Δx 时，函数相应的取得增量 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,,y_0)$，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x 的偏导数, 记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}, \left.z_x\right|_{(x_0,y_0)}, \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \text{ 或} f_x(x_0,y_0).$$

类似地固定 $x=x_0$, 如果

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在, 则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 y 的偏导数, 记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}, \left.z_y\right|_{(x_0,y_0)}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \text{ 或} f_y(x_0,y_0)$$

当函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 同时存在对 x 与对 y 的偏导数时, 简称 $f(x,,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可偏导. 如果函数 $z=f(x,y)$ 在某平面区域 D 内的任一点 (x,y) 处都存在对 x 或对 y 的偏导数, 那么这些偏导数仍然是 x,y 的函数, 我们称它们为 $f(x,y)$ 的偏导函数, 记作 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},f_x(x,y),f_y(x,y),z_xz_y$ 等. 在不致产生误解时, 偏导函数也简称为偏导数 *(partial derivative)*.

例 6.2.4. 写出 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 点可微的定义. 定义：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义, 如果函数在点 (x_0,y_0) 处的全增量

$$\Delta z=f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)$$

可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

其中 A,B 是不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 的两个常数 (但一般与点 (x_0,y_0) 有关), $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微, 并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分 *(total differential)*, 记作 $\mathrm{d}z$, 即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$$

习惯上, 自变量的增量 Δx 与 Δy 常写成 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$, 并分别称为自变量 x,y 的微分, 所以 $\mathrm{d}z$ 也常写成

$$\mathrm{d}z=A\ \mathrm{d}x+B\ \mathrm{d}y$$

当區数 $z=f(x,y)$ 在某平面区域 D 内处处可微时, 称 $z=f(x,y)$ 为 D 内的内数.

例 6.2.5. 例举出一个二元函数满足在点 $P(x_0,y_0)$ 连续，但是不存在偏导数.

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

例 6.2.6. 例举出一个二元函数满足在点 $P(x_0,y_0)$ 存在偏导数，但不连续.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

例 6.2.7. 例举出一个二元函数满足在点 $P(x_0,y_0)$ 连续，存在两个偏导数，但是不可微.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

例 6.2.8. 例举出一个二元函数满足在点 $P(x_0,y_0)$ 可微分.

$f(x,y)=z=xy$

例 6.2.9. 关于多元函数求偏导

$$设:u=f(x,y,z),z=x^2\sin y\ 求\ \frac{\partial u}{\partial x}和\frac{\partial u}{\partial y}$$

问：几个变量，几个中间变量，最后确定一个几元函数.

答：两个变量，一个中间变量，最后确定一个二元函数

例 6.2.10. 隐函数求导数

$$设f(x,y)=\begin{cases}xu-yv=0\\ yu+xv=1\end{cases}\ 求\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$$

问：几个方程，几个变量，最后确定几个几个几元函数答：两个方程，两个变量，最后确定两个二元函数

例 6.2.11. 证明函数 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值，但无极小值.

证明.

$$f_x=(1+\mathrm{e}^y)(-\sin x),f_y=(\cos x-1-y)\mathrm{e}^y.\ 令f_x=0\ ,$$

$f_y = 0$, 解方程, 可得无穷多个稳定点 $(x_n, y_n) = (n\pi, \cos n\pi - 1)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

当 $n =$ 偶数时, 在 (x_n, y_n) 上

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy} = 2 > 0, f_{xx} = -2 < 0$$

故 f 在 $(2k\pi, 0)$ 上取极大值 $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,

当 $n =$ 奇数时，在 (x_n, y_n)

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy} = -\left(1 + e^{-2}\right)\mathrm{e}^{-2} < 0$$

此处无极值. 总之, f 有无穷多个极大而无极小. □

第七章　多元函数积分学

7.1　六类积分的基础知识

1. 二重积分

符号表示为：$\underline{\iint_D f(x,y)dxdy}$

积分区域：$\underline{XOY}$ <u>上的平面曲边形</u>

(1) 它的几何意义是：<u>曲顶柱体的体积的代数和</u>

这时，被积函数的意义是：<u>曲顶柱体的底面</u>

$\iint_D dxdy = \underline{S_D}$

(2) 它的物理意义是：<u>密度不均匀的几何体的质量的代数和</u>

这时，被积函数函数的意义是：<u>面密度函数 $\rho(x,y)$</u>

$\iint_D dxdy = \underline{S_D}$

2. 三重积分积分

符号表示为:$\underline{\iiint_\Omega f(x,y)dxdy}$

积分区域是：<u>空间立体区域Ω</u>

它的物理意义是：<u>物理空间内不均匀几何体的质量的代数和</u>

这时，被积函数的意义是：<u>体密度函数</u>

$\iiint_\Omega dxdydz = \underline{V_\Omega}$

3. 第一类曲线积分

又叫：<u>对弧长的曲线积分</u>

符号表示为：$\underline{\int_L f(x,y)ds}$

积分区域为：弧长 L

(1) 它的几何意义为：柱面面积代数和

被积函数的意义是：高 $f(x_0, y_0)$

$\int_L =$ 弧长L

(2) 它的物理意义是:曲线构件质量的代数和

被积函数的意义是：线密度

$\int_L ds =$ 弧长L

4. 第二类曲线积分

又叫:对坐标的曲线积分

符号表示为：$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

积分区域是：定向曲线弧 L

它的物理意义是：变力沿曲线运动所作的功的代数和

被积函数的意义是：变力 F

**** 第二类曲线积分的特点是：有向性，可加性，线性性质

5. 第一类曲面积分

又叫对面积的曲面积分

符号表示为：$\iint_\Sigma f(x, y, z)ds$

积分区域是：曲面 Σ

它的物理意义是：光滑区面型构件质量的代数和

被积函数的物理意义是：面密度

$\iint_\Sigma ds = S_\Sigma$

6. 第二类曲面积分

又叫:向量值函数在定向区面上的积分

符号表示为：$\iint_\Sigma F(x, y, z)ds$

积分区域是：定向曲面 Σ

它的物理意义是：流体流向一侧的流量的代数和

被积函数的物理意义是：流体流动的速度函数

第二类曲面积分的特点是：有向区面

7. 格林公式的条件是

*a.*区域 D 为单连通，即连续

*b.*组成区域 D 的曲线连续

*c.*曲线 L 具有正向规定

*d.*被积函数具有连续一阶连续偏导数

格林公式为：

$$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

格林公式把二重积分与定向边界曲线积分联系到一起，格林公式应用为：化第二类曲线积分为二重积分

在下列条件下

*a.*积分曲线的积分区域封闭

*b.*积分区域 D 好算

c.$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C$

8. 举出一个二重积分的例子及其解答并背诵

计算 $\iint_D xydxdy$, 其中 D 是由直线 $y = x - 1$ 和抛物线 $y^2 = 2x + 6$ 所围成的闭区域

$$D = \{(x,y) \mid \frac{1}{2}\left(y^2 - 6\right) \leq x \leq y + 1, -2 \leq y \leq 4\}$$

于是得

$$\iint_D xy \mathrm{~d}x \mathrm{~d}y = \int_{-2}^{4} \mathrm{~d}y \int_{\frac{1}{2}(y^2-6)}^{y+1} xy \mathrm{~d}x = \int_{-2}^{4} \left(-\frac{y^5}{8} + 2y^3 + y^2 - 4y\right) \mathrm{d}y = 36$$

9. 举出一个利用格林公式计算的例题及其解答并背诵。

设 D 是不含原点的有界闭区域 L 是 D 的正向光滑边界求

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

解　令 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}, Q=\frac{x}{x^2+y^2}$, 则当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

即

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

7.2　多元函数积分学例题

例 7.2.1. 写出二重积分的定义

定义: 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数. 将闭区域 D 任意划分成 n 个小闭区域

$$\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$$

并用 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域 ΔD_i 的面积. 在每个 ΔD_i 上任取一点 (ξ_i,η_i), 作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$, 并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$. 如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时, 这和的极限存在, 则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分 (*double integral*), 记作 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 即

$$\iint f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

其中 $f(x,y)$ 叫做被积函数, $f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 叫做被积表达式, $\mathrm{d}\sigma$ 叫做面积元素, x 与 y 叫做积分变量, D 叫做积分区域, $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 做积分和 (黎曼和).

例 7.2.2. 写出二重积分的几何意义，物理意义，以及计算二重积分的指导思想，步骤

几何意义：空间几何体的体积

物理意义：平面薄片的质量

指导思想：将二重积分化为二次积分

步骤：画出平面区域，按 x 或 y 形区域写出不等式，将二重积分化为二次积分，计算得结果

例 7.2.3. 写出三重积分的物理意义，以及计算三重积分的指导思想，步骤
物理意义：空间几何体的质量

指导思想：将三重积分化为二重积分加一个定积分或者一个定积分加二重积分，进一步化为三次积分

步骤：画出区域，将二三重积分化为二重积分加一个定积分或者一个定积分加二重积分，进一步化为三次积分或者一个定积分，计算得结果

例 7.2.4. 三重积分有几种坐标系？什么时候利用柱面坐标系计算三重积分？什么时候利用球面坐标系计算三重积分？

两种坐标系：直角坐标系，柱面坐标系，球形坐标系。

当被积函数或者区域内含有柱面或者柱面的一部分时

当被积函数或者区域内含有球面或者球面的一部分时

例 7.2.5. 计算二重积分和三重积分的关键点是什么？画出区域，写出不等式，将重积分化为多层定积分

例 7.2.6. 计算下列二重积分或三重积分：

(*1*) 计算 $\iint_D xdxdy$, 其中 D 是由直线 $y=1$，$x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域

知 D 可表示为

$$D=\{(x,y)|1\leq y\leq x,1\leq x\leq 2\}$$

得

$$\iint_D x\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_1^2\ \mathrm{d}x\int_1^t x\ \mathrm{d}y=\int_1^2 x(x-1)\mathrm{d}x=\frac{5}{6}$$

(*2*) 计算 $\iint_D xydxdy$, 其中 D 是由直线 $y=x-1$ 和抛物线 $y^2=2x+6$ 所围成的闭区域

$$D=\{(x,y)\mid \frac{1}{2}\left(y^2-6\right)\leq x\leq y+1,-2\leq y\leq 4\}$$

于是得

$$\iint_D xy\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_{-2}^{4}\ \mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}(y^2-6)}^{y+1} xy\ \mathrm{d}x=\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^5}{8}+2y^3+y^2-4y\right)\mathrm{d}y=36$$

(3) 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, 其中 D 是由 $x^2+y^2=4$ 和 $x^2+y^2=9$ 所围成的圆环形区域

解:

$$D=\{(\rho,\varphi)\mid 2\leq\rho\leq 3,0\leq\varphi\leq 2\pi\}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\rho$$

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y&=\iint_D \rho^2\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_2^3\rho^2\ \mathrm{d}\rho\\&=\int_0^{2\pi}\frac{19}{3}\ \mathrm{d}\varphi=\frac{38\pi}{3}.\end{aligned}$$

(4) 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分，并求值

$$\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}(x^2+y^2)dy$$

$D=\{(\rho,\varphi)\mid 0\leq\rho\leq 2\cos\varphi,0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\}$

原式 $=$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2\rho d\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{3}{4}\pi$$

(5) 计算 $\iiint_\Omega ydxdydz$, 其中 Ω 是由三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的区域

$$\iiint_\Omega ydxdydz=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\iint_D ydxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}y(1-2y)^2dy=-\frac{9}{32}$$

(6) 计算 $\iiint_\Omega z^2dxdydz$, 其中 Ω 为椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$

$$\iint_\Omega z^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z=\int_{-c}^{c}z^2\ \mathrm{d}z\iint_{\Omega_z}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\pi ab\int_{-c}^{c}z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

以及计算 $\iiint_\Omega zdxdydz$，$\iiint_\Omega dxdydz$，$\iiint_\Omega x+y^2+z^3dxdydz$ 由对称性易知

$$\iiint_\Omega zdxdydz = 0$$

$$\iiint_\Omega dxdydz = \frac{4}{3}\pi abc$$

$$\iiint_\Omega (x+y^2+z^3) = \frac{4}{15}\pi ab^3c$$

例 7.2.7. 利用二重积分怎样计算曲面的面积？

曲面面积积分公式 dS 可视为一个平面

知道平面在 XOY 平面 *(*或其他坐标轴平面*)* 的投影的面积 $dxdy$ 及 dS 平面与 XOY 平面的夹角

则 dS 平面面积为投影面积 $dxdy\times$ 夹角的余弦值 *(*你可以画一两个相交平面体会*)*

现在的问题就只是求夹角的余弦值

根据曲面方程 $f(x,y,z)$ 可以得到 (x,y,z) 点对应的法向量 (fx,fy,fz)

因为 XOY 平面法向量为 $(0,0,1)$

所以 dS 平面与 XOY 平面的夹角余弦值 = 两向量积/两向量的模之积

至此，证明了通过 $dxdy$ 可求 dS

要求整个曲面面积，即是在积分区域上对 dS 积分，

即在整个曲面在 XOY 平面上的投影区域上对 $dxdy\times$ 乘夹角的余弦值积分

例 7.2.8. 证明：半径为 R 的球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

证明. 即求 $\iiint_\Omega dxdydz$, 其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$

$\iiint_\Omega dxdydz{=}\int_0^{2R}dz\pi(R^2-z^2)=\int_0^{2R}\pi(R^2-z^2)dz=\frac{4}{3}\pi R^3$ □