Beweise zur Vorlesung Approximationsalgorithmen

gelesen von Joachim Spoerhase

LaTeXvon Andre Löffler

January 9, 2014

Contents

1 Vorlesung

1.1 Beweis zu Approximationsalgorithmus zu VertexCover

- Zulässigkeit: Der Algorithmus liefert eine Knotenüberdeckung. Beweis durch Widerspruch: Wäre e eine Kante die nicht überdeckt ist, dann wäre auch $M \cup \{e\}$ ein Matching, im Widerspruch zur Nicht-Erweiterbarkeit von M.
- Güte: Es gilt $|M| \leq \text{OPT}$. Die ausgegebene Knotenmenge V' hat Größe $|V'| \leq 2|M| \leq 2\text{OPT}$, also $\frac{|V'|}{\text{OPT}} \leq 2$.

2 Vorlesung

3 Vorlesung

4 Vorlesung

4.1 Beweis zur Approximationsgüte vom Mehrwege-Schnitt

A_i ist isolierender Schnitt für S_i. $\sum_{i=1}^{k}(A_i) = 2\text{OPT}$, da jede Kante aus A genau zwei Komponenten K_i, K_j inzident.
Für $i = 1, \cdots, k$ gilt $c(C_i) \leq c(A_i)$.
$c(C) \leq (1 - \frac{1}{k}) \sum_{i=1}^{k} c(C_i) \leq c(A_i) = 2(1 - \frac{1}{k})\text{OPT}$

5 Vorlesung

5.1 Beweis zu LP-Runden: Ansatz II

- Zulässigkeit: Sei $e \in U$. Da e in $\leq h$ Mengen liegt und $\sum_{S \ni e} x_S \geq 1$ gilt, muss eine dieser Mengen $x_S \geq \frac{1}{h}$ erfüllen. Diese Menge wird von Algorithmus gewählt.
- Güte: Sei $S \in \mathbb{S}$. Der Algorithmus erhöht x_S um Faktor $\leq h$. Somit erhöht sich der Beitrag $x_S \cdot c_S$ dieser Menge zur Zielfunktion um Faktor h.

5.2 Beweis zu Relaxierter komplementärer Schlupf

Jede Variable y_i hat einen Geldbetrag von $\alpha\beta b_i y_i$. D.h. die Variablen haben insgesamt $\alpha\beta \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ Geldeinheiten. Für jedes Paar x_j, y_i von Variablen trasferiert y_i insgesamt $\alpha a_{ij} x_j y_i$ an x_j.
Jedes y_i besitzt dafü genügend Geld, da $\sum_j \alpha a_{ij} x_j y_i \leq \alpha\beta b_i y_i$ wegen des relaxierten dualen Komplementären Schlupfs (CS).
Jedes x_j bekommt $\alpha x_j \sum_i a_{ij} y_i \geq c_j x_j$ wegen des primalen Komplementären Schlupfs.
Insgesamt erhalten die x_j also mindestens den Betrag $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

5.3 Beweis zu Primal-Dual-Schema für SetCover

- Zulässigkeit: ✓
- Güte: es werden die relaxierten CS-Bedingungen mit $\alpha = 1$ und $\beta = h$ erfüllt.

Beispiel: $h = n$ [[Bild mit $n-1$ überlappendenen Mengen, die allen einen Knoten überdecken und zusätzlich den Knoten e_n gemeinsam haben und Kosten 1 besitzen, alle umschlossen von einer großen Menge mit Kosten $1+\varepsilon$]]
$\frac{h}{1+\varepsilon} \approx h$

6 Vorlesung

6.1 Beweis zu Unabhängige Mengen in H^2

Betrachte kleinste dominierende Menge D in H. Dann lassen sich die Knoten von H mit $|D|$ Sternen überdecken. $\Rightarrow H^2$ lässt sich mit $|D|$ Cliquen überdecken. Jede dieser Cliquen enthält höchstens einen Knoten aus U.
$\Rightarrow |U| \leq |D| = \text{dom}(H)$

6.2 Beweis zu Faktor 2 für metrisches k-Zentrum

Sei $\{e_1, \cdots, e_{j^*}\}$ die Menge der Kanten mit Kosten $\leq OPT$. Der Graph G_{j^*} enthält dominierende Menge der Größe $\text{dom}(G_{j^*}) \leq k$.
$\Rightarrow |U_{j^*}| \leq \text{dom}(G_{j^*}) \leq k$
$\Rightarrow j \leq j^* \Rightarrow c(e_j) = c(e_{j^*}) = OPT$

6.3 Beweis zu Satz 6.3

U_j ist dominierende Menge in G_j^2 der Größe $\leq k$.
Sei $v \in V$ beliebig. Dann gibt es einen Knoten u, der v in G_j^2 dominiert.
$\Rightarrow$ es existiert ein $u-v-$Weg in G_j, der höchstens zwei Kanten durchläuft und dessen Länge $\leq 2 \cdot c(e_j) \leq 2 \cdot OPT$

6.4 Beweis zu Satz 6.4

Angenommen, es gäbe einen $(2-\varepsilon)-$Approximationsalgorithmus A
$\Rightarrow$ reduzieren von dominierender Menge.
Eingabe: Graph $G = (V, E)$, $k \leq |V|$
Frage: Existiert eine dominierende Menge und Größe $\leq k$.
Betrachte einen vollständigen Graphen G' mit Knotenmenge V.

$$c(u,v) = \begin{cases} 1 \text{ falls } (u,v) \in E \\ 2 \text{ falls } (u,v) \notin E \end{cases}$$

- angenommen, es existiert eine dominierende Menge in G mit Größe $\leq k$.
  $\Rightarrow OPT(G') \leq 1 \Rightarrow A(G') \leq 2 - \varepsilon$
- angenommen, $\text{dom}(G) > k \Rightarrow OPT(G') \geq 2 \Rightarrow A(G') \geq 2$

$\Rightarrow$ wir können dominierende Menge in G lösen $\lightning$

Definition 1 (leichtester Knoten)**.** *Mit $S_H(u)$ sei der leichteste Knoten aus $N_H(u) \cup \{u\}$ bezeichnet.*

Lemma 1 (Leichteste Dominierende Menge)**.** *Sei U unabhängige Menge in H^2 von $S := \{S_H(u)|u \in U\}$. Dann gilt $w(S) \leq wdom(H)$, wobei $wdom(H)$ das Gewicht der leichtesten dominierenden Menge in H ist.*

Proof. Beweis Sei D günstigste dominierende Menge in H. $\Rightarrow$ Knoten von H lassen sich durch Sterne mit Zentrum in D überdecken. Diese Sterne sind Cliquen in H^2. Jede dieser Cliquen enthält höchstens einen Knoten aus U. Sei $u' \in U$ beliebig und $v \in D$ das Zentrum des Sterns, der u' überdeckt.
$S_H(u) \leq x(v) \Rightarrow w(S) \leq w(D) = \mathrm{wdom}(H)$ $\square$

6.5 Beweis zu Satz 6.5

$c(e_j) \leq OPT$ analog zu Lemma 6.2. Sei $v \in V$ beliebig, v wird in G_j^2 von einem Knoten u' dominiert.
$\Rightarrow$ Weg von v zu u über ≤ 2 Kanten und zu $S_{G_j}(u)$ über ≤ 3 Kanten. $\Rightarrow ALG \leq 3 \cdot c(e_j) \leq 3 \cdot OPT$

7 Vorlesung

7.1 Beweis zum Lemma

Sei S_i die Menge von Knoten mit Grad $\geq i$ in T. Sei E_i die Menge von Kanten in T, die inzident zu einem Knoten in S_i sind.
Behauptung: Für jedes $i \geq \Delta(T) - l$ gilt:

i) $|E_i| \geq (i-1) \cdot |S_i| + 1$

ii) Jede Kante aus G, die verschiedene Zusammenhangskomponenten aus $T - E_i$ verbindet ist inzident zu Knoten aus S_{i-1}.

iii) $\exists j : |S_{j-i}| \leq 2|S_j|$ und $j \geq \Delta(T) - l + 1$.

Aus i) - iii) folgt das Lemma, denn:

$$OPT \geq \frac{(j-1) \cdot |S_j| + 1}{|S_{j-1}|} \overset{\text{iii)}}{\geq} \frac{(j-q) \cdot |S_j| + 1}{2|S_j|} > \frac{(j-1)}{2} \geq \frac{\Delta(T) - l}{2}$$

zu i) Es gibt $\geq i \cdot |S_i|$ viele Kanten-Inzidenten zu Knoten aus S_i. Es gibt $\leq |S_i| - 1$ viele Kanten, die inzident zu <u>zwei</u> Kanten aus S_i sind, was i) zeigt: $|E_i| \geq i \cdot |S_i| - (|S_i| - 1) = (i-1) \cdot |S_i| + 1$

zu ii) Jede Kante e, die zwei Zusammenhangskomponenten aus $T - E_i$ verbindet, liegt entweder in E_i oder schließt einen Kreis C in T, der einen Knoten aus S_i enthält. Da T lokal optimal ist, muss e somit zu einem Knoten aus S_{i-1} inzident sein.

zu iii) Andernfalls wäre $|S_{\Delta(T)-l}| > 2^l \cdot |S_{\Delta(T)}| \geq n \cdot |S_{\Delta(T)}|$.

7.2 Beweis zu Satz

Definiere das *Potential*: $\Phi(T) = \sum_{v \in V} 3^{\deg v}$
Es gilt: $\Phi(T) \leq n \cdot 3^n$.
$\Phi(T) \geq (n-2) \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 > n$.
Zu zeigen ist, dass das Potential nach jeder Iteration höchstens $(1 - \frac{2}{27 \cdot n^3})$-mal so groß ist wie vorher.
Nach $\frac{27}{2} n^4 \log 3$ vielen Flips ist das Potential höchstens
$(1 - \frac{2}{27 \cdot n^3})^{\frac{27}{2} n^4 \log 3} \cdot n \cdot 3^n \overset{1+x \leq e^x}{\leq} e^{-n \log 3} \cdot n \cdot 3^n = n$.
Angenommen, der Algorithmus reduziert den Grad eines Knoten v von i auf $i-1$, wobei $i \geq \Delta(T) - l$ und fügt eine Kante (u, w) hinzu.

- Die Erhöhung von Φ aufgrund des Hinzufügens von (u, w) ist $\leq 2 \cdot (3^{i-1} - 3^{i-2}) = 4 \cdot 3^{i-2}$
- Die Abnahme von Φ aufgrund von v ist $\geq 3^i - 3^{i-1} = 2 \cdot 3^{i-1}$. Es gilt $3^l \leq 3 \cdot 3^{\log n} \leq 3 \cdot 2^{2 \cdot \log n} = 3 \cdot n^2$.

Die Gesamtabnahme von Φ ist somit mindestens

$$2 \cdot 3^{i-1} - 4 \cdot 3^{i-2} = \frac{2}{9} 3^i \geq \frac{2}{9} 3^{\Delta(T) - l} \geq \frac{2}{27 \cdot n^3} 3^{\Delta(T)} \geq \frac{2}{27 \cdot n^3} \Phi(t)$$

Für den Ergebnisbaum T' gilt also: $\Phi(T') \leq (1 - \frac{2}{27 \cdot n^3}) \Phi(T)$

8 Vorlesung

8.1 FPTAS für Rucksack durch Skalierung

Sei O eine optimale Lösung. Für jedes Objekt a gilt wegen der Skalierung $profit(a) - K \leq K \cdot profit'(a) \leq profit(a)$
$\Rightarrow K \cdot profit'(O) \geq profit(O) - nK$
Da S' optimale Lösung unter $profit'(\cdot)$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} profit(S') &\geq K \cdot profit'(S') \geq K \cdot profit'(O) \geq profit(O) - nK \\ &= profit(O) + \epsilon P \geq profit(O) - \epsilon \cdot profit(O) \\ &\geq (1 - \epsilon) \cdot profit(O) \end{aligned}$$

8.2 Beweis zu Satz 7.1

Laufzeit: $O(n^2 \frac{P}{\epsilon P / n}) = O(\frac{n^3}{\epsilon})$

8.3 Beweis zu Satz 7.3

Angenommen, es gibt ein FPTAS für Π mit Laufzeit $q(|I_u|, \frac{1}{\epsilon})$ wobei q ein Polynom ist. Setze nun $\epsilon := \frac{1}{p(|I_u|)}$. Dann ist der Zielwert der von FPTAS erreichten Lösung höchstens $(1 + \epsilon) \cdot OPT < OPT + \epsilon \cdot p(|I_u|) = OPT + 1$.
Das heißt, der FPTAS bestimmt dann sogar eine optimale Lösung.
Die Laufzeit ist $q(|I_u|, \frac{1}{\epsilon}) = q(|I_u|, p(|I_u|))$, was polynomiell in $|I_u|$ ist.

9 Vorlesung

10 Vorlesung

11 Vorlesung

12 Mehrwegeschnitte per LP-Runden

Eing.: Graph $G = (V, E)$, Kosten $c : E \to \mathcal{N}$, Terminale $s_1, \cdots, s_k \in V$.
Ges.: Partitionierung $V = C_1 \cup \cdots \cup C_k$ mit $s_i \in C_i$ für $i = 1, \cdots, k$, so dass die

Kosten von $F = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{k} \delta(C_i)}_{\text{Menge der Kanten mit genau einem Endpunkt in } C_i}$ minimal sind.

IPL: min $\frac{1}{2} \sum_{e \in E} c_e \sum_{i=1}^{k} z_e^i$
s.t. $z_e^i \geq x_u^i - x_v^i \; \forall e = (u, v) \in E, i = 1, \cdots, k$
$z_e^i \geq x_v^i - x_u^i \; \forall e = (u, v) \in E, i = 1, \cdots, k$
$x_{s_i} = 1 \; (i = 1, \cdots, k)$
$\sum_{i=1}^{k} x_u^i = 1 \; \forall c \in V$
$x_u^i \in \{0, 1\}$
L_1-Metrik: $x \in \mathcal{R}^k, , x^i \triangleq i$-te Koordinate von x. $||x - y||_1 := \sum_{i=1}^{k} x^i - y^i$
LP-Relaxierung:

- ersetze $x_u^i \in \{0, 1\}$ durch $x_u^i \geq 0$
- In optimaler Lösung gilt $z_e^i = |x_u^i - x_v^i|$ für $e = (u, v)$
- $\sum_{i=1}^{k} z_e^i = \sum_{i=1}^{k} |x_u^i - x_v^i| = ||x_u - x_v||_1$ wobei $x_u = (x_u^1, \cdots, x_u^k)$
- $\Delta_k = \{x \in \mathcal{R}^k | x^i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} x^i = 1\}$
- $e_i = (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, 0, \cdots, 0)$
- LP-Relaxierung:
  min $\sum_{e=(u,v) \in E} c_e \cdot ||x_u - x_v||_1$
  s.t. $x_{s_i} = e_i (i = 1, \cdots, k)$
  $x_u \in \Delta_k \forall u \in V$

Definiere $B(s_i, r) = \{v \in V | \frac{1}{2} ||x_v - e_i||_1 \leq r\}$, $B(s_i, 1) = V$
Alg.:

- Bestimme optimale Lösung x für LP-Relaxierung
- für $i = 1, \cdots, k$ do $C_i \leftarrow \emptyset$
- wähle $v \in (0, 1)$ zufällig und gleichverteilt
- wähle Permutation π auf $\{1, \cdots, k\}$ zufällig und gleichverteilt.
- $x \leftarrow \emptyset$ #alle bereits zugewiesenen Knoten

- for $i = 1, \cdots, k$
  - $C_{\pi(i)} \leftarrow B(s_{\pi(i)}, r) - x$
- $C_{\pi(k)} = V - X$
- return $(C_1, \cdots, C_k)$

Lemma 2. *Für jeden Index l und alle Knoten $u, v \in V$ gilt:*
$|x_u^l - x_v^l| \leq \frac{1}{2}||x_u - x_v||_1$

Proof. o.E.: $x_u^l \geq x_v^l$: $|x_u^l - x_v^l| = x_u^l - x_v^l = (1 - \sum_{j \neq l} x_u^j) - (1 - \sum_{j \neq l} x_v^j) = \sum_{j \neq l}(x_v^j - x_u^j) \leq \sum_{j \neq l} |x_v^j - x_u^j|$
$\Rightarrow 2|x_u^l - x_v^l| \leq ||x_u - x_v||_1$ □

Lemma 3. $u \in B(s_i, r) \Leftrightarrow 1 - x_u^i \leq r$

Proof. $u \in B(s_i, r) \Leftrightarrow \frac{1}{2}||e_i - x_u||_1 \leq r$
Äq.: $\frac{1}{2}\sum_{l \neq i} x_u^l + \frac{1}{2}(1 - x_u^i) \leq r$
Behauptung folgt wegen $\sum_{l \neq i} x_u^l = 1 - x_u^i$ □

Lemma 4. *Sei $uv \in E$. Die Wahrscheinlichkeit, dass u und v vom Algorithmus getrennt werden ist $\leq \frac{3}{4}||x_u - x_v||_1$*

Beweis später.

Satz 5. *Obiger Algorithmus ist ein randomisierter $\frac{3}{2}$-Approximationsalgorithmus.*

Proof. Sei Z_{uv} eine Zufallsvariable aus $\{0, 1\}$ mit $Z_{uv} = 1 \Leftrightarrow u, v$ werden vom Algorithmus getrennt.
Sei $W := \sum_{e=(u,v) \in E} c_e \cdot Z_{uv}$ eine Zufallsvariable, die berechneten Kosten des Lösungsalgorithmus.
$E[W] = E[\sum_{e=(u,v) \in E} c_e \cdot Z_{uv}] = \sum_{e=(u,v) \in E} c_e \cdot E[Z_{uv}] = \sum c_e Pr[u, v \text{ werden getrennt}] \leq \sum c_e \frac{3}{4}||x_u - x_v||_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \sum c_e ||x_u - x_v||_1 \leq \frac{3}{2} OPT$ □