海森堡测不准原理

Yiheng Liu

1 海森堡测不准原理

海森堡不确定性原理是量子力学中的一个基本原理，由德国物理学家维尔纳 · 海森堡于 1927 年提出。该原理表明，对于一对共享相空间的物理量，例如位置和动量，无法同时精确测量它们的值。而在调和分析研究中它有好几个变体，现在我们介绍几个。

定理 1.1. 设函数 ψ 是 $S(\mathbb{R})$ 的速降函数，并且满足归一化条件 $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx = 1$, 则满足以下不等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi(x)|^2)(\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2|\psi(\xi)|^2d\xi) \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

且等式成立当且仅当 $\psi(x) = Ae^{-Bx^2}, B > 0$, 且 $|A|^2 = \sqrt{2B/\pi}$ 且我们可以得到

$$(\int_{-\infty}^{\infty}(x-x_0)^2|\psi(x)|^2)(\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-\xi_0)^2|\psi(\xi)|^2d\xi) \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

对于任意 $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$

证明. 证明第一个等式，已知 $\int|\psi|^2 = 1$, 且知道 ψ ψ' 是速降函数，且其分布积分给出

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{d}{dx}|\psi(x)|^2dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty}(x\psi'(x)\overline{\psi(x)} + x\overline{\psi'(x)}\psi(x))dx$$

其中细节处理为, 由于 $\psi(x)$ 为速降函数，被多项式之一控制下降速度，则

$$x|\psi(x)|^2|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

而由于 $|\psi|^2=\psi\overline{\psi}$，则

$$1\le 2\int_{-\infty}^{\infty}|x||\psi(x)||\psi'(x)|dx$$

$$\le 2(\int_{-\infty}^{\infty}x^2|\psi(x)|^2dx)^{\frac{1}{2}}(\int_{-\infty}^{\infty}|\psi'(x)|^2dx)^{\frac{1}{2}}$$

利用 $Cauthy-Schwarz$ 不等式，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi'(x)|^2dx=4\pi^2\xi^2|\overline{\psi}(\xi)|^2d\xi$$

此时利用 Fourier 变换的性质以及 Plancherel 公式，则证明完了定理中的不等式。而若等式成立，那么我们用 Cauthy-Schwarz 不等式，最终我们发现 $\psi'(x)=\beta x\psi(x)$，对于某常数 β，解该 ODE 发现 $\psi(x)=Ae^{\beta x^2/2}$，A 是常数，由于我们希望 ψ 是速降函数，我们设 $\beta=-2B<0$，由于归一化条件 $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx=1$，我们发现 $|A|^2=\sqrt{2B/\pi}$. □

聊一下物理背景，假设我们设有一个电子从一个直线上运动，那么它的状态函数 (state function) 为 ψ，我们假设它是速降函数，那么它的位置并不是一个确定值 x，而是一个概率分布。其分布在区间 (a,b) 中的概率为 $\int_a^b|\psi(x)|^2dx$，而它的动量则为其傅立叶变换后的函数，于是

$$(\text{位置})\times(\text{动量})\ge\frac{\hbar}{16\pi^2}$$

由于我们知道高斯函数

$$f(x)=ae^{-b\pi|x|^2}$$

是属于 Schwarz 函数类，而且由于傅立叶变换是 $S(\mathbb{R})$ 的同胚映射，且高斯函数是该连续映射的不动点。我们可以看到以下推论

定理 1.2. 设 f 是一个 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，若存在 $c,a,b>0$，使得

$$|f(x)|\le ce^{-a\pi|x|^2}$$

$$|f(\xi)|\le ce^{-b\pi|\xi|^2}$$

那么

$$f=0;\ ab>1$$

$$f=ce^{-a\pi|x|^2};\ ab=1$$

证明. 我们由题可知 $f \in L^1(R)$, 于是它的傅立叶变换积分是有意义的。

$$|f(\xi)| = |\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx| \leq ce^{-b\pi|x|^2}$$

可知以上的高斯函数也是正态分布的函数，所以

$$\int_{\mathbb{R}} ce^{-a\pi|x|^2}dx = \frac{c}{\sqrt{a}}$$

$$\int_{\mathbb{R}} ce^{-b\pi|x|^2}dx = \frac{c}{\sqrt{b}}$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2)(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|f(\xi)|^2 d\xi) \geq \frac{s}{16\pi^2};\ \ s$$

由于

$$\int_{\mathbb{R}} x^2e^{-a\pi|x|^2}dx = \frac{1}{4\pi a}$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2e^{-b\pi|x|^2}dx = \frac{1}{4\pi b}$$

得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2)(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|f(\xi)|^2 d\xi) \leq \frac{s}{16\pi^2 ab}$$

当 ab>1 时，设 $\sigma = \frac{1}{2a}$，可得到

$$f_\sigma(x) = O(e^{-\frac{1}{2}x^2}), \hat{f}_\sigma(\xi) = O(e^{-2ab\xi^2})$$

由于 $ab > 1$，则 $\hat{f}_\sigma(\xi) = O(e^{-2ab\xi^2})$, 则这时

$$f_\sigma(x) = f_\sigma\hat{(}x) = ce^{-\frac{1}{2}x^2}$$

则此时 $f = 0$. 当 $ab = 1$，换元 $\zeta = \xi + i\phi \in \mathbb{C}$

$$\hat{f}(\zeta) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix(\xi+i\zeta)}dx$$

该积分绝对以及一致收敛当 $|\zeta| \leq A$,

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq C\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+x\zeta} \leq Ce^{b\zeta^2}$$

于是

$$\hat{(}f)(\zeta) = O(e^{b\zeta^2}), \hat{f}(\xi) = O(e^{b\xi^2})$$

于是定理成立该性质是测不准原理的推论。揭示了高斯函数是 $\mathbb{R}^n$ 上可积性质与傅立叶变换性质的中间点 □

以下是十分具有物理意义的一个测不准原理推论

定理 1.3. *若 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, 则 ψ 不在任意开集中恒为 0, 除非 $\psi = 0$.*

证明. 由于 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, 于是它的傅立叶变换积分有意义，且

$$f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx$$

而由于 ψ 是具有紧支集的函数，于是设其紧支集为 K，那么

$$f(\xi) = \int_{K} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx$$

由于该函数为复解析函数，而由于非零复解析函数的零点孤立性即

$$Lemma$$

若 f 是 D 上的解析函数，设集合 $B = f^{-1}(0)$, 若

$$d_D(B) = \{z \in D; \text{z 是 B 在 D 中的极限点}\} \neq \emptyset$$

那么 $f(z)|_D = 0$ 于是定理成立。 □

这个定理告诉我们，如果粒子仅仅在有限的地方分布，那么它的速度可能是无限大的。