Beweise zur Vorlesung Approximationsalgorithmen

gelesen von Joachim Spoerhase

LaTeX von Andre Löffler

November 14, 2013

Contents

1 Vorlesung

1.1 Beweis zu Approximationsalgorithmus zu VertexCover

- Zulässigkeit: Der Algorithmus liefert eine Knotenüberdeckung. Beweis durch Widerspruch: Wäre e eine Kante die nicht überdeckt ist, dann wäre auch $M \cup \{e\}$ ein Matching, im Widerspruch zur Nicht-Erweiterbarkeit von M.
- Güte: Es gilt $|M| \leq \mathrm{OPT}$. Die ausgegebene Knotenmenge V' hat Größe $|V'| \leq 2|M| \leq 2\mathrm{OPT}$, also $\frac{|V'|}{\mathrm{OPT}} \leq 2$.

2 Vorlesung

3 Vorlesung

4 Vorlesung

4.1 Beweis zur Approximationsgüte vom Mehrwege-Schnitt

A_i ist isolierender Schnitt für S_i. $\sum_{i=1}^{k}(A_i) = 2\mathrm{OPT}$, da jede Kante aus A genau zwei Komponenten K_i, K_j inzident.
Für $i = 1, \cdots, k$ gilt $c(C_i) \leq c(A_i)$.
$c(C) \leq (1 - \frac{1}{k}) \sum_{i=1}^{k} c(C_i) \leq c(A_i) = 2(1 - \frac{1}{k})\mathrm{OPT}$

5 Vorlesung

5.1 Beweis zu LP-Runden: Ansatz II

- Zulässigkeit: Sei $e \in U$. Da e in $\leq h$ Mengen liegt und $\sum_{S \ni e} x_S \geq 1$ gilt, muss eine dieser Mengen $x_S \geq \frac{1}{h}$ erfüllen. Diese Menge wird von Algorithmus gewählt.
- Güte: Sei $S \in \mathbb{S}$. Der Algorithmus erhöht x_S um Faktor $\leq h$. Somit erhöht sich der Beitrag $x_S \cdot c_S$ dieser Menge zur Zielfunktion um Faktor h.

5.2 Beweis zu Relaxierter komplementärer Schlupf

Jede Variable y_i hat einen Geldbetrag von $\alpha\beta b_i y_i$. D.h. die Variablen haben insgesamt $\alpha\beta \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ Geldeinheiten. Für jedes Paar x_j, y_i von Variablen trasferiert y_i insgesamt $\alpha a_{ij} x_j y_i$ an x_j.
Jedes y_i besitzt dafü genügend Geld, da $\sum_j \alpha a_{ij} x_j y_i \leq \alpha\beta b_i y_i$ wegen des relaxierten dualen Komplementären Schlupfs (CS).
Jedes x_j bekommt $\alpha x_j \sum_i a_{ij} y_i \geq c_j x_j$ wegen des primalen Komplementären Schlupfs.
Insgesamt erhalten die x_j also mindestens den Betrag $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

5.3 Beweis zu Primal-Dual-Schema für SetCover

- Zulässigkeit: ✓
- Güte: es werden die relaxierten CS-Bedingungen mit $\alpha = 1$ und $\beta = h$ erfüllt.

Beispiel: $h = n$ [[Bild mit $n-1$ überlappendenen Mengen, die allen einen Knoten überdecken und zusätzlich den Knoten e_n gemeinsam haben und Kosten 1 besitzen, alle umschlossen von einer großen Menge mit Kosten $1+\varepsilon$]]
$\frac{h}{1+\varepsilon} \approx h$

6 Vorlesung

6.1 Beweis zu Unabhängige Mengen in H^2

Betrachte kleinste dominierende Menge D in H. Dann lassen sich die Knoten von H mit $|D|$ Sternen überdecken. $\Rightarrow$ H^2 lässt sich mit $|D|$ Cliquen überdecken. Jede dieser Cliquen enthält höchstens einen Knoten aus U.
$\Rightarrow |U| \leq |D| = \text{dom}(H)$

6.2 Beweis zu Faktor 2 für metrisches k-Zentrum

Sei $\{e_1, \cdots, e_{j^*}\}$ die Menge der Kanten mit Kosten $\leq OPT$. Der Graph G_{j^*} enthält dominierende Menge der Größe $\text{dom}(G_{j^*}) \leq k$.
$\Rightarrow |U_{j^*}| \leq \text{dom}(G_{j^*}) \leq k$
$\Rightarrow j \leq j^* \Rightarrow c(e_j) = c(e_{j^*}) = OPT$

6.3 Beweis zu Satz 6.3

U_j ist dominierende Menge in G_j^2 der Größe $\leq k$.
Sei $v \in V$ beliebig. Dann gibt es einen Knoten u, der v in G_j^2 dominiert.
$\Rightarrow$ es existiert ein $u-v-$Weg in G_j, der höchstens zwei Kanten durchläuft und dessen Länge $\leq 2 \cdot c(e_j) \leq 2 \cdot OPT$

6.4 Beweis zu Satz 6.4

Angenommen, es gäbe einen $(2-\varepsilon)-$Approximationsalgorithmus A
$\Rightarrow$ reduzieren von dominierender Menge.
Eingabe: Graph $G = (V, E)$, $k \leq |V|$
Frage: Existiert eine dominierende Menge und Größe $\leq k$.
Betrachte einen vollständigen Graphen G' mit Knotenmenge V.

$$c(u,v) = \begin{cases} 1 \text{ falls } (u,v) \in E \\ 2 \text{ falls } (u,v) \notin E \end{cases}$$

- angenommen, es existiert eine dominierende Menge in G mit Größe $\leq k$.
  $\Rightarrow OPT(G') \leq 1 \Rightarrow A(G') \leq 2 - \varepsilon$

- angenommen, $\text{dom}(G) > k \Rightarrow OPT(G') \geq 2 \Rightarrow A(G') \geq 2$

$\Rightarrow$ wir können dominierende Menge in G lösen $\lightning$

Definition 1 (leichtester Knoten)**.** *Mit $S_H(u)$ sei der leichteste Knoten aus $N_H(u) \cup \{u\}$ bezeichnet.*

Lemma 1 (Leichteste Dominierende Menge)**.** *Sei U unabhängige Menge in H^2 von $S := \{S_H(u)|u \in U\}$. Dann gilt $w(S) \leq wdom(H)$, wobei $wdom(H)$ das Gewicht der leichtesten dominierenden Menge in H ist.*

Proof. Beweis Sei D günstigste dominierende Menge in H. $\Rightarrow$ Knoten von H lassen sich durch Sterne mit Zentrum in D überdecken. Diese Sterne sind Cliquen in H^2. Jede dieser Cliquen enthält höchstens einen Knoten aus U. Sei $u' \in U$ beliebig und $v \in D$ das Zentrum des Sterns, der u' überdeckt.
$S_H(u) \leq x(v) \Rightarrow w(S) \leq w(D) = \mathrm{wdom}(H)$ □

6.5 Beweis zu Satz 6.5

$c(e_j) \leq OPT$ analog zu Lemma 6.2. Sei $v \in V$ beliebig, v wird in G_j^2 von einem Knoten u' dominiert.
$\Rightarrow$ Weg von v zu u über ≤ 2 Kanten und zu $S_{G_j}(u)$ über ≤ 3 Kanten. $\Rightarrow ALG \leq 3 \cdot c(e_j) \leq 3 \cdot OPT$