Заметки по численным методам, применяемым в задачах газодинамики при сильных разрывах

Илья Заворохин, П.В. Бакланов

29 апреля 2025 г.

Содержание

TODO

1. описать ключевые моменты по книге [1]
2. 1. Вид системы для применения чмов
3. 2. Свойства численных схем, за которыми стоит следить
4. 3. Сами численные схемы: РК4, Годунова, ...
5. найти подходящие тесты

1 Введение

Цель работы - применение классических разностных методов (в частности метод Рунге Кутты 4-го порядка) к поиску приближённых решений гиперболических систем при наличии разрывов в начальных параметрах, знакомство с классическим методом Годунова и производными от него методами. Повышение точности численного решения применением схем годуновского типа к исходным методам (в частности, пересчет значений потоков по Годунову). Написание программной реализации этих методов.

2 Исходная система

2.1 В общем виде

Полная классическая система газодинамики записывается в недивергентном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\nabla)\,\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho E + div(\rho \boldsymbol{u}(w + \frac{\boldsymbol{u}^2}{2})) = 0 \tag{3}$$

$$p = p(\rho, e) \tag{4}$$

Используемые обозначения: ρ - плотность, u -скорость, p -давление, $E = e + \frac{\boldsymbol{u}^2}{2}$ - полная удельная (на единицу массы) энергия, e - удельная (на единицу массы)внутренняя энергия, w - удельная (на единицу массы) энтальпия. В таком виде она представлена в большинстве учебников по теории газовой динамики, например в [2]. Однако для применения численных методов ее преобразуют к другому виду. Для этого уравнение непрерывности(1) сначала умножается на U, а затем на E. Полученные уравнения складываются соответсвенно с уравением Эйлера (2) и уравнением для энергии (3). Учёт формул производной произведения позволяет привести эти уравнения к консервативному виду. Подобное преобразование указано например в [1], поэтому здесь приведем лишь полученную в результате дивергентную форму системы уравнений газовой динамики:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u(E+P))}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

$$p = p(\rho, e) \tag{8}$$

Во многих естественных задачах можно считать, что пространственная размерность задачи равна 1. Поэтому далее приводится вид системы для такого случая.

2.2 Одномерный вид

Если пространственная одномерность связана с одной из декартовых осей, то системы принимает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(u(E + p))}{\partial x} = 0 \tag{11}$$

2.3 Сферически симметричный вид

В некоторых задачах (в особенности при моделировании взрывов, в том числе вспышек сверхновых) возможно сведение задачи к сферически симметричному случаю. В этом случае пространственной координатой будет радиальное расстояние от центра сферы. В таком случае система примет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2(\rho u))}{\partial r} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2(\rho u^2 + p))}{\partial r} = 2\frac{p}{r} \tag{13}$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 \rho u(E + p))}{\partial r} = 0 \tag{14}$$

3 Основные свойства численных схем

3.1 Метод контрольного объёма

3.2 Сходимость, порядок точности

3.3 Невязка, аппроксимация

3.4 Устойчивость

3.5 Требования для численных методов в случае решения задач газодинамики

3.6 Типы граничных условий

4 Численные методы

4.1 Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

4.2 Базовый метод Годунова

4.3 Методы годуновского типа: Рое, WENO,....

5 Тесты

5.1 Сода

5.2 Тест с наличием скоростей

5.3 Тест с сильным разрывом (1000 и более раз)

6 Заключение

Список литературы

1. *Молчанов А.* Математическое моделирование задач газодинамики и тепломассообмена. — Москва : Издательство МАИ, 2013. — (Цит. на с. 1, 2).

2. *Годунов С.*, *Забродин А.*, *Иванов М.* [и др.]. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — Издательство «Наука», 1976. — (Цит. на с. 2).