Заметки по численным методам, применяемым в задачах газодинамики при сильных разрывах

Илья Заворохин, П.В. Бакланов

29 апреля 2025 г.

Содержание

TODO

1. описать ключевые моменты по книге [1]
2. 1. Вид системы для применения чмов
3. 2. Свойства численных схем, за которыми стоит следить
4. 3. Сами численные схемы: РК4, Годунова, ...
5. найти подходящие тесты

1 Введение

Цель работы - применение классических разностных методов (в частности метод Рунге Кутты 4-го порядка) к поиску приближённых решений гиперболических систем при наличии разрывов в начальных параметрах, знакомство с классическим методом Годунова и производными от него методами. Повышение точности численного решения применением схем годуновского типа к исходным методам (в частности, пересчет значений потоков по Годунову). Написание программной реализации этих методов.

2 Исходная система

2.1 В общем виде

Полная классическая система газодинамики записывается в недивергентном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\nabla)\,\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho E + div(\rho \boldsymbol{u}(w + \frac{\boldsymbol{u}^2}{2})) = 0 \tag{3}$$

$$p = p(\rho, e) \tag{4}$$

Используемые обозначения: ρ - плотность, u -скорость, p -давление, $E = e + \frac{\boldsymbol{u}^2}{2}$ - полная удельная (на единицу массы) энергия, e - удельная (на единицу массы)внутренняя энергия, w - удельная (на единицу массы) энтальпия. В таком виде она представлена в большинстве учебников по теории газовой динамики, например в [2]. Однако для применения численных методов ее преобразуют к другому виду. Для этого уравнение непрерывности(1) сначала умножается на U, а затем на E. Полученные уравнения складываются соответсвенно с уравением Эйлера (2) и уравнением для энергии (3). Учёт формул производной произведения позволяет привести эти уравнения к консервативному виду. Подобное преобразование указано например в [1], поэтому здесь приведем лишь полученную в результате дивергентную форму системы уравнений газовой динамики:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u(E + P))}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

$$p = p(\rho, e) \tag{8}$$

Во многих естественных задачах можно считать, что пространственная размерность задачи равна 1. Поэтому далее приводится вид системы для такого случая.

2.2 Одномерный вид

Если пространственная одномерность связана с одной из декартовых осей, то системы принимает вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial\rho(u(E + p))}{\partial x} = 0 \tag{11}$$

2.3 Сферически симметричный вид

В некоторых задачах (в особенности при моделировании взрывов, в том числе вспышек сверхновых) возможно сведение задачи к сферически симметричному случаю. В этом случае пространственной координатой будет радиальное расстояние от центра сферы. В таком случае система примет вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2(\rho u))}{\partial r} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2(\rho u^2 + p))}{\partial r} = 2\frac{p}{r} \tag{13}$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\rho u(E + p))}{\partial r} = 0 \tag{14}$$

3 Основные свойства численных схем

3.1 Метод контрольного объёма

3.2 Сходимость, порядок точности

3.3 Невязка, аппроксимация

3.4 Устойчивость

3.5 Требования для численных методов в случае решения задач газодинамики

3.6 Типы граничных условий

4 Численные методы

4.1 Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

4.2 Базовый метод Годунова

4.3 Методы годуновского типа: Рое, WENO,....

5 Тесты

5.1 Сода

5.2 Тест с наличием скоростей

5.3 Тест с сильным разрывом (1000 и более раз)

6 Заключение

7 Синхротронное радиоизлучение

Синхротронное излучение является одним из основных механизмов радиоизлучения в астрофизических объектах, таких как остатки сверхновых, активные ядра галактик и джеты. Оно возникает, когда релятивистские электроны движутся в магнитном поле, испытывая ускорение и излучая электромагнитные волны. В данном разделе представлена теоретическая основа для расчета синхротронного излучения в предположении, что этот механизм является доминирующим.

7.1 Основные предположения

Для упрощения расчета делаются следующие предположения:

1. Механизм излучения является исключительно синхротронным. Другие механизмы, такие как тепловое излучение, обратный комптон-эффект и т.д., не рассматриваются.

2. Функция распределения электронов по энергиям является степенной:

$$n_e(\gamma) = K\gamma^{-p}, \tag{15}$$

где $n_e(\gamma)d\gamma$ - концентрация электронов с фактором Лоренца от γ до $\gamma+d\gamma$, K - константа, определяющая концентрацию электронов, и p - спектральный индекс.

3. Магнитное поле считается однородным в пределах рассматриваемого объема, хотя его напряженность может меняться в зависимости от координат.

7.2 Мощность излучения одного электрона

Мощность, излучаемая одним электроном с фактором Лоренца γ в магнитном поле B, перпендикулярном направлению его движения, на частоте ν, определяется как:

$$P(\nu) = \frac{\sqrt{3}q_e^3 B \sin\alpha}{m_e c^2} F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right), \tag{16}$$

где:

- q_e - элементарный заряд,
- m_e - масса электрона,
- c - скорость света,
- α - угол между направлением скорости электрона и магнитным полем (угол тангажа),
- $F(x)$ - функция, описывающая спектральное распределение синхротронного излучения (часто используется приближение в виде интеграла Макдональда),
- ν_c - критическая частота:

$$\nu_c = \frac{3\gamma^2 q_e B \sin\alpha}{4\pi m_e c}. \tag{17}$$

7.3 Коэффициент излучения

Коэффициент излучения j_ν представляет собой мощность, излучаемую единицей объема в единицу времени в единичном телесном угле на частоте ν. Он получается интегрированием мощности излучения одного электрона по функции распределения электронов:

$$j_\nu = \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_{max}} P(\nu) n_e(\gamma) d\gamma, \tag{18}$$

где γ_{min} и γ_{max} - минимальный и максимальный фактор Лоренца электронов соответственно.

Подставляя выражение для $P(\nu)$ и $n_e(\gamma)$, получаем:

$$j_\nu = \frac{\sqrt{3}q_e^3 B \sin\alpha K}{m_e c^2} \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_{max}} F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \gamma^{-p} d\gamma \tag{19}$$

Вычисление этого интеграла может быть выполнено численно или с использованием приближений для функции $F(x)$.

7.4 Самопоглощение

В некоторых случаях необходимо учитывать эффект самопоглощения синхротронного излучения в источнике. Это особенно важно при низких частотах и высокой концентрации электронов.

7.5 Применимость

Представленный расчет радиоизлучения справедлив при сделанных предположениях. В реальных астрофизических объектах могут быть важны другие механизмы излучения, неоднородности магнитного поля, а также эффекты распространения излучения.

Список литературы

1. *Молчанов А.* Математическое моделирование задач газодинамики и тепломассообмена. — Москва : Издательство МАИ, 2013. — (Цит. на с. 2, 3).
2. *Годунов С.*, *Забродин А.*, *Иванов М.* [и др.]. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — Издательство «Наука», 1976. — (Цит. на с. 3).