

Julius-Maximilians-Universität Würzburg  
Fakultät für Mathematik und Informatik

# Differentialgeometrie

**Prof. Pabel**

Andreas Rosenberger, Nils Wisiol  
[andreas@rosenberger-home.de](mailto:andreas@rosenberger-home.de), [info@nils-wisiol.de](mailto:info@nils-wisiol.de)

30. April 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Grundbegriffe und Bezeichnungen aus der linearen Algebra und analytischen Geometrie</b>	<b>3</b>
0.1	Strukturen . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Lokale Kurventheorie im euklidischen Raum</b>	<b>6</b>
1.1	Grundbegriffe der Kurventheorie . . . . .	6
1.2	Kurven in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ . . . . .	14
1.3	Kurven im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ . . . . .	14
1.3.1	FRENET-Begleitbasis, Krümmung und Torsion . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Literaturhinweise</b>	<b>20</b>

# 0 Grundbegriffe und Bezeichnungen aus der linearen Algebra und analytischen Geometrie

Die klassische Differentialgeometrie der Kurven und Flächen benutzt als umgebenden Raum einen  $n$ -dimensionalen, orientierten, euklidischen Raum  $E^n$  mit zugehörigem euklidischem Richtungsvektorraum  $V^n$ .

## 0.1 Strukturen

$V^n$  ist mit einem Skalarprodukt  $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle \in \mathbb{R}$  ausgestattet. Damit lassen sich messen:

- die Länge von Vektoren  $X$ :  $|X| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$
- die Orthogonalität von Vektoren  $X, Y$ :  $X \perp Y \Leftrightarrow \langle X, Y \rangle = 0$
- der Winkel zwischen zwei Vektoren  $X, Y$ :  $\cos \angle(X, Y) = \left\langle \frac{X}{|X|}, \frac{Y}{|Y|} \right\rangle$
- der Abstand von Punkten  $p, q$ :  $d(p, q) = |\vec{pq}|$
- Flächeninhalte, Volumina, usw.

Ist zusätzlich eine feste Orthonormalbasis  $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$  (definiert durch  $\langle \hat{e}_i, \hat{e}_k \rangle = \delta_{ik}$ ) ausgezeichnet als positiv orientiert, erhält man eine Orientierung des Raumes und kann alle Basen in positiv und negativ orientierte einteilen.

**Standard-Modell:**  $E^n = V^n = \mathbb{R}^n$ , ausgestattet mit dem Standard-Skalarprodukt  $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n X^i Y^i$  und der (positiv orientierten) Standardbasis  $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$  mit  $\hat{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ . Dieses Standardmodell reicht bei uns meist aus: Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems  $(0; e_1, \dots, e_n)$  in einem abstrakten, orientierten euklidischen Raum  $E^n$ , bestehend aus

- einem „Ursprung“ („Nullpunkt“)  $0 \in E^n$

- einer positiv orientierten Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  im  $V^n$

kann man jedem Punkt und jedem Vektor eindeutig reelle Koordinaten zuordnen:

- Vektor:  $X = \sum_{i=1}^n X^i e_i \in V^n \mapsto (X^1, \dots, X^n) \in \mathbb{R}^n$
- Punkt:  $p = 0 + \sum_{i=1}^n p^i e_i \mapsto (p^1, \dots, p^n) \in \mathbb{R}^n$

Aus einem Skalarprodukt in  $V^n$  wird in Koordinaten

$$\langle X, Y \rangle = \left\langle \sum X^i e_i, \sum Y^k e_k \right\rangle = \sum_i \sum_k X^i Y^k \langle e_i, e_k \rangle = \sum_{i=1}^n X^i Y^i$$

das Standard-Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$ . Man ist im Standard-Modell angelangt. Ein Wechsel des kartesischen Koordinatensystems im  $E^n$  induziert im Koordinatenraum  $\mathbb{R}^n$  eine Bewegung

$$p \mapsto p' = Dp + t$$

bestehend aus einer eigentlichen orthogonalen Drehmatrix  $D \in SO(n, \mathbb{R})$  mit  $\det D = +1$  und einem Translationsvektor  $t \in \mathbb{R}^n$ . In der euklidischen Differentialgeometrie werden Eigenschaften von Objekten (Kurven, Flächen, ...) untersucht, die invariant gegenüber solchen Transformationen sind, also nicht vom gewählten kartesischen Koordinatensystem abhängig sind.

### Bemerkung:

In der sogenannten affinen Differentialgeometrie untersucht man Eigenschaften von Objekten, die (in Koordinaten) invariant sind gegenüber beliebigen affinen Transformationen  $p \mapsto p' = Ap + t$ ,  $A$  regulär. Man ignoriert dort vollständig die metrische Struktur des  $\mathbb{R}^n$ . Der umgebende Raum ist dann ein affiner Punktraum (bei uns nur am Rande betrachtet).

Zum Vektorprodukt (Kreuzprodukt) im orientierten euklidischen  $\mathbb{R}^n$ :

Zu je  $n-1$  Vektoren  $X_1, \dots, X_{n-1} \in \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) gibt es genau einen Vektor  $Y \in \mathbb{R}^n$  mit den Eigenschaften

1.  $Y \perp X_k, (k = 1, \dots, n-1)$
2.  $|Y| = a_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-1}) = \sqrt{\det(\langle X_i, X_k \rangle)_{i,k=1, \dots, n-1}}$   
 $= (n-1)$ -dimensionaler Flächeninhalt des von  $X_1, \dots, X_{n-1}$  aufgespannten  $n-1$ -dimensionalen Parallelogramms  
 $=$  Wurzel aus der Gramschen Determinanten  $G(X_1, \dots, X_{n-1})$
3.  $\det(X_1, \dots, X_{n-1}, Y) \geq 0$  (d.h.  $(X_1, \dots, X_{n-1}, Y)$  ist positiv orientiert)

Bezeichnung:  $Y = X_1 \times \cdots \times X_{n-1}$

Eine explizite Formel ist (mit der Standardbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  des  $\mathbb{R}^n$ ):

$$\begin{aligned} X_1 \times \cdots \times X_{n-1} &= \sum_{i=1}^n \det(X_1, \dots, X_{n-1}, e_i) e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} X_1^1 & \cdots & X_{n-1}^1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_1^n & \cdots & X_{n-1}^n & 0 \end{vmatrix} (i) e_i = \begin{vmatrix} X_1^1 & \cdots & X_{n-1}^1 & e_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_1^n & \cdots & X_{n-1}^n & e_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

**Beispiel:**

$n = 2$

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} &\Rightarrow X^x = \begin{vmatrix} X^1 & e_1 \\ X^2 & e_2 \end{vmatrix} = -X^2 e_1 + X^1 e_2 = \begin{pmatrix} -X^2 \\ X^1 \end{pmatrix} \\ |X^x| &= a_1(X) = |X| \end{aligned}$$

**Beispiel:**

$n = 3$ :

$$X \times Y = \begin{vmatrix} X^1 & Y^1 & e_1 \\ X^2 & Y^2 & e_2 \\ X^3 & Y^3 & e_3 \end{vmatrix} = (X^2 Y^3 - X^3 Y^2) e_1 + \dots$$

$$|X \times Y| = a_2(X, Y) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle X, X \rangle & \langle X, Y \rangle \\ \langle Y, X \rangle & \langle Y, Y \rangle \end{pmatrix}}$$

**Anwendung:**

Jedes Orthonormalsystem  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  im  $\mathbb{R}^n$  lässt sich durch  $e_n := e_1 \times \cdots \times e_{n-1}$  eindeutig zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  ergänzen.

# 1 Lokale Kurventheorie im euklidischen Raum

## 1.1 Grundbegriffe der Kurventheorie

Wir betrachten zunächst (kurzzeitig) rein affinegeometrische Begriffe/Invarianten.

**Definition:**

Ein  $\mathcal{C}^r$ -Weg oder eine parametrisierte  $\mathcal{C}^r$ -Kurve ( $r \geq 0$ ) [ $\mathcal{C}^r$  =  $r$ -mal stetig differenzierbar] im (affinen)  $\mathbb{R}^n$  ist eine  $\mathcal{C}^r$ -Abbildung

$$c : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$$

eines offenen Intervalls  $I$  in den  $\mathbb{R}^n$ .

$t$  heißt Parameter, die Bildmenge  $c[I] \subset \mathbb{R}^n$  die Spur des Weges.

Ein  $\mathcal{C}^r$ -Weg ( $r \geq 1$ ) heißt regulär, wenn überall der Tangentenvektor  $\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt}(t) \neq 0$  ist. Nichtreguläre Punkte  $c(t_0)$  mit  $\dot{c}(t_0) = 0$  heißen Singularitäten.

**Kinematische Interpretation:**

$t \mapsto c(t)$  beschreibt die zeitabhängige Bewegung eines Punktes im  $\mathbb{R}^n$ .  $\dot{c}$  ist die vektorielle Geschwindigkeit (und im euklidischen  $\mathbb{R}^n$   $w := |\dot{c}|$  die skalare Geschwindigkeit).

**Beispiel:**

1. Peano-Kurve: Stetiger ( $\mathcal{C}^0$ -)Weg im  $\mathbb{R}^2$ , dessen Spur jeden Punkt eines Gebietes  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  ausfüllt (nirgends differenzierbar, „unbrauchbar“)
2. Konstanter Weg:  $t \in I \mapsto c(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  (nirgends regulär, „unbrauchbar“)
3. Neil'sche Parabel:  $c : t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  ( $\mathcal{C}^\infty$ -Weg), in  $c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  nicht regulär („Spitze“) ( $w(0) = |\dot{c}(0)| = 0$ , „man hat Zeit, sich umzudrehen“)

4. Kreislinie:  $c : t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  ( $\infty$ -oft durchlaufbar) [Affin gesehen ist das eine Ellipse!]

Aber auch  $t \mapsto \tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \pm\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$  und  $t \mapsto \tilde{\tilde{c}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh t} \\ \tanh t \end{pmatrix}$  sind Parametrisierungen von Kreisstücken.

Wege, die nur mit veränderlicher „Zeitskala“ durchlaufen werden, sollen nicht als verschieden angesehen werden.

**Definition:**

$I, \tilde{I} \subset \mathbb{R}$  seien offene Intervalle.

Zwei Wege  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißen  $C^r$ -äquivalent ( $r \geq 0$ ), wenn ein orientierungstreuer (d.h. monoton wachsender)  $C^r$ -Diffeomorphismus  $\Phi : I \rightarrow \tilde{I}$  existiert, mit

$$c = \tilde{c} \circ \Phi, \text{ d.h. } \forall t \, c(t) = \tilde{c}(\Phi(t))$$

**Bemerkung:**

0.  $\Phi$   $C^r$ -Diffeomorphismus  $\Leftrightarrow \Phi$  bijektiv und  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$   $C^r$ -differenzierbar. [Bsp.:  $\Phi : t \in \mathbb{R} \rightarrow t^3 \in \mathbb{R}$  ist kein  $C^1$ -Diffeomorphismus]

Bei  $C^r$ -Diffeomorphismus ist stets  $\dot{\Phi}(t) \neq 0$  (falls  $r \geq 1$ )

1.  $\Phi$  ist (für  $r \geq 1$ ) genau dann orientierungstreu, wenn überall  $\dot{\Phi}(t) > 0$  ist.
2. Äquivalente Wege besitzen (für  $r \geq 1$ ) das gleiche Regularitätsverhalten.

$$\dot{c}(t) = \dot{\tilde{c}}(\Phi(t)) \cdot \underbrace{\dot{\Phi}(t)}_{>0}$$

3. Die Äquivalenz von Wegen ist wirklich eine Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv)

**Definition:**

Eine (orientierte, reguläre)  $C^r$ -Kurve ( $r \geq 1$ ) im (affinen)  $\mathbb{R}^n$  ist eine Äquivalenzklasse  $[c]$  von regulären  $C^r$ -Wegen  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ein Repräsentant heißt eine (zulässige) Parametrisierung der  $C^r$ -Kurve, eine die Äquivalenz vermittelnde Abbildung  $\Phi$  eine (zulässige) Parametertransformation.

**Beispiel:**

Die „Kreis“-Darstellungen

$$t \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left(|t| < \frac{\pi}{2}\right)$$

und

$$\tilde{t} \mapsto \tilde{c}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh \tilde{t}} \\ \tanh \tilde{t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 (\tilde{t} \in \mathbb{R})$$

sind  $\mathcal{C}^\infty$ -äquivalente Parametertransformationen:

$$\Phi(t) = \text{Artanh} \sin t = \tilde{t}$$

mit

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{\cos t} > 0$$

**Bemerkung:**

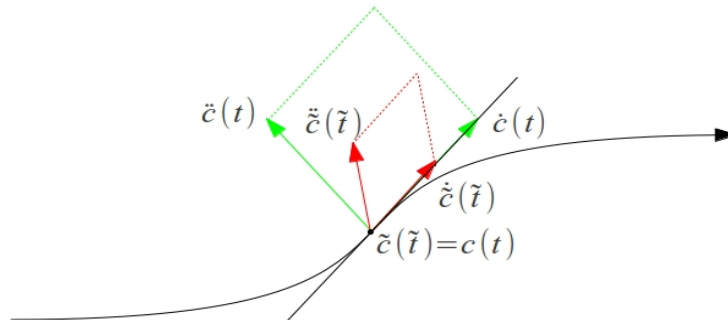
Nicht jedes 1-dimensionale „Gebilde“ im  $\mathbb{R}^n$  (z.B. eine vollständige Kreislinie) lässt sich global und injektiv als Bild eines offenen Intervalls darstellen.

Objekte, die sich nur lokal so parametrisieren lassen, heißen (1-dimensionale) differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Für lokale Untersuchungen ist eine solche Erweiterung der Kurvenbegriffs nicht nötig.

Die bisher eingeführten Begriffe sind offensichtlich affin-invariant. Aber im Folgenden sind auch nur Eigenschaften von Kurven von Interesse, also Eigenschaften, die nicht von der Parametrisierung abhängen.

Hier ein Beispiel aus der rein affinen Differentialgeometrie.

**Beispiel:**



**Satz 1.1.1:**

$t \mapsto c(t)$  sei Parameterdarstellung einer  $\mathcal{C}^r$ -Kurve im (affinen)  $\mathbb{R}^n$  mit  $r \geq n$ . Dann sind die Ableitungsvektoren

$$c_p := \frac{d^p c}{dt^p} (p = 1, \dots, n)$$

nicht invariant gegenüber Parametertransformationen, jedoch die (punktualen, orientierten) Schmiege-



räume (oskulierende Räume, „osculating spaces“)

$$S_p(t) := c(t) + \langle \langle c_1(t), \dots, c_p(t) \rangle \rangle$$

Spezialfälle:

Tangente  $S_1(t) = c(t) + \langle \langle \dot{c}(t) \rangle \rangle$

Schmiegeebene  $S_2(t)c(t) + \langle \langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle \rangle$

**Beweis (von Satz 1.1.1):**

Aus  $c = \tilde{c} \circ \Phi$  folgt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}\dot{c} &= \dot{\Phi} (\dot{\tilde{c}} \circ \Phi) \\ \ddot{c} &= \dot{\Phi}^2 (\ddot{\tilde{c}} \circ \Phi) + Q_2^1 (\dot{\Phi}, \ddot{\Phi}) \cdot \dot{\tilde{c}}(t)\end{aligned}$$

allgemein

$$c_p = \dot{\Phi}^p (\tilde{c}_p \circ \Phi) + \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{Q_p^k (\dot{\Phi}, \ddot{\Phi})}_{\text{„Kettenregelpolynome“}} (\tilde{c}_k \circ \Phi)$$

Also hat man die Transformationsformel

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\Phi} & 0 & \dots & 0 \\ Q_2^1 & \dot{\Phi}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ Q_p^1 & \dots & Q_p^k & \dot{\Phi}^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \circ \Phi \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{c}_p \circ \Phi \end{pmatrix}$$

mit einer regulären Transformationsmatrix positiver Determinante.

Das zeigt

$$\langle \langle c_1, \dots, c_p \rangle \rangle = \langle \langle \tilde{c}_1 \circ \Phi, \dots, \tilde{c}_p \circ \Phi \rangle \rangle$$

und die weiteren Behauptungen.

□

**Bemerkung:**

Die Regularitätsforderung  $\dot{c}(t) \neq 0$  bedeutet, dass in jedem Punkt die Tangenten als 1-dimensionale Unterräume existieren.

Die Schmiegräume kann man dazu benutzen, um festzustellen, ob eine Kurve in einem echten affinen Teilraum  $U_p \subset \mathbb{R}^n$  liegt, in einer Geraden, einer Ebene usw. (affin-invariant!)

Zunächst gilt offensichtlich

$$S_1(t) \subseteq S_2(t) \subseteq \dots \subseteq S_n(t) \leq p$$

**Satz 1.1.2:**

- a) Liegt eine  $\mathcal{C}^{p+1}$ -Kurve in einem  $p$ -dimensionalen affinen Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  ( $1 \leq p \leq n-1$ ), so ist

$$\forall_t \dim S_{p+1}(t) < p+1$$

d.h. der  $(p+1)$ -te Schmiegraum degeneriert.

- b) Gilt umgekehrt

$$\forall_t \dim S_{p+1}(t) = \dim S_p(t) \stackrel{!}{=} p$$

so liegt die Kurve in einem  $p$ -dimensionalen, aber keinem niedriger dimensionalen affinen Unterraum.

### Anwendung:

1. Eine  $\mathcal{C}^2$ -Kurve  $[c]$  im  $\mathbb{R}^n$  verläuft genau dann geradlinig, wenn  $\forall_t (\dot{c}(t), \ddot{c}(t))$  linear abhängig ist.  
 $[„\Rightarrow“$  nach a),  $„\Leftarrow“$  nach b), da  $[c]$  regulär]

### Definition:

Ein (regulärer) Kurvenpunkt  $c(t)$  heißt Wendepunkt (WP, inflection point), falls  $(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))$  linear abhängig ist.

2. Eine wendepunktfreie  $\mathcal{C}^3$ -Kurve  $[c]$  im  $\mathbb{R}^n$  verläuft genau dann in einer Ebene, wenn  $\forall_t (\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \ddot{\ddot{c}}(t))$  linear abhängig ist.

### Definition:

Ein Nicht-Wendepunkt  $c(t)$  heißt „Henkelpunkt“ (handle point), wenn  $(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \ddot{\ddot{c}}(t))$  linear abhängig ist.

### Beweis (von Satz 1.1.2):

- a)

$$\forall_t \quad c(t) = p_0 + \sum_{k=1}^p \lambda_k(t) \cdot a_k \in U_p = p_0 + \langle\langle a_1, \dots, a_p \rangle\rangle \Rightarrow$$

$$\forall_{l=1}^{p+1} \quad \forall_t \quad c_l(t) = c^{(l)}(t) = \sum_{k=1}^p \lambda_k^{(l)}(t) \cdot a_k \in \langle\langle a_1, \dots, a_p \rangle\rangle \Rightarrow$$

$$\forall_t \quad \dim S_{p+1}(t) \leq p < p+1$$

- b) Nach Voraussetzung ist  $(c_1, \dots, c_p)(t)$  linear unabhängig, aber  $(c_1, \dots, c_{p+1})(t)$  linear abhängig.

Es existieren also Funktionen  $t \mapsto \lambda_0(t), \dots, \lambda_{p-1}(t)$  mit

$$c_{p+1} = \sum_{k=1}^p \lambda_{k-1} c_k \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{(\dot{c})^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k (\dot{c})^k}_{(*)} \quad (*)$$

Die Funktionen sind stetig auf  $I$ , denn  $(*)$  kann nach  $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$  aufgelöst werden (Inhomogenes lineares Gleichungssystem mit vollrangiger Koeffizientenmatrix, da  $c_1, \dots, c_p$  linear unabhängig; Einträge und „rechte Seite“ stetig).

Die Koeffizientenfunktionen  $t \mapsto \dot{c}^i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) genügen also der linearen Differentialgleichung  $p$ -ter Ordnung

$$y^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k y^{(k)}$$

mit stetigen Koeffizienten. für sie existiert ein Fundamentalsystem  $y_1, \dots, y_p : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass für jede Lösung gilt

$$y(t) = \sum_{k=1}^p a_k y_k(t)$$

also auch

$$\dot{c}^i(t) = \sum_{k=1}^p a_k^i y_k(t)$$

und damit

$$\dot{c}(t) = \sum_{k=1}^p y_k(t) a_k$$

mit konstanten Vektoren  $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$ .

Integration liefert  $\forall t \in I$

$$c(t) = c(t_0) + \sum_{k=1}^p \left( \int_{t_0}^t y_k(\tau) d\tau \right) a_k \in c(t_0) + \langle\langle a_1, \dots, a_p \rangle\rangle =: U_p$$

Es ist schließlich

$$\underline{\dim U_p = p}$$

denn aus  $\dim U_p = k < p$  folgt nach a), dass  $\dim S_{k+1} < k + 1$ , also auch  $\dim S_p < p$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

□

Ab jetzt arbeiten wir im orientierten, euklidischen Raum. Hier gibt es zum Glück in jeder Äquivalenzklasse von Wegen einen ausgezeichneten Repräsentanten, die Bogenlängenparametrisierung (kurz: BLP).

**Satz 1.1.3:**

Sei  $t \mapsto c(t)$  Parameterdarstellung einer  $\mathcal{C}^1$ -Kurve im euklidischen  $\mathbb{R}^n$ . Dann gibt es (bis auf eine

additive Konstante) genau eine zulässige Parametertransformation

$$t \mapsto s(t) = \int |\dot{c}(t)| \, dt [+s_0]$$

(genannt Bogenlängenfunktion), so dass in der neuen Bogenlängenparametrisierung  $\bar{c} = c \circ s^{-1}$  gilt

$$|\bar{c}'| = 1$$

Die Konstruktion ist unabhängig von der Ausgangsparametrisierung.

### Kinematische Interpretation:

In Bogenlängenparametrisierung wird die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit  $w = |\bar{c}'| \equiv 1$  durchlaufen („Zeit = Weg“). Solche Wege heißen auch normal.

### Beweis (von Satz 1.1.3):

Für die gesuchte Transformation  $s$  muss wegen

$$c = \bar{c} \circ s \Rightarrow |\dot{c}| = \underbrace{|\bar{c}' \circ s|}_{=1} \underbrace{\dot{s}}_{>0}$$

gelten:

$$\dot{s} = |\dot{c}|$$

Eine Stammfunktion

$$s = \int |\dot{c}|$$

leistet das Gewünschte, da sie  $\mathcal{C}^1$ -differenzierbar ist, mit  $\dot{s} = |\dot{c}| > 0$  (wegen der Regularität von  $c$ ).

Für eine äquivalente Parametrisierung  $\tilde{c}$  mit  $c = \tilde{c} \circ \Phi$  der Kurve erhält man

$$\dot{s} = |\dot{c}| = |\dot{\tilde{c}} \circ \Phi| \underbrace{\dot{\Phi}}_{>0} = (\tilde{s} \circ \Phi) \cdot \dot{\Phi}$$

also gilt

$$s = \tilde{s} \circ \Phi (+s_0)$$

und damit

$$\bar{c} = c \circ s^{-1} = (\tilde{c} \circ \Phi) \circ (\tilde{s} \circ \Phi)^{-1} = \tilde{c} \circ \Phi \circ \Phi^{-1} \circ \tilde{s}^{-1} = \tilde{c} \circ \tilde{s}^{-1} = \bar{\tilde{c}}$$

□

### Bemerkung:

Mit der Bogenlängenfunktion  $t \mapsto s(t)$  kann man die Länge eines  $\mathcal{C}^1$ -Wegstücks  $t \in [a, b] \subset I \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$  messen.

$$L_a^b(c) = s(b) - s(a) = \int_a^b |\dot{c}(t)| \, dt$$

Diese erhält man aus den Längen einbeschriebener Polygonzüge durch Verfeinern und Grenzüber-

gänge.  $\mathcal{C}^1$ -Wege sind rektifizierbar.

### Praktische Berechnung der Bogenlängenparametrisierung (Schreibweise schlampig):

1. Man berechne  $s = s(t) = \int |\dot{c}(t)| dt$
2. bilde die Umkehrfunktktion  $t = t(s)$
3. und bilde  $c(s) = c(t(s))$

#### **Beispiel:**

Ellipse  $t \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$  im  $\mathbb{R}^2$  mit Halbachsen  $0 < a < b$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt}(t) &= |\dot{c}(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \\ &= b \cdot \sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] \sin^2 t} = b \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \\ \Rightarrow s(t) &= b \cdot E(k, t) [+s_0] \quad (\text{Elliptisches Integral 2. Gattung, nicht elementar integrierbar}) \end{aligned}$$

Für einen Kreis ( $a = b = r$ ) gilt  $k = 0$  also

$$\begin{aligned} (1.) \quad & s = s(t) = r \cdot t \\ (2.) \quad & t = t(s) = \frac{s}{r} \quad \text{also} \\ (3.) \quad & c(s) = \begin{pmatrix} r \cos \frac{s}{r} \\ r \sin \frac{s}{r} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### **Ergebnis:**

Bei Verwendung der Bogenlängenparametrisierung erhält man zwar immer sofort Größen, die invariant gegenüber Parametertransformationen sind.

Aber meist lässt sie sich nicht explizit bestimmen und ist nur für theoretische Zwecke brauchbar.

Ausweg: siehe später

Allgemein zu Bezeichnungen (schlampig, aber praktisch)

	bei bel. Par.-Darst.	in BLP
Parameter	$t$ [Zeit]	$s$ [Weg]
Parameterdarstellung	$t \mapsto c(t)$	$s \mapsto c(s)$
Ableitungen	$\dot{c}, \ddot{c}, \dots$ [Zeitabl.]	$c', c'', c''', \dots$ [Abl. nach BL]

Es gilt

$$\dot{c} = c' \circ \dot{s}, \ddot{c} = c'' \cdot \dot{s}^2 + c' \ddot{s}, \dots$$

## 1.2 Kurven in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$

siehe Übungen

## 1.3 Kurven im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$

Vorgehensweise (in jeder Kurven- und Flächentheorie):

Konstruktion einer (möglichst invarianten) Begleitbasis der Kurve („moving frame“). Ihre Ableitungs-  
gleichungen liefern Invarianten für die Kurve, u.a. ihre Krümmungen.

### 1.3.1 FRENET-Begleitbasis, Krümmung und Torsion

Die Krümmung einer Raumkurve in Bogenlängenparametrisierung  $s \mapsto c(s)$  soll deren Abweichung vom geradlinigen Verlauf messen. Diese wird bestimmt durch die Änderung des (invarianten) Tangenteneinheitsvektors

$$T := c' = \frac{dc}{ds}$$

**Satz 1.3.1:**

Für die Krümmung

$$s \mapsto \kappa(s) := |T'(s)| = |c''(s)| \geq 0$$

einer  $\mathcal{C}^2$ -Kurve in Bogenlängenparametrisierung  $s \mapsto c(s)$  gilt

- a)  $\kappa(s_0) = 0 \Leftrightarrow c(s_0)$  Wendepunkt
- b)  $\kappa \equiv 0 \Leftrightarrow$  die Kurve verläuft geradlinig

**Beweis (von Satz 1.3.1):**

- a)  $\kappa(s_0) = 0 \Leftrightarrow T'(s_0) = 0 \stackrel{\text{red}}{\Rightarrow} (c', c'')(s_0) = (T, T')(s_0)$  linear abhängig  
 $\Leftrightarrow c(s_0)$  ist Wendepunkt

Für die **Rückrichtung** wird benötigt:

$$|T|^2 = \langle T, T \rangle = 1 \Rightarrow 2\langle T', T \rangle = 0 \Rightarrow T' \perp T$$

also  $(T, T')(s_0)$  linear abhängig  $\Rightarrow T'(s_0) = 0$

b) nach Satz 1.1.2, Anwendung 1 oder direkt

$$\kappa \equiv 0 \Leftrightarrow T' = c'' = 0 \Leftrightarrow c(s) = x_0 + s \cdot X$$

□

Noch ein Test, ob der Name „Krümmung“ gerechtfertigt ist:

Für einen Kreis in Bogenlängenparametrisierung  $s \mapsto c(s) = r \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{r} \\ \sin \frac{s}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$  im  $\mathbb{R}^3$  gilt

$$T(s) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{s}{r} \\ \cos \frac{s}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T'(s) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\cos \frac{s}{r} \\ -\sin \frac{s}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(s) = \frac{1}{r}$$

**Satz 1.3.2:**

Sei  $s \mapsto c(s)$  Bogenlängenparametrisierung einer wendepunktfreien  $\mathcal{C}^2$ -Kurve im orientierten, euklidischen  $\mathbb{R}^3$ . Dann bilden die Vektorfelder

$$s \mapsto T(s) := c'(s) \quad [\text{Tangentenvektor}]$$

$$s \mapsto H(s) := \frac{T'(s)}{|T'(s)|} \quad [\text{Hauptnormalenvektor}]$$

$$s \mapsto B(s) := (T \times H)(s) \quad [\text{Binormalenvektor}]$$

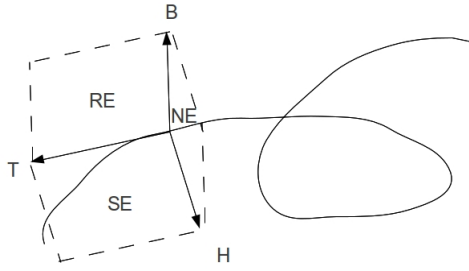
eine orthonormierte, positiv orientierte  $\mathcal{C}^0$ -Begleitbasis der Kurve, genannt FRENET-Begleitbasis.

**Beweis (von Satz 1.3.2):**

$$T' \perp T, T' \neq 0 \Rightarrow H \text{ definiert; Rest klar}$$

□

**Folgerung:**



In jedem Kurvenpunkt  $c(s)$  hat man die paarweise orthogonalen Begleitebenen

$$\begin{array}{ll} c(s) + \langle\langle T, H \rangle\rangle(s) & (\perp B(s)) & [\text{Schmiegeebene}] \\ c(s) + \langle\langle H, B \rangle\rangle(s) & (\perp T(s)) & [\text{Normalebene}] \\ c(s) + \langle\langle B, T \rangle\rangle(s) & (\perp H(s)) & [\text{rektifizierende Ebene}] \end{array}$$

Die Torsion (Windung, 2. Krümmung) einer wendepunktfreien  $\mathcal{C}^3$ -Kurve ( $\Rightarrow (T, H, B)\mathcal{C}^1$ -differenzierbar) soll deren Abweichung vom ebenen Verlauf messen. Diese wird bestimmt durch die Änderung des Binormalenvektors  $B$  (= Normalenvektor der Schmiegeebene).

Wegen  $\left\{ \begin{array}{l} B^2 = 1 \Rightarrow \langle B, B' \rangle = 0 \Rightarrow B' \perp B \\ B = T \times H \Rightarrow B' = \underbrace{T' \times H}_{=0} + T \times H' \Rightarrow B' \perp T \end{array} \right\}$  gilt

$B' = -\tau H$  mit einer  $\mathcal{C}^0$ -Funktion

$$\tau = -\langle B', H \rangle$$

**Satz 1.3.3:**

Für die durch  $B' = -\tau H$  definierte Torsion

$$s \mapsto \tau(s) = -\langle B', H \rangle(s) \stackrel{H \perp B}{=} \langle H', B \rangle(s) \stackrel{B = T \times H}{=} \det(T, H, H')(s)$$

einer wendepunktfreien  $\mathcal{C}^3$ -Kurve in Bogenlängenparametrisierung  $s \mapsto c(s)$  gilt

a)  $\tau(s_0) = 0 \Leftrightarrow c(s)$  Henkelpunkt  $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} (c', c'', c''')(s_0) & \text{linear abhängig} \\ (c', c'')(s_0) & \text{linear unabhängig} \end{array} \right\}$

b)  $\tau \equiv 0 \Leftrightarrow$  die Kurve verläuft eben.

**Beweis (von Satz 1.1.3):**



a) Allgemein gilt

$$\begin{aligned}\langle X \times Y, Z \rangle &= \sum_i (X \times Y)^i Z^i = \sum_{i=1}^3 \det(X, Y, e_i) Z^i \\ &= \det(X, Y, Z)\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\tau(s_0) &= \det(T, H, H')(s_0) = \det\left(c', \frac{c''}{\kappa}, \left(\frac{c''}{\kappa}\right)'\right)(s_0) \\ &= \det\left(c', \frac{c''}{\kappa}, \left(\frac{1}{\kappa}\right)' c'' + \frac{1}{\kappa} c'''\right)(s_0) = \frac{1}{\kappa^2(s_0)} \det(c', c'', c''')(s_0) = 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow (c', c'', c''')(s_0)$  linear abhängig

b) Nach Satz 1.1.2, Anwendung 2

□

#### Satz 1.3.4:

Für die Frenet-Begleitbasis  $s \mapsto (T, H, B)(s)$  einer wendepunktfreien  $\mathcal{C}^3$ -Kurve gelten die Frenet-schen Ableitungsgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T' & = & \kappa \cdot H \\ H' & = & -\kappa T \\ B' & = & -\tau H \end{array} \right\} + \tau B \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} T \\ H \\ B \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ H \\ B \end{pmatrix}$$

mit der  $\mathcal{C}^1$ -Krümmung  $s \mapsto \kappa(s) > 0$  und der  $\mathcal{C}^0$ -Torsion  $s \mapsto \tau(s)$ .

#### Beweis (von Satz 1.3.4):

Da  $(T_1, T_2, T_3) := (T, H, B)$  ein Orthonormalbasisfeld ist, gilt  $\langle T_i, T_k \rangle = \delta_{ik}$

$\Rightarrow \langle T'_i, T_k \rangle = -\langle T'_k, T_i \rangle$ , d.h. die Ableitungsmatrix  $(\langle T'_i, T_k \rangle)_{i,k=1,2,3}$  ist schiefsymmetrisch. Damit kann die nach Definition bekannte 1. und 3. Zeile ergänzt werden.

□

Problem: Wie berechnet man Begleitbasis, Krümmung und Torsion, wenn man die Bogenlängenparametrisierung nicht explizit kennt?

Lösung: „Rücktransformation“

#### Folgerung:

Bezüglich einer beliebigen Parametrisierung  $t \mapsto c(t)$  einer wendepunktfreien  $\mathcal{C}^3$ -Kurve gilt

$$\begin{aligned} T &= \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} \\ B &= \frac{\dot{c} \times \ddot{c}}{|\dot{c} \times \ddot{c}|} \\ H &= B \times T = \frac{\ddot{c} - \langle \ddot{c}, T \rangle T}{|\ddot{c} - \langle \ddot{c}, T \rangle T|} \\ \kappa &= \frac{|\dot{c} \times \ddot{c}|}{|\dot{c}|^3} \\ \tau &= \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}})}{|\dot{c} \times \ddot{c}|^2} \end{aligned}$$

**Beweis (der Folgerung):**

$$\begin{aligned} \dot{c} &= c' \cdot \dot{s} = c' \cdot |\dot{c}| \Rightarrow T = c' = \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} = \frac{1}{w} \dot{c} \\ B &= T \times H = \frac{1}{\kappa} T \times T' = \frac{1}{w\kappa} T \times \dot{T} = \frac{1}{w\kappa} \left( \frac{1}{w} \dot{c} \times \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{w} \dot{c} \right) \right) = \frac{1}{w^3 \kappa} \dot{c} \times \ddot{c} = \frac{\dot{c} \times \ddot{c}}{|\dot{c} \times \ddot{c}|} \\ \Rightarrow w^3 \kappa &= |\dot{c} \times \ddot{c}| \Rightarrow \kappa = \frac{|\dot{c} \times \ddot{c}|}{w^3} = \frac{\dot{c} \times \ddot{c}}{|\dot{c}|^3} \end{aligned}$$

usw. (siehe auch Übungen)

□

**Bemerkung:**

Als Funktionen sind z.B.  $s \mapsto \kappa(s)$  und  $t \mapsto \kappa(t)$  im Allgemeinen völlig verschieden, obwohl gleich bezeichnet.

Zusammenhang:  $\kappa(s(t)) = \kappa(t)$

Analog für  $\tau, T, H, B$ .

**Zusatz:** (später wichtig)

Die Basis  $(T, H, B)$  erhält man durch Anwendung des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens auf die Basis  $(\dot{c}, \ddot{c})$  der Schmiegeebene ( $\rightarrow (T, H)$ ) und Ergänzung durch  $B = T \times H$ .

**Satz 1.3.5:**

Äquivalent zu den Frenetschen Formeln ist

$$\begin{pmatrix} T \\ H \\ B \end{pmatrix}' = \omega \cdot D \times \begin{pmatrix} T \\ H \\ B \end{pmatrix}$$

mit der Gesamtkrümmung

$$\omega = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

und dem (normierten) Darboux-Vektor

$$D = \frac{1}{\omega}(\tau \cdot T + \kappa \cdot B)$$

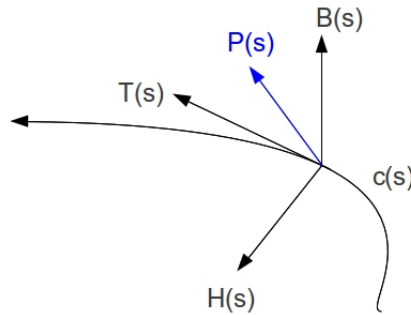
**Beweis (von Satz 1.3.5):**

Nachrechnen unter Verwendung von

$$B = T \times H, \quad H = B \times T, \quad T = H \times B$$

□

**Kinematische Interpretation:**



$s \mapsto c(s)$  beschreibt die Bewegung aus Punkten mit konstanter Geschwindigkeit  $w = |c'| = 1$ . Die Bewegung aus starr mit der Begleitbasis  $(T_1, T_2, T_3) = (T, H, B)$  verbundenen Punktes

$$P(s) = c(s) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i T_i(s) = c(s) + X(s)$$

setzt sich zusammen aus einer Translation (mit der Kurve) und einer Drehung um eine momentane Drehachse. Für seine Geschwindigkeit gilt

$$\begin{aligned} P'(s) &= c'(s) \sum_{i=1}^3 \lambda_i T_i'(s) = c'(s) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i w(s) D(s) \times T_i(s) \\ &= \underline{c'(s) + w(s) D(s) \times X(s)} \end{aligned}$$

mit der

- (vektoriellen) Bahngeschwindigkeit  $c'(s)$  der Kurve und der
- (vektoriellen) Winkelgeschwindigkeit  $w \cdot D(s)$  des Vektors  $X(s) = P(s) - c(s)$  wobei  $D(s)$  der Einheitsvektor der momentanen Drehachse ist und  $w(s)$  die skalare Winkelgeschwindigkeit beschreibt

## 2 Literaturhinweise

Kühnel: Differentialgeometrie: Kurven, Flächen, Mannigfaltigkeiten

# Anhang

Klausurtermin (Vorschlag): Donnerstag, 26.07.2012, 10 Uhr – 12 Uhr

# Index

- Äquivalenz, 7
- Ableitungsmatrix, 17
- Ableitungsvektor, 8
- affin, 4
- Begleitbasis
  - Berechnung (unbekannte BLP), 18
- Begleitebene, 16
- Binormalenvektor, 15
- Bogenlängenfunktion, 12
- Bogenlängenparametrisierung, 12
  - Berechnung, 13
- Darboux-Vektor, 19
- Diffeomorphismus, 7
- Drehung, 19
  - Drehachse, 19
  - Einheitsvektor, 19
- Ellipse, 13
- euklidisch, 11
- Frenet-Begleitbasis, 15
  - Ableitungsgleichungen, 17
- Geschwindigkeit, 6
  - Bahn-, 19
  - Winkel-, 19
- Hauptnormalenvektor, 15
- Henkelpunkt, 10
- kartesisches Koordinatensystem, 3
- Krümmung, 14
  - 2. Krümmung, 16
  - Berechnung (unbekannte BLP), 18
  - Gesamtkrümmung, 18
- Kreis, 7
- Kreuzprodukt, 4
- Kurve, 6
- Mannigfaltigkeit, 8
- Nicht-Wendepunkt, 10
- normal, 12
- Normalebene, 16
- orientierungstreu, 7
- Orthonormalbasis, 3
  - feld, 17
- Parameter, 6
- Parametertransformation, 7
- Parametrisierung, 7
- regulär, 6
- rektifizierende Ebene, 16
- Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren,
  - 18
- Schmiegebene, 16
- Schmiegraum, 9
  - degeneriert, 10
- Singularität, 6
- Skalarprodukt, 3
- Spur, 6
- Standard-Skalarprodukt, 3
- Standardbasis, 3
- Tangenteneinheitsvektor, 14
- Tangentenvektor, 6, 15
- Torsion, 16
  - Berechnung (unbekannte BLP), 18
- Translation, 19
- Vektor, 3
  - länge, 3

Abstand, 3  
orthogonal, 3  
Winkel, 3  
Vektorprodukt, 4  
  
Weg, 6  
-länge, 12  
Wendepunkt, 10  
-frei, 10  
Windung, 16