

一. 求下列方程的通解, 每个小题 5 分.

(1)  $y'' + y' = 2x$ ;

(2)  $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$ , (提示可观察出特解);

(3)  $(e^{-y} - x)y' = 1$ ;

(4)  $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$ .

二. (10分) 考虑  $n$  阶线性系统  $\dot{x} = A(t)x$ , 这里  $n$  阶实方阵  $A(t)$  假设在  $[0, +\infty)$  上连续. 进一步假设如下广义积分收敛

$$\int_0^{+\infty} \|A(t)\| dt < +\infty,$$

证明系统的每个解  $x(t)$  当  $t \rightarrow +\infty$  时均有极限, 即向量值函数  $x(t)$  的极限  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  存在. 这里  $\|A(t)\|$  是一个矩阵范数.

三. (15分) 设二阶常数矩阵  $A$  和二维向量值函数  $f(x)$  定义如下:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad f(x) = e^x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(i) 计算  $e^{Ax}$ . (ii) 求二维齐次方程组  $u' = Au$  所有在  $[0, +\infty)$  上有界的解. (iii) 求非齐次方程组  $u' = Au + f(x)$  满足初值条件  $u(0) = 0 \in \mathbb{R}^2$  的解.

四. (15分) 考虑周期线性齐次系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \cos t & 0 \\ \cos t & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

计算系统的 Floquet 乘子, 判断系统是否存在非零周期解, 并确定系统在区间  $[0, +\infty)$  上的稳定性.

五. (15分) 记  $\phi(x, \xi, \eta)$  为初值问题

$$y' = \sin(xy), \quad y(\xi) = \eta$$

的解. 计算解  $\phi(x, \xi, \eta)$  在初始点  $(\xi, \eta) = (0, 0)$  处的两个偏导数

$$\left. \frac{\partial \phi(x, \xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{(\xi, \eta) = (0, 0)} \quad \text{和} \quad \left. \frac{\partial \phi(x, \xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{(\xi, \eta) = (0, 0)}.$$

六. (10分) 考虑二阶线性齐次方程  $\ddot{u} + a(t)u = 0$ , 其中函数  $a(t)$  是开区间  $I$  上的连续函数. 设  $[a, b] \subset I$  是  $I$  的一个有界闭子区间. 证明方程存在一个解在  $[a, b]$  上无零点, 当且仅当方程的每个非零解在  $[a, b]$  上至多有一个零点.

七. (10分) 计算矩阵指数  $e^A$  的行列式  $\det e^A$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

八. (15分) 记  $y(x)$  为 Cauchy 问题  $y' = x^2 - y^2$ ,  $y(0) = 0$  的饱和解, 回答以下问题, 并说明理由.

(i) 解  $y(x)$  的最大存在区间  $(\alpha, \beta)$  有界或无界(单边或双边无界)?

(ii) 解  $y(x)$  是奇函数, 或偶函数, 或不确定?

(iii) 确定解  $y(x)$  单调区间.

(iv) 显式给出两个  $(\alpha, \beta)$  上的函数  $u(x)$  和  $v(x)$ , 使得  $v(x) \leq y(x) \leq u(x)$ ,  $\forall x \in (\alpha, \beta)$ .