Заметки про задачу о распаде произвольного разрыва (задача Римана)

Илья Заворохин, П.В. Бакланов

1 апреля 2025 г.

Содержание

1 Введение

Цель работы - знакомство с физикой ударных волн, их формирование и эволюция. Исследовать некоторые частные физические модели, допускающие аналитические решения. Получить решения численными методами и сравнить с аналитическими выражениями.

В ограниченной трубе с двумя газами в различных начальных состояниях в начальный момент времени разрывается диафрагма. В последующие моменты времени происходит движение контактного разрыва, а также ударной волны в сторону газа с меньшими давлением и плотностью. При этом в сторону газа с большим давлением распространяется волна разрежения.

2 Характерные единицы измерения

3 Формулировка задачи Римана

Рассматривается одномерная задача: в момент $t = 0$ в трубе находится идеальный газ, разделённый непроницаемой жёсткой перегородкой. Слева от перегородки в области 1 и справа 2 состояния газа произвольны и независимы друг от друга.

Нарисовать и вставить картинку с начальной конфигурацией $t = 0$

Требуется найти состояние газа после того как моментально уберут перегородку. Или другими словами, описать как будут меняться от времени свойства газа: формулы, табличный вид, графики.

Заметки на память можно вставлять с помощью команды:

```
\iz{какой-то текст заметки}
```

Это будет выглядеть так: **IZ: какой-то текст заметки**

4 Решение задачи Римана

Выпишем систему уравнений газодинамики, определяющих изменение свойств газа: плотность, скорость и давление [1].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\nabla)\,\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(E + \frac{\boldsymbol{u}^2}{2}) + div(\rho \boldsymbol{u}(w + \frac{\boldsymbol{u}^2}{2})) = 0 \tag{3}$$

$$p = p(\rho, e) \tag{4}$$

Помимо этого выполнено равенство для энтропии:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot div(s) = 0$$

Показатель адиабаты $\gamma = 1.4$.

Выведем соотношения Ранкина–Гюгонио.
Для этого перепишем данную систему дифференциальных уравнений для данного случая (одномерная трубка),считая что параметры газа претерпевают разрыв на ударной волне. Обозначив V - скорость ударной волны, получаем:

$$\rho_1 V = \rho_2(V - u_2) \text{ - закон сохранения потока массы} \tag{5}$$

$$\rho_1 V^2 + p_1 = \rho_2(V - u_2)^2 + p_2 \text{ - закон сохранения потока импульса} \tag{6}$$

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{(V - u_2)^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_2}{\rho_2} \text{ - закон сохранения потока энергии} \tag{7}$$

Введя $M = V/c_1$ - число Маха, где $c_1 = \frac{\gamma p_1}{\rho_1}$ - скорость в невозмущенной среде справа. Теперь, проделав некоторые несложные преобразования, получаем искомые соотношения, выраженные через число Маха:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}M^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tag{8}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{(\gamma - 1)M^2 + 2} \tag{9}$$

$$\frac{u_2}{c_1} = \frac{2}{\gamma + 1}(M - \frac{1}{M}) \tag{10}$$

Параметры p_2, ρ_2, u_2 - за фронтом ударной волны, p_1, ρ_1 - перед фронтом, - скорость звука в среде перед фронтом.

Формула адиабаты Ранкина-Гюгонио:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2(\gamma + 1) - \rho_1(\gamma - 1)}{\rho_1(\gamma + 1) - \rho_2(\gamma - 1)}$$

Из данных соотношений, используя уравнение состояния иделаьного газа $p = \rho \nu R T$, получаем соотношения для температур за и перед фронтом ударной волны:

$$\frac{T_2}{T_1} = (\frac{2\gamma}{\gamma + 1}M^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1})(\frac{2}{(\gamma + 1)M^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1})$$

5 Автомодельное решение

РВ: Полезно вставить картинку из [2] РВ: Полезно вставить картинку из [3]

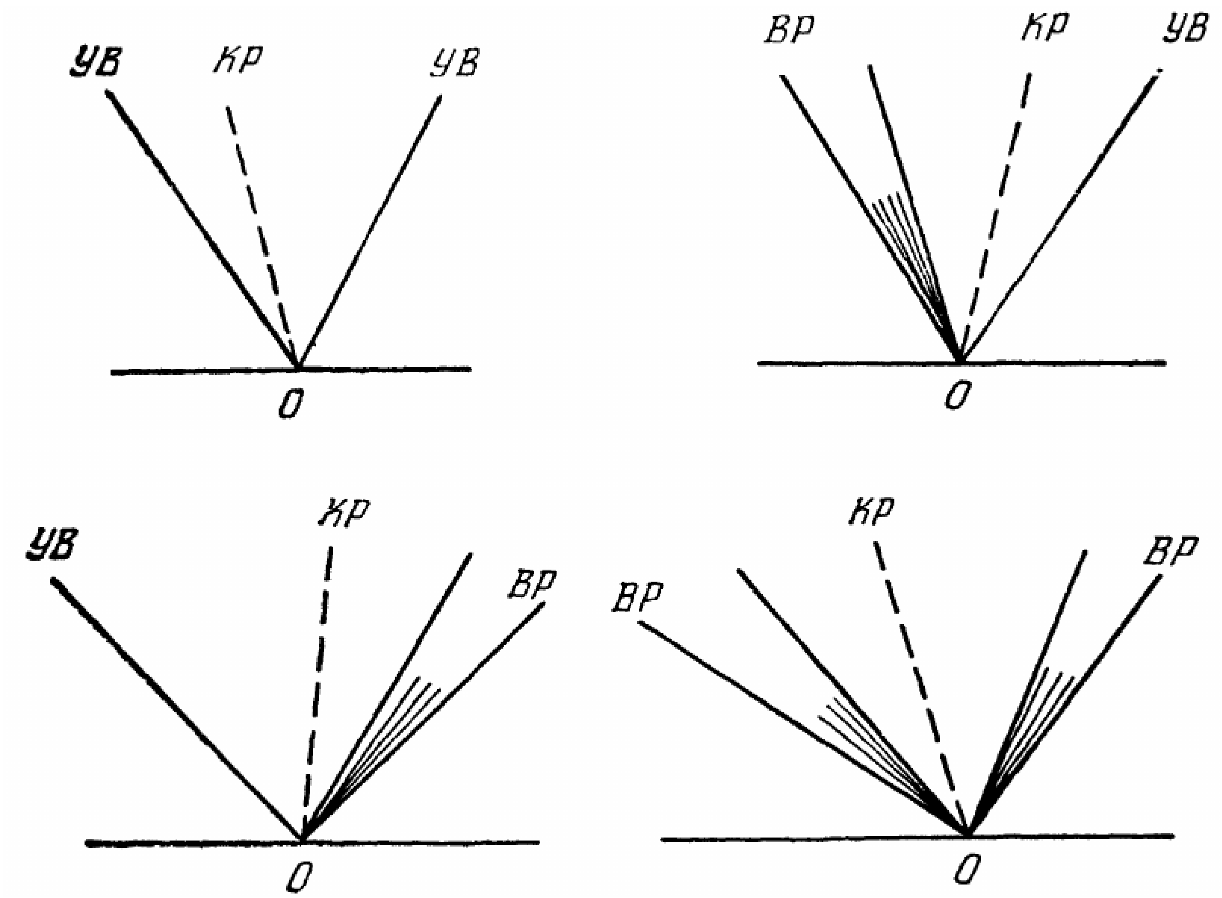

Рис. 1: Рисунок из [2], иллюстрирующий возможные автомодельные случаи об эволюции разрыва.

6 Задача Сода

Исследуем задачу Сода [4].

Запрограммировать аналитическое решение, см цель `https://github.com/MathZIVota/Simulation-issues/4`

Написать численный решатель этой задачи

Список литературы

1. *Zeldovich Y. B.*, *Raizer Y. P.* Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena. Т. 2. — Academic Press, 1968. — (Цит. на с. 2).

2. *Годунов С.*, *Забродин А.*, *Иванов М.* [и др.]. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — Издательство «Наука», 1976. — (Цит. на с. 3).

3. *Пинкусович Ш. Б.* О динамике ударных волн в жидкости. Обзор. Т. 26. — Научное приборостроение, 2016. — С. 43—54. — (Цит. на с. 3).

4. *Sod G. A.* A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // Journal of computational physics. — 1978. — Т. 27, № 1. — С. 1—31. — (Цит. на с. 3).