



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Факультет космических исследований

Курсовая работа
Моделирование радиоизлучения от сверхновых и их остатков

Выполнил студент 3 курса специалитета Заворохин Илья Владимирович
Научный руководитель: к. ф-м. н. Бакланов Петр Валерьевич

Москва, 2024

Содержание

1	Введение	2
2	Сверхновые	3
3	Радиоизлучение от сверхновых	4
3.1	Радионаблюдения сверхновых	4
3.2	Синхротронное излучение	6
4	Остатки сверхновых	7
4.1	Стадия 1. Свободный разлёт	7
4.2	Стадия 2. Адиабатическое расширение	8
4.3	Стадия 3. Стадия снегоочистителя	9
5	Заключение	9
	Список литературы	10
A	Приложение. Ударные волны в ударной трубе	10
A.1	Задача Римана о распаде произвольного разрыва	10
A.2	Основные гидродинамические уравнения	10
A.3	Соотношения на границах областей	11
A.4	Тест Сода	13

1 Введение

Исследование сверхновых **РВ: (СН)** – **добавить описание сокращения** оказывает огромное влияние на развитие представлений учёных о фундаментальных явлениях происходящих в звёздах, о происхождении тяжёлых элементов, а также для исследования динамики эволюции всей Вселенной. Наблюдения вспышек звезд с Земли начались ещё за несколько тысячелетий до нашей эры. В отличие от вспышек обыкновенных новых звезд вспышки сверхновых в современном состоянии нашей Галактики — явление крайне редкое, происходящее не чаще чем раз в 100 лет. Наиболее яркими были вспышки в 1006 и 1054 годах, сведения о них содержатся в китайских и японских трактатах. В 1572 году вспышку такой звезды в созвездии Кассиопеи наблюдал выдающийся астроном Тихо Браге, последним же, кто следил за явлением сверхновой в созвездии Змееносца в 1604 году, был Иоганн Кеплер. За четыре столетия «телескопической» эры в астрономии подобных вспышек в нашей Галактике не наблюдалось.

Существенные продвижения в изучении сверхновых начались в середине 20 века, с развитием радиоастрономических наблюдений [1]. Впервые космическое радиоизлучение было открыто Карлом Янским в 1931-32 гг. Затем в 1937 году Гроут Ребер, вдохновившись исследованиями Янского, построил параболический радиотелескоп диаметром 9.5 метров. В 1944 году он опубликовал в своей работе первые радиокарты небосвода, где отчетливо были видны центральные области Млечного Пути и яркие радиоисточники в созвездии Стрельца, Лебедя А, Кассиопеи А, Большого Пса и Корма.

Основными целями данной работы являются: изучение процессов происходящих во время разлета остатков сверхновых, взаимодействие остатков с межзвездным веществом, а также наблюдение этих процессов в радиодиапазоне. В разделе 2 описана классификация сверхновых звезд. Радионаблюдения сверхновых, а также механизмы возникновения радиоизлучения даны в разделе ???. В разделе 4 дано подробное описание каждой стадии разлета, приведены характерные времена каждой стадии, а также приводятся основные соотношения для характеристик остатка. Возможные механизмы возникновения радиоизлучения в космосе описаны в разделе ???. Синхротронный механизм, имеющий непосредственное отношение к остаткам сверхновых описан в разделе 3.2. Особое значение при рассмотрении взаимодействия остатка с межзвездным веществом имеют возникающие в ходе этого ударные волны, идущие как внутрь остатка, так и по внешнему веществу. Для знакомства с явлениями ударных волн в газе, были поставлены цели: разобраться с аналитическим решением классической задачи Римана о распаде произвольного разрыва, а также создать его программную реализацию. На основе написанной программы в дальнейшей работе будет возможно осуществление проверки численных решений этой задачи, а также модифицирование условий задачи в сторону более приближенных к реальным физическим явлениям происходящих в астрофизических условиях. Подробное рассмотрение этой части работы дано в приложении А.

2 Сверхновые

Сверхновая является заключительной стадией жизни некоторых звёзд.[2] В зависимости от внутреннего состава звезды вспышка может осуществляться разными механизмами и давать при этом разную картину на получаемых данных (кривых блеска). Выделяют 2 основных типа сверхновых: I и II. К I типу относят сверхновые, спектры которых не содержат линий водорода, ко II типу, наоборот, содержащие такие линии. Сверхновые I типа делят на 3 подтипа: Ia (есть кремний), Ib(есть гелий), Ic(нет гелия). Сверхновые II типа по их спектру делят на два подтипа IIb и IIc; по кривой блеска (наличие плато) - IIP и IIL. На рис 1 представлены несколько примеров кривых блеска сверхновых разных типов.

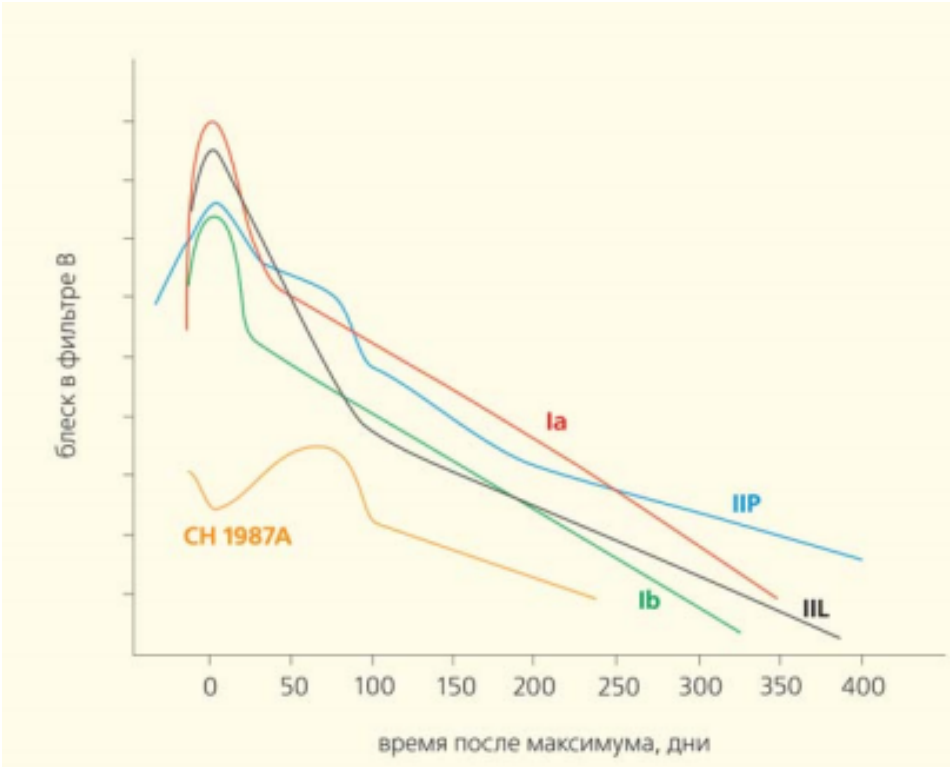


Рис. 1: Примеры характерных кривых блеска для разных типов сверхновых. График из статьи М.В.Пружинской и С.М.Лисакова в журнале Природа №12, 2015 г.

В таблице 1 представлено сравнение параметров сверхновых I и II типов. Отсутствие водорода в звезде перед взрывом сверхновой типа Ia приводит к тому, что сам взрыв существенно отличается от взрывов остальных типов. Причиной возникновения сверхновой типа Ia является термоядерный взрыв, а у всех остальных - гравитационный коллапс.

Таблица 1: Средние параметры Сверхновых

Параметр	I тип	II тип
Абсолютная величина в максимуме блеска M_{max}	-19^m	$-17 \dots -18^m$
Энергия вспышки	$10^{50} \sim 10^{51}$ эрг	$10^{50} - 10^{51}$ эрг
Масса звезды предшественника	$\sim 1.5 M_{\odot}$	$\approx 10 M_{\odot} - 8 \dots 20 M_{\odot}$
Скорость выброса	15000 – 20000 км/с	≈ 6000 км/с
Примеры остатков	Тихо (1572), Кеплер (1604), РВ: ?Краб (1006)	Кассиопея А (1947), РВ: SN 1993J - остаток?

РВ:

Зачем последняя строка в таблице “Средние параметры Сверхновых”?

РВ: Нужен логический переход от СН к остаткам

Наблюдения остатков сверхновых в разных диапазонах электромагнитных волн (рис. 2 и 3) позволяет лучше понять как причины их образования, так и все происходящие внутри них процессы.

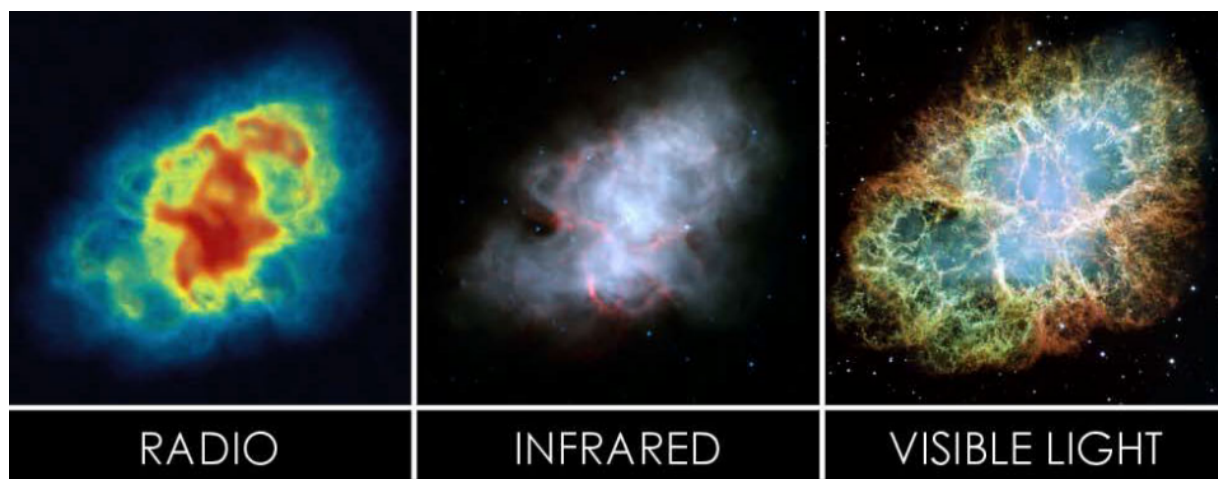


Рис. 2: Изображения Крабовидной туманности в радио-, инфракрасном и видимом диапазоне

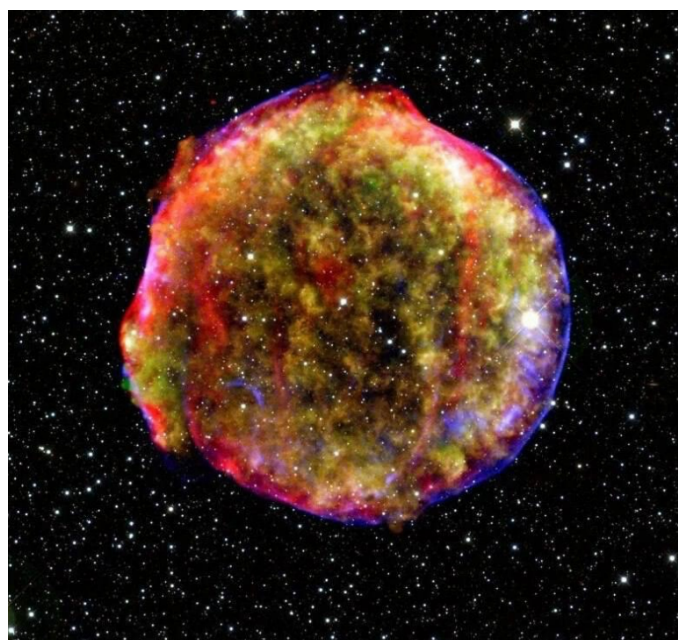


Рис. 3: Комбинированное изображение остатка Тихо в трех диапазонах: инфракрасном, видимом и рентгеновском

3 Радиоизлучение от сверхновых

В данной работе основным рассматриваемым диапазоном электромагнитных волн является радиодиапазон. К нему относятся ЭМ волны с длиной волны (λ) более 1мм (или частотами до 220 ГГц).

3.1 Радионаблюдения сверхновых

Обнаружение радиоизлучения от остатков вспышек сверхновых является важнейшим этапом в истории изучения этих объектов. Исследование радиоизлучения является эффективным мето-

дом анализа физических условий в расширяющихся оболочках. Далее идёт описание основных результатов наблюдения радиоизлучения остатков вспышек сверхновых ([2]). **РВ: о чем эта фраза и ссылка на Шкловского? требует пояснения**

В 1948 г. английские радиоастрономы Райл и Смит обнаружили на северном небе в созвездии Кассиопеи необыкновенно яркий источник радиоизлучения, названный ими «Кассиопея А». Радиоспектр Кассиопеи А весьма характерен, он хорошо представляется степенным законом:

$$F_\nu \propto \nu^{-\alpha},$$

где ν - частота, а $\alpha \approx 0.8$ во всём диапазоне частот от метровых до сантиметровых волн. Величина α называется спектральным индексом, а F_ν - спектральная плотность потока. Степенной характер является типичным для большинства источников космического радиоизлучения. Такой характер спектра связан с механизмом радиоизлучения (подробнее в разделе 3). Кассиопея А является прототипом класса остатков, получившего название "богатые кислородом" остатки.

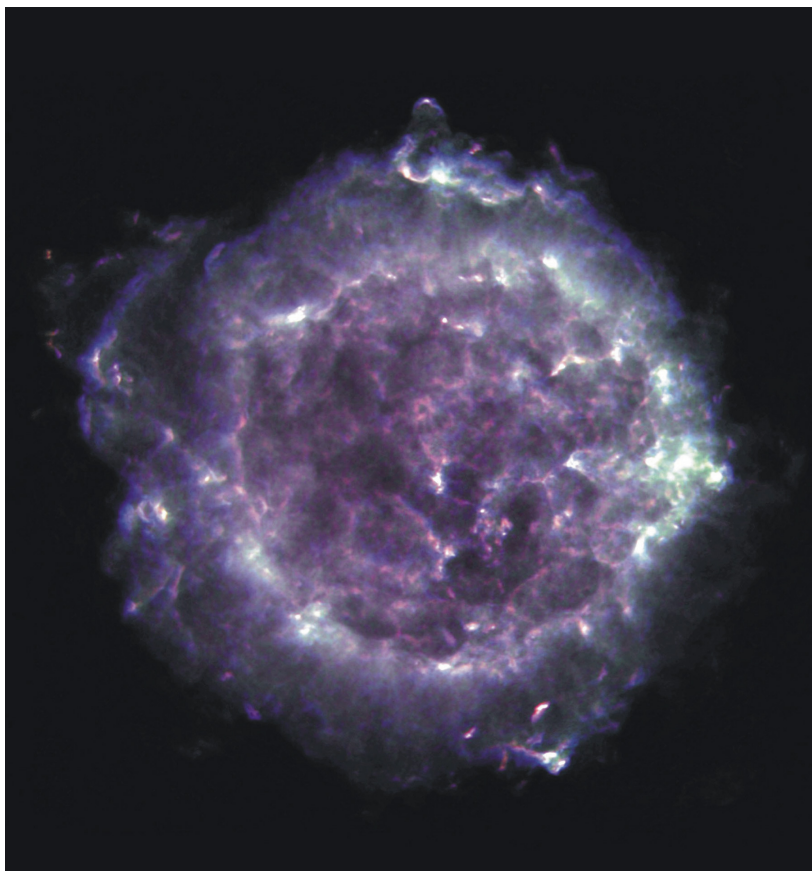


Рис. 4: Изображение остатка Кассиопея А в радиодиапазоне.

После 1948 г. в нашей Галактике было открыто несколько источников радиоизлучения, связанных с остатками вспышек сверхновых. В 1949 г. австралийскими радиоастрономами было обнаружено радиоизлучение от Крабовидной туманности (рис. 5). Как стало ясно в дальнейшем, Крабовидная туманность является прототипом целого **ряда класса** остатков, получивших название "плерионы". Их отличие от классических оболочечных радиоостатков **РВ: нет такого термина!, просто "остаток"** увеличение яркости к центру, плоский спектр, более высокая степень поляризации и более регулярная структура магнитного поля. Через 3 года было обнаружено радиоизлучение от остатков вспышек сверхновых 1572 года (СН Тихо) и 1604 года (СН Кеплера).

Радиоизлучение в космическом пространстве может появляться по разным причинам. К механизмам его возникновения относятся: тепловое радиоизлучение, реликтовое излучение, маг-



Рис. 5: Изображение Крабовидной туманности в радиодиапазоне (фиолетовый, синий и зеленый) и видимом диапазоне (красные линии)

нитотормозное (циклотронное и синхротронное) радиоизлучение, радиоизлучение плазмы, рекомбинационное (линейчатое) радиоизлучение, мазерное излучение молекул. [1] В остатках сверхновых основным механизмом является синхротронный. В следующем разделе приводится детальное описание этого механизма.

3.2 Синхротронное излучение

Синхротронное излучение **РВ: испускается при движении релятивистских заряженных частиц.** Оно имеет магнитотормозную природу, но отличается от циклотронного тем, что частицы здесь являются релятивистскими, соответственно их энергии много больше. Для описания движения таких частиц используются законы теории относительности. Далее приводятся некоторые основные формулы и характеристики, описывающие данный тип излучения. Для частиц движущихся со скоростями v близкими к скорости света энергия задаётся формулой:

$$E = m_0 c^2 \cdot \gamma,$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ - фактор Лоренца, m_0 -масса неподвижной частицы. Также при движении тела его размер в направлении движения сокращается в γ раз и во столько же раз замедляется ход времени в нем. **РВ: <- это верно в СТО, но неверно для элементарной частицы, т.к. у неё нет размера. Эту фразу можно безболезненно убрать.** Как и в случае циклотронного излучения электрон в магнитном поле движется по окружности или по спирали.

РВ: Какой источник написанного далее текста? ИИ ?) Для релятивистского электрона:

$$\tilde{f}_H = 18 \frac{H_{\perp}}{E} [\text{кГц}],$$

здесь $H_{\perp} = H \cos \theta$ - компонента магнитного поля, перпендикулярная скорости электрона. Таким образом, основная частота обращения релятивистского электрона мала; поэтому велика

длина волны и "основного тона" его радиоизлучения. Но релятивистский электрон значительно больше энергии излучает на высоких обертонах (гармониках). Неподвижный электрон создает вокруг себя электрическое поле, одинаковое по всем направлениям, а если он движется с ускорением, но медленно, то вместе с ним движется и это сферически симметричное поле. Поэтому медленный электрон излучает более или менее одинаково во всех направлениях. Если же электрон движется очень быстро, то его электрическое поле как бы сплющивается в направлении движения из-за сокращения масштабов. Это означает, что поле особенно сильно меняется в направлении вдоль скорости электрона; отсюда также следует, что релятивистский электрон излучает электромагнитные волны главным образом вперед, по направлению своего движения.

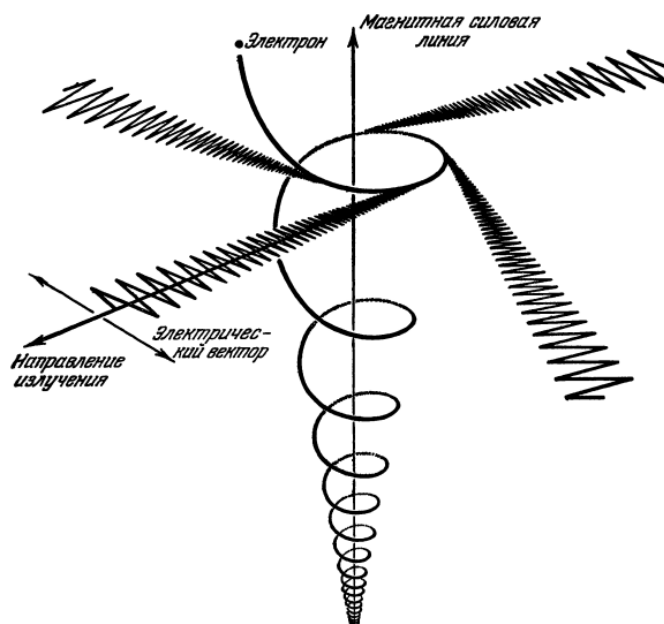


Рис. 6: К объяснению синхротронного механизма радиоизлучения.

Угол раствора конуса, в который излучает релятивистский электрон, по порядку величины (в радианах) равен тому же универсальному отношению $0.51/E$ (МэВ).

4 Остатки сверхновых

Перейдем теперь к более подробному рассмотрению процессов, происходящих в разлетающихся остатках. Сброшенная при вспышке сверхновой оболочка расширяется со сверхзвуковой скоростью в межзвездную среду и образует ударную волну. Различают несколько стадий взаимодействия оболочки с окружающей средой: свободный разлёт, адиабатическое расширение, стадия снегоочистителя. Далее идёт более подробное описание каждой из них. ([3]) **РВ: <– цитирование указывает на источник идеи или мысли, использованный автором этого предложения. Какую мысль этого предложения вы хотите подтвердить, сославшись на Spitzer1981 ?**

4.1 Стадия 1. Свободный разлёт

На этой стадии оболочка движется по инерции так, как если бы внешней среды не было вообще. **РВ: или “взаимодействием с внешней средой можно пренебречь”** $R(t) \propto t$ Излучение оболочки не играет роли в ее динамике. Стадия заканчивается при сгребании массы окружающего вещества, равной массе расширяющейся оболочки $M_0 = 4\pi/3\rho_0 R^3$. Сделаем оценку

по порядку величины для характерных значений масс и скоростей разлетающейся оболочки сверхновой. Для $\rho_0 = 2 \times 10^{-24} \text{ г/см}^3$, $v = 5 \cdot 10^8 \text{ см/с}$ и $M_0 = 1M_\odot$ этот момент наступает примерно через 200 лет после начала расширения при $R \approx 2 \text{ пк}$. **РВ: <- опять времена не согласуются.**

4.2 Стадия 2. Адиабатическое расширение

На этой стадии радиационные процессы по-прежнему динамически неважны, так как температура газа за фронтом ударной волны очень высокая. Кинетическая энергия оболочки расходуется на нагрев газа за фронтом сильной ударной волны и на ускорение сгребённого межзвёздного газа. Когда масса сгребённого газа много больше M_0 , движение оболочки довольно точно описывается автомодельным решением Л.И. Седова для сильного взрыва в среде. Можно получить зависимость поведения радиуса оболочки от времени из простых физических соображений, представленных ниже.

Пусть тепловая энергия газа, находящаяся в равновесии с кинетической, составляет долю K_1 от полной энергии E , а давление непосредственно за фронтом УВ p_2 в K_2 раз больше среднего давления внутри оболочки. Для идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$ **среднее** давление равно $p = (\gamma - 1)\epsilon = 2/3\epsilon$, ϵ – **средняя** плотность тепловой энергии, что даёт

$$p_2 = K_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3K_1 E}{4\pi R_s^3} = \frac{KE}{2\pi R_s^3}, \text{ где } K = K_1 K_2$$

Но в случае сильных ударных волн справедливо соотношение

$$p_2 = \frac{2\rho_1 u_1^2}{\gamma + 1}$$

между давлением сразу за фронтом p_2 , плотностью ρ_1 и скоростью втекания невозмущенного газа в УВ u_1 . Комбинирую эти уравнения и учитывая, что $u_1 = dR_s/dt$, получаем

$$u_1^2 = \left(\frac{dR_s}{dt} \right)^2 = \frac{2KE}{3\pi\rho_1 R_s^3}$$

Точный динамический расчёт даёт для $\gamma = 5/3$ $K_1 = 0.72$, $K_2 = 2.13$, следовательно, $K = 1.53$ **РВ: Что такое "точный расчёт ссылка? можно убрать эту фразу, оставив К** Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$R_s(t) = \left(\frac{2.2E}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{5}} \cdot t^{\frac{2}{5}} = 10^{15} \left(\frac{E}{E_0 n_1} \right)^{1/5} t^{2/5} \text{ пк},$$

где n_1 - концентрация атомов в невозмущенной межзвездной среде, время t выражено в годах, $E_0 = 7.5 \cdot 10^{50}$ эрг. Поскольку температура за фронтом сильной ударной волны для идеального газа с $\gamma = 5/3$

$$T_s = \frac{3\mu}{16k_B} u_1^2 = 1.8 \cdot 10^5 \left(\frac{R}{t} \right)^2 \text{ кэВ},$$

где k_B -постоянная Больцмана, μ -молекулярный вес, подставляя в это выражение полученные выше соотношения, получаем, что температура падает со временем, как $T \propto R_s^{-3} \propto t^{-\frac{6}{5}}$, начиная с некоторого момента времени (радиуса оболочки) становятся важными процессы радиоактивного охлаждения УВ и адиабатическое приближение нарушается. В конце стадии свободного разлета возникает обратная ударная волна, распространяющаяся внутрь оболочки(в системе координат, связанной с фронтом УВ), но движущаяся наружу в лабораторной системе (т.е газ втекает в обратную ударную волну изнутри оболочки).

4.3 Стадия 3. Стадия снегоочистителя

Наступает после катастрофического охлаждения газа оболочки, когда температура падает ниже $\approx 6 \times 10^5$ К и плазма начинает интенсивно высвечивать запасенную тепловую энергию. УВ при этом становится изотермической ($\gamma = 1$). Оболочка становится холодной и тонкой, поскольку скорость газа, прошедшего через ударную волну, меньше скорости движения фронта по среде и газ, поджимаемый давлением оболочки изнутри, долго остается вблизи фронта УВ. Движение УВ поддерживается за счет запасенного в оболочке импульса ($M(dR_s/dt) = \text{const}$, $M = 4\pi/3\rho_1 R_s^3$). В этом режиме расширение оболочки замедляется, т.к. из сохранения импульса следует $dR_s/dt \propto 1/R_s^3$ (а не $R_s^{-3/2}$ как в случае адиабатического разлета). Переход к этому режиму происходит при радиусе оболочки

$$R_c = 24 \left(\frac{E \cdot 10^{-51} \text{ эрг/с}}{n_0} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ пк}$$

РВ: ссылка на источник?

5 Заключение

В ходе работы были изучены основные физические процессы связанные с разлетом остатков сверхновых:

- Во время разлета остаток активно излучает в радиодиапазоне. Особенно сильно это происходит на переднем фронте остатка, на границе с межзвездным веществом. Это связано с тем обстоятельством, что столкновение остатка с окружающим веществом приводит к возникновению ударных волн (резких скачков уплотнения), которые передают огромные скорости частицам газа, что заставляет их излучать.
- Синхротронный механизм возникновения радиоизлучения является основным проявляющимся в данной процессе. На границе остатка и окружающего газа возникают сильные завихрения магнитного поля, за счет которого электроны начинают лететь по спиралям и излучать.

Процесс выполнения работы включал изучение теоретических материалов, имеющих описание рассматриваемых физических явлений. Цели работы были достигнуты.

В ходе выполнения работы также была написана программная реализация аналитического решения задачи Римана, позволяющая гораздо лучше понять причины возникновения ударных волн и их основные свойства. В частности, повышение энтропии газа, через который прошла ударная волна. В дальнейшей работе автором планируется расширить данную программу до случая сферически симметричного распространения ударных волн, который имеет непосредственное отношение к реальным астрофизическим условиям. Также важным этапом дальнейшей работы будет углубленное изучение численных методов применяемых к рассматриваемой задаче.

Список литературы

1. Каплан С. Элементарная радиоастрономия. — 1966. — (Цит. на с. 2, 6).
2. Шкловский И. Звёзды: их рождение, жизнь и смерть. — 1984. — (Цит. на с. 3, 5).
3. Спитцер Л. Физические процессы в межзвездной среде. — Москва, МИР, 1981. — (Цит. на с. 7).

4. Булатов П. В., Волков К. Одномерные задачи газовой динамики и их решение при помощи разностных схем высокой разрешающей способности // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2015. — Т. 15, № 4. — С. 731—740. — (Цит. на с. 10).
5. Zeldovich Y. B., Raizer Y. P. Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena. Т. 2. — Academic Press, 1968. — (Цит. на с. 10).

А Приложение. Ударные волны в ударной трубе

Для исследования ударных волн в земных условиях применяют ударные трубы. Классической задачей при исследовании ударных волн является задача Римана о распаде произвольного разрыва в ударной трубе.

А.1 Задача Римана о распаде произвольного разрыва

Формулировка задачи звучит следующий образом: рассматривается одномерная задача с двумя областями с различными идеальными газами, разделённых жесткой перегородкой. Начальные условия у газов различны, слева от перегородки p_L, u_L, ρ_L ; справа - p_R, u_R, ρ_R . В момент $t = 0$ перегородка исчезает ([4; 5]). В следующие моменты времени образуются несколько подобластей с постоянными параметрами, появляющиеся благодаря возникновению в газах волн разных типов: сильных устойчивых разрывов (ударных волн), непрерывных газодинамических течений (волн разрежения). Для описания этих волн выписывается система уравнений, олицетворяющих законы сохранения массы, импульса и энергии. Ниже приводится дифференциальная форма этих уравнений. ([5])

А.2 Основные гидродинамические уравнения

Выпишем систему уравнений газодинамики, определяющих изменение свойств газа: плотность, скорость и давление. Закон сохранения массы описывается уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

Закон сохранения импульса описывается уравнением Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (2)$$

И закон сохранения энергии задается уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(E + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} (w + \frac{\mathbf{u}^2}{2})) = 0 \quad (3)$$

Для полного описания решений этой системы необходимо также задать несколько соотношений. Одно из них это уравнение состояния:

$$p = p(\rho, e) \quad (4)$$

второе выражает закон сохранения энтропии **РВ: закон?**:

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) s = 0 \quad (5)$$

В случае рассмотрения ударных волн в одномерном ударной трубке, данная система дифференциальных уравнений (1-3) преобразуется в систему нелинейных алгебраических уравнений. Из которой затем выписываются основные соотношения (соотношения Ранкина-Гюгонио) для гидродинамических величин по разные стороны от фронта ударной волны. Конкретный вид этих соотношений будет приведён ниже (в следующем разделе).

Можно также заметить, что в исходную гидродинамическую систему не входят параметры с размерностями длины и времени, поэтому решение задачи является автомодельным, т.е. такое, что переменные x и t входят в него лишь в комбинации x/t .

В зависимости от начальных условий образуется та или иная конфигурация устойчивых разрывов и непрерывных газодинамических течений (см. рис. 1) **РВ: откуда текст? нужно ставить правильные ссылки на картинки и ссылаться на источник текста.** Возможные решения содержат веер волн разрежения (ВР), контактный разрыв (КР) и ударную волну (УВ), разделяющие область течения на четыре подобласти с постоянными значениями параметров. В конфигурации А возникает ударная волна, контактный разрыв и веер волн разрежения, в конфигурации В – две ударные волны и контактный разрыв, в конфигурации С – две волны разрежения и контактный разрыв. Условно волны называют левой и правой волной (в неподвижной системе координат они могут двигаться в одну сторону). В случае ударной волны речь идет о движущемся фронте разрыва, по обе стороны которого параметры газа полагаются постоянными (своими для каждой из сторон) и связанными определенными соотношениями. В случае волны разрежения имеется область переменного течения, в которой параметры газа остаются постоянными вдоль прямолинейных лучей, играющих роль характеристик системы уравнений, а значения параметров зависят от наклона в веере характеристик, описывающем волну разрежения. Волна разрежения граничит с областями постоянного течения, подобным тем, которые имеют место для ударной волны.

В данной работе в качестве теста используется задача Сода, начальные условия которой приводят к конфигурации А: ударная волна (справа), контактный разрыв, волна разрежения (слева).

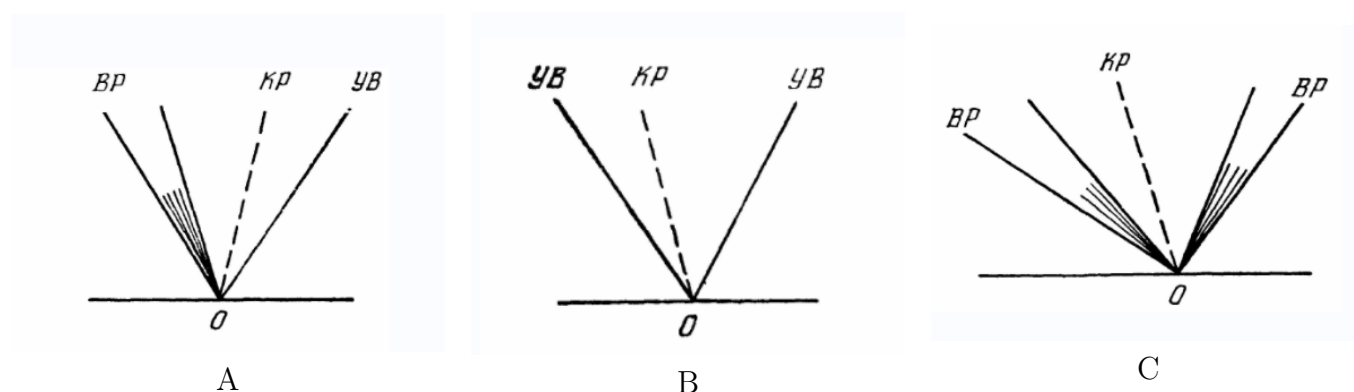


Рис. 7: Возможные конфигурации волн

А.3 Соотношения на границах областей

В рассматриваемой задаче оба газа являются идеальными, т.е. удовлетворяют соответствующему уравнению состояния: $pV = \nu RT$.

Для них выполнено **уравнение выражение** для энтропии идеального газа: $S = C_v \log(p/\rho^\gamma) + \text{const}$ **РВ: <– привести вывод этого выражения.**

Показатель адиабаты обоих газов: $\gamma = 1.4$.

Используются следующие обозначения для состояний газа:

- p_L, u_L, ρ_L - начальные условия газа слева (газ, по которому еще не прошла волна разрежения),
- p_1, u_1, ρ_1 - условия в газе, охваченном волной разрежения,
- p_2, u_2, ρ_2 - условия в газе между волной разрежения и контактным разрывом (прошла волна разрежения)
- p_3, u_3, ρ_3 - условия в газе между контактным разрывом и ударной волной (прошла ударная волна)
- p_R, u_R, ρ_R - начальные условия газа справа (газ, по которому еще не прошла ударная волна).

Решение состоит из соотношений на трех волнах: ударной волне, контактном разрыве и волне разрежения.

1. Для ударной волны.

Соотношения Ранкина-Гюгонио выраженные через число Маха ($M = D/c_1$) выглядят следующим образом:

$$\frac{p_3}{p_R} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}M^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (6)$$

$$\frac{\rho_3}{\rho_R} = \frac{(\gamma+1)M^2}{(\gamma-1)M^2 + 2} \quad (7)$$

$$\frac{u_3}{c_R} = \frac{2}{\gamma+1}\left(M - \frac{1}{M}\right) \quad (8)$$

$c_R = \sqrt{\gamma p_R/\rho_R}$ - скорость звука в среде перед фронтом, D - скорость ударной волны.

Формула адиабаты Ранкина-Гюгонио:

$$\frac{p_3}{p_R} = \frac{\rho_3(\gamma+1) - \rho_R(\gamma-1)}{\rho_R(\gamma+1) - \rho_3(\gamma-1)} \quad (9)$$

2. Для контактного разрыва. Давление и скорость газа не меняются на контактном разрыве.

$$p_2 = p_3 \quad (10)$$

$$\rho_2 = \rho_L \left(\frac{p_3}{p_L} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (11)$$

$$u_2 = u_3 \quad (12)$$

3. Для волны разрежения. В волне разрежения параметры убывают непрерывно, в отличие от ударных волн.

$$p_1(x, t) = p_L \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u_1(x, t)}{c_L} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad (13)$$

$$\rho_1(x, t) = \rho_L \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u_1(x, t)}{c_L} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad (14)$$

$$u_1(x, t) = \frac{2}{\gamma+1} \left(c_L + \frac{x}{t} \right). \quad (15)$$

Конкретные значения параметров p_2, u_2 при заданных начальных условиях получаются из решения системы нелинейных алгебраических уравнений, благодаря равенству параметров слева и справа от контактного разрыва.

A.4 Тест Сода

На рис.8 представлены графики параметров газа (p, ρ, u, S, T) в начальный момент времени ($t = 0$) и момент $t = 0.2$ при начальных условиях задачи Сода:

$$(p, u, \rho) = \begin{cases} (1.0, 0.0, 1.0), & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ (0.1, 0.0, 0.125), & \text{при } 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (16)$$

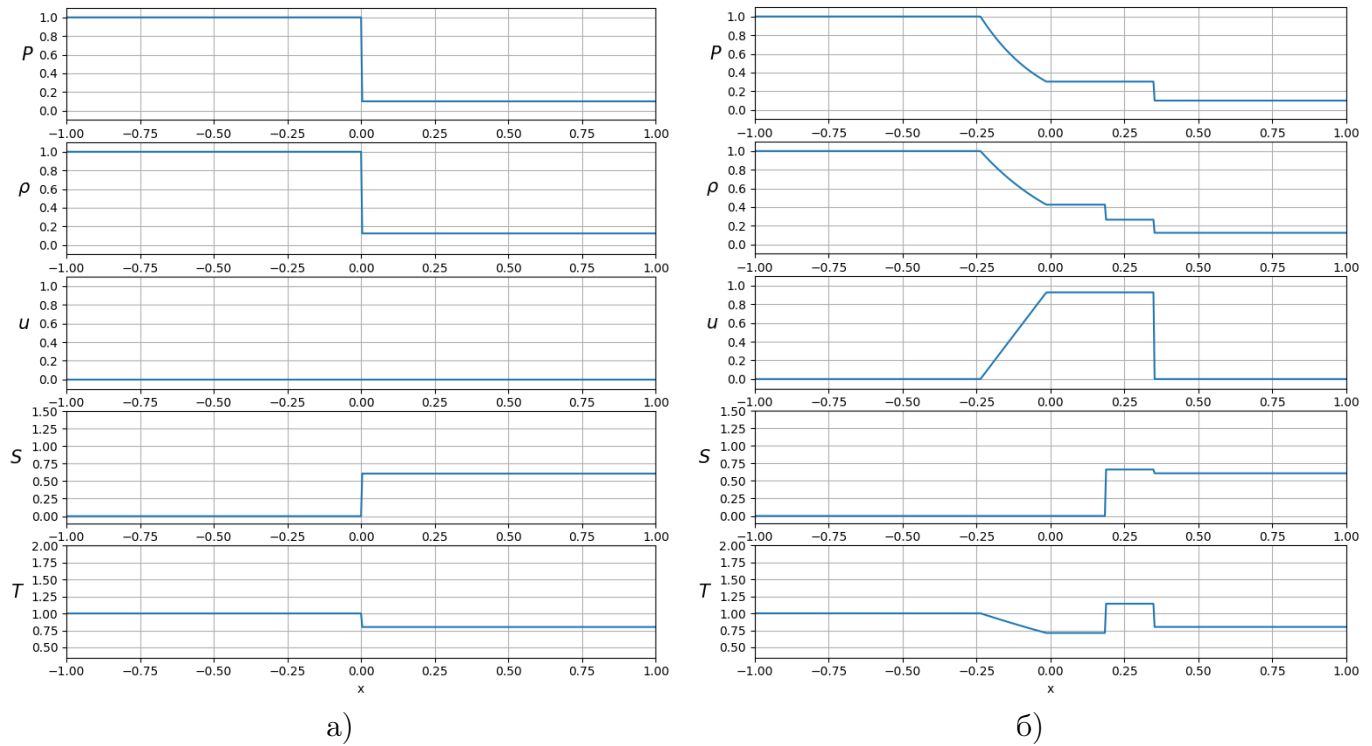


Рис. 8: Параметры газа а) в начальный момент $t = 0$ сек б) в момент $t = 0.2$ сек

РВ: Привести решение при большом скачке давления $P_2 = 100 P_1$, что обсуждали в прошлый понедельник (30.09.2024). Обсудить физические отличия в решениях.