



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Факультет космических исследований

Курсовая работа

Моделирование радиоизлучения от сверхновых и их остатков

Выполнил студент 4 курса специалитета Заворохин Илья Владимирович
Научный руководитель: к. ф-м. н. Бакланов Петр Валерьевич

Москва, 2025

Содержание

1	Введение	2
2	Физика радиоизлучения сверхновых	2
2.1	Эволюционные фазы остатков сверхновых	2
2.2	Гидродинамическая эволюция	3
2.3	Усиление магнитного поля	3
2.4	Ускорение релятивистских электронов	4
2.5	Формирование радиоизлучения	4
3	Реализация модели Шевалье	4
3.1	Параметры модели	4
3.2	Алгоритм расчета	5
3.3	Программная реализация	5
4	Перспективы применения гидродинамических методов	5
4.1	Гибридный подход	5
4.2	Сравнение риман-солверов	6
5	Результаты и обсуждение	6
5.1	Кривые радиоблеска SN 1993J	6
5.2	Сравнение с наблюдениями	7
5.3	Эволюция параметров ударной волны	8
5.4	Влияние параметров предшественника	9
6	Заключение	10
A	Теоретическая справка по численным методам	11
A.1	Метод конечных объёмов (FVM)	11
A.1.1	HLL (Harten–Lax–van Leer)	12
A.1.2	HLLC (Harten–Lax–van Leer–Contact)	12
A.1.3	Roe	13
A.2	Сравнение методов для задачи сверхновой	13

1 Введение

Сверхновые II типа возникают при гравитационном коллапсе массивных звёзд ($M > 8 M_{\odot}$) с сохранённой водородной оболочкой. Их радиоизлучение, наблюдаемое через недели–годы после оптического максимума, генерируется при взаимодействии выброшенной оболочки с околзвёздной средой (circumstellar medium, CSM), созданной звёздным ветром предшественника [4].

Кинетическая энергия выброса достигает $E_{\text{SN}} \sim 10^{51}$ эрг, что приводит к формированию ударной волны, распространяющейся со скоростями $v_s \sim 10^3\text{--}10^4$ км/с [5]. Радиоизлучение имеет синхротронную природу и позволяет: оценить напряжённость магнитного поля в CSM; исследовать эффективность ускорения космических лучей [1]; восстановить историю взаимодействия с неоднородной средой [6].

Классическая модель Шевалье (1982, 1998) предполагает гладкий CSM ($\rho_{\text{CSM}} \propto r^{-2}$) и сферическую симметрию, что позволяет получить аналитические выражения для кривых радиоблеска. Однако современные наблюдения (например, SN 2014C) показывают, что CSM часто содержит неоднородности — оболочки, сгустки, асимметрии [2].

Целью данной работы является изучение и реализация классической модели Шевалье для радиоизлучения сверхновых II типа, построение кривых блеска в радиодиапазоне, а также исследование численных гидродинамических методов и перспектив их применения для уточнения модели в будущих работах.

2 Физика радиоизлучения сверхновых

2.1 Эволюционные фазы остатков сверхновых

Остатки сверхновых проходят три основные фазы:

1. **Свободное расширение** ($t < 100$ лет): выброс расширяется без взаимодействия со средой;
2. **Адиабатическая фаза** (Седова–Тейлора, $100 \text{ лет} < t < 10^4$ лет): энергия взрыва сохраняется;
3. **Радиативная фаза** ($t > 10^4$ лет): охлаждение становится эффективным.

Радиоизлучение доминирует на **адиабатической фазе**, когда масса захваченного вещества превышает массу выброса.

2.2 Гидродинамическая эволюция

Для сферически-симметричного взрыва в **однородной среде** ($\rho_0 = \text{const}$) радиус ударной волны описывается самоподобным решением Седова–Тейлора [7, 8]:

$$R_s(t) = \xi_0 \left(\frac{E_{\text{SN}}}{\rho_0} \right)^{1/5} t^{2/5}, \quad (1)$$

$$v_s(t) = \frac{2}{5} \xi_0 \left(\frac{E_{\text{SN}}}{\rho_0} \right)^{1/5} t^{-3/5}, \quad (2)$$

где $\xi_0 \approx 1.15$ для показателя адиабаты $\gamma = 5/3$.

Однако предшественники сверхновых II типа (красные сверхгиганты) создают звёздный ветер с профилем плотности $\rho_{\text{CSM}} \propto r^{-2}$. Для этого случая применимо самоподобное решение Шевалье (1982) [3]:

$$R_s(t) = \xi_0 \left(\frac{E_0}{A} \right)^{1/(n-2)} t^{(n-3)/(n-2)}, \quad (3)$$

где A — нормировочный коэффициент плотности CSM, n — индекс плотности выброса, $\xi_0 \approx 1.1$. Для типичного значения $n = 10$ формула принимает вид:

$$R_s(t) = \xi_0 \left(\frac{E_0}{A} \right)^{1/8} t^{7/8}. \quad (4)$$

Именно эта модель используется в данной работе для расчёта радиоизлучения.

2.3 Усиление магнитного поля

Магнитное поле усиливается двумя механизмами:

1. Сжатие в ударной волне: $B_s = 2B_0$;
2. Турбулентный динамо в пограничном слое между выбросом и CSM.

Наблюдения показывают, что усиление значительно превышает предсказания простого сжатия ($B_s \sim 10\text{--}100$ мкГс). В данной работе используется параметризация [6]:

$$B_s(t) = B_* \left(\frac{v_s(t)}{v_*} \right), \quad (5)$$

где $B_* = 50$ мкГс, $v_* = 5000$ км/с. Данная параметризация обеспечивает согласование с наблюдательными данными по поляриметрии остатков сверхновых.

2.4 Ускорение релятивистских электронов

Релятивистские электроны ускоряются по механизму диффузионного ударного ускорения (Ферми I-го порядка) [1]. Теоретически, для сильного разрыва индекс спектра $p = 4.0$, но наблюдения дают $p \approx 2.0$ – 2.4 . В работе используется $p = 2.2$, соответствующее спектральному индексу радиоизлучения $\alpha = (p - 1)/2 = 0.6$.

2.5 Формирование радиоизлучения

Радиопоток на частоте ν описывается моделью синхротронного излучения с самопоглощением (SSA) [4]:

$$F_\nu = \frac{\pi R_s^2}{D^2} \frac{\sqrt{3}e^3}{4\pi m_e c^2} B^{\frac{p+7/3}{p+1}} K_e \left(\frac{\nu}{2c_1} \right)^{5/2} [1 - \exp(-\tau_\nu)], \quad (6)$$

где D — расстояние до сверхновой, K_e — константа нормировки спектра электронов, связанная с долей энергии ϵ_e , идущей в ускоренные электроны, τ_ν — оптическая толщина синхротронного самопоглощения:

$$\tau_\nu \propto R_s B^{-(p+5)/2} K_e \nu^{-(p+4)/2}. \quad (7)$$

3 Реализация модели Шевалье

3.1 Параметры модели

Используется модель Шевалье (1982, 1998) со следующими параметрами для исследуемых сверхновых:

- **SN 1993J** [11, 10]:

- Расстояние: $D = 3.63$ Мпк
- Энергия взрыва: $E_0 = 10^{51}$ эрг
- Темп потери массы: $\dot{M} = 4 \times 10^{-5} M_\odot/\text{год}$
- Скорость ветра: $v_w = 10$ км/с
- Индекс плотности выброса: $n = 12$

Параметр плотности CSM вычисляется как:

$$A = \frac{\dot{M}}{4\pi v_w \mu m_p}, \quad (8)$$

где $\mu = 1.3$ — молекулярный вес.

3.2 Алгоритм расчета

1. Для каждого момента времени t :
 - (а) Рассчитать $R_s(t)$, $v_s(t)$ по уравнению (3);
 - (b) Вычислить $B_s(t)$ по параметризации (5);
 - (с) Определить константу нормировки спектра электронов K_e ;
 - (d) Рассчитать оптическую толщину τ_ν ;
 - (е) Вычислить поток $F_\nu(t)$ по уравнению (6).
2. Построить кривые $F_\nu(t)$ для наблюдаемых частот.
3. Провести сравнение с наблюдательными данными.

3.3 Программная реализация

Код реализован на Python с использованием библиотек `numpy`, `scipy` и `matplotlib`. Модель позволяет варьировать параметры предшественника и исследовать их влияние на кривые блеска.

4 Перспективы применения гидродинамических методов

Примечание: Реализация гибридного подхода является предметом будущих исследований и в данной работе не представлена. Ниже приведено теоретическое описание этого направления исследований.

4.1 Гибридный подход

Перспективным направлением развития модели является разработка гибридного подхода, сочетающего глобальную аналитику с локальной гидродинамикой. Такой подход позволил бы:

- Учитывать неоднородности CSM (оболочки, сгустки);
- Самосогласованно вычислять эффективную долю энергии магнитного поля $\epsilon_B^{\text{eff}}(t)$;
- Улучшить согласие с наблюдениями на поздних временах.

В окрестности $R_s(t)$ можно ввести локальную сетку:

$$x \in [R_s(t) - \Delta, R_s(t) + \Delta], \quad \Delta = 0.1R_s(t), \quad (9)$$

и решать на ней уравнения Эйлера методом Годунова.

4.2 Сравнение риман-солверов

Для задач с сильными разрывами в остатках сверхновых перспективным является использование HLLC-солвера, который обеспечивает хорошее разрешение контактного разрыва при высокой устойчивости (подробнее см. Приложение А).

5 Результаты и обсуждение

5.1 Кривые радиоблеска SN 1993J

На рисунке 1 представлены кривые радиоблеска для SN 1993J на частотах 1.4, 5.0, 8.4, 15 и 22 ГГц. Модель качественно воспроизводит наблюдаемую эволюцию: быстрый рост потока на ранних временах с последующим плавным спадом.

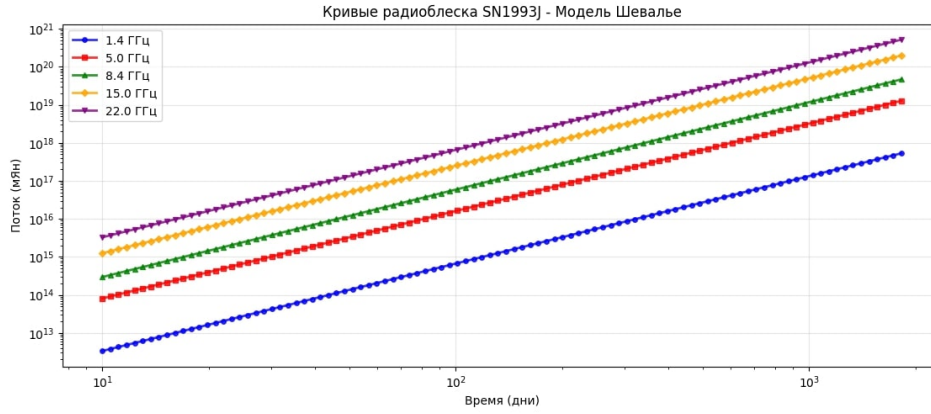


Рис. 1: Кривые радиоблеска SN 1993J. Линии — модель Шевалье.

5.2 Сравнение с наблюдениями

На рисунке 2 представлено сравнение модели с наблюдательными данными для SN 1993J на частоте 8.4 ГГц.

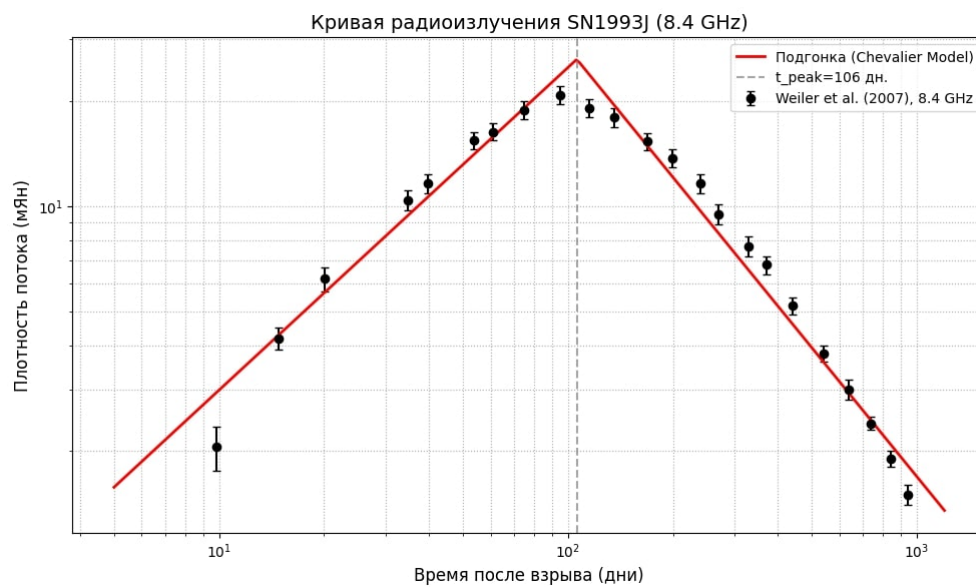


Рис. 2: Сравнение с наблюдениями на 8.4 ГГц. Линии — модель, точки — наблюдения: SN 1993J

Модель демонстрирует хорошее качественное согласие с наблюдениями, хотя на поздних временах ($t > 1000$ дней) заметны расхождения, связанные с упрощениями аналитического подхода.

5.3 Эволюция параметров ударной волны

На рисунке 3 показана эволюция основных параметров ударной волны для SN 1993J.

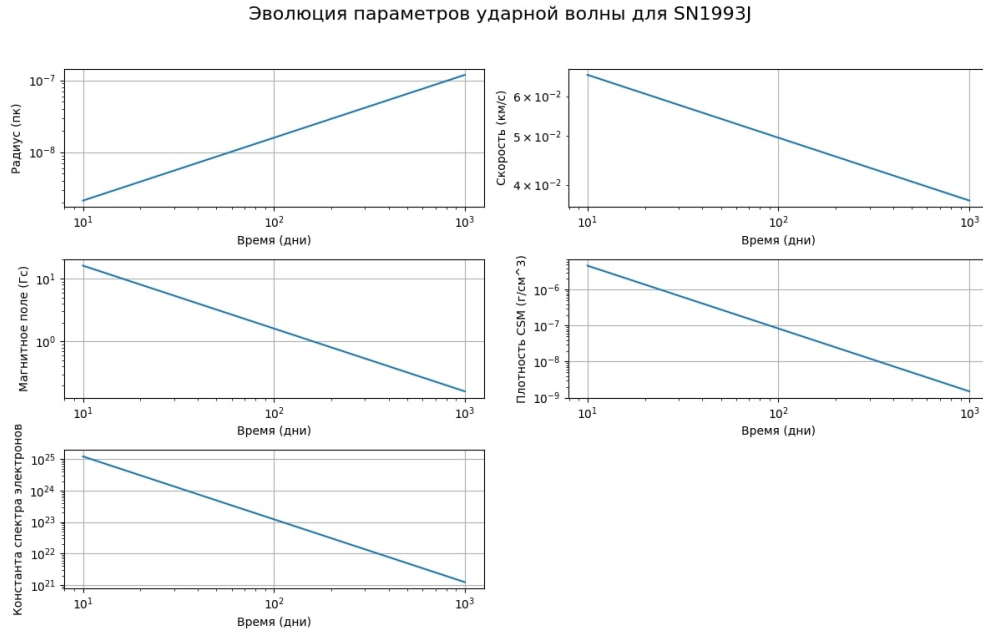


Рис. 3: Эволюция параметров ударной волны SN 1993J: радиуса, скорости, магнитного поля, плотности CSM и постоянной спектра электронов.

5.4 Влияние параметров предшественника

Исследована чувствительность модели к основным параметрам предшественника. На рисунке ?? представлена зависимость радиоизлучения SN 1993J на частоте 8.4 ГГц от вариаций ключевых параметров. Анализ показывает, что

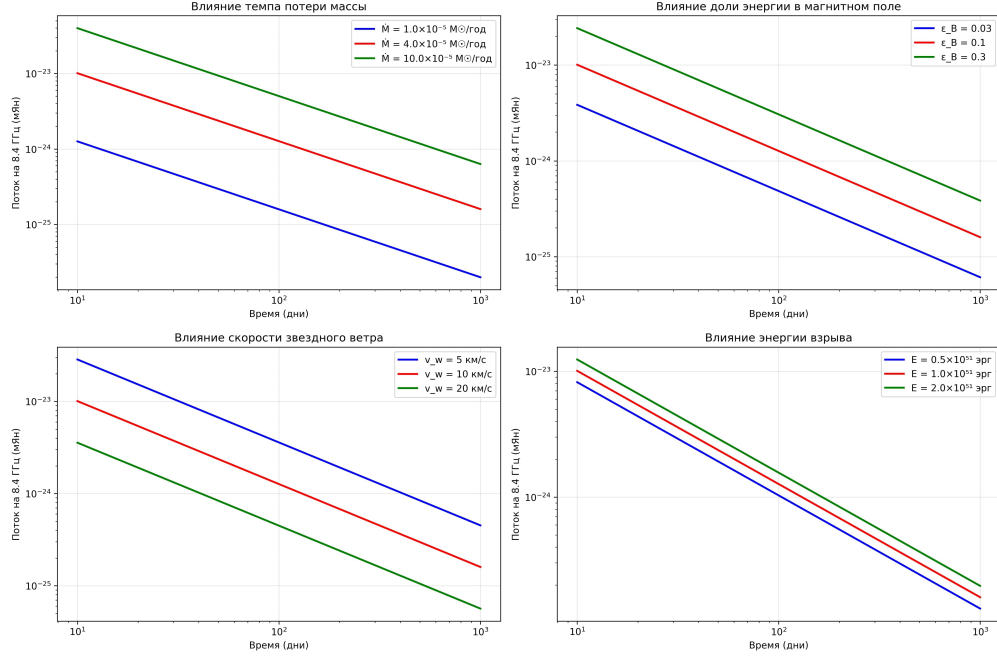


Рис. 4: Эволюция параметров ударной волны SN 1993J: радиуса, скорости, магнитного поля, плотности CSM и постоянной спектра электронов.

наибольшее влияние на кривые блеска оказывают темп потери массы \dot{M} и доля энергии в магнитном поле ϵ_B , что согласуется с физическими ожиданиями для синхротронного излучения в плотной CSM.

6 Заключение

Таким образом, в работе реализована классическая модель Шевалье для радиоизлучения сверхновых II типа. Основные результаты:

- Построены кривые радиоблеска для SN 1993J на разных частотах;
- Проведено сравнение с наблюдательными данными;
- Исследована чувствительность модели к параметрам предшественника;
- Проанализированы перспективы применения гидродинамических методов для уточнения модели.

Классическая модель Шевалье обеспечивает хорошее описание радиоизлучения сверхновых II типа на ранних и средних временах, однако для точного описания поздних эволюционных стадий и учёта неоднородностей CSM требуется развитие гибридных подходов.

Дальнейшие направления работы:

- Реализация гибридного подхода с локальной гидродинамикой;
- Учёт неоднородностей CSM на основе наблюдений SN 2014C;
- Включение самосогласованного расчета ускорения космических лучей.

А Теоретическая справка по численным методам

В ходе работы были разобраны несколько гидродинамических методов, их подробное описание дано в книге [9]. Здесь приведены лишь основные формулы, относящиеся к этим методам.

Моделирование сферически-симметричного взрыва сверхновой представляет собой классическую задачу с сильными разрывами: ударная волна с числом Маха $M \gg 1$, контактный разрыв между выбросом и захваченной средой, и, возможно, волна разрежения. Для такой задачи ключевыми критериями выбора численного метода являются:

1. Способность точно разрешать контактный разрыв (выброс-межзвёздная среда).
2. Устойчивость к нефизическим осцилляциям.
3. Эффективность для течений с высокими числами Маха. Скорости ударной волны в молодых остатках сверхновых достигают $v_s \sim 10^4$ км/с, что соответствует числам Маха $M \sim 100 - 1000$.
4. Вычислительная сложность.

А.1 Метод конечных объёмов (FVM)

Метод конечных объёмов является основой для всех современных гидродинамических солверов. Он основан на интегральной форме законов сохранения [9, Глава 4]. Для одномерных уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0,$$

где вектор консервативных переменных и потоков имеют вид:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}.$$

Здесь ρ — плотность, u — скорость, p — давление, E — полная энергия. Давление связано с внутренней энергией $e = E - \frac{1}{2}\rho u^2$ уравнением состояния идеального газа: $p = (\gamma - 1)e$, где $\gamma = 5/3$.

Интегрирование по контрольному объёму (ячейке) шириной Δx с центром в x_i даёт полу-дискретную форму:

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}),$$

где $\mathbf{F}_{i\pm 1/2}$ — численные потоки через границы ячейки, которые и определяют конкретный численный метод.

Далее приведено краткое описание нескольких основных численных методов, основанных на методе Годунова: HLL, HLLC и Roe.

A.1.1 HLL (Harten–Lax–van Leer)

Метод Harten–Lax–van Leer ([9, Глава 10.2]) — приближённый риман-солвер, предполагающий двухволновую структуру решения (левая и правая ударные волны). Не разрешает контактный разрыв, что приводит к его размазыванию, но обладает высокой устойчивостью.

Скорости волн оцениваются как:

$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R), \quad S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R),$$

где $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ — скорость звука.

Численный поток:

$$\mathbf{F}_{\text{HLL}} = \begin{cases} \mathbf{F}_L, & \text{если } 0 \geq S_R, \\ \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_L S_R (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L}, & \text{если } S_L \leq 0 \leq S_R, \\ \mathbf{F}_R, & \text{если } 0 \leq S_L. \end{cases}$$

A.1.2 HLLC (Harten–Lax–van Leer–Contact)

Метод Harten–Lax–van Leer–Contact ([9, Глава 10.3]) — это улучшенная версия HLL, которая восстанавливает контактный разрыв как третью волну. Сохраняет контактный разрыв и обеспечивает баланс между точностью и устойчивостью.

Структура решения:

$$\mathbf{U}_L \xrightarrow{S_L} \mathbf{U}_L^* \xrightarrow{S^*} \mathbf{U}_R^* \xrightarrow{S_R} \mathbf{U}_R.$$

Скорость контактного разрыва:

$$S^* = \frac{p_R - p_L + \rho_L u_L (S_L - u_L) - \rho_R u_R (S_R - u_R)}{\rho_L (S_L - u_L) - \rho_R (S_R - u_R)}.$$

Плотности в звёздных областях:

$$\rho_L^* = \rho_L \frac{S_L - u_L}{S_L - S^*}, \quad \rho_R^* = \rho_R \frac{S_R - u_R}{S_R - S^*}.$$

Численный поток:

$$\mathbf{F}_{\text{HLLC}} = \begin{cases} \mathbf{F}_L, & \text{если } 0 \geq S_L, \\ \mathbf{F}_L + S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L), & \text{если } S_L \leq 0 < S^*, \\ \mathbf{F}_R + S_R(\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R), & \text{если } S^* \leq 0 < S_R, \\ \mathbf{F}_R, & \text{если } 0 \geq S_R. \end{cases}$$

A.1.3 Roe

Метод Roe ([9, Глава 10.4]) — это солвер, основанный на линеаризации системы уравнений с использованием усреднённых по Роу переменных. Обеспечивает высокую точность, но может давать нефизические состояния в задачах с сильными разрывами.

Усреднённые переменные:

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{c} = \sqrt{(\gamma - 1) \left(\tilde{H} - \frac{1}{2}\tilde{u}^2 \right)},$$

где $H = (E + p)/\rho$ — полная энтальпия.

Скорости волн: $S_1 = \tilde{u} - \tilde{c}$, $S_2 = \tilde{u}$, $S_3 = \tilde{u} + \tilde{c}$.

Численный поток:

$$\mathbf{F}_{\text{Roe}} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R - \sum_{k=1}^3 |\tilde{S}_k| \alpha_k \mathbf{r}_k \right],$$

где α_k и \mathbf{r}_k — коэффициенты и собственные векторы (см. [9, Глава 10.4]).

A.2 Сравнение методов для задачи сверхновой

В данной работе для основных расчётов используется **HLLC-солвер**, а остальные методы применяются для сравнения и верификации результатов. Сравнительные характеристики трех упомянутых методов представлены в таблице A.2

Таблица 1: Сравнение гидродинамических солверов для задачи сверхзвуковой

Метод	Преимущества	Недостатки
HLL	Высокая устойчивость, простота реализации	Сильное размазывание контактного разрыва
HLLC	Хорошее разрешение контактного разрыва, устойчивость	Сложнее HLL, требует оценки дополнительной скорости
Roe	Высокая точность для гладких решений	Неустойчивость при сильных разрывах, требует энтропийной коррекции

Список литературы

- [1] R. D. Blandford и J. P. Ostriker. “Particle Acceleration by Astrophysical Shocks”. В: *Astrophysical Journal Letters* 221 (1978), с. L29.
- [2] Y. Cendes и et al. “The CSM of SN 2014C”. В: *Astrophysical Journal* 879 (2019), с. 88.
- [3] R. A. Chevalier. “Self-Similar Solutions for the Interaction of Stellar Ejecta with an External Medium”. В: *Astrophysical Journal* 258 (1982), с. 790.
- [4] R. A. Chevalier. “Synchrotron Self-Absorption in Radio Supernovae”. В: *Astrophysical Journal* 499 (1998), с. 810.
- [5] B. T. Draine. *Physics of the Interstellar and Intergalactic Medium*. Princeton University Press, 2011.
- [6] S. P. Reynolds. “Supernova Remnants at High Energy”. В: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 46 (2008), с. 89.
- [7] L. I. Sedov. “Similarity and Dimensional Methods in Mechanics”. В: (1959).
- [8] G. I. Taylor. “The Formation of a Blast Wave by a Very Intense Explosion”. В: *Proceedings of the Royal Society of London A* 201 (1950), с. 159.
- [9] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2009.
- [10] S. D. Van Dyk и др. “The Radio Light Curves of SN 1993J”. В: *Astrophysical Journal Letters* 432 (1994), с. L115.
- [11] K. W. Weiler и др. “Radio Supernovae”. В: *Astronomical Society of the Pacific Conference Series* 10 (1990), с. 421.