

Julius-Maximilians-Universität Würzburg  
Fakultät für Mathematik und Informatik

# Differentialgeometrie

**Prof. Pabel**

Andreas Rosenberger, Nils Wisiol  
[andreas@rosenberger-home.de](mailto:andreas@rosenberger-home.de), [info@nils-wisiol.de](mailto:info@nils-wisiol.de)

11. Juni 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Grundbegriffe und Bezeichnungen aus der linearen Algebra und analytischen Geometrie</b>	<b>3</b>
0.1	Strukturen . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Lokale Kurventheorie im euklidischen Raum</b>	<b>6</b>
1.1	Grundbegriffe der Kurventheorie . . . . .	6
1.2	Kurven in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ . . . . .	14
1.3	Kurven im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ . . . . .	14
1.3.1	FRENET-Begleitbasis, Krümmung und Torsion . . . . .	14
1.3.2	Approximierter Kurvenverlauf . . . . .	20
1.3.3	Krümmungskreis und Schmiegekugel (oskulierende Kugel) . . . . .	21
1.3.4	Der Fundamentalsatz der Kurventheorie (im $\mathbb{R}^3$ ) . . . . .	23
1.3.5	Spezielle Kurvenklassen . . . . .	27
1.4	Kurven im euklidischen $\mathbb{R}^n$ . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Lokale Flächentheorie im euklidischen Raum</b>	<b>35</b>
2.1	Grundbegriffe der Flächentheorie . . . . .	35
2.1.0	$p$ -dimensionale Flächen im affinen $\mathbb{R}^n$ . . . . .	35
2.1.1	Flächeninterne Metrik auf $p$ -Flächen im euklidischen $\mathbb{R}^n$ . . . . .	38
2.1.2	Hyperflächen im euklidischen $\mathbb{R}^n$ : Ableitungsgleichungen . . . . .	42
2.2	Zur inneren Geometrie der Flächen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	50
2.2.1	Geodätische Parallelverschiebung . . . . .	50
2.2.2	Geodätische Linien . . . . .	52
2.2.3	Abbildungen von Flächen, Kartographie . . . . .	56
2.3	Krümmungstheorie der Flächen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	59
2.3.1	Erste geometrische Bedeutungen der Krümmungsgrößen . . . . .	59
2.3.2	Approximativer Flächenverlauf, Klassifikation der Flächenpunkte . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Literaturhinweise</b>	<b>66</b>

# 0 Grundbegriffe und Bezeichnungen aus der linearen Algebra und analytischen Geometrie

Die klassische Differentialgeometrie der Kurven und Flächen benutzt als umgebenden Raum einen  $n$ -dimensionalen, orientierten, euklidischen Raum  $E^n$  mit zugehörigem euklidischem Richtungsvektorraum  $V^n$ .

## 0.1 Strukturen

$V^n$  ist mit einem Skalarprodukt  $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle \in \mathbb{R}$  ausgestattet. Damit lassen sich messen:

- die Länge von Vektoren  $X$ :  $|X| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$
- die Orthogonalität von Vektoren  $X, Y$ :  $X \perp Y \Leftrightarrow \langle X, Y \rangle = 0$
- der Winkel zwischen zwei Vektoren  $X, Y$ :  $\cos \angle(X, Y) = \left\langle \frac{X}{|X|}, \frac{Y}{|Y|} \right\rangle$
- Flächeninhalte, Volumina, usw.

Ist zusätzlich eine feste Orthonormalbasis  $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$  (definiert durch  $\langle \hat{e}_i, \hat{e}_k \rangle = \delta_{ik}$ ) ausgezeichnet als positiv orientiert, erhält man eine Orientierung des Raumes und kann alle Basen in positiv und negativ orientierte einteilen.

**Standard-Modell:**  $E^n = V^n = \mathbb{R}^n$ , ausgestattet mit dem Standard-Skalarprodukt  $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n X^i Y^i$  und der (positiv orientierten) Standardbasis  $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$  mit  $\hat{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ . Dieses Standardmodell reicht bei uns meist aus: Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems  $(0; e_1, \dots, e_n)$  in einem abstrakten, orientierten euklidischen Raum  $E^n$ , bestehend aus

- einem „Ursprung“ („Nullpunkt“)  $0 \in E^n$
- einer positiv orientierten Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  im  $V^n$

kann man jedem Punkt und jedem Vektor eindeutig reelle Koordinaten zuordnen:

- Vektor:  $X = \sum_{i=1}^n X^i e_i \in V^n \mapsto (X^1, \dots, X^n) \in \mathbb{R}^n$
- Punkt:  $p = 0 + \sum_{i=1}^n p^i e_i \mapsto (p^1, \dots, p^n) \in \mathbb{R}^n$

Aus einem Skalarprodukt in  $V^n$  wird in Koordinaten

$$\langle X, Y \rangle = \left\langle \sum X^i e_i, \sum Y^k e_k \right\rangle = \sum_i \sum_k X^i Y^k \langle e_i, e_k \rangle = \sum_{i=1}^n X^i Y^i$$

das Standard-Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$ . Man ist im Standard-Modell angelangt. Ein Wechsel des kartesischen Koordinatensystems im  $E^n$  induziert im Koordinatenraum  $\mathbb{R}^n$  eine Bewegung

$$p \mapsto p' = Dp + t$$

bestehend aus einer eigentlichen orthogonalen Drehmatrix  $D \in SO(n, \mathbb{R})$  mit  $\det D = +1$  und einem Translationsvektor  $t \in \mathbb{R}^n$ . In der euklidischen Differentialgeometrie werden Eigenschaften von Objekten (Kurven, Flächen, ...) untersucht, die invariant gegenüber solchen Transformationen sind, also nicht vom gewählten kartesischen Koordinatensystem abhängig sind.

#### **Bemerkung:**

In der sogenannten affinen Differentialgeometrie untersucht man Eigenschaften von Objekten, die (in Koordinaten) invariant sind gegenüber beliebigen affinen Transformationen  $p \mapsto p' = Ap + t$ ,  $A$  regulär. Man ignoriert dort vollständig die metrische Struktur des  $\mathbb{R}^n$ . Der umgebende Raum ist dann ein affiner Punktraum (bei uns nur am Rande betrachtet).

Zum Vektorprodukt (Kreuzprodukt) im orientierten euklidischen  $\mathbb{R}^n$ :

Zu je  $n - 1$  Vektoren  $X_1, \dots, X_{n-1} \in \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) gibt es genau einen Vektor  $Y \in \mathbb{R}^n$  mit den Eigenschaften

1.  $Y \perp X_k, (k = 1, \dots, n - 1)$
2.  $|Y| = a_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-1}) = \sqrt{\det(\langle X_i, X_k \rangle)_{i,k=1, \dots, n-1}}$   
 $= (n-1)$ -dimensionaler Flächeninhalt des von  $X_1, \dots, X_{n-1}$  aufgespannten  $n-1$ -dimensionalen Parallelogramms  
 $=$  Wurzel aus der Gramschen Determinanten  $G(X_1, \dots, X_{n-1})$
3.  $\det(X_1, \dots, X_{n-1}, Y) \geq 0$  (d.h.  $(X_1, \dots, X_{n-1}, Y)$  ist positiv orientiert)

Bezeichnung:  $Y = X_1 \times \cdots \times X_{n-1}$

Eine explizite Formel ist (mit der Standardbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  des  $\mathbb{R}^n$ ):

$$\begin{aligned} X_1 \times \cdots \times X_{n-1} &= \sum_{i=1}^n \det(X_1, \dots, X_{n-1}, e_i) e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} X_1^1 & \cdots & X_{n-1}^1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_1^n & \cdots & X_{n-1}^n & 0 \end{vmatrix} (i) e_i = \begin{vmatrix} X_1^1 & \cdots & X_{n-1}^1 & e_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_1^n & \cdots & X_{n-1}^n & e_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

**Beispiel:**

$n = 2$

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} &\Rightarrow X^x = \begin{vmatrix} X^1 & e_1 \\ X^2 & e_2 \end{vmatrix} = -X^2 e_1 + X^1 e_2 = \begin{pmatrix} -X^2 \\ X^1 \end{pmatrix} \\ |X^x| &= a_1(X) = |X| \end{aligned}$$

**Beispiel:**

$n = 3$ :

$$X \times Y = \begin{vmatrix} X^1 & Y^1 & e_1 \\ X^2 & Y^2 & e_2 \\ X^3 & Y^3 & e_3 \end{vmatrix} = (X^2 Y^3 - X^3 Y^2) e_1 + \dots$$

$$|X \times Y| = a_2(X, Y) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle X, X \rangle & \langle X, Y \rangle \\ \langle Y, X \rangle & \langle Y, Y \rangle \end{pmatrix}}$$

**Anwendung:**

Jedes Orthonormalsystem  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  im  $\mathbb{R}^n$  lässt sich durch  $e_n := e_1 \times \cdots \times e_{n-1}$  eindeutig zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  ergänzen.

# 1 Lokale Kurventheorie im euklidischen Raum

## 1.1 Grundbegriffe der Kurventheorie

Wir betrachten zunächst (kurzzeitig) rein affinegeometrische Begriffe/Invarianten.

**Definition:**

Ein  $\mathcal{C}^r$ -Weg oder eine parametrisierte  $\mathcal{C}^r$ -Kurve ( $r \geq 0$ ) [ $\mathcal{C}^r$  =  $r$ -mal stetig differenzierbar] im (affinen)  $\mathbb{R}^n$  ist eine  $\mathcal{C}^r$ -Abbildung

$$c: t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$$

eines offenen Intervalls  $I$  in den  $\mathbb{R}^n$ .

$t$  heißt Parameter, die Bildmenge  $c[I] \subset \mathbb{R}^n$  die Spur des Weges.

Ein  $\mathcal{C}^r$ -Weg ( $r \geq 1$ ) heißt regulär, wenn überall der Tangentenvektor  $\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt}(t) \neq 0$  ist. Nichtreguläre Punkte  $c(t_0)$  mit  $\dot{c}(t_0) = 0$  heißen Singularitäten.

**Kinematische Interpretation:**

$t \mapsto c(t)$  beschreibt die zeitabhängige Bewegung eines Punktes im  $\mathbb{R}^n$ .  $\dot{c}$  ist die vektorielle Geschwindigkeit (und im euklidischen  $\mathbb{R}^n$   $w := |\dot{c}|$  die skalare Geschwindigkeit).

**Beispiel:**

1. Peano-Kurve: Stetiger ( $\mathcal{C}^0$ -)Weg im  $\mathbb{R}^2$ , dessen Spur jeden Punkt eines Gebietes  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  ausfüllt (nirgends differenzierbar, „unbrauchbar“)
2. Konstanter Weg:  $t \in I \mapsto c(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  (nirgends regulär, „unbrauchbar“)
3. Neil'sche Parabel:  $c: t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  ( $\mathcal{C}^\infty$ -Weg), in  $c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  nicht regulär („Spitze“) ( $w(0) = |\dot{c}(0)| = 0$ , „man hat Zeit, sich umzudrehen“)

4. Kreislinie:  $c: t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  ( $\infty$ -oft durchlaufbar) [Affin gesehen ist das eine Ellipse!]

Aber auch  $t \mapsto \tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \pm\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$  und  $t \mapsto \tilde{\tilde{c}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh t} \\ \tanh t \end{pmatrix}$  sind Parametrisierungen von Kreisstücken.

Wege, die nur mit veränderlicher „Zeitskala“ durchlaufen werden, sollen nicht als verschieden angesehen werden.

**Definition:**

$I, \tilde{I} \subset \mathbb{R}$  seien offene Intervalle.

Zwei Wege  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n, \tilde{c}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißen  $C^r$ -äquivalent ( $r \geq 0$ ), wenn ein orientierungstreuer (d.h. monoton wachsender)  $C^r$ -Diffeomorphismus  $\Phi: I \rightarrow \tilde{I}$  existiert, mit

$$c = \tilde{c} \circ \Phi, \text{ d.h. } \forall_t c(t) = \tilde{c}(\Phi(t))$$

**Bemerkung:**

0.  $\Phi$   $C^r$ -Diffeomorphismus  $\Leftrightarrow \Phi$  bijektiv und  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$   $C^r$ -differenzierbar. [Bsp.:  $\Phi: t \in \mathbb{R} \rightarrow t^3 \in \mathbb{R}$  ist kein  $C^1$ -Diffeomorphismus]

Bei  $C^r$ -Diffeomorphismus ist stets  $\dot{\Phi}(t) \neq 0$  (falls  $r \geq 1$ )

1.  $\Phi$  ist (für  $r \geq 1$ ) genau dann orientierungstreu, wenn überall  $\dot{\Phi}(t) > 0$  ist.
2. Äquivalente Wege besitzen (für  $r \geq 1$ ) das gleiche Regularitätsverhalten.

$$\dot{c}(t) = \dot{\tilde{c}}(\Phi(t)) \cdot \underbrace{\dot{\Phi}(t)}_{>0}$$

3. Die Äquivalenz von Wegen ist wirklich eine Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv)

**Definition:**

Eine (orientierte, reguläre)  $C^r$ -Kurve ( $r \geq 1$ ) im (affinen)  $\mathbb{R}^n$  ist eine Äquivalenzklasse  $[c]$  von regulären  $C^r$ -Wegen  $c: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ein Repräsentant heißt eine (zulässige) Parametrisierung der  $C^r$ -Kurve, eine die Äquivalenz vermittelnde Abbildung  $\Phi$  eine (zulässige) Parametertransformation.

**Beispiel:**

Die „Kreis“-Darstellungen

$$t \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left( |t| < \frac{\pi}{2} \right)$$

und

$$\tilde{t} \mapsto \tilde{c}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh \tilde{t}} \\ \tanh \tilde{t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 (\tilde{t} \in \mathbb{R})$$

sind  $\mathcal{C}^\infty$ -äquivalente Parametertransformationen:

$$\Phi(t) = \text{Artanh} \sin t = \tilde{t}$$

mit

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{\cos t} > 0$$

**Bemerkung:**

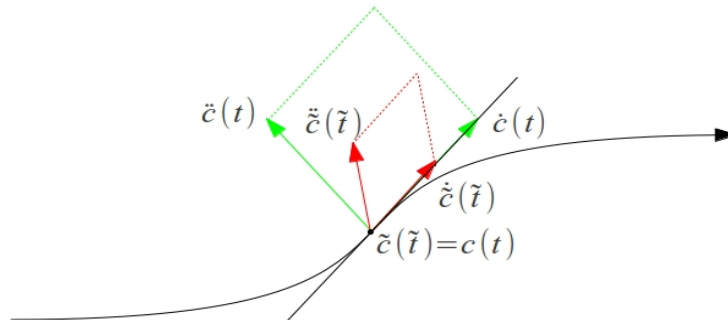
Nicht jedes 1-dimensionale „Gebilde“ im  $\mathbb{R}^n$  (z.B. eine vollständige Kreislinie) lässt sich global und injektiv als Bild eines offenen Intervalls darstellen.

Objekte, die sich nur lokal so parametrisieren lassen, heißen (1-dimensionale) differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Für lokale Untersuchungen ist eine solche Erweiterung der Kurvenbegriffs nicht nötig.

Die bisher eingeführten Begriffe sind offensichtlich affin-invariant. Aber im Folgenden sind auch nur Eigenschaften von Kurven von Interesse, also Eigenschaften, die nicht von der Parametrisierung abhängen.

Hier ein Beispiel aus der rein affinen Differentialgeometrie.

**Beispiel:**



**Satz 1.1.1:**

$t \mapsto c(t)$  sei Parameterdarstellung einer  $\mathcal{C}^r$ -Kurve im (affinen)  $\mathbb{R}^n$  mit  $r \geq n$ . Dann sind die Ableitungsvektoren

$$c_p := \frac{d^p c}{dt^p} (p = 1, \dots, n)$$

nicht invariant gegenüber Parametertransformationen, jedoch die (punktualen, orientierten) Schmiege-



räume (oskulierende Räume, „osculating spaces“)

$$S_p(t) := c(t) + \langle \langle c_1(t), \dots, c_p(t) \rangle \rangle$$

Spezialfälle:

Tangente  $S_1(t) = c(t) + \langle \langle \dot{c}(t) \rangle \rangle$

Schmiegeebene  $S_2(t)c(t) + \langle \langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle \rangle$

**Beweis (von Satz 1.1.1):**

Aus  $c = \tilde{c} \circ \Phi$  folgt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}\dot{c} &= \dot{\Phi} \left( \dot{\tilde{c}} \circ \Phi \right) \\ \ddot{c} &= \dot{\Phi}^2 \left( \ddot{\tilde{c}} \circ \Phi \right) + Q_2^1 \left( \dot{\Phi}, \ddot{\Phi} \right) \cdot \dot{\tilde{c}}(t)\end{aligned}$$

allgemein

$$c_p = \dot{\Phi}^p (\tilde{c}_p \circ \Phi) + \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{Q_p^k \left( \dot{\Phi}, \ddot{\Phi} \right)}_{\text{„Kettenregelpolynome“}} (\tilde{c}_k \circ \Phi)$$

Also hat man die Transformationsformel

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\Phi} & 0 & \cdots & 0 \\ Q_2^1 & \dot{\Phi}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ Q_p^1 & \cdots & Q_p^k & \dot{\Phi}^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \circ \Phi \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{c}_p \circ \Phi \end{pmatrix}$$

mit einer regulären Transformationsmatrix positiver Determinante.

Das zeigt

$$\langle \langle c_1, \dots, c_p \rangle \rangle = \langle \langle \tilde{c}_1 \circ \Phi, \dots, \tilde{c}_p \circ \Phi \rangle \rangle$$

und die weiteren Behauptungen.

□

**Bemerkung:**

Die Regularitätsforderung  $\dot{c}(t) \neq 0$  bedeutet, dass in jedem Punkt die Tangenten als 1-dimensionale Unterräume existieren.

Die Schmiegräume kann man dazu benutzen, um festzustellen, ob eine Kurve in einem echten affinen Teilraum  $U_p \subset \mathbb{R}^n$  liegt, in einer Geraden, einer Ebene usw. (affin-invariant!)

Zunächst gilt offensichtlich

$$S_1(t) \subseteq S_2(t) \subseteq \cdots \subseteq S_n(t) \leq p$$

**Satz 1.1.2:**

- a) Liegt eine  $\mathcal{C}^{p+1}$ -Kurve in einem  $p$ -dimensionalen affinen Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  ( $1 \leq p \leq n-1$ ), so ist

$$\forall_t \dim S_{p+1}(t) < p+1$$

d.h. der  $(p+1)$ -te Schmiegraum degeneriert.

- b) Gilt umgekehrt

$$\forall_t \dim S_{p+1}(t) = \dim S_p(t) \stackrel{!}{=} p$$

so liegt die Kurve in einem  $p$ -dimensionalen, aber keinem niedriger dimensionalen affinen Unterraum.

### Anwendung:

1. Eine  $\mathcal{C}^2$ -Kurve  $[c]$  im  $\mathbb{R}^n$  verläuft genau dann geradlinig, wenn  $\forall_t (\dot{c}(t), \ddot{c}(t))$  linear abhängig ist.  
[„ $\Rightarrow$ “ nach a), „ $\Leftarrow$ “ nach b), da  $[c]$  regulär]

### Definition:

Ein (regulärer) Kurvenpunkt  $c(t)$  heißt Wendepunkt (WP, inflection point), falls  $(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))$  linear abhängig ist.

2. Eine wendepunktfreie  $\mathcal{C}^3$ -Kurve  $[c]$  im  $\mathbb{R}^n$  verläuft genau dann in einer Ebene, wenn  $\forall_t (\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t))$  linear abhängig ist.

### Definition:

Ein Nicht-Wendepunkt  $c(t)$  heißt „Henkelpunkt“ (handle point), wenn  $(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t))$  linear abhängig ist.

### Beweis (von Satz 1.1.2):

- a)

$$\forall_t \quad c(t) = p_0 + \sum_{k=1}^p \lambda_k(t) \cdot a_k \in U_p = p_0 + \langle\langle a_1, \dots, a_p \rangle\rangle \Rightarrow$$

$$\forall_{l=1}^{p+1} \forall_t \quad c_l(t) = c^{(l)}(t) = \sum_{k=1}^p \lambda_k^{(l)}(t) \cdot a_k \in \langle\langle a_1, \dots, a_p \rangle\rangle \Rightarrow$$

$$\forall_t \quad \dim S_{p+1}(t) \leq p < p$$

- b) Nach Voraussetzung ist  $(c_1, \dots, c_p)(t)$  linear unabhängig, aber  $(c_1, \dots, c_{p+1})(t)$  linear abhängig.

Es existieren also Funktionen  $t \mapsto \lambda_0(t), \dots, \lambda_{p-1}(t)$  mit

$$c_{p+1} = \sum_{k=1}^p \lambda_{k-1} c_k \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{(\dot{c})^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k (\dot{c})^k}_{(*)} \quad (*)$$

Die Funktionen sind stetig auf  $I$ , denn  $(*)$  kann nach  $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$  aufgelöst werden (Inhomogenes lineares Gleichungssystem mit vollrangiger Koeffizientenmatrix, da  $c_1, \dots, c_p$  linear unabhängig; Einträge und „rechte Seite“ stetig).

Die Koeffizientenfunktionen  $t \mapsto \dot{c}^i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) genügen also der linearen Differentialgleichung  $p$ -ter Ordnung

$$y^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k y^{(k)}$$

mit stetigen Koeffizienten. für sie existiert ein Fundamentalsystem  $y_1, \dots, y_p: I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass für jede Lösung gilt

$$y(t) = \sum_{k=1}^p a_k y_k(t)$$

also auch

$$\dot{c}^i(t) = \sum_{k=1}^p a_k^i y_k(t)$$

und damit

$$\dot{c}(t) = \sum_{k=1}^p y_k(t) a_k$$

mit konstanten Vektoren  $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$ .

Integration liefert  $\forall t \in I$

$$c(t) = c(t_0) + \sum_{k=1}^p \left( \int_{t_0}^t y_k(\tau) d\tau \right) a_k \in c(t_0) + \langle\langle a_1, \dots, a_p \rangle\rangle =: U_p$$

Es ist schließlich

$$\underline{\dim U_p = p}$$

denn aus  $\dim U_p = k < p$  folgt nach a), dass  $\dim S_{k+1} < k + 1$ , also auch  $\dim S_p < p$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

□

Ab jetzt arbeiten wir im orientierten, euklidischen Raum. Hier gibt es zum Glück in jeder Äquivalenzklasse von Wegen einen ausgezeichneten Repräsentanten, die Bogenlängenparametrisierung (kurz: BLP).

**Satz 1.1.3:**

Sei  $t \mapsto c(t)$  Parameterdarstellung einer  $\mathcal{C}^1$ -Kurve im euklidischen  $\mathbb{R}^n$ . Dann gibt es (bis auf eine

additive Konstante) genau eine zulässige Parametertransformation

$$t \mapsto s(t) = \int |\dot{c}(t)| \, dt + s_0$$

(genannt Bogenlängenfunktion), so dass in der neuen Bogenlängenparametrisierung  $\bar{c} = c \circ s^{-1}$  gilt

$$|\bar{c}'| = 1$$

Die Konstruktion ist unabhängig von der Ausgangsparametrisierung.

### Kinematische Interpretation:

In Bogenlängenparametrisierung wird die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit  $w = |\bar{c}'| \equiv 1$  durchlaufen („Zeit = Weg“). Solche Wege heißen auch normal.

### Beweis (von Satz 1.1.3):

Für die gesuchte Transformation  $s$  muss wegen

$$c = \bar{c} \circ s \Rightarrow |\dot{c}| = \underbrace{|\bar{c}' \circ s|}_{=1} \underbrace{\dot{s}}_{>0}$$

gelten:

$$\dot{s} = |\dot{c}|$$

Eine Stammfunktion

$$s = \int |\dot{c}|$$

leistet das Gewünschte, da sie  $\mathcal{C}^1$ -differenzierbar ist, mit  $\dot{s} = |\dot{c}| > 0$  (wegen der Regularität von  $c$ ).

Für eine äquivalente Parametrisierung  $\tilde{c}$  mit  $c = \tilde{c} \circ \Phi$  der Kurve erhält man

$$\dot{s} = |\dot{c}| = |\dot{\tilde{c}} \circ \Phi| \underbrace{\dot{\Phi}}_{>0} = (\tilde{s} \circ \Phi) \cdot \dot{\Phi}$$

also gilt

$$s = \tilde{s} \circ \Phi (+s_0)$$

und damit

$$\bar{c} = c \circ s^{-1} = (\tilde{c} \circ \Phi) \circ (\tilde{s} \circ \Phi)^{-1} = \tilde{c} \circ \Phi \circ \Phi^{-1} \circ \tilde{s}^{-1} = \tilde{c} \circ \tilde{s}^{-1} = \tilde{\bar{c}}$$

□

### Bemerkung:

Mit der Bogenlängenfunktion  $t \mapsto s(t)$  kann man die Länge eines  $\mathcal{C}^1$ -Wegstücks

$t \in [a, b] \subset I \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$  messen.

$$L_a^b(c) = s(b) - s(a) = \int_a^b |\dot{c}(t)| \, dt$$

Diese erhält man aus den Längen eingeschriebener Polygonzüge durch Verfeinern und Grenzüber-

gänge.  $\mathcal{C}^1$ -Wege sind rektifizierbar.

### Praktische Berechnung der Bogenlängenparametrisierung (Schreibweise schlampig):

1. Man berechne  $s = s(t) = \int |\dot{c}(t)| dt$
2. bilde die Umkehrfunktktion  $t = t(s)$
3. und bilde  $c(s) = c(t(s))$

#### **Beispiel:**

Ellipse  $t \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$  im  $\mathbb{R}^2$  mit Halbachsen  $0 < a < b$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt}(t) &= |\dot{c}(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \\ &= b \cdot \sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] \sin^2 t} = b \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \\ \Rightarrow s(t) &= b \cdot E(k, t) [+s_0] \quad (\text{Elliptisches Integral 2. Gattung, nicht elementar integrierbar}) \end{aligned}$$

Für einen Kreis ( $a = b = r$ ) gilt  $k = 0$  also

$$\begin{aligned} (1.) \quad & s = s(t) = r \cdot t \\ (2.) \quad & t = t(s) = \frac{s}{r} \quad \text{also} \\ (3.) \quad & c(s) = \begin{pmatrix} r \cos \frac{s}{r} \\ r \sin \frac{s}{r} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### **Ergebnis:**

Bei Verwendung der Bogenlängenparametrisierung erhält man zwar immer sofort Größen, die invariant gegenüber Parametertransformationen sind.

Aber meist lässt sie sich nicht explizit bestimmen und ist nur für theoretische Zwecke brauchbar.

Ausweg: siehe später

Allgemein zu Bezeichnungen (schlampig, aber praktisch)

	bei bel. Par.-Darst.	in BLP
Parameter	$t$ [Zeit]	$s$ [Weg]
Parameterdarstellung	$t \mapsto c(t)$	$s \mapsto c(s)$
Ableitungen	$\dot{c}, \ddot{c}, \dots$ [Zeitabl.]	$c', c'', c''', \dots$ [Abl. nach BL]

Es gilt

$$\dot{c} = c' \circ \dot{s}, \ddot{c} = c'' \cdot \dot{s}^2 + c' \ddot{s}, \dots$$

## 1.2 Kurven in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$

siehe Übungen

## 1.3 Kurven im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$

Vorgehensweise (in jeder Kurven- und Flächentheorie):

Konstruktion einer (möglichst invarianten) Begleitbasis der Kurve („moving frame“). Ihre Ableitungs-  
gleichungen liefern Invarianten für die Kurve, u.a. ihre Krümmungen.

### 1.3.1 FRENET-Begleitbasis, Krümmung und Torsion

Die Krümmung einer Raumkurve in Bogenlängenparametrisierung  $s \mapsto c(s)$  soll deren Abweichung vom geradlinigen Verlauf messen. Diese wird bestimmt durch die Änderung des (invarianten) Tangenteneinheitsvektors

$$T := c' = \frac{dc}{ds}$$

**Satz 1.3.1:**

Für die Krümmung

$$s \mapsto \kappa(s) := |T'(s)| = |c''(s)| \geq 0$$

einer  $\mathcal{C}^2$ -Kurve in Bogenlängenparametrisierung  $s \mapsto c(s)$  gilt

- a)  $\kappa(s_0) = 0 \Leftrightarrow c(s_0)$  Wendepunkt
- b)  $\kappa \equiv 0 \Leftrightarrow$  die Kurve verläuft geradlinig

**Beweis (von Satz 1.3.1):**

- a)  $\kappa(s_0) = 0 \Leftrightarrow T'(s_0) = 0 \stackrel{\text{red}}{\Rightarrow} (c', c'')(s_0) = (T, T')(s_0)$  linear abhängig  
 $\Leftrightarrow c(s_0)$  ist Wendepunkt

Für die **Rückrichtung** wird benötigt:

$$|T|^2 = \langle T, T \rangle = 1 \Rightarrow 2\langle T', T \rangle = 0 \Rightarrow T' \perp T$$

also  $(T, T')(s_0)$  linear abhängig  $\Rightarrow T'(s_0) = 0$

b) nach Satz 1.1.2, Anwendung 1 oder direkt

$$\kappa \equiv 0 \Leftrightarrow T' = c'' = 0 \Leftrightarrow c(s) = x_0 + s \cdot X$$

□

Noch ein Test, ob der Name „Krümmung“ gerechtfertigt ist:

Für einen Kreis in Bogenlängenparametrisierung  $s \mapsto c(s) = r \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{r} \\ \sin \frac{s}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$  im  $\mathbb{R}^3$  gilt

$$T(s) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{s}{r} \\ \cos \frac{s}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T'(s) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\cos \frac{s}{r} \\ -\sin \frac{s}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(s) = \frac{1}{r}$$

**Satz 1.3.2:**

Sei  $s \mapsto c(s)$  Bogenlängenparametrisierung einer wendepunktfreien  $\mathcal{C}^2$ -Kurve im orientierten, euklidischen  $\mathbb{R}^3$ . Dann bilden die Vektorfelder

$$s \mapsto T(s) := c'(s) \quad [\text{Tangentenvektor}]$$

$$s \mapsto H(s) := \frac{T'(s)}{|T'(s)|} \quad [\text{Hauptnormalenvektor}]$$

$$s \mapsto B(s) := (T \times H)(s) \quad [\text{Binormalenvektor}]$$

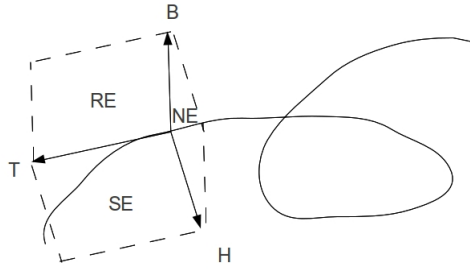
eine orthonormierte, positiv orientierte  $\mathcal{C}^0$ -Begleitbasis der Kurve, genannt FRENET-Begleitbasis.

**Beweis (von Satz 1.3.2):**

$$T' \perp T, T' \neq 0 \Rightarrow H \text{ definiert; Rest klar}$$

□

**Folgerung:**



In jedem Kurvenpunkt  $c(s)$  hat man die paarweise orthogonalen Begleitebenen

$$\begin{aligned} c(s) + \langle\langle T, H \rangle\rangle(s) & \quad (\perp B(s)) & \quad [\text{Schmiegeebene}] \\ c(s) + \langle\langle H, B \rangle\rangle(s) & \quad (\perp T(s)) & \quad [\text{Normalebene}] \\ c(s) + \langle\langle B, T \rangle\rangle(s) & \quad (\perp H(s)) & \quad [\text{rektifizierende Ebene}] \end{aligned}$$

Die Torsion (Windung, 2. Krümmung) einer wendepunktfreien  $\mathcal{C}^3$ -Kurve ( $\Rightarrow (T, H, B)\mathcal{C}^1$ -differenzierbar) soll deren Abweichung vom ebenen Verlauf messen. Diese wird bestimmt durch die Änderung des Binormalenvektors  $B$  (= Normalenvektor der Schmiegeebene).

$$\text{Wegen } \left\{ \begin{array}{lll} B^2 = 1 & \Rightarrow \langle B, B' \rangle = 0 & \Rightarrow B' \perp B \\ B = T \times H & \Rightarrow B' = \underbrace{T' \times H}_{=0} + T \times H' & \Rightarrow B' \perp T \end{array} \right\} \text{ gilt}$$

$B' = -\tau H$  mit einer  $\mathcal{C}^0$ -Funktion

$$\tau = -\langle B', H \rangle$$

**Satz 1.3.3:**

Für die durch  $B' = -\tau H$  definierte Torsion

$$s \mapsto \tau(s) = -\langle B', H \rangle(s) \stackrel{H \perp B}{=} \langle H', B \rangle(s) \stackrel{B = T \times H}{=} \det(T, H, H')(s)$$

einer wendepunktfreien  $\mathcal{C}^3$ -Kurve in Bogenlängenparametrisierung  $s \mapsto c(s)$  gilt

$$\text{a) } \tau(s_0) = 0 \Leftrightarrow c(s) \text{ Henkelpunkt} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} (c', c'', c''')(s_0) & \text{linear abhängig} \\ (c', c'')(s_0) & \text{linear unabhängig} \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \tau \equiv 0 \Leftrightarrow \text{die Kurve verläuft eben.}$$

**Beweis (von Satz 1.1.3):**



a) Allgemein gilt

$$\begin{aligned}\langle X \times Y, Z \rangle &= \sum_i (X \times Y)^i Z^i = \sum_{i=1}^3 \det(X, Y, e_i) Z^i \\ &= \det(X, Y, Z)\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\tau(s_0) &= \det(T, H, H')(s_0) = \det\left(c', \frac{c''}{\kappa}, \left(\frac{c''}{\kappa}\right)'\right)(s_0) \\ &= \det\left(c', \frac{c''}{\kappa}, \left(\frac{1}{\kappa}\right)' c'' + \frac{1}{\kappa} c'''\right)(s_0) = \frac{1}{\kappa^2(s_0)} \det(c', c'', c''')(s_0) = 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow (c', c'', c''')(s_0)$  linear abhängig

b) Nach Satz 1.1.2, Anwendung 2

□

#### Satz 1.3.4:

Für die Frenet-Begleitbasis  $s \mapsto (T, H, B)(s)$  einer wendepunktfreien  $\mathcal{C}^3$ -Kurve gelten die Frenet-schen Ableitungsgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T' & = & \kappa \cdot H \\ H' & = & -\kappa T + \tau B \\ B' & = & -\tau H \end{array} \right\} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} T \\ H \\ B \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ H \\ B \end{pmatrix}$$

mit der  $\mathcal{C}^1$ -Krümmung  $s \mapsto \kappa(s) > 0$  und der  $\mathcal{C}^0$ -Torsion  $s \mapsto \tau(s)$ .

#### Beweis (von Satz 1.3.4):

Da  $(T_1, T_2, T_3) := (T, H, B)$  ein Orthonormalbasisfeld ist, gilt  $\langle T_i, T_k \rangle = \delta_{ik}$

$\Rightarrow \langle T'_i, T_k \rangle = -\langle T'_k, T_i \rangle$ , d.h. die Ableitungsmatrix  $(\langle T'_i, T_k \rangle)_{i,k=1,2,3}$  ist schiefsymmetrisch. Damit kann die nach Definition bekannte 1. und 3. Zeile ergänzt werden.

□

Problem: Wie berechnet man Begleitbasis, Krümmung und Torsion, wenn man die Bogenlängenparametrisierung nicht explizit kennt?

Lösung: „Rücktransformation“

#### Folgerung:

Bezüglich einer beliebigen Parametrisierung  $t \mapsto c(t)$  einer wendepunktfreien  $\mathcal{C}^3$ -Kurve gilt

$$\begin{aligned} T &= \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} \\ B &= \frac{\dot{c} \times \ddot{c}}{|\dot{c} \times \ddot{c}|} \\ H &= B \times T = \frac{\ddot{c} - \langle \ddot{c}, T \rangle T}{|\ddot{c} - \langle \ddot{c}, T \rangle T|} \\ \kappa &= \frac{|\dot{c} \times \ddot{c}|}{|\dot{c}|^3} \\ \tau &= \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}})}{|\dot{c} \times \ddot{c}|^2} \end{aligned}$$

**Beweis (der Folgerung):**

$$\begin{aligned} \dot{c} &= c' \cdot \dot{s} = c' \cdot |\dot{c}| \Rightarrow T = c' = \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} = \frac{1}{w} \dot{c} \\ B &= T \times H = \frac{1}{\kappa} T \times T' = \frac{1}{w\kappa} T \times \dot{T} = \frac{1}{w\kappa} \left( \frac{1}{w} \dot{c} \times \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{w} \dot{c} \right) \right) = \frac{1}{w^3 \kappa} \dot{c} \times \ddot{c} = \frac{\dot{c} \times \ddot{c}}{|\dot{c} \times \ddot{c}|} \\ \Rightarrow w^3 \kappa &= |\dot{c} \times \ddot{c}| \Rightarrow \kappa = \frac{|\dot{c} \times \ddot{c}|}{w^3} = \frac{\dot{c} \times \ddot{c}}{|\dot{c}|^3} \\ \text{usw. (siehe auch Übungen)} \end{aligned}$$

□

**Bemerkung:**

Als Funktionen sind z.B.  $s \mapsto \kappa(s)$  und  $t \mapsto \kappa(t)$  im Allgemeinen völlig verschieden, obwohl gleich bezeichnet.

Zusammenhang:  $\kappa(s(t)) = \kappa(t)$

Analog für  $\tau, T, H, B$ .

**Zusatz:** (später wichtig)

Die Basis  $(T, H, B)$  erhält man durch Anwendung des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens auf die Basis  $(\dot{c}, \ddot{c})$  der Schmiegeebene ( $\rightarrow (T, H)$ ) und Ergänzung durch  $B = T \times H$ .

**Satz 1.3.5:**

Äquivalent zu den Frenetschen Formeln ist

$$\begin{pmatrix} T \\ H \\ B \end{pmatrix}' = \omega \cdot D \times \begin{pmatrix} T \\ H \\ B \end{pmatrix}$$

mit der Gesamtkrümmung

$$\omega = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

und dem (normierten) Darboux-Vektor

$$D = \frac{1}{\omega}(\tau \cdot T + \kappa \cdot B)$$

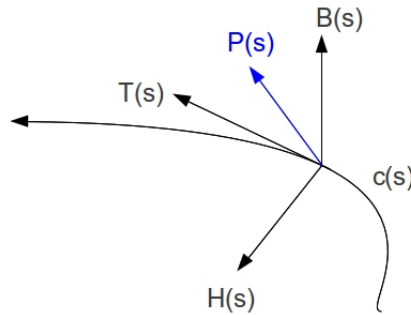
**Beweis (von Satz 1.3.5):**

Nachrechnen unter Verwendung von

$$B = T \times H, \quad H = B \times T, \quad T = H \times B$$

□

**Kinematische Interpretation:**



$s \mapsto c(s)$  beschreibt die Bewegung aus Punkten mit konstanter Geschwindigkeit  $w = |c'| = 1$ . Die Bewegung aus starr mit der Begleitbasis  $(T_1, T_2, T_3) = (T, H, B)$  verbundenen Punktes

$$P(s) = c(s) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i T_i(s) = c(s) + X(s)$$

setzt sich zusammen aus einer Translation (mit der Kurve) und einer Drehung um eine momentane Drehachse. Für seine Geschwindigkeit gilt

$$\begin{aligned} P'(s) &= c'(s) \sum_{i=1}^3 \lambda_i T_i'(s) = c'(s) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i w(s) D(s) \times T_i(s) \\ &= \underline{c'(s) + w(s) D(s) \times X(s)} \end{aligned}$$

mit der

- (vektoriellen) Bahngeschwindigkeit  $c'(s)$  der Kurve und der
- (vektoriellen) Winkelgeschwindigkeit  $w \cdot D(s)$  des Vektors  $X(s) = P(s) - c(s)$  wobei  $D(s)$  der Einheitsvektor der momentanen Drehachse ist und  $w(s)$  die skalare Winkelgeschwindigkeit beschreibt

### 1.3.2 Approximierter Kurvenverlauf

$s \mapsto c(s)$  sei Bogenlängenparametrisierung einer  $\mathcal{C}^3$ -Kurve mit  $\kappa > 0$ . Um einen Parameterwert  $s_0$  (ohne Einschränkung sei  $s_0 = 0$ ) besitzt sie die Taylorentwicklung

$$c(s) = c(0) + c'(0)s + \frac{1}{2}c''(0)s^2 + \frac{1}{6}c'''(0)s^3 + \mathcal{O}(s^3)$$

Mit  $x_0 := c(0)$ ,  $T_0 := T(0)$ ,  $\dots$ ,  $\kappa_0 := \kappa(0)$ ,  $\dots$  folgt wegen  $c' = T$ ,  $c'' = T' = \kappa H$ ,  $c''' = \kappa' H + \kappa(-\kappa T + \tau B)$

**Satz 1.3.6:**

Eine wendepunktfreie  $\mathcal{C}^3$ -Kurve in Bogenlängenparametrisierung  $s \mapsto c(s)$  im  $\mathbb{R}^3$  besitzt um  $s = 0$  die Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} c(s) = x_0 &+ \left(s - \frac{1}{6}\kappa_0^2 s^3\right) T_0 \\ &+ \left(\frac{1}{2}\kappa_0 s^2 + \frac{1}{6}\kappa_0' s^3\right) H_0 \\ &+ \left(\frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 s^3\right) B_0 \\ &+ \mathcal{O}(s^3) \end{aligned}$$

genannt lokale kanonische Form der Kurve bzgl. des kartesischen Koordinatensystems  $(x_0; T_0, H_0, B_0)$  in der Umgebung von  $s = 0$ . Berücksichtigt man nur Terme niedriger Ordnung, so verhält sie sich in Koordinaten wie

$$s \mapsto \left(s, \frac{1}{2}\kappa_0 s^2, \frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 s^3\right)$$

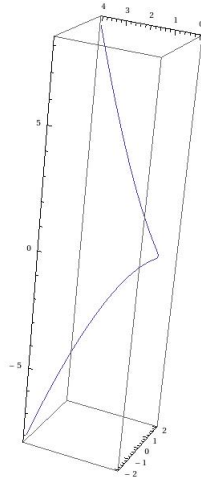
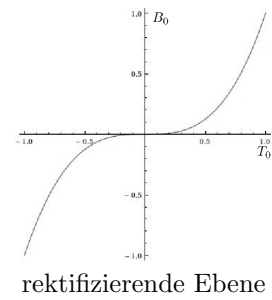
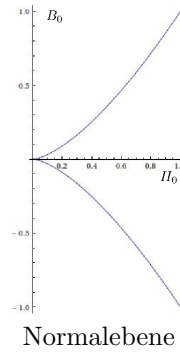
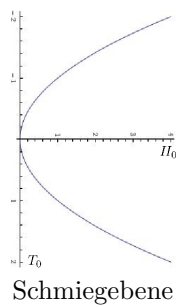
**Folgerung (aus Satz 1.3.6):**

a) Eine Kurve im  $\mathbb{R}^3$  verläuft in 1. Näherung in ihrer Tangente, in 2. Näherung in ihrer Schmiegebene. Abweichungen davon sind durch Krümmung und Torsion bestimmt.

b) Ihre Orthogonalprojektion

- in die Schmiegebene verhält sich wie eine (quadratische) Parabel
- in die Normalebene verhält sich wie eine Neil'sche Parabel
- in die rektifizierende Ebene verhält sich wie eine kubische Parabel

Skizze für  $\tau > 0$



- c) Sie durchdringt ihre Normalebene  $x_0 + \langle H_0, B_0 \rangle$  in Richtung von  $T_0$  und ihre Schmiegeebene  $x_0 + \langle T_0, H_0 \rangle$  für  $\tau_0 \geq 0$  in Richtung von  $B_0$ . (Geometrische Bedeutung des Vorzeichens der Torsion)

Sie durchdringt die rektifizierende Ebene  $x_0 + \langle B_0, T_0 \rangle$  niemals, sondern bleibt auf der Seite, in die  $H_0$  zeigt.

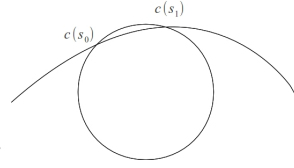
### 1.3.3 Krümmungskreis und Schmiegekugel (oskulierende Kugel)

Wir bestimmen alle Kugeln  $K_r(m) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid |y - m| = r\}$ , die eine vorgegebene Kurve in Bogenlängenparametrisierung  $s \mapsto c(s)$  in einem Punkt  $c(s_0)$  von 2. und 3. Ordnung berühren.

Berührbedingungen an die Abstandsfunktion  $s \mapsto F(s) := d^2(s) = |c(s) - m|^2$

$F(s_0) = r^2$	(Berührung 0. Ordnung: $c(s_0) \in K_r(m)$ )
zusätzlich $F'(s_0) = 0$	(Berührung 1. Ordnung)
zusätzlich $F''(s_0) = 0$	(Berührung 2. Ordnung)
zusätzlich $F'''(s_0) = 0$	(Berührung 3. Ordnung)

**Begründung:**



- Berührung 1. Ordnung = „2-punktige Berührung“

$$F(s_0) = F(s_1) = r^2 \stackrel{\text{MWS}}{\Rightarrow} \exists_{\overline{s_0} \in \overline{s_0 s_1}} F'(\overline{s_0}) = 0$$

Grenzübergang  $s_1 \rightarrow s_0 (\Rightarrow \overline{s_0} \rightarrow s_0)$  liefert  $F'(s_0) = 0$

- Berührung 2. Ordnung = „3-punktige Berührung“

$$F(s_0) = F(s_1) = F(s_2) = r^2 \stackrel{\text{MWS}}{\Rightarrow} \exists_{\overline{s_0}, \overline{s_1}} F'(\overline{s_0}) = F'(\overline{s_1}) = 0 \stackrel{\text{MWS}}{\Rightarrow} \exists_{\overline{s_0}} F''(\overline{s_0}) = 0.$$

Grenzübergang  $s_1, s_2 \rightarrow s_0 (\Rightarrow \overline{s_1}, \overline{s_0} \rightarrow s_0)$  liefert  $F'(s_0) = F''(s_0) = 0$

Auswertung der Bedingungen:

$$(0) \quad F(s_0) = |c(s) - m|^2 = r^2$$

$$(1) \quad F'(s_0) = 2\langle c - m, T \rangle(s_0) = 0$$

$$(2) \quad F''(s_0) = 2[1 + \kappa\langle c - m, H \rangle](s_0) = 0$$

$$(3) \quad F'''(s_0) = 2[\kappa'\langle c - m, H \rangle + \kappa\langle c - m, -\kappa T + \tau B \rangle](s_0) = 0$$

Der Ansatz  $m = c(s_0) + \alpha T(s_0) + \beta H(s_0) + \gamma B(s_0)$  liefert

$$\alpha = -\langle c - m, T \rangle(s_0)$$

$$\beta = -\langle c - m, H \rangle(s_0)$$

$$\gamma = -\langle c - m, B \rangle(s_0)$$

$$(0) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = r^2$$

$$(1) \quad \Rightarrow \alpha = 0$$

$$(2) \quad \Rightarrow \beta = \frac{1}{\kappa(s_0)} = \varrho(s_0) > 0 \text{ (falls } \kappa(s_0) > 0 \text{)}$$

$$(3) \quad (\kappa' \varrho + \kappa \tau \gamma)(s_0) = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau}(s_0) = \frac{\varrho'}{\tau}(s_0) \text{ [falls } \tau(s_0) \neq 0 \text{]}$$

**Satz 1.3.7:**

1. Bei einer  $\mathcal{C}^2$ -Kurve in Bogenlängenparametrisierung  $s \mapsto c(s)$  existiert in einem Nicht-Wendepunkt  $c(s_0)$  (mit  $\kappa(s_0) > 0$ ) genau eine 1-parametrische Kugelschar, die dort von 2.



Ausreichende Differentiationsordnung			aber auch möglich		
$c$	$\mathcal{C}^3$	(vorausgesetzt)	$c$	$\mathcal{C}^2$	(vorausgesetzt)
$T$	$\mathcal{C}^2$		$T$	$\mathcal{C}^1$	
$H$	$\mathcal{C}^1$		$H$	$\mathcal{C}^1$	(zusätzlich vorausgesetzt)
$B$	$\mathcal{C}^1$		$B$	$\mathcal{C}^1$	
$\kappa$	$\mathcal{C}^1$		$\kappa$	$\mathcal{C}^0$	
$\tau$	$\mathcal{C}^0$		$\tau$	$\mathcal{C}^0$	

Schon für solche „ $\mathcal{C}^2$ -Kurven mit  $\mathcal{C}^1$ -Begleitbasis“ („Frenet-Kurven“) lässt sich beweisen:

**Satz 1.3.8 (Fundamentalsatz der Kurventheorie im euklidischen  $\mathbb{R}^3$ ):**

- a) Seien  $s \in I \mapsto \kappa(s) > 0$ ,  $s \in I \mapsto \tau(s) \in \mathbb{R}$  beliebige  $\mathcal{C}^0$ -Funktionen,  $s_0 \in I$  ein Parameterwert,  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  ein Punkt und  $(T_0, H_0, B_0)$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^3$ . Dann gibt es genau eine  $\mathcal{C}^2$ -Kurve in Bogenlängenparametrisierung  $s \in I \mapsto c(s) \in \mathbb{R}^3$  mit  $\mathcal{C}^1$ -Begleitbasis  $s \mapsto (T, H, B)(s)$ , welche die Krümmung  $s \mapsto \kappa(s)$  und die Torsion  $s \mapsto \tau(s)$  besitzt, sowie die Anfangsbedingungen

$$(*) \quad c(s_0) = x_0, (T, H, B)(s_0) = (T_0, H_0, B_0)$$

erfüllt.

- b) Zwei  $\mathcal{C}^2$ -Kurven in Bogenlängenparametrisierung  $s \mapsto c(s)$ ,  $s \mapsto \tilde{c}(s)$  mit  $\mathcal{C}^1$ -Begleitbasis mit gleicher Krümmung  $s \mapsto \kappa(s) = \tilde{\kappa}(s)$  und Torsion  $s \mapsto \tau(s) = \tilde{\tau}(s)$  besitzen, stimmen überein bis auf eine (eigentliche) Bewegung (Drehung + Translation) des  $\mathbb{R}^3$ , d.h. es gilt

$$\tilde{c} = Dc + t$$

mit einer Drehmatrix  $D \in SO(3, \mathbb{R})$  und einem Translationsvektor  $t \in \mathbb{R}^3$ .

**Beweis (von Satz 1.3.8):**

- a) **Eindeutigkeit:** Das lineare Differentialgleichungssystem der Frenet-Formeln

$$c' = T_1, \quad \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad T_i' = \sum_{k=1}^3 a_{ik} T_k$$

besitzt zu den Anfangsbedingungen  $(*)$  (bzw. hier  $(T_1, T_2, T_3)(s_0) = (T_0, H_0, B_0)$ ) genau eine  $\mathcal{C}^1$ -Lösung

$$s \mapsto (T_1, T_2, T_3)(s_0)$$



und damit genau eine  $\mathcal{C}^2$ -Lösung

$$s \mapsto c(s) = x_0 + \int_{s_0}^s T_1(\sigma) \, d\sigma$$

, definiert auf ganz  $I$ .

**Existenz:** Es muss noch überprüft werden, ob diese Lösung  $s \mapsto c(s)$  Bogenlängenparametrisierung einer  $\mathcal{C}^2$ -Kurve mit  $\mathcal{C}^1$ -Begleitbasis ist und wirklich  $s \mapsto \kappa(s), \tau(s)$  als Krümmung und Torsion besitzt.

( $\alpha$ ) Wir zeigen: Die Lösungsfelder  $s \mapsto T_1(s), T_2(s), T_3(s)$  bilden überall (nicht nur für  $s = s_0$ ) eine positiv orientierte Orthonormalbasis:

Für die Skalarprodukte  $\langle T_i, T_k \rangle$  gilt:

$$\langle T_i, T_k \rangle' = \langle T_i', T_k \rangle + \langle T_i, T_k' \rangle = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \langle T_j, T_k \rangle + \sum_{k=1}^3 a_{kj} \langle T_i, T_j \rangle$$

Dieses lineare Differentialgleichungssystem besitzt zu den Anfangsbedingungen

$$\langle T_i, T_k \rangle(s_0) = \delta_{ik}$$

genau eine Lösung und diese ist  $\langle T_i, T_k \rangle \equiv \delta_{ik}$ , denn

$$0 = \delta'_{ik} = a_{ik} + a_{ki}$$

weil die Ableitungsmatrix schiefsymmetrisch ist.

Weiter muss für das Orthonormalbasisfeld  $s \mapsto (T_1, T_2, T_3)(s)$  gelten:

$$\det(T_1, T_2, T_3) = \pm 1$$

, wobei aus Stetigkeitsgründen nur  $+1$  möglich ist (denn  $\det(T_1, T_2, T_3)(s_0) = +1$ ).

( $\beta$ ) Für die Lösung  $s \mapsto c(s)$  gilt jetzt  $|c'| = |T_1| = 1$ , d.h. sie ist Bogenlängenparametrisierung einer Kurve im  $\mathbb{R}^3$ . Weiter ist

$$\begin{aligned} T &= c' = T_1 \\ H &= \frac{T'}{|T'|} = \frac{T_1'}{|T_1'|} = \frac{\kappa T_2}{\kappa |T_2|} = T_2 \\ B &= T \times H = T_1 \times T_2 = T_3 \end{aligned}$$

Es gelten also die Frenet-Formeln für  $(T, H, B)$ , sodass  $\kappa$  die Krümmung und  $\tau$  die Torsion ist.

b) Sei  $s_0$  ein fester Parameterwert sowie

$$\begin{aligned}x_0 &:= c(s_0) \\(T_0, H_0, B_0) &:= (T, H, B)(s_0) \\\tilde{x}_0 &:= \tilde{c}(s_0) \\(\tilde{T}_0, \tilde{H}_0, \tilde{B}_0) &:= (\tilde{T}, \tilde{H}, \tilde{B})(s_0)\end{aligned}$$

Dann gibt es genau eine Drehmatrix  $D$  und einen Vektor  $t \in \mathbb{R}^3$  mit

$$\begin{aligned}\tilde{x}_0 &= Dx_0 + t \\\tilde{T}_0 &= D \cdot T_0 \\\tilde{H}_0 &= D \cdot H_0 \\\tilde{B}_0 &= D \cdot B_0\end{aligned}$$

(Transformation zweier kartesischer Koordinatensysteme ineinander).  
Das lineare Differentialgleichungssystem

$$c' = T_1, \quad \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$$

hat nun die Lösungssysteme

$$(1) \quad s \mapsto c(s), \quad s \mapsto (T, H, B)(s_0)$$

und wegen der Linearität

$$(1a) \quad s \mapsto D \cdot c(s) + t, \quad s \mapsto (D \cdot T, D \cdot H, D \cdot B)$$

sowie natürlich auch

$$(2) \quad s \mapsto \tilde{c}(s), \quad s \mapsto (\tilde{T}, \tilde{H}, \tilde{B})(s)$$

wobei (1a) und (2) in  $s_0$  die gleichen Anfangsbedingungen besitzen

$$\tilde{c}(s_0) = \tilde{x}_0 = Dx_0 + t, \dots$$

Also gilt identisch

$$\begin{aligned}\tilde{c} &= D \cdot c + t \\ \text{und } (\tilde{T}, \tilde{H}, \tilde{B}) &= (D \cdot T, D \cdot H, D \cdot B)\end{aligned}$$

□

**Ergebnis:** Krümmung und Torsion als Funktionen der Bogenlänge bilden ein vollständiges System unabhängiger Invarianten für eine Frenet-Kurve im  $\mathbb{R}^3$ .

**Bemerkung:**

Das Differentialgleichungssystem der Frenet-Formeln lässt sich nur in einfachen Fällen explizit lösen, etwa bei ebenen Kurven als Spezialfälle von Böschungslinien.

**Variante (des Fundamentalsatzes):**

Vorgabe von

$$\begin{cases} t \mapsto w(t) > 0 & \text{(Geschwindigkeit)} \\ t \mapsto \kappa(t) > 0 & \text{(in Abhängigkeit von der Zeit)} \\ t \mapsto \tau(t) \end{cases}$$

bestimmen eine Kurve in einer Parameterdarstellung  $t \mapsto c(t)$  mit  $|\dot{c}| = w$  eindeutig. Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{c} &= wT_1 \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} &= w \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist zu lösen.

### 1.3.5 Spezielle Kurvenklassen

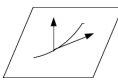
#### A. Böschungslinien

**Definition:**

Eine Böschungslinie im  $\mathbb{R}^3$  ist eine  $\mathcal{C}^1$ -Kurve, ohne Einschränkung in Bogenlängenparametrisierung  $s \mapsto c(s)$ , deren Tangenten mit einer festen Richtung  $E$  (mit  $|E| = 1$ ) einen festen Böschungswinkel  $\gamma$  einschließen. Es ist also  $\forall_s$

$$\langle T(s), E \rangle = \cos \gamma$$

**Beispiel:**

1. Ebene Kurven ( $\gamma = 90^\circ$ ) 

2. Gewöhnliche Schraubenlinien 

**Bemerkung:**

Bei Frenet-Böschungslinien folgt aus  $\langle T, E \rangle = \text{const.}$  sofort  $\kappa \langle H, E \rangle = 0$ , sodass  $E$  in der rektifizierenden Ebene  $c + \langle T, B \rangle$  liegt. Der Böschungswinkel  $\gamma$  kann dann eindeutig so festgelegt werden, dass

$$(*) \quad E = \cos \gamma T + \sin \gamma B \quad \text{mit} \quad -\pi < \gamma \leq \pi$$

Durch Übergang von  $E$  zu  $-E$  bei Bedarf kann erreicht werden, dass  $\sin \gamma = \langle E, B \rangle \geq 0$ , also  $\underline{0 \leq \gamma \leq \pi}$ . Ableiten von  $(*)$  liefert

$$0 = (\kappa \cos \gamma - \tau \sin \gamma) \cdot H, \quad \text{also} \quad \underline{\kappa \cos \gamma - \tau \sin \gamma = 0}$$

sodass nur  $\underline{0 < \gamma < \pi}$  möglich ist.

**Satz 1.3.9:**

Für eine Frenet-Kurve im  $\mathbb{R}^3$  sind äquivalent

- (a) Die Kurve ist Böschungslinie. ( $\langle T, E \rangle = \text{const.}$ )
- (b) Die konische Krümmung  $\frac{\tau}{\kappa} (= \varrho \tau)$  ist konstant.
- (c) Der Darboux-Vektor  $D = \frac{1}{\omega}(\tau T + \kappa B)$  ist konstant [und ohne Einschränkung gleich der festen Richtung]
- (d) Der Winkel zwischen Tangentenrichtung und Darboux-Richtung ist konstant:  $\underline{\langle T, D \rangle = \text{const}}$  [und ohne Einschränkung gleich dem Böschungswinkel]

**Beweis (von Satz 1.3.9):**

(a)  $\Rightarrow$  (b) Nach obiger Bemerkung gilt

$$\begin{aligned} \kappa \cos \gamma - \tau \sin \gamma &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\tau}{\kappa} &= \cot \gamma = \text{const.} \end{aligned}$$

(b)  $\Rightarrow$  (c)

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\kappa} = \lambda = \text{const.} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\kappa}{\omega} = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \text{const.} \\ \frac{\tau}{\omega} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \text{const.} \end{cases} \\ \Rightarrow D' = \left( \frac{\tau}{\omega} T + \frac{\kappa}{\omega} B \right)' &= \left( \frac{\tau}{\omega} \kappa - \frac{\kappa}{\omega} \tau \right) H = 0 \end{aligned}$$

(c)  $\Rightarrow$  (d)  $D = \text{const.} \Rightarrow \langle T, D \rangle' = \kappa \langle H, D \rangle = 0$

(d)  $\Rightarrow$  (a)

$$\begin{aligned}\langle T, D \rangle &= \frac{\tau}{\omega} = \text{const.} \Rightarrow \left( \frac{\kappa}{\omega} \right)^2 = 1 - \left( \frac{\tau}{\omega} \right)^2 = \text{const} \\ \Rightarrow \frac{\tau}{\omega}, \frac{\kappa}{\omega} &= \text{const.} \Rightarrow D' = \dots = 0 \\ \Rightarrow D &= \text{const.} \Rightarrow \text{Die Kurve ist Böschungslinie mit fester Richtung } E := D\end{aligned}$$

□

## A. Sphärische Kurven

**Satz 1.3.10:**

- a) Eine wendepunktfreie  $\mathcal{C}^2$ -Kurve in Bogenlängenparametrisierung  $s \mapsto c(s)$  ist genau dann sphärisch (liegt auf einer Kugel), wenn eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion  $s \mapsto a(s)$  existiert mit

$$\begin{array}{l} \varrho' = a\tau \\ a' = -\varrho\tau \end{array}$$

Für Mittelpunkt  $m$  und Radius  $r$  der Kugel gilt dann

$$m = c + \varrho H + aB, \quad r = \sqrt{\varrho^2 + a^2}$$

- b) Äquivalent dazu ist: Es existiert eine  $\mathcal{C}^1$ -(Winkel)-Funktion  $s \mapsto \lambda(s)$  mit  $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$  und eine Zahl  $r > 0$  mit  $\varrho = r \cos \lambda$ ,  $\lambda' = -\tau$ . Dabei gilt

$$m = c + r(\cos \lambda H + \sin \lambda B)$$

**Beweis (von Satz 1.3.10):**

a)

$$\begin{aligned}\forall_s |c(s) - m|^2 &= r^2 \Rightarrow \forall_s \langle c(s) - m, T(s) \rangle = 0 \\ \Rightarrow c &= m - bH - aB\end{aligned}$$

mit  $\mathcal{C}^1$ -Funktionen  $a, b$ . Aus

$$T = -b'H - b(-\kappa T + \tau B) - a'B + a\tau H$$

folgt durch Koeffizientenvergleich

$$b \cdot \kappa = 1 \quad (\Rightarrow b = \varrho)$$

$$b' = a \cdot \tau$$

$$a' = -b \cdot \tau$$

Rückrichtung: Aus  $\varrho' = a\tau$ ,  $a' = -\varrho\tau$  folgt für  $m := c + \varrho H + aB$ :

$$m' = \dots = 0 \quad \text{also} \quad m = \text{const.}$$

und für  $r^2 := |c - m|^2 = \varrho^2 + a^2$  folgt:

$$\frac{d}{ds}(r^2) = 2\varrho\varrho' + 2aa' = 0 \quad \text{also} \quad r = \text{const.}$$

b) „ $\Rightarrow$ “ Setze  $\begin{cases} \rho = r \cos \lambda & (> 0) \\ a = r \sin \lambda \end{cases}$ , also

$$\lambda = \arctan \frac{a}{\varrho} \in \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[$$

$$\text{Dann ist } \tau = -\frac{a'}{\varrho} = -\frac{r(\cos \lambda)\lambda'}{r \cos \lambda} = -\lambda'$$

„ $\Leftarrow$ “ ...

□

**Folgerung:**

a) Sphärische  $\mathcal{C}^4$ -Kurven mit  $\forall_s \kappa(s) > 0, \forall_s \tau \neq 0$  sind durch

$$\left( \frac{\varrho'}{\tau} \right)' + \varrho\tau = 0$$

definiert.

b) Äquivalent dazu ist, wenn zusätzlich „verrat ich net“

$$\left( \frac{\varrho'}{\tau} \right)^2 + \varrho^2 = \text{const}(= r^2)$$

Die Kugel, auf der die Kurve verläuft, ist ihre Schmiegkugel.

**Beweis (der Folgerung):**

a) Elimination von  $a$

b) siehe Übungen

□

## 1.4 Kurven im euklidischen $\mathbb{R}^n$

Hier ist Frenet-Theorie möglich für  $\mathcal{C}^n$ -Kurven, ohne Einschränkung in Bogenlängenparametrisierung  $s \mapsto c(s)$ , deren Schmieghyperebenen

$$S_{n-1} = c + \langle\langle c_1, \dots, c_{n-1} \rangle\rangle \quad \left( \text{mit } c_p := \frac{d^p c}{ds^p} \right)$$

nirgends degenerieren, also überall  $(c_1, \dots, c_{n-1})$  linear unabhängig ist.

### Begleitbasis:

Anwendung des Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens auf die Basis  $(c_1, \dots, c_{n-1})$  der Schmieghyperebene liefert dort eine Orthonormalbasis  $(T_1, \dots, T_{n-1})$ , die durch  $T_n := T_1 \times \dots \times T_{n-1}$  zu einer positiv orientierten, orthonormierten Begleitbasis  $(T_1, \dots, T_n)$  der Kurve ergänzt werden kann.

### Ableitungsgleichungen:

Aus  $\langle T_i, T_k \rangle = \delta_{ik} \Rightarrow \langle T'_i, T_k \rangle = -\langle T'_k, T_i \rangle$  folgt die Schiefsymmetrie der Ableitungsmatrix

$$(\langle T'_i, T_k \rangle)_{i,k=1,\dots,n}$$

Wegen

$$\begin{aligned} T_p \in \langle\langle c_1, \dots, c_p \rangle\rangle &\Rightarrow T'_p \in \langle\langle c_1, \dots, c_{p+1} \rangle\rangle \\ &= \langle\langle T_1, \dots, T_{p+1} \rangle\rangle \end{aligned}$$

für  $\forall_{q>p+1} \langle T'_p, T_q \rangle = 0$ .

So folgt nun der Satz:

### **Satz 1.4.1:**

Sei  $s \mapsto c(s)$  Bogenlängenparametrisierung einer  $\mathcal{C}^n$ -Kurve im  $\mathbb{R}^n$  mit  $\forall_s (c_1, \dots, c_{n-1})(s)$  linear

unabhängig. Dann genügt die durch

$$\begin{aligned} T_1 &:= c' \\ \bigvee_{p=1}^{n-2} T_{p+1} &:= \frac{c_{p+1} - \sum_{k=1}^p \langle c_{p+1}, T_k \rangle T_k}{|\dots|} = \frac{[c_{p+1}]_{\perp}}{|[c_{p+1}]_{\perp}|} \\ T_n &:= T_1 \times \dots \times T_{n-1} \end{aligned}$$

rekursiv definierte Frenet-Begleitbasis  $s \mapsto (T_1, \dots, T_n)(s)$  den Ableitungsgleichungen

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\kappa_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \kappa_{n-2} & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\kappa_{n-2} & \ddots & \tau \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}$$

mit den  $n-2$  Krümmungen

$$s \mapsto \kappa_p(s) = \langle T'_p, T_{p+1} \rangle(s) \quad (p = 1, \dots, n-2)$$

und der Torsion

$$s \mapsto \tau(s) = \langle T'_{n-1}, T_n \rangle(s)$$

Zusatz:

Es gilt auch

$$\begin{aligned} \kappa_p &= |[T'_p]_{\perp}| = \left| T'_p - \sum_{k=1}^p \langle T'_p, T_k \rangle T_k \right| > 0 \quad (p = 1, \dots, n-2) \\ \tau &= \det(T_1, \dots, T_{n-1}, T'_{n-1}) \geq 0 \end{aligned}$$

**Beweis (des Zusatzes):**

1. Es ist

$$T_p = \lambda \left( c_p + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k c_k \right) = [c_p]_{\perp} \text{ mit } \lambda = \frac{1}{|[c_p]_{\perp}|} > 0$$

also

$$T'_p = \lambda c_{p+1} + \sum_{k=1}^p \tilde{\lambda}_k c_k \Rightarrow \underline{[T'_p]_{\perp}} = \lambda \underline{[c_{p+1}]_{\perp}}$$

Ebenso ist

$$\underline{T_{p+1}} = \mu \underline{[c_{p+1}]_{\perp}} \text{ mit } \mu = \frac{1}{|[c_{p+1}]_{\perp}|} > 0$$



Es folgt

$$\begin{aligned}\kappa_p &= \langle T'_p, T_{p+1} \rangle = \langle [T'_p]_{\perp}, T_{p+1} \rangle \\ &= \lambda \cdot \mu | [c_{p+1}]_{\perp} |^2 = \frac{| [c_{p+1}]_{\perp} |}{| [c_p]_{\perp} |} = [T'_p]_{\perp} > 0\end{aligned}$$

$$2. \tau = \langle T'_{n-1}, T_n \rangle = \langle T_1 \times \dots \times T_{n-1}, T'_{n-1} \rangle = \det(T_1, \dots, T_{n-1}, T'_{n-1})$$

□

### Geometrische Bedeutung

- der Krümmung  $\kappa_p$ : Abweichung vom Verlauf in der Schmiegeebene  $S_p$
- der Torsion  $\tau$ : Abweichung vom Verlauf in der Schmieghyperebene  $S_{n-1}$  mit Orientierung!  
(Vorzeichen)

### **Satz 1.4.2 (Fundamentalsatz):**

$$\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}, \tau$$

als Funktionen der Bogenlängen bilden ein vollständiges System unabhängiger Invarianten.

Berechnung der Größen bezüglich einer beliebigen Parametrisierung:

### **Folgerung:**

Bezüglich einer beliebigen, zulässigen Parametrisierung  $t \mapsto c(t)$  einer Frenet-Kurve im  $\mathbb{R}^n$  gilt mit

$$c_p := \frac{d^p c}{dt^p} (p = 1, \dots, n)$$

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{c_1}{|c_1|} \\ \bigvee_{p=1}^{n-2} T_{p+1} &= \frac{c_{p+1} - \sum_{k=1}^p \langle c_{p+1}, T_k \rangle T_k}{|\dots|} = \frac{[c_{p+1}]_{\perp}}{|[c_{p+1}]_{\perp}|} \\ T_n &= T_1 \times \dots \times T_{n-1}\end{aligned}$$

sowie mit

$$\begin{aligned}
A_0 &:= 1 \\
A_p &:= a_p(c_1, \dots, c_p) = \sqrt{\det(\langle c_i, c_k \rangle)_{i,k=1, l[c_{p+1}]_{\perp} \text{ dots}, p}} > 0 \quad (p = 1, \dots, n-1) \\
V_n &:= \det(c_1, \dots, c_n) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \\
\bigvee_{p=1}^{n-2} \kappa_p &= \frac{1}{|\dot{c}|} \frac{A_{p+1}}{A_p} \bigg/ \frac{A_p}{A_{p-1}} > 0 \\
\tau &= \frac{1}{|\dot{c}|} \frac{V_n}{A_{n-1}} \bigg/ \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0
\end{aligned}$$

**Spezialfälle:**

$$\begin{aligned}
\underline{n=2}: \quad \tau = k &= \frac{1}{|\dot{c}|} \frac{V_2}{A_1} \bigg/ \frac{A_1}{A_0} = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c})}{|\dot{c}|^3} \quad (A_1 = |\dot{c}|, V_2 = \det(\dot{c}, \ddot{c})) \\
\underline{n=3}: \quad \kappa &= \frac{1}{|\dot{c}|} \frac{A_2}{A_1} \bigg/ \frac{A_1}{A_0} = \frac{a_2(\dot{c}, \ddot{c})}{|\dot{c}|^3} = \frac{|\dot{c} \times \ddot{c}|}{|\dot{c}|^3} \\
\tau &= \frac{1}{|\dot{c}|} \frac{V_3}{A_2} \bigg/ \frac{A_2}{A_1} = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}})}{|\dot{c} \times \ddot{c}|^2}
\end{aligned}$$

**Beweis (Beweisskizze zu Satz 1.4.2):**

Darstellung von  $T_1, \dots, T_n$  klar, da das Orthonormalisierungsverfahren unabhängig von der Ausgangsbasis ist, wenn  $\langle\langle c_1, \dots, c_p \rangle\rangle = \langle\langle \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_p \rangle\rangle$  samt Orientierung

$$\begin{aligned}
\kappa_p = \langle T'_p, T_{p+1} \rangle &= \frac{1}{w} \langle \dot{T}_p, T_{p+1} \rangle \stackrel{*}{=} \frac{1}{w} \frac{|[c_{p+1}]_{\perp}|}{|[c_p]_{\perp}|} \\
* &= \text{siehe Beweis des Zusatzes}
\end{aligned}$$

Nach der Formel „Volumen = Grundfläche  $\times$  Höhe“ gilt

$$\begin{aligned}
a_{p+1}(c_1, \dots, c_{p+1}) &= a_p(c_1, \dots, c_p) \cdot |[c_{p+1}]_{\perp}|, \text{ also} \\
|[c_{p+1}]_{\perp}| &= \frac{A_{p+1}}{A_p}
\end{aligned}$$

□

## 2 Lokale Flächentheorie im euklidischen Raum

### 2.1 Grundbegriffe der Flächentheorie

#### 2.1.0 $p$ -dimensionale Flächen im affinen $\mathbb{R}^n$

Sei  $1 < p < n$  fest gewählt (in Anwendungen meist  $p = 2, n = 3$ ).

**Definition (Parametrisierte  $C^r$ - $p$ -Fläche ( $r \geq 0$ )):**

$C^r$ -Abbildung  $x: G \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$u = (u^1, \dots, u^p) \mapsto x(u) = (x^1(u), \dots, x^n(u))$$

wobei  $G$  ein Gebiet des  $\mathbb{R}^p$  (d.h. offen und zusammenhängend) ist.

Parameter:

$$u^1, \dots, u^p \quad \text{bei } n = 3 \text{ meist } (u, v)$$

Parameterlinien:

$$u^\varrho \mapsto x(u_0^1, \dots, u^\varrho, \dots, u_0^p)$$

Spur:

$$M := x[G] \subset \mathbb{R}^n$$

Regularität  $r \geq 1$ : Die partiellen Ableitungen

$$x_\varrho := \partial_\varrho x = \frac{\partial x}{\partial u^\varrho} \quad (\varrho = 1, \dots, p)$$

sind überall linear unabhängig (sonst Singularitäten).

**Bemerkung:**

1. Regularität bedeutet: Die partiellen Ableitungen  $x_\varrho$  ( $\varrho = 1, \dots, p$ ) [„Tangentialvektoren“] spannen überall einen  $p$ -dimensionalen Tangentialraum auf. Es gibt keine „Grate“ oder schlimmeres.

2. Reguläre parametrisierte  $p$ -Flächen sind lokal injektiv; die Funktionalmatrix

$$Dx = \left( \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(u^1, \dots, u^p)} \right) = (x_1, \dots, x_p)$$

besitzt überall den Höchstrang  $p$  (Satz über implizite Funktionen). Bei lokalen Untersuchungen kann man stets annehmen, dass  $x: G \subset \mathbb{R}^p \rightarrow x[G] = M \subset \mathbb{R}^n$  bijektiv ist, also keine Selbstdurchdringungen auftreten. Eine parametrisierte Hyperfläche ( $p = n - 1$ ) im euklidischen  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann regulär, wenn  $\forall_u (x_1 \times \dots \times x_{n-1})(u) \neq 0$ , d.h. wenn überall der Normalen(einheits)vektor

$$N = \frac{x_1 \times \dots \times x_{n-1}}{|x_1 \times \dots \times x_{n-1}|}$$

existiert.

### Beispiel:

Die Abbildung

$$(u, v) \in ]-\pi, +\pi[ \times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \mapsto x(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ist (wegen  $|x_1 \times x_2|(u, v) = \dots = \cos v > 0$ ) eine reguläre Parametrisierung der Kugelfläche (2-Sphäre  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ), die aber einen Meridian (samt Polen) auslässt. ( $u$  = geographische Länge,  $v$  = geographische Breite, Würzburg:  $u \approx 10^\circ$ ,  $v \approx 50^\circ$ )

Es gibt keine globale, injektive Parametrisierung der  $S^2$ . Als ganzes ist sie eine „differenzierbare Mannigfaltigkeit“, die sich nur lokal so parametrisieren lässt.

### Definition ( $C^r$ -Äquivalenz):

$$C^r\text{-Äquivalenz zweier } C^r\text{-}p\text{-Flächen } \begin{cases} x: G \rightarrow \mathbb{R}^n, u \mapsto x(u) \\ \tilde{x}: \tilde{G} \rightarrow \mathbb{R}^n, \tilde{u} \mapsto \tilde{x}(\tilde{u}) \end{cases}.$$

Es existiert ein orientierungstreuer  $C^r$ -Diffeomorphismus

$$\Phi: G \rightarrow \tilde{G}, u \mapsto \tilde{u}(u) = \Phi(u)$$

mit  $x = \tilde{x} \circ \Phi$ , d.h.

$$\forall_n x(u) = \tilde{x}(\Phi(u)) = \tilde{x}(\tilde{u})$$

### Bemerkung:

- Für  $r \geq 1$  bestimmt die Funktionalmatrix

$$D\Phi = \left( \frac{\partial \tilde{u}^\sigma}{\partial u^\varrho} \right)_{\sigma, \varrho=1, \dots, p}$$

den Übergang zwischen den Tangentialvektoren  $x_1, \dots, x_p$  und  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p$  bezüglich verschie-

dener Parametrisierungen. Nach der Kettenregel gilt

$$x_\varrho(u) = \sum_{\sigma=1}^p \tilde{x}_\sigma(\Phi(u)) \frac{\partial \tilde{u}^\sigma}{\partial u^\varrho}(u) = \sum_{\sigma=1}^p \tilde{u}_\varrho^\sigma(u) \tilde{x}_\sigma(\Phi(u))$$

(Basistransformationsformel im Tangentialraum)

- $\Phi$  orientierungstreu  $\Leftrightarrow \det D\Phi = \det(\tilde{u}_\varrho^\sigma) > 0$

### Definition:

Eine (orientierte, reguläre)  $\mathcal{C}^r$ - $p$ -Fläche im affinen  $\mathbb{R}^n$  ist eine Äquivalenzklasse regulärer, parametrisierter  $\mathcal{C}^r$ - $p$ -Flächen  $x: G \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Bedauerlich: In der Flächentheorie gibt es keine ausgezeichnete Parametrisierung vgl. der Bogenlängenparametrisierung in der Kurventheorie.

Deswegen: möglichst parameterunabhängige Formulierung von Eigenschaften/Größen.

### Beispiel:

Die Tangentialräume (für  $p = 2$  die Tangentialebenen)

$$T_u x := [\cancel{x(u)}+] \langle x_1(u), \dots, x_p(u) \rangle$$

sind von der Parametrisierung unabhängig,

$$T_u x = T_{\tilde{u}} \tilde{x} = \langle \tilde{x}_1(\tilde{u}), \dots, \tilde{x}_p(\tilde{u}) \rangle$$

nicht aber die Basisvektoren  $x_1, \dots, x_p$ .

Tangentialvektoren

$$X \in T_u x = T_{\tilde{u}} \tilde{x} \quad (\text{invariante Objekte})$$

besitzen dann verschiedene Basisdarstellungen:

$$X = \sum_{\varrho=1}^p X^\varrho x_\varrho(u) = \sum_{\sigma=1}^p \tilde{X}^\sigma \tilde{x}_\sigma(\tilde{u})$$

und aus der Basistransformation

$$x_\varrho = \sum_{\sigma} \tilde{u}_\varrho^\sigma \tilde{x}_\sigma$$

folgt die Koordinatentransformation

$$\tilde{X}^\sigma = \sum_{\varrho} \tilde{u}_\varrho^\sigma X^\varrho$$

für Vektoren.

### Bemerkung:

Zur Vereinfachung der Schreibweise benutzt man beim Rechnen in Koordinaten („Tensorkalkül“) meist (wir nicht immer, aber immer öfter) die sogenannte EINSTEINSche Summationskonvention.

In einem Term wird über Indizes, die einmal „oben“, einmal „unten“ vorkommen generell summiert.

**Beispiel:**

$$\sum X^\varrho \tilde{x}_\varrho, \quad \sum_\mu a^{\varrho\mu} b_{\mu\sigma}, \quad \sum b^\varrho_\varrho \text{ Spur}$$

$$\sum_{\varrho,\sigma} X^\varrho \gamma^\mu_{\varrho\sigma} Y^\sigma, \quad \sum_\mu g_{\mu\nu} R^\mu_{\varrho\sigma\tau} = R_{\varrho\nu\sigma\tau}$$

### 2.1.1 Flächeninterne Metrik auf $p$ -Flächen im euklidischen $\mathbb{R}^n$

Die euklidische Struktur im  $\mathbb{R}^n$  induziert in den  $p$ -dimensionalen Tangentialräumen  $T_u x \subset: \mathbb{R}^n$  punktale Skalarprodukte.

**Satz 2.1.1:**

In jedem Punkt  $x(u)$  einer  $\mathcal{C}^1$ - $p$ -Fläche im euklidischen  $\mathbb{R}^n$  wird durch

$$I_u: T_u x \times T_u x \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto I_u(X, Y) := \langle X, Y \rangle$$

ein (von der Parametrisierung unabhängiges) Skalarprodukt definiert.

Das Feld  $u \mapsto I_u$  dieser Bilinearformen heißen 1. Grundform (1. Fundamentalform) der  $p$ -Fläche. Die (parameterabhängigen) Koordinatenfunktionen

$$u \mapsto \underline{g_{\varrho\sigma}}(u) := I_u(x_\varrho, x_\sigma) = \langle x_\varrho, x_\sigma \rangle$$

bilden überall eine symmetrische, positiv definite Matrix  $(g_{\varrho\sigma}(u))$  mit Determinante

$$g(u) := \det(g_{\varrho\sigma}(u)) = a_p^2(x_1, \dots, x_p)(u) > 0$$

und für Tangentialvektoren

$$X = \sum X^\varrho x_\varrho(u), Y = \sum Y^\sigma x_\sigma(u)$$

erhält man die Koordinatendarstellung

$$I_u(X, Y) = \sum g_{\varrho\sigma}(u) X^\varrho Y^\sigma$$

**Beweis (von Satz 2.1.1):**

$I_u$  ist die Einschränkung des Skalarproduktes im  $\mathbb{R}^n$  auf den Teilraum  $T_u x \subset: \mathbb{R}^n$  und  $(g_{\varrho\sigma}(u))$  ist die Darstellungsmatrix von  $I_u$  bezüglich der speziellen Basis  $(x_1, \dots, x_p)(u)$ . Weiter gilt

$$I(X, Y) = \left\langle \sum X^\varrho x_\varrho, \sum Y^\sigma x_\sigma \right\rangle = \sum X^\varrho Y^\sigma \underbrace{\langle x_\varrho, x_\sigma \rangle}_{g_{\varrho\sigma}}$$

□

Früher oft übliche Bezeichnung bei  $p = 2$ :

$$(g_{\varrho\sigma}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

**Mit Hilfe der 1. Grundform lassen sich flächenintern berechnen**

→ bei tangentialen Objekten

- die Länge eines Tangentialvektors  $X = \sum X^\varrho x_\varrho(u) \in T_u x$

$$|X| = \sqrt{\sum g_{\varrho\sigma}(u) X^\varrho X^\sigma} \quad (\text{analog der Winkel zwischen Tangentialvektoren } X, Y \neq 0)$$

- den  $p$ -dimensionalen Flächeninhalt eines von Vektoren  $X_1, \dots, X_p \in T_u x$  aufgespannten  $p$ -dimensionalen Parallelogramms

$$\underline{a_p(X_1, \dots, X_p)} = \sqrt{\det(\langle X_\varrho, X_\sigma \rangle)} = \underline{\sqrt{g(u)} \det(X_\beta^\alpha)}$$

denn

$$\begin{aligned} X_\varrho &= \sum X_\varrho^\mu x_\mu(u) \Rightarrow \langle X_\varrho, X_\sigma \rangle = \sum g_{\mu\nu}(u) X_\varrho^\mu X_\sigma^\nu \\ &\Rightarrow \det(\langle X_\varrho, X_\sigma \rangle) = \det(g_{\mu\nu}(u)) \det^2(X_\varrho^\mu) \end{aligned}$$

Die explizite Kenntnis der räumlichen Basisvektoren  $x_\varrho(u) \in \mathbb{R}^n$  ist jeweils unnötig.

→ bei Objekten innerhalb der Fläche

- die Länge eines Kurvenstücks

$$L_a^b(c) = \int_a^b \sqrt{\sum g_{\varrho\sigma}(u(t)) \dot{u}^\varrho(t) \dot{u}^\sigma(t)} \, dt$$

Wegen  $c = x \circ u$  gilt

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \sum_{\varrho} x_\varrho(u(t)) \dot{u}^\varrho(t) \\ \Rightarrow |\dot{c}(t)|^2 &= \sum g_{\varrho\sigma}(u(t)) \dot{u}^\varrho(t) \dot{u}^\sigma(t) \end{aligned}$$

(Ähnlich der Winkel zwischen Flächenkurven)

- der  $p$ -dimensionale Flächeninhalt eines Bereiches  $x[K] \subset M$

$$\underline{A_p(x[K])} = \int_K a_p(x_1(u), \dots, x_p(u)) \, du^1 \dots du^p = \int_K \sqrt{g(u)} \, du$$

Man braucht die Kurve bzw. den Bereich nur in der Parameterebene zu kennen.

**Ergebnis:** Lassen sich zwei (im Raum völlig verschiedene) Flächen so auf gleiche Parameter beziehen, dass sie überall die gleiche 1. Grundform-Matrix besitzt, so erhält man gleiche Ergebnisse beim Messen von Längen, Winkeln, Flächeninhalten usw.

Durch solche Messungen innerhalb der Fläche kann man nicht entscheiden, auf welcher Fläche man sich wirklich befindet.

**Definition:**

- a) Zwei  $\mathcal{C}^1$ - $p$ -Flächen heißen isometrisch, wenn Parametrisierungen

$$u \in G \mapsto x(u) \in M \quad \text{und} \quad u \in G \mapsto \bar{x}(u) \in \bar{M}$$

existieren mit

$$\forall_u (g_{\rho\sigma}(u)) = (\bar{g}_{\rho\sigma}(u))$$

- b) Zwei isometrische  $\mathcal{C}^1$ - $p$ -Flächen mit Parametrisierungen

$$u \in G \mapsto x(u) \in M \quad \text{und} \quad u \in G \mapsto \bar{x}(u) \in \bar{M}$$

heißen ineinander verbiegbare (abwickelbar), wenn eine stetige Schar

$$\alpha \in [a, b] \mapsto ({}^\alpha x: G \rightarrow M_\alpha)$$

isometrischer  $\mathcal{C}^1$ - $p$ -Flächen existiert mit

$${}^a x = x, \quad {}^b x = \bar{x}$$

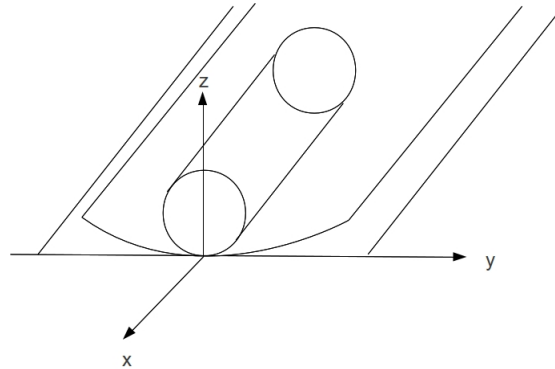
**Bemerkung:**

1. Flächengrößen, die sich rein aus der 1. Grundform berechnen lassen, also für alle isometrischen Flächen dieselben sind, heißen innergeometrische Größen.
2. Nicht alle isometrischen Flächen sind ineinander verbiegbare. (Es gibt komplizierte Gegenbeispiele)

**Beispiel:**



1. Der Kreiszyylinder.



$$(u, v) \in ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R} \mapsto x(u, v) = \begin{pmatrix} h \cdot v \\ r \sin u \\ r(1 - \cos u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ist in die Ebene verbiegbar: Eine stetige Verbiegungsschar ist

$${}^\alpha x(u, v) = \begin{pmatrix} hv \\ r \frac{1}{\alpha} \sin \alpha u \\ r \frac{1}{\alpha} (1 - \cos \alpha u) \end{pmatrix} \quad \alpha \in ]0, 1]$$

$${}^0 x(u, v) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} {}^\alpha x(u, v) = \begin{pmatrix} hv \\ ru \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\text{Ebenenstück}], \text{ denn}$$

$${}^\alpha x_1(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \cos \alpha u \\ r \sin \alpha u \end{pmatrix}$$

$${}^\alpha x_2(u, v) = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ({}^\alpha g_{\varrho\sigma}(u, v)) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}$$

Die Tangentialfläche

$$(s, v) \in I \times \mathbb{R} \mapsto x(s, v) = c(s) + vT(s) \in \mathbb{R}^3$$

einer beliebigen wendepunktfreien Kurve  $s \mapsto c(s)$  ist in die Ebene verbiegbar. Es gilt

$$(g_{\varrho\sigma}(s, v)) = \begin{pmatrix} 1 + v^2 \kappa^2(s) & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Torsion  $\tau$  der Kurve taucht nicht auf! Nach dem Fundamentalsatz der Kurventheorie kann eine von einem Parameter  $\alpha$  stetig abhängende Kurvenschar  $s \mapsto {}^\alpha c(s)$  ( $\alpha \in [0, 1]$ ) durch Vorgabe von  $s \mapsto {}^\alpha \kappa(s) := \kappa(s)$  und  $s \mapsto {}^\alpha \tau(s) := \alpha \cdot \tau(s)$  konstruiert werden. Die zugehörigen Tangentenflächen bilden eine stetige Verbindungsschar zwischen einem Ebenenstück (= Tangentenfläche der ebenen Kurve  ${}^0 c$ ) und der Ausgangsfläche ( $\alpha = 1$ ).

**Bemerkung:**

Wir zeigen später, dass die

- allgemeinen Zylinder, die
- allgemeinen Kegel und
- Tangentenflächen von Kurven

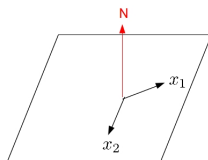
im wesentlichen die einzigen Flächen im  $\mathbb{R}^3$  sind, die in die Ebene verbiegbare sind.

Name: „Torsen“

Die Kugel ist nicht isometrisch zur Ebene. Deswegen Ärger bei Atlanten (Atlassen).

## 2.1.2 Hyperflächen im euklidischen $\mathbb{R}^n$ : Ableitungsgleichungen

Im Folgenden sei  $p = n - 1$



Offensichtlich gilt

**Satz 2.1.2:**

Ist  $u \in G \mapsto x(u) \in \mathbb{R}^n$  Parameterdarstellung einer  $\mathcal{C}^1$ -Hyperfläche, so bilden die

- tangentialen Vektorfelder

$$x_1, \dots, x_{n-1}$$

- das Normalen(einheits)vektorfeld

$$N := \frac{x_1 \times \dots \times x_{n-1}}{|x_1 \times \dots \times x_{n-1}|}$$

eine parameterabhängige, positiv orientierte Begleitbasis mit den Eigenschaften

$$\forall_\varrho \langle x_\varrho, N \rangle = 0, \quad |N|^2 = 1$$

$$\det(x_1, \dots, x_{n-1}, N) = \langle x_1 \times \dots \times x_{n-1}, N \rangle = |x_1 \times \dots \times x_{n-1}| = \sqrt{g} = a_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

Das Vektorfeld  $N: G \rightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  ist dabei invariant gegenüber (zulässiger) Parametertransformationen und heißt auch sphärisches Bild oder Gaußabbildung der Hyperfläche.

**Bemerkung:**

In jedem Punkt  $x(u)$  ist die orthogonale Zerlegung

$$\mathbb{R}^n = T_u x \oplus^\perp \langle\langle N \rangle\rangle$$

parameterunabhängig.

**Satz 2.1.3:**

Für die Begleitbasis  $(x_1, \dots, x_{n-1}, N)$  einer parametrisierten  $\mathcal{C}^2$ -Hyperfläche gelten (parameterabhängige) Ableitungsgleichungen der Form

$$\boxed{\forall_{\varrho, \sigma} x_{\varrho\sigma} = \sum \gamma_{\varrho}^{\mu}{}_{\sigma} x_{\mu} + b_{\varrho\sigma} N}$$

[Gaußsche Ableitungsgleichungen]

$$\boxed{N_{\sigma} := \partial_{\sigma} N = - \sum b^{\mu}{}_{\sigma} x_{\mu} [+0 \cdot N]}$$

[Weingartenschen Ableitungsgleichungen]

**Beweis (von Satz 2.1.3):**

Klar wegen

$$|N|^2 = 1 \Rightarrow \langle N_{\sigma}, N \rangle = 0$$

□

**Berechnung der Koeffizienten**

a) Mit den Christoffelsymbolen 1. Art

$$\gamma_{\varrho\nu\sigma} := \langle x_{\varrho\sigma}, x_{\nu} \rangle = \sum_{\mu} \gamma_{\varrho}^{\mu}{}_{\sigma} g_{\mu\nu}$$

erhält man die Christoffelsymbole 2. Art durch

$$\gamma_{\varrho}^{\mu}{}_{\sigma} = \sum_{\nu} g^{\mu\nu} \gamma_{\varrho\nu\sigma}$$

wenn  $(g^{\mu\nu})$  die zur  $(g_{\varrho\sigma})$  inverse Matrix (mit  $\sum_{\nu} g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^{\mu}{}_{\sigma}$ ) berechnet.

b) Es gilt

$$b_{\varrho\sigma} = \langle x_{\varrho\sigma}, N \rangle = -\langle x_{\varrho}, N_{\sigma} \rangle = + \sum_{\mu} b^{\mu}_{\sigma} g_{\mu\varrho}$$

$$\Rightarrow b^{\mu}_{\sigma} = \sum_{\varrho} g^{\mu\varrho} b_{\varrho\sigma}$$

**Bemerkung:**

1. Mit den Matrizen  $(g_{\varrho\sigma})$  und ihrer Inversen  $(g^{\varrho\sigma})$  lassen sich im Tensorkalkül Indizes „herauf- und herunterziehen“.
2.  $(\gamma_{\varrho\nu\sigma}), (\gamma_{\varrho}^{\mu\sigma}), (v_{\varrho\sigma})$  sind in dem Indexpaar  $(\varrho, \sigma)$  symmetrisch.

$$(b^{\mu}_{\sigma}) = (g^{\mu\nu}) \cdot (b_{\varrho\sigma})$$

braucht nicht symmetrisch sein, obwohl Produkt symmetrischer Matrizen!

3. Bei  $n = 3$  denke man an  $N = \frac{1}{\sqrt{g}} x_1 \times x_2$

$$(g^{\varrho\sigma}) = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix}$$

$$(b^{\mu}_{\sigma}) = \begin{pmatrix} b^1_1 & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 \end{pmatrix}$$

**Fragen**

1. Welche geometrische und algebraische Bedeutung haben die Koeffizienten  $\gamma_{\varrho}^{\mu\sigma}, b_{\varrho\sigma}, b^{\mu}_{\sigma}$ ?
2. Wie ändern sie sich bei Parametertransformationen? (z.T. kompliziert, Berechnung soll vermieden werden)
3. Wie kann man die Ableitungsgleichungen parameterunabhängig formulieren?

**Idee (zu 3.)**

Statt die parameterabhängigen Vektorfelder  $x_1, \dots, x_{n-1}, N$  in Richtung von Parameterlinien (nach  $u^{\sigma}$ ) zu differenzieren, Ableiten eines beliebigen (tangentialen oder normalen) Vektorfeldes  $u \mapsto Z(u)$  in Richtung eines beliebigen Vektors  $Y \in T_u x$ . Diese Richtungsableitung

$$\boxed{d_Y Z = \sum (\partial_{\sigma} Z) Y^{\sigma}}$$

(mit  $Y = \sum Y^\sigma x_\sigma$ ) [vergleiche im  $\mathbb{R}^n$ :  $d_Y f = \langle \text{grad } f, Y \rangle = \sum \partial_\rho f \cdot Y^\rho$ ]

ist parameterunabhängig, denn aus  $x = \tilde{x} \circ \Phi$ ,  $Z = \tilde{Z} \circ \Phi$ ,  $Y = \tilde{Y} \circ \Phi$  folgt

$$d_Y Z(u) = \sum_\sigma \partial_\sigma \left( \tilde{Z}(\Phi(u)) \right) Y^\sigma(u) = \sum_{\mu, \sigma} \left( \partial_\mu \tilde{Z} \right) (\Phi(u)) \underbrace{\frac{\partial \tilde{u}^\mu}{\partial u^\sigma} Y^\sigma(u)}_{\tilde{Y}^\mu(\Phi(u))} = d_{\tilde{Y}} \tilde{Z}(\Phi(u))$$

$$\left( \text{weil } x_\rho = \sum \tilde{u}_\rho^\sigma \tilde{x}_\sigma \Leftrightarrow \tilde{Y}^\sigma = \sum \tilde{u}_\rho^\sigma Y^\rho \right)$$

### Eigenschaften des linearen Differentialoperators

$$d: (Z, Y) \mapsto d_Y Z$$

1a) Additivität in  $Z$ :

$$d_Y (Z_1 + Z_2) = d_Y Z_1 + d_Y Z_2$$

1b) Derivativität in  $Z$ :

$$d_Y (f \cdot Z) = (d_Y f) Z + f d_Y Z$$

2) Linearität in  $Y$ :

$$d_{f_1 Y_1 + f_2 Y_2} Z = f_1 d_{Y_1} Z + f_2 d_{Y_2} Z$$

Da auch die Zerlegung von  $u \mapsto d_Y Z(u)$  in Tangential- und Normalanteil parameterunabhängig ist, erhält man folgende invariante Darstellung:

Für  $Z = X$  selbst tangential gilt

$$\begin{aligned} d_Y X &= \sum \partial_\sigma \left( \sum X^\mu x_\mu \right) Y^\sigma = \sum (\partial_\sigma X^\rho) Y^\sigma x_\rho + \sum X^\rho x_{\rho\sigma} X^\sigma \\ &= \underbrace{\sum [(\partial_\sigma X^\mu + X^\rho \gamma_\rho^\mu{}_\sigma) Y^\sigma] x_\mu}_{d_Y X|_\perp} + \underbrace{\left[ \sum b_{\rho\sigma} X^\rho Y^\sigma \right]}_{\langle d_Y X, N \rangle = \langle -X, d_Y N \rangle \text{ (Bilinearform)}} N \\ &=: \nabla_Y X + \Pi(X, Y) N \end{aligned}$$

und für  $Z = N$ :

$$d_Y N = \sum (\partial_\sigma N) Y^\sigma = - \sum b^\mu{}_\sigma Y^\sigma x_\mu = -A(Y) \quad (\text{lineare Abbildung})$$

Ergebnis:

**Satz 2.1.4:**

Auf einer  $\mathcal{C}^2$ -Hyperfläche in einer Parametrisierung  $u \mapsto x(u)$  erfüllen tangentielle  $\mathcal{C}^1$ -Vektorfelder  $u \mapsto X(u)$  und das Normalenvektorfeld  $u \mapsto N(u)$  die (parameterunabhängigen) Ableitungsgleichungen

$$d_Y X = \nabla_Y X + \Pi(X, Y)N \quad (\text{Gaußsche Ableitungsgleichung})$$

$$d_Y N = -A(Y) \quad (\text{Weingartensche Ableitungsgleichung})$$

in Richtung tangentialer Vektorfelder  $u \mapsto Y(u)$ .

Dabei gilt:

- a) Durch  $(X, Y) \mapsto \nabla_Y X = d_Y X|_T$  wird ein linearer Differentialoperator definiert, der je zwei tangentialen Vektorfeldern  $X, Y$  wieder ein tangentes Vektorfeld  $\nabla_Y X$  zuordnet, genannt kovariante Ableitung von  $X$  in Richtung  $Y$ .

(Andere Bezeichnung: Durch  $\nabla$  wird ein linearer Zusammenhang (linear connection) definiert)

- b) Durch  $(X, Y) \mapsto \Pi(X, Y) = \langle d_Y X, N \rangle = -\langle X, d_Y N \rangle = -I(X, d_Y N)$  wird ein Feld symmetrischer Bilinearformen

$$\Pi_u: T_u x \times T_u x \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto \Pi_u(X, Y)$$

definiert, genannt 2. Grundform (2. Fundamentalform) der Hyperfläche

- c) Durch  $Y \mapsto A(Y) := -d_Y N$  wird ein Feld linearer Abbildungen  $A_u: T_u x \rightarrow T_u x$  definiert, genannt Weingarten-Endomorphismus (shape operator) der Hyperfläche.

**Folgerung (Interpretation von  $\gamma_\varrho^\mu{}_\sigma, b_{\varrho\sigma}, b^\mu{}_\sigma$ ):**

Bezüglich einer festen Parametrisierung  $u \mapsto x(u)$  einer  $\mathcal{C}^2$ -Hyperfläche hat man die Basisdarstellung (setze  $X = X_\varrho, Y = X_\sigma$ )

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma X_\varrho &:= \nabla_{x_\sigma} x_\varrho = \sum \gamma_\varrho^\mu{}_\sigma x_\mu \\ \Pi(x_\varrho, x_\sigma) &= b_{\varrho\sigma} \\ A(x_\sigma) &= + \sum b^\mu{}_\sigma x_\mu \end{aligned}$$

Die Christoffelsymbole  $\gamma_\varrho^\mu{}_\sigma$  sind also die Darstellungskoeffizienten der kovarianten Ableitung  $\nabla$  (auch als Zusammenhangskoeffizienten bezeichnet),

die symmetrische Matrix  $(b_{\varrho\sigma})$  ist die Darstellungsmatrix der 2. Grundform  $\Pi$  und

die (im Allgemeinen nicht symmetrische) Matrix  $(b^\mu{}_\sigma)$  die Darstellungsmatrix des Weingarten-Endomorphismus  $A$ , jeweils bezüglich der Basisfelder  $u \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})(u)$

Umgekehrt gilt (bezüglich jeder Parametrisierung):

$$\begin{aligned}\nabla_Y X &= \sum [\partial_\sigma X^\mu + X^\varrho \gamma_\varrho^\mu{}_\sigma Y^\sigma] x_\mu \\ \Pi(X, Y) &= \sum b_{\varrho\sigma} X^\varrho Y^\sigma \\ A(Y) &= \sum b^\mu{}_\sigma Y^\sigma x_\mu\end{aligned}$$

Früher übliche Bezeichnung für  $p = 2, n = 3$

$$(b_{\varrho\sigma}) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

(Für Profis:  $\nabla$  ist der von der Metrik I induzierte Levi-Civita-Zusammenhang.)

### Grundlegende Eigenschaften von $\nabla, \Pi, A$

- (1) Die kovariante Ableitung  $\nabla$  (bezüglich ihrer Koeffizienten  $\gamma_\varrho^\mu{}_\sigma$ ) ist eine innergeometrische Größe

#### Satz 2.1.5:

Die Christoffelsymbole 1. und 2. Art einer  $\mathcal{C}^2$ -(Hyper)Fläche lassen sich allein aus den Komponenten  $g_{\varrho\sigma}$  der 1. Grundform bestimmen. Und zwar gilt

$$\begin{aligned}\gamma_{\varrho\nu\sigma} &= \frac{1}{2} (\partial_\varrho g_{\nu\sigma} - \partial_\nu g_{\varrho\sigma} + \partial_\sigma g_{\varrho\nu}) \\ \gamma_\varrho^\mu{}_\sigma &= \sum g^{\mu\nu} \gamma_{\varrho\nu\sigma}\end{aligned}$$

#### Beweis (von Satz 2.1.5):

Aus

$$\begin{aligned}\partial_\varrho g_{\nu\sigma} &= \partial_\varrho \langle x_\nu, x_\sigma \rangle = \langle x_{\nu\varrho}, x_\sigma \rangle + \langle x_\nu, x_{\sigma\varrho} \rangle &= \gamma_{\nu\sigma\varrho} + \gamma_{\sigma\nu\varrho} \\ \partial_\nu g_{\varrho\sigma} &= \dots &= \gamma_{\varrho\sigma\nu} + \gamma_{\sigma\varrho\nu} \\ \partial_\sigma g_{\varrho\nu} &= \dots &= \gamma_{\nu\varrho\sigma} + \gamma_{\varrho\nu\sigma}\end{aligned}$$

und der Symmetrie  $\gamma_{\varrho\nu\sigma} = \gamma_{\sigma\nu\varrho}$  die Behauptung.

□

- (2) Die Weingarten-Matrizen  $(b^\mu{}_\sigma)$  bezüglich verschiedener Parametrisierungen sind (als Darstellungsmatrizen desselben Endomorphismus  $A$ ) ähnlich zueinander.  
(Parameterunabhängige) Invarianten sind also ihre elementarsymmetrischen Funktionen (= Koeffizienten des charakteristischen Polynoms), insbesondere Spur und Determinante.

**Definition:**

Bei einer  $\mathcal{C}^2$ -Hyperfläche im  $\mathbb{R}^n$  heißt

$$H := \frac{1}{n-1} \operatorname{tr} A = \frac{1}{n-1} \sum b_{\varrho}^{\varrho}$$

die mittlere Krümmung und

$$\kappa := \det A = \det(b_{\sigma}^{\mu})$$

die Gaußsche Krümmung

**Bemerkung:**

Aus  $(b_{\sigma}^{\mu}) = (g_{\varrho\sigma}^{\alpha\beta}) \cdot (b_{\varrho\sigma})$  folgt

$$\kappa = \frac{b}{g} = \frac{\det(b_{\varrho\sigma})}{\det(g_{\varrho\sigma})}$$

- (3) Der Weingarten-Endomorphismus  $A$  ist selbstadjungiert. Für tangentielle Vektorfelder  $X, Y$  gilt  $\langle X, Y \rangle = 0$ , also

$$\begin{aligned} d_Y [\langle X, N \rangle] &= \langle d_Y X, N \rangle + \langle X, d_Y N \rangle = \Pi(X, Y) - \langle X; A(Y) \rangle \\ &= \Pi(X, Y) - I(Y, A(Y)) = 0 \end{aligned}$$

$$(\text{in Koordinaten: } = b_{\varrho\sigma} - \sum g_{\varrho\mu} b_{\sigma}^{\mu})$$

Die Symmetrie von  $\Pi$  liefert

**Satz 2.1.6:**

Die Weingartenabbildung  $A_u: T_u x \rightarrow T_u x$  ist in jedem Punkt  $x(u)$  einer Hyperfläche selbstadjungiert bezüglich des Skalarprodukts  $I_u$  auf  $T_u x$ , d.h. es gilt überall

$$I(X, A(Y)) = I(A(X), Y)$$

Sie besitzt demnach nur reelle Eigenwerte und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

**Bemerkung:**

Obwohl  $A$  selbstadjungiert ist, sind die Darstellungsmatrizen  $(b_{\sigma}^{\mu})$  in  $A$  nicht symmetrisch.

**Bezeichnungen**

Eigenwert von  $A_u$ :

$$\kappa_1(u), \dots, \kappa_{n-1}(u) \quad \underline{\text{Hauptkrümmungen}}$$

Orthonormierte Eigenvektoren dazu:

$$Y_1(u), \dots, Y_{n-1}(u) \quad \underline{\text{Hauptkrümmungsrichtungen}}$$



## Zusammenfassung Krümmungsinvarianten aus den Weingartenabbildungen

$$Y \mapsto A(Y) = -d_Y N$$

$H = \frac{1}{n-1} \operatorname{tr} A$	Mittlere Krümmung
$\kappa = \det A$	Gaußsche Krümmung
$\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$	Hauptkrümmungen = Eigenwerte von $A$
$Y_1, \dots, Y_{n-1}$	Hauptkrümmung = Eigenvektoren von $A$ (Orthonormalbasis!)

### Folgerung:

Wegen  $A(Y_\varrho) = \kappa_\varrho Y_\varrho$  ( $\varrho = 1, \dots, n-1$ ) gilt

$$H = \frac{1}{n-1} (\kappa_1 + \dots + \kappa_{n-1}) \quad (\text{deswegen } \underline{\text{mittlere}} \text{ Krümmung})$$

$$\kappa = \kappa_1 \cdot \dots \cdot \kappa_{n-1}$$

Zur geometrischen Bedeutung: siehe Kapitel 2.3

### Vorgriff ( $n = 3$ )

Flächen mit  $H \equiv 0$  heißen Minimalflächen

Flächen mit  $\kappa \equiv 0$  heißen Torsen (= “flache Flächen”)

Formelsammlung: siehe Homepage J. König.

### Ergänzung

Oft sind tangentielle Vektorfelder nur längs einer Flächenkurve  $t \mapsto c(t) = x(u(t))$  in der Form

$$t \mapsto X(t) = \sum X^\varrho(t) x_\varrho(u(t))$$

gegeben.

### Beispiel:

$X(t) := \dot{c}(t) = \sum \dot{u}^\varrho(t) x_\varrho(u(t))$  kovariante Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{\nabla X}{dt} &:= \left. \frac{dX}{dt} \right|_T = \sum \left[ \dot{X}^\mu x_\mu(u) + X^\varrho x_{\varrho\sigma}(u) \dot{u}^\sigma \right] \\ &= \sum \left( \dot{X}^\mu + X^\varrho \gamma_\varrho^\mu{}_\sigma(u) \dot{u}^\sigma \right) x_\mu(u) \end{aligned}$$

## 2.2 Zur inneren Geometrie der Flächen im $\mathbb{R}^3$

Im Folgenden sei  $p = 2, n = 3$ ; das meiste gilt für beliebige  $p$ .

In der euklidischen Ebene sind wohldefinierte:

- die Parallelverschiebung eines Vektors  $X_0$  längs einer Kurve  $t \mapsto c(t)$ . Sie liefern ein Parallelfeld  $t \mapsto X(t)$  mit  $\frac{dX}{dt} = 0$ , d.h.  $X = X_0 = \text{const.}$
- gerade Linien, etwa mit der Kennzeichnung  $\frac{dT}{dt} \equiv 0$ , d.h.  $T = \text{const.}$

Übertragung der Begriffe auf “krumme” Flächen durch Rückprojektion der Ableitungsvektoren  $\frac{dX}{dt}$  bzw.  $\frac{dT}{dt}$  in die Tangentialebene, d.h. Benutzung der (innergeometrischen) kovarianten Ableitung  $\frac{\nabla X}{dt}$  bzw.  $\frac{\nabla T}{dt}$ .

(Vektorfelder sind nur so parallel bzw. Kurven nur so gerade, wie die Fläche es zulässt.

### 2.2.1 Geodätische Parallelverschiebung

**Definition:**

Ein tangentiales  $\mathcal{C}^1$ -Vektorfeld  $t \mapsto X(t) = \sum X^\varrho(t)x_\varrho(u(t))$  längs einer  $\mathcal{C}^1$ -Flächenkurve  $t \mapsto c(t) = x(u(t))$  heißt geodätisch parallel, wenn gilt

$$\begin{aligned} \frac{\nabla X}{dt} = \frac{dX}{dt} \Big|_T &\equiv 0, \text{ also} \\ \dot{X}^\mu + \sum X^\varrho \gamma_{\varrho\sigma}^\mu(u) \dot{u}^\sigma &= 0 \quad (\mu = 1, 2) \end{aligned} \quad (*)$$

(d.h. der innergeometrisch nur sichtbare Anteil der Ableitung verschwindet)

(\*) ist ein lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung für die Komponentenfunktionen  $t \mapsto X^\mu(t)$  ( $\mu = 1, 2$ ), das unter Anfangsbedingungen  $X^\mu(t_0) = X_0^\mu$  ( $\mu = 1, 2$ ) eindeutig gelöst werden kann.<sup>5</sup>

**Folgerung:**

Ein Tangentialvektor auf einer  $\mathcal{C}^2$ -Fläche lässt sich längs jeder  $\mathcal{C}^1$ -Flächenkurve eindeutig geodätisch parallelverschieben. Bei Parallelverschiebung bleiben metrische Größen erhalten:

**Satz 2.2.1:**

Sind  $t \mapsto X(t) = \sum X^\varrho(t)x_\varrho(u(t))$ ,  $Y(t) = \sum X^\sigma(t)x_\sigma(u(t))$  geodätisch parallele  $\mathcal{C}^1$ -Vektorfelder längs derselben  $\mathcal{C}^1$ -Flächenkurve  $t \mapsto c(t) = x(u(t))$ , so gilt

$$t \mapsto I_{u(t)}(X(t), Y(t)) = \sum g_{\varrho\sigma}(u(t)) X^\varrho(t) Y^\sigma(t) = \text{const.}$$

d.h. Längen, Winkel, Flächeninhalt bleiben erhalten.

Der Satz kann “innergeometrisch” bewiesen werden.

kürzer: “außergeometrisch”

**Beweis (von Satz 2.2.1):**

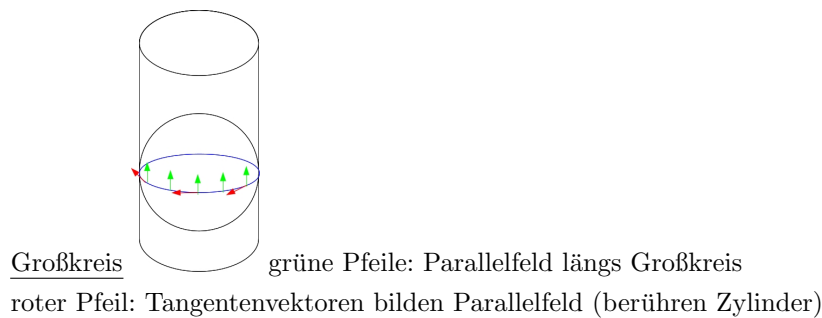
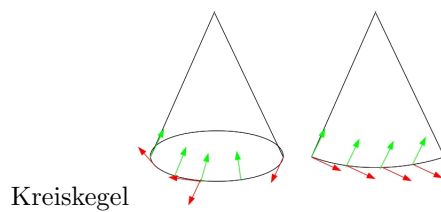
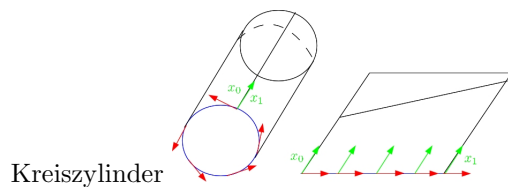
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (I_{u(t)}(X(t), Y(t))) &= \frac{d}{dt} \langle X(t), Y(t) \rangle = \left\langle \frac{dX}{dt}(t), Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{dY}{dt}(t) \right\rangle \\ &= \left\langle \underbrace{\frac{\nabla X}{dt}(t)}_{=0}, Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \underbrace{\frac{\nabla Y}{dt}(t)}_{=0} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

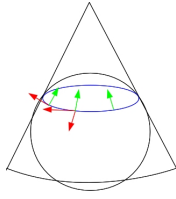
□

**Beispiel (für geodätische Parallelfelder (ohne Rechnung!)):**

Benutzte Eigenschaften:

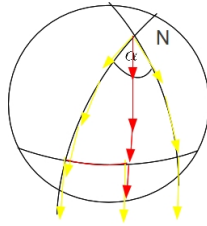
1. In der Ebene gilt “parallel” = “geodätisch parallel”
2. Berühren sich zwei Flächen längs einer Flächenkurve, so ist der geodätische Parallelismus bezüglich dieser Kurven für beide Flächen derselbe (denn es wird in die gleiche Tangential-ebene projiziert)





Kleinkreis grüner Pfeil: Parallelfeld längs Kleinkreis  
 roter Pfeil: Tangentenvektoren bilden kein Parallelfeld

Geodätische Parallelverschiebung ist im Allgemeinen nicht wegunabhängig.



## 2.2.2 Geodätische Linien

### Definition:

Eine Geodätische (Autoparallele, “Geodäte”) auf einer  $\mathcal{C}^2$ -Fläche ist eine  $\mathcal{C}^2$ -Flächenkurve mit geodätisch parallelem Tangenteneinheitsfeld, d.h. mit

$$\boxed{\frac{\nabla T}{dt} \equiv 0}$$

### Beispiel:

1. Schraubenlinien auf Kreiszylindern ( $\hat{=}$  Geraden in der Abwickelebene)
2. Großkreise auf Kugeln, aber nicht andere Kreise.

Aus  $\dot{c} = wT$  (mit  $w = |\dot{c}|$ ) folgt

$$\frac{\nabla \dot{c}}{dt} = w \cdot \frac{\nabla T}{dt} + \dot{w}T$$

und wegen

$$I\left(T, \frac{\nabla T}{dt}\right) = \left\langle T, \frac{dT}{dt} \right\rangle = 0$$

gilt

$$\frac{\nabla \dot{c}}{dt} \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{\nabla T}{dt} = 0 \wedge \dot{w} = 0$$

$\Leftrightarrow c$  ist Geodätische, proportional zur Bogenlänge parametrisiert

Für Flächenkurven in BLP  $s \mapsto c(s)$  gilt natürlich:

$$c \text{ Geodätische} \Leftrightarrow \frac{\nabla c'}{ds} \equiv 0$$

**Folgerung:**

Geodätische in  $\mathcal{C}^2$ -BLP  $s \mapsto c(s)$ , d.h. mit

$$|c'|^2 = \sum g_{\varrho\sigma}(u) u'^\varrho u'^\sigma \equiv 1$$

sind (in der Parameterebene) gekennzeichnet durch

$$(*) \quad u''^\mu + \sum_{\varrho, \sigma} \gamma_{\varrho\sigma}^\mu(u) u'^\varrho u'^\sigma \equiv 0 \quad (\mu = 1, 2)$$

(Differentialgleichungssystem für  $s \mapsto u^1(s), u^2(s)$ )

**Beweis (der Folgerung):**

$$\begin{aligned} \frac{\nabla c'}{ds} &= \frac{\nabla}{ds} \left( \sum u'^\varrho x_\varrho(u) \right) = \sum u''^\mu x_\mu(u) + \sum u'^\varrho \nabla_\sigma x_\varrho(u) u'^\sigma \\ &= \sum (u''^\mu + \gamma_{\varrho\sigma}^\mu(u) u'^\varrho u'^\sigma) x_\mu(u) \equiv 0 \Leftrightarrow (*) \end{aligned}$$

□

Zur Existenz von Geodätischen:

**Satz 2.2.2:**

Auf einer  $\mathcal{C}^3$ -Fläche verläuft durch jeden Flächenpunkt in jede Tangentialrichtung genau eine Geodätische.

**Beweis (von Satz 2.2.2):**

(\*) bildet ein im Allgemeinen nichtlineares autonomes Differentialgleichungssystem 2. Ordnung für die Funktionen  $s \mapsto u^1(s), u^2(s)$  (transformierbar in ein System 1. Ordnung). Es besitzt etwa für  $\mathcal{C}^3$ -Flächen (mit  $\mathcal{C}^1$ -Christoffelsymbolen  $\Rightarrow$  lokale Lipschitzbeschränktheit) zu vorgegebenen Anfangsbedingungen  $u^\mu(0) = u_0^\mu, u'^\mu(0) = X_0^\mu$  ( $\mu = 1, 2$ ) genau eine auf einem maximalen Intervall um  $s = 0$  definierte Lösung  $s \in I \mapsto u(s) = (u^1(s), u^2(s)) \in G \subset \mathbb{R}^2$ . Also existiert genau eine Geodätische  $s \in I \mapsto c(s) = x(U(s)) \in M \subset \mathbb{R}^3$  mit  $c(0) = x(u_0) = x_0$  und  $c'(0) = \sum X_0^\mu x_\mu(u_0) = X_0 \in T_{u_0}x$  (wenn  $|X_0| = 1$ )

□

**Bemerkung:**

Die maximal fortgesetzte Lösung  $s \in I \mapsto u(s) \in G \subset \mathbb{R}^2$  braucht nur auf einem endlichen Intervall

$I = ]s_-; s_+[$  definiert zu sein. Die zugehörige Geodätische besitzt dann endliche Länge. Flächen, auf denen jede Geodätische  $\infty$ -lang ist ( $I = \mathbb{R}$ ) heißen geodätisch vollständig.

Geodätische sind nach Definition “möglichst gerade”. Sind sie auch “möglichst kurz”?

**Satz 2.2.3:**

Auf einer  $\mathcal{C}^2$ -Fläche ist eine kürzeste Verbindungskurve zwischen zwei festen Flächenpunkten notwendig eine Geodätische.

$$\text{“möglichst kurz”} \Rightarrow \text{“möglichst gerade”}$$

**Beweis (von Satz 2.2.3):**

Gegeben:  $\mathcal{C}^2$ -Flächenkurve  $st \mapsto c(t) = x(u(t))$  mit  $\begin{cases} c(a) = x(u_a) = x_a \\ c(b) = x(u_b) = x_b \end{cases}$ .

Wir konstruieren  $\mathcal{C}^2$ -Vergleichsflächenkurven  $t \mapsto {}^\varepsilon c(t)$  ( $\varepsilon \in U(0)$ ) mit

$$\forall \varepsilon \quad {}^\varepsilon c(a) = x_a, \quad {}^\varepsilon c(b) = x_b, \quad {}^\varepsilon c|_{\varepsilon=0} = c$$

und untersuchen ihre Längen  $L_a^b({}^\varepsilon c)$ .

Ansatz:  ${}^\varepsilon c(t) = x({}^\varepsilon u(t)) = x(u(t) + \varepsilon v(t))$  mit einer  $\mathcal{C}^2$ -Abbildung  $t \in [a, b] \mapsto v(t) \in \mathbb{R}^2$ , wobei  $v(a) = v(b) = 0$  (diese sind regulär für genügend kleine  $\varepsilon$ , d.h.  $|{}^\varepsilon \dot{c}(t)| > 0$ ).

Die Kurven definieren ein  $\mathcal{C}^1$ -Variationsvektorfeld

$$t \in [a, b] \mapsto V(t) := \frac{\partial}{\partial \varepsilon} ({}^\varepsilon c(t)) \Big|_{\varepsilon=0} = \sum v^e(t) x_e(u(t)) \in T_{u(t)} x$$

mit  $V(a) = V(b) = 0$ .

Falls  $c$  kürzeste Verbindung zwischen  $x_a$  und  $x_b$ , muss gelten

$$\boxed{\frac{d}{d\varepsilon} L_a^b({}^\varepsilon c) \Big|_{\varepsilon=0} = 0}$$

(und zwar für alle Abbildungen  $t \mapsto v(t)$ ) Berechnung:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} L_a^b(\varepsilon c)|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \int_a^b |\varepsilon \dot{c}(t)| dt \right]_{\varepsilon=0} \\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \underbrace{|\varepsilon \dot{c}(t)|}_{>0} dt \bigg|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \frac{1}{|\varepsilon c(t)|} \left\langle \varepsilon c(t), \underbrace{\frac{\partial \varepsilon \dot{c}(t)}{\partial \varepsilon}}_{\partial_\varepsilon \partial_t \varepsilon c(t)} \right\rangle dt \bigg|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_a^b \frac{1}{|\dot{c}(t)|} \left\langle \dot{c}(t), \dot{V}(t) \right\rangle dt \\
&= \int_a^b \left\langle T(t), \dot{V}(t) \right\rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \langle T(t), V(t) \rangle dt - \int_a^b \left\langle \dot{T}(t), V(t) \right\rangle dt \\
&= \langle T(t), V(t) \rangle_a^b - \int_a^b \left\langle \frac{\nabla T}{dt}(t), V(t) \right\rangle dt \\
&= - \int_a^b I_{u(t)} \left( \frac{\nabla T}{dt}(t), V(t) \right) dt = - \int_a^b \sum g_{\varrho\sigma}(u(t)) \frac{\nabla T^\varrho}{dt}(t) v^\sigma(t) dt
\end{aligned}$$

(1. Variation der Länge einer Flächenkurve)

Dies ist (nach dem sog. Fundamentallemma der Variationsrechnung) nur möglich, wenn  $\forall_\varrho \frac{\nabla T^\varrho}{dt}(t) = 0$  auf  $[a, b]$ , also  $\frac{\nabla T}{dt} \equiv 0$  ist, sonst kann man Gegenbeispiele konstruieren.

Annahme:

$$\frac{\nabla T^\mu}{dt}(t_0) > 0 \text{ für ein } t_0 \in ]a, b[ \text{ und ein festes } \mu = 1, 2$$

also wegen der Stetigkeit:

$$\frac{\nabla T^\mu}{dt}(t) > 0 \text{ in } U(t_0) \subset ]a, b[$$

Wir rechnen mit

$$w_\varrho(t) := \sum g_{\varrho\sigma}(u(t)) v^\sigma(t)$$

umgekehrt ist dann

$$V^\sigma(t) = \sum g^{\varrho\sigma}(u(t)) w_\varrho(t)$$

Wähle  $w_\varrho \equiv 0$  und  $w_\mu > 0$  so, dass

$$W_\mu(t) \begin{cases} > 0 & \text{für } t \in U(t_0) \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_a^b \sum g_{\varrho\sigma}(u(t)) \frac{\nabla T^\varrho}{dt}(t) V^\sigma(t) dt = \int_{U(t_0)} \underbrace{\frac{\nabla T^\mu}{dt}(t) \cdot w_\mu(t)}_{>0} dt > 0 \quad \text{Widerspruch}$$

□

**Bemerkung:**

1. Die Umkehrung (Anm. d. Redaktion: von Satz 2.2.3) ist im Allgemeinen nicht richtig.

**Beispiel:**

Großkreise auf Kugeln

Aber: Jeder Flächenpunkt besitzt eine Umgebung, in der auch die Umkehrung gilt. (ohne Beweis!)

2. Geodätische sind auch Kurven minimaler Krümmung  $\kappa$ .
3. Auf Rotationsflächen lässt sich das Differentialgleichungssystem für Geodätische explizit lösen. (Clairaut-Gleichungen) [siehe Übung]
4. Geodätische können auch “experimentell” bestimmt werden.  
“Aufwickeln” eines Papierstreifens auf eine Fläche ( $\hat{=}$  Berührung). Mittellinie (= Geodätische auf dem Streifen) ist dann auch Geodätische auf der Fläche.

## 2.2.3 Abbildungen von Flächen, Kartographie

**Definition:**

$x: G \rightarrow M, \bar{x}: G \rightarrow \bar{M}$  seien *injektive* Parametrisierungen zweier  $\mathcal{C}^1$ -Flächen. Dann heißt die durch  $\Psi = \bar{x} \circ x^{-1}: M \rightarrow \bar{M}$  definierte *Flächenabbildung*

- a) *längentreu*, wenn zugeordnete Kurvenstücke stets gleiche Länge besitzen,
- b) *winkeltreu* (konform), wenn zugeordnete Kurvenstückpaare in zugeordneten Schnittpunkten stets gleiche Winkel einschließen,
- c) *flächentreu* (arealtreu), wenn zugeordnete Flächenstücke stets den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Diese Eigenschaften kann man an den 1. Grundformen  $(g_{\rho\sigma})$  und  $(\bar{g}_{\rho\sigma})$  erkennen:

**Satz 2.2.4:**

Für eine Abbildung  $\Psi = \bar{x} \circ x^{-1}: M \rightarrow \bar{M}$  zwischen injektiven  $\mathcal{C}^1$ -Flächen in Parametrisierungen  $x: G \rightarrow M, \bar{x}: G \rightarrow \bar{M}$  gilt

- a)  $\Psi$  *längentreu*  $\Leftrightarrow \forall_{u \in G} (g_{\rho\sigma})(u) = (\bar{g}_{\rho\sigma})(u) \Leftrightarrow \Psi$  Isometrie



b)  $\Psi$  winkeltreu  $\Leftrightarrow \forall u \in G (g_{\varrho\sigma})(u) = \lambda(u) \cdot (\bar{g}_{\varrho\sigma})(u)$  mit einer  $\mathcal{C}^0$ -Funktion  $\lambda > 0$

c)  $\Psi$  flächentreu  $\Leftrightarrow \forall u \in G \det(g_{\varrho\sigma})(u) = \det(\bar{g}_{\varrho\sigma})(u)$

**Beweis (von Satz 2.2.4):**

a)

$$\int_a^b \sqrt{\sum g_{\varrho\sigma}(u(t)) \dot{u}^\varrho(t) \dot{u}^\sigma(t)} dt = \int_a^b \sqrt{\sum \bar{g}_{\varrho\sigma}(u(t)) \dot{u}^\varrho(t) \dot{u}^\sigma(t)} dt$$

für alle Kurven  $t \mapsto u(t)$  in dem Parametergebiet  $G \Rightarrow \forall u \in G (g_{\varrho\sigma})(u) = (\bar{g}_{\varrho\sigma})(u)$ , sonst ließen sich Gegenbeispiele konstruieren.

c)

$$\int_B \sqrt{g(u)} du = \int_B \sqrt{\bar{g}(u)} du$$

für alle Bereiche  $B$  in  $G$

$$\Leftrightarrow \forall u \in G \sqrt{g(u)} = \sqrt{\bar{g}(u)}$$

b) Für den Winkel  $\delta$  zwischen zwei Flächenkurven  $t \mapsto c_1(t) = x(u_1(t))$ ,  $t \mapsto c_2(t) = x(u_2(t))$  gilt zunächst

$$\cos \delta = \frac{\langle \dot{c}_1, \dot{c}_2 \rangle}{|\dot{c}_1| |\dot{c}_2|}$$

$$\text{also } \sin \delta = \pm \frac{\sqrt{|\dot{c}_1|^2 |\dot{c}_2|^2 - \langle \dot{c}_1, \dot{c}_2 \rangle^2}}{|\dot{c}_1| |\dot{c}_2|} = \pm \frac{|\dot{c}_1 \times \dot{c}_2|}{|\dot{c}_1| |\dot{c}_2|}$$

und folglich

$$\cot \delta = \pm \frac{\langle \dot{c}_1, \dot{c}_2 \rangle}{|\dot{c}_1 \times \dot{c}_2|} = \pm \frac{\sum g_{\varrho\sigma}(u) \dot{u}_1^\varrho \dot{u}_2^\sigma}{\det(\dot{u}_1^\varrho, \dot{u}_2^\sigma) \sqrt{g(u)}}$$

Bei einer winkeltreuen Flächenabbildung ist also

$$\frac{\sum g_{\varrho\sigma}(u) \dot{u}_1^\varrho \dot{u}_2^\sigma}{\sqrt{g(u)}} = \frac{\sum \bar{g}_{\varrho\sigma}(u) \dot{u}_1^\varrho \dot{u}_2^\sigma}{\sqrt{\bar{g}(u)}}$$

für alle Kurven  $t \mapsto u_1(t)$ ,  $t \mapsto u_2(t)$  im Parametergebiet  $G$

$$\Rightarrow \forall u \in G \left( \frac{g_{\varrho\sigma}}{\sqrt{g}} \right)(u) = \left( \frac{\bar{g}_{\varrho\sigma}}{\sqrt{\bar{g}}} \right)(u) \Rightarrow \forall u \in G (g_{\varrho\sigma})(u) = \lambda(u) \cdot (\bar{g}_{\varrho\sigma})(u)$$

mit einer Funktion  $u \mapsto \lambda(u) > 0$ . Diese Bedingung ist auch hinreichend für Winkeltreue.

□

**Folgerung:**

$\Psi$  längentreu  $\Leftrightarrow \Psi$  winkeltreu und  $\Psi$  flächentreu.

Anwendung: Es gibt keine Karte der Erdkugel, die gleichzeitig winkel- und flächentreu ist!

**Beispiel (für Abbildungen eines Kugelstücks):**

$$(u, v) \mapsto x(u, v) = r \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (g_{\varrho\sigma}(u, v)) = r^2 \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in die Ebene:

- a) *Winkeltreue Abbildung* durch *stereographische Projektion* vom Nordpol  $N = (0, 0, r)^T$  auf die Äquatorebene  $x^3 = 0$ .

Der Ansatz  $N + \lambda(x(u, v) - N) = (\bar{x}^1(u, v), \bar{x}^2(u, v), 0)^T$  liefert  $r + \lambda r(\sin v - 1) = 0$ , also  $\lambda = \frac{1}{1 - \sin v}$ .

Ergebnis:

$$\bar{x}(u, v) = \frac{r \cos v}{1 - \sin v} \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit}$$

$$(\bar{g}_{\varrho\sigma}(u, v)) = \frac{r^2}{(1 - \sin v)^2} \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1 - \sin v)^2} (g_{\varrho\sigma}(u, v))$$

- b) *Flächentreue Abbildung* durch den *Kartenentwurf von Archimedes/Lambert*.

Prinzip: Projektion eines Kugelpunktes auf einen am Äquator berührenden Kreiszylinder und Abwicklung dieses Zylinders in die Ebene.

Der Ansatz  $\bar{x} = x_0 + \lambda(x - x_0)$  mit  $x_0 = r(0, 0, \sin v)^T$  liefert

$$\lambda = \frac{|\bar{x} - x_0|}{|x - x_0|} = \frac{r}{|x - x_0|} = \frac{1}{\cos v}$$

Ergebnis:

$$\bar{x}(u, v) = r \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ \sin v \end{pmatrix} \quad (\text{auf dem Zylinder}) \text{ bzw.}$$

$$\bar{\bar{x}}(u, v) = r \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ \sin v \end{pmatrix} \quad (\text{in der Ebene}) \text{ mit}$$

$$(\bar{g}_{\rho\sigma}(u, v)) = (\bar{\bar{g}}_{\rho\sigma}(u, v)) = r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 v \end{pmatrix}, \text{ also } \bar{g}(u, v) = \bar{\bar{g}}(u, v) = g(u, v)$$

## 2.3 Krümmungstheorie der Flächen im $\mathbb{R}^3$

(Einiges ist problemlos auf Hyperflächen im  $\mathbb{R}^n$  zu verallgemeinern)

### 2.3.1 Erste geometrische Bedeutungen der Krümmungsgrößen

Bei  $p = 2, n = 3$  vereinfacht sich doch einiges:

Für die beiden Hauptkrümmungen  $\kappa_1(u), \kappa_2(u)$  in einem Punkt  $x(u)$  [= Eigenwerte von  $A$ ] gibt es nur zwei Möglichkeiten

1.  $\kappa_1(u) \neq \kappa_2(u) \Rightarrow Y_1(u) \perp Y_2(u)$  für die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen (= Eigenvektoren von  $A$ ) ohne Einschränkung

$$|Y_1(u)| = |Y_2(u)|, \det(Y_1(u), Y_2(u), N(u)) = 1$$

**gut!**

2.  $\kappa_1(u) = \kappa_2(u) \Rightarrow$  Jede Tangentialrichtung ist Hauptkrümmungsrichtungen (der Eigenraum von  $\lambda(u) := \kappa_1(u) = \kappa_2(u)$  ist ganz  $T_u x$ )

$$\Rightarrow \forall_Y A_u(Y) = \lambda(u) \cdot Y \text{ bzw. } (b^\mu_\sigma(u) = \lambda(u)(\delta^\mu_\sigma))$$

Eine Orthonormalbasis  $(Y_1(u), Y_2(u))$  kann willkürlich gewählt werden.

**schlecht!**

Bezeichnungen für solche Ausnahmepunkte mit 2):

**Definition:**

Auf einer  $\mathcal{C}^2$ -Fläche im  $\mathbb{R}^3$  heißen Flächenpunkte  $x(u)$

- a)  $\underline{\kappa_1(u) = \kappa_2(u) = \lambda(u)} \in \mathbb{R}$  Nabelpunkte [umbilics] mit der Kennzeichnung

$$A_u = \lambda(u) \text{ Id } |_{T_u x} \text{ bzw. } \Pi_u = \lambda(u) \cdot \text{I}_u$$

(“symmetrisches Krümmungsverhalten”)

- b)  $\underline{\kappa_1(u) = \kappa_2(u) = 0}$  Flachpunkte mit der Kennzeichnung

$$A_u = 0 \text{ bzw. } \Pi_u = 0$$

(“keine Krümmung”)

Test für die Interpretation

**Satz 2.3.1:**

Eine  $\mathcal{C}^3$ -Fläche, die nur Nabelpunkte enthält, ist entweder Stück einer Kugelfläche mit Gaußscher Krümmung  $K = \frac{1}{R^2} > 0$ , wenn  $R$  der Kugelradius ist, oder ein Ebenenstück mit Gaußscher Krümmung  $K \equiv 0$ . Im zweiten Fall besitzt sie nur Flachpunkte.

**Beweis (von Satz 2.3.1):**

$$\forall_u A_u = \lambda(u) \text{ Id} \Rightarrow \forall_u \partial_\varrho N(u) = -\lambda(u) \cdot x_\varrho(u) \quad \text{oder kurz}$$

$$(*) \quad N_\varrho = -\lambda x_\varrho \quad (\varrho = 1, 2)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} N_{\varrho\sigma} &= -\lambda_\sigma x_\varrho - \lambda x_{\varrho\sigma} \quad , \text{ insbesondere} \\ N_{12} - N_{21} &= -\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 - \underbrace{\lambda(x_{12} - x_{21})}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Dies zeigt:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , d.h.

$$\lambda = \text{const.}$$

1. Fall:  $\lambda \neq 0$  (nur echte Nabelpunkte). Dann liefert (\*)

$$\begin{aligned} N &= -\lambda(x - x_0) \quad , \text{ also} \\ |x - x_0| &= \frac{1}{|\lambda|} = \text{const.} > 0 \end{aligned}$$

Die Fläche liegt auf einer Kugel mit Radius

$$R = \frac{1}{|\lambda|} = \frac{1}{\sqrt{K}} \text{ bzw. } K = \frac{1}{R^2} > 0$$

Fall:  $\lambda = 0$  (nur Flachpunkte). Dann liefert (\*)

$$N = \text{const.}$$

Die Fläche ist eine Ebene mit

$$K = \lambda^2 = 0$$

□

**Folgerung:**

Kugel und Ebene sind nicht isometrisch, da  $K$  innergeometrisch.

**Definition:**

Die 3. Grundform (Fundamentalform) einer  $\mathcal{C}^2$ -Fläche sei das Feld von symmetrischen, positiv semidefiniten Bilinearformen

$$\text{III}_u: T_u x \times T_u x \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto \underline{\text{III}_u(X, Y) = \text{I}_u(A_u(X), A_u(Y))}$$

mit den Darstellungsmatrizen

$$(c_{\varrho\sigma}(u)) = (\text{III}_u(x_\varrho(u), x_\sigma(u))) = \left( \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} b^\mu_\varrho b^\nu_\sigma \right)$$

Geometrische Bedeutung:

$$\begin{aligned} \text{III}(X, Y) &= \langle d_Y N, d_Y N \rangle \Rightarrow c_{\varrho\sigma} = \langle N_\varrho, N_\sigma \rangle \\ &\quad (\text{vergleiche } g_{\varrho\sigma} = \langle x_\varrho, x_\sigma \rangle) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

Die 3. Grundform einer Fläche  $u \mapsto x(u)$  ist die 1. Grundform ihres Normalenfeldes  $u \mapsto 0 + N(u)$

**Satz 2.3.2:**

Zwischen den Grundformen einer Fläche besteht die Identität

$$\begin{aligned} \text{III} - 2H \cdot \text{II} + K \cdot \text{I} &= 0 \\ \text{bzw. } c_{\varrho\sigma} - 2H b_{\varrho\sigma} + K g_{\varrho\sigma} &= 0 \end{aligned}$$

**Beweis (von Satz 2.3.2):**

Der Endomorphismus  $A$  annulliert nach dem Satz von Cayley-Hamilton sein eigenes charakteristisches Polynom

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= t^2 - \text{tr } A \cdot t + \det A = t^2 - 2H \cdot t + K, \text{ d.h. es gilt} \\ A^2 - 2H \cdot A + K \cdot \text{Id} &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\text{III}(X, Y) &= \text{I}(A(X), A(Y)) \stackrel{A \text{ selbstadjungiert}}{=} \text{I}(X, A^2(Y)) = \text{I}(X, 2H \cdot A(Y)) - K \cdot \text{I}(X, Y) \\ &= 2H \cdot \text{II}(X, Y) - K \cdot \text{I}(X, Y)\end{aligned}$$

□

### 2.3.2 Approximativer Flächenverlauf, Klassifikation der Flächenpunkte

Gegeben:  $\mathcal{C}^2$ -Fläche in Parameterdarstellung  $u \mapsto x(u)$ ,  $\overset{\circ}{x} = x(\overset{\circ}{u})$

Gesucht: Eulersche Parametrisierung,  $\bar{u} = \bar{x}(\bar{u}) = \overset{\circ}{x} + \bar{u}^1 e_1 + \bar{u}^2 e_2 + F(\bar{u}^1, \bar{u}^2) e_3$  in der Umgebung von  $\overset{\circ}{x}$  (“ $z = F(x, y)$ ”)

Konstruktion: Wähle eine Orthonormalbasis  $(e_1, e_2)$  in  $T_{\overset{\circ}{u}} x$ , so dass mit  $e_3 := N\left(\overset{\circ}{u}\right)\left(\overset{\circ}{x}; e_1, e_2, e_3\right)$  ein kartesisches Koordinatensystem bildet (z.B. Hauptkrümmungsrichtung  $e_\varrho := Y_\varrho(\varrho = 1, 2)$ )

Darstellung der Fläche in diesem Koordinatensystem

$$u \mapsto x(u) = x_0 + x^1(u) e_1 + x^2(u) e_2 + x^3(u) e_3$$

mit

$$(a) \quad x^i\left(\overset{\circ}{u}\right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$(b) \quad x_\varrho^3\left(\overset{\circ}{u}\right) = 0, \text{ denn } x_\varrho\left(\overset{\circ}{u}\right) = \sum_{i=1}^3 x_\varrho^i\left(\overset{\circ}{u}\right) e_i \in \langle\langle e_1, e_2 \rangle\rangle = T_{\overset{\circ}{u}} x$$

Mit (b) folgt weiter

$$\begin{aligned}x_1 \times x_2\left(\overset{\circ}{u}\right) &= 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix} \left(\overset{\circ}{u}\right) \cdot e_3 = \underbrace{\lambda}_{>0} N\left(\overset{\circ}{u}\right), \text{ also} \\ \det \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{pmatrix} \left(\overset{\circ}{u}\right) &> 0 \text{ und damit in einer Umgebung von } \overset{\circ}{u}\end{aligned}$$

Durch  $u \mapsto \Phi(u) := (x^1(u), x^2(u)) = (\bar{u}^1(u), \bar{u}^2(u))$  wird also eine in der Umgebung von  $\overset{\circ}{u}$  zulässige Parametertransformation definiert (mit  $\Phi\left(\overset{\circ}{u}\right) = 0$  nach (a)) [lokaler Umkehrsatz]

Neue Darstellung der Fläche in einer Umgebung von  $\bar{u} = 0$

$$\bar{u} \mapsto \bar{x}(\bar{u}) = x \circ \Phi^{-1}(\bar{u}) = x_0 + \bar{u}^1 e_1 + \bar{u}^2 e_2 + \underbrace{x^3(\Phi^{-1}(\bar{u}))}_{F(\bar{u})} e_3$$

mit

$$F(0) = x^3(\underbrace{\Phi^{-1}(0)}_{\overset{\circ}{u}}) = 0 \text{ (nach (a)), und}$$

$$\partial_\varrho F(0) = \sum \underbrace{\partial_\sigma x^3(\overset{\circ}{u})}_{=0} \frac{\partial u^\sigma}{\partial u^\varrho}(0) = 0$$

**Hilfssatz:**

Jede  $\mathcal{C}^2$ -Fläche im  $\mathbb{R}^3$  besitzt lokal um jeden Punkt  $\overset{\circ}{x}$  eine Eulersche Parametrisierung

$$u \mapsto x(u) = \overset{\circ}{x} + u^1 e_1 + u^2 e_2 + (u^1, u^2) e_3$$

bezüglich eines geeigneten Koordinatensystems mit

$$F(0) = \partial_1 F(0) = \partial_2 F(0) = 0$$

Eigenschaften:

$$x(0) = \overset{\circ}{x}$$

$$x_\varrho(0) = e_\varrho \quad (\varrho = 1, 2)$$

$$N(0) = e_3$$

$$x_{\varrho\sigma}(0) = F_{\varrho\sigma}(0) e_3$$

Daraus ergeben sich

$$(g_{\varrho\sigma}(0)) = (\delta_{\varrho\sigma} \gamma_\varrho^\mu{}_\sigma(0)) = 0$$

$$(b_{\varrho\sigma}(0)) = (b^\mu{}_\sigma(0)) = (F_{\varrho\sigma}(0))$$

[ = HESSE-Matrix von  $F$  in  $u = 0$  ]

Die Taylorentwicklung dieser Parametrisierung um  $u = 0$  ist

$$x(u) = x(0) + \sum_{\varrho=1}^2 x_\varrho(0) u^\varrho + \frac{1}{2} \sum x_{\varrho\sigma}(u) u^\varrho u^\sigma + R(u)$$

wobei  $\frac{R(u)}{|u|^2} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$ . Einsetzen obiger Eigenschaften liefert

**Satz 2.3.3:**

Eine  $\mathcal{C}^2$ -Fläche im  $\mathbb{R}^3$  in der Eulerschen Parametrisierung des Hilfssatzes besitzt um  $u = 0$  die Taylorentwicklung

$$u \mapsto x(u) = \overset{\circ}{x} + \sum_{i=1}^2 u^i e_i + \frac{1}{2} \sum b_{\varrho\sigma}(0) u^\varrho u^\sigma + o(|u|^2)$$

Die in 2. Ordnung appproximierte Fläche

$$u \mapsto \tilde{x}(0) = \overset{\circ}{x} + \sum_{i=1}^2 u^{\varrho} e_{\varrho} + \frac{1}{2} \sum b_{\varrho\sigma}(0) u^{\varrho} u^{\sigma} e_3$$

ist eine (möglicherweise entartete) parabolische Quadrik, genannt Schmiegeparaboloid (oskulieren-  
des Paraboloid) der Fläche in  $u = 0$ .

$$\left[ \text{in Koordinaten: } 2x^3 = \sum_{\varrho, \sigma=1}^2 b_{\varrho\sigma}(0) x^{\varrho} x^{\sigma} \right]$$

### Diskussion des Schmiegparaboloids

Aus

$$\tilde{x}(u^1, u^2) = \overset{\circ}{x} + \underbrace{\sum u^{\varrho} x_{\varrho}(0)}_{=Y \in T_0 x} + \frac{1}{2} \sum \overset{\circ}{\Pi} (x_{\varrho}(0), x_{\sigma}(0)) u^{\varrho} u^{\sigma} \cdot \overset{\circ}{N}$$

folgt die Darstellung

$$\tilde{x}(Y) = \overset{\circ}{x} + Y + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\Pi} (Y, Y) \cdot \overset{\circ}{N} \quad \text{mit } Y \in T_0 x$$

(Parameterebene = Tangentialebene in  $u = 0$ )

Die Zerlegung  $Y = s \cdot \overset{\circ}{Y}_1 + t \cdot \overset{\circ}{Y}_2$  bezüglich orthonormierter Hauptkrümmungsrichtung ( $\hat{=}$  Wahl von  $e_{\varrho} := \overset{\circ}{Y}_{\varrho}$  bei der Konstruktion der Eulerschen Parametrisierung) liefert wegen  $\overset{\circ}{A} \left( \overset{\circ}{Y}_{\varrho} \right) = \overset{\circ}{\kappa}_{\varrho} \cdot \overset{\circ}{Y}_{\varrho}$ , also  $\overset{\circ}{A} (Y) = s \overset{\circ}{\kappa}_1 \overset{\circ}{Y}_1 + t \overset{\circ}{\kappa}_2 \overset{\circ}{Y}_2$  und damit

$$\overset{\circ}{\Pi} (Y, Y) = \overset{\circ}{I} (Y, \overset{\circ}{A} (Y)) = \overset{\circ}{\kappa}_1 s^2 + \overset{\circ}{\kappa}_2 t^2$$

### Folgerung:

Wählt man in der Tangentialebene  $T_0 x$  Hauptkrümmungsrichtungen  $\overset{\circ}{Y}_1, \overset{\circ}{Y}_2$  also (orthonormierte) Basisvektoren, lässt sich das Schmiegparaboloid schreiben in der Form

$$(s, t) \mapsto \tilde{x}(s, t) = \overset{\circ}{x} + s \overset{\circ}{Y}_1 + t \overset{\circ}{Y}_2 + \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{\kappa}_1 s^2 + \overset{\circ}{\kappa}_2 t^2 \right) \overset{\circ}{N}$$

mit den Hauptkrümmungen  $\overset{\circ}{\kappa}_1, \overset{\circ}{\kappa}_2$  in  $\overset{\circ}{x} = x(0)$

(Hauptachsentransformation des Schmiegparaboloids)

$$\left[ \text{“} z = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{\kappa}_1 x^2 + \overset{\circ}{\kappa}_2 y^2 \right) \text{”} \right]$$

Daraus ist abzulesen:

### Satz 2.3.4 (Klassifikation der Flächenpunkte):

Eine  $\mathcal{C}^2$ -Fläche im  $\mathbb{R}^3$  verhält sich in 2. Näherung in der Umgebung eines Punktes mit



- (a)  $\underline{K = \kappa_1 \kappa_2 > 0}$  (elliptischer Punkt)  
wie ein elliptisches Paraboloid
- (b1)  $\underline{K = \kappa_1 \kappa_2 = 0}$  aber nicht  $\underline{\kappa_1 = \kappa_2 = 0}$  (parabolischer Punkt)  
wie ein parabolischer Zylinder
- (b2)  $\underline{K = \kappa_1 = \kappa_2 = 0}$  (Flachpunkt) wie eine Ebene
- (c)  $\underline{K = \kappa_1 \kappa_2 < 0}$  (hyperbolischer Punkt) wie ein hyperbolisches Paraboloid (“Sattelfläche”)

**Bemerkung:**

Echte Nabelpunkte ( $\kappa_1 = \kappa_2 \neq 0$ ) sind stets elliptisch ( $K > 0$ ) mit rotationssymmetrischem Querschnitt.

Wir betrachten jetzt Parallelschnitte des Schmiegeparaboloids im Abstand  $\pm\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ), genauer die Mengen

$$\tilde{J}_\varepsilon = \left\{ Y \in T_0 x \mid \frac{1}{2} \overset{\circ}{\Pi}(Y, Y) = \pm\varepsilon \right\}$$

Sie sind ähnlich zur Menge

$$J = \frac{\tilde{J}_\varepsilon}{\sqrt{2\varepsilon}} = \left\{ Y \in T_0 x \mid \overset{\circ}{\Pi}(Y, Y) = \pm 1 \right\}$$

genannt DUPINSche Indikatrix

(denn  $Y \in \tilde{J}_\varepsilon \Leftrightarrow \overset{\circ}{\Pi}(Y, Y) = \pm 2\varepsilon \Leftrightarrow \frac{Y}{\sqrt{2\varepsilon}} \in J$ )

Für Parallelschnitte der Fläche selbst, also für

$$J_\varepsilon = \left\{ Y \in T_0 x \mid \frac{1}{2} \overset{\circ}{\Pi}(Y, Y) + R(Y) = \pm\varepsilon \right\}$$

gilt zumindest

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J_\varepsilon}{\sqrt{2\varepsilon}} = J$$

d.h. sie konvergiert gegen die Dupinsche Indikatrix für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} Y \in \frac{J_\varepsilon}{\sqrt{2\varepsilon}} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \overset{\circ}{\Pi}(\sqrt{2\varepsilon}Y, \sqrt{2\varepsilon}Y) + R(\sqrt{2\varepsilon}Y) = \pm\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \overset{\circ}{\Pi}(Y, Y) + \underbrace{\frac{R(\sqrt{2\varepsilon}Y)|Y|^2}{2\varepsilon|Y|^2}}_{\rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0} = \pm 1 \quad \text{denn } \frac{R(u)}{|u|^2} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

□

## 3 Literaturhinweise

Kühnel: *Differentialgeometrie: Kurven, Flächen, Mannigfaltigkeiten*

**Zur Kartographie:**

Hoschek, J: *mathematische Grundlagen der Kartographie*

Strubecker, K.: *Differentialgeometrie II*

# Anhang

- **Klausurtermin:** Donnerstag, 26.07.2012, 14 Uhr – 16 Uhr

# Index

- Äquivalenz, 7
- 1. Grundform, 38
- 2. Grundform, 46
- 3. Grundform, 61
- Ableitungsmatrix
  - $\mathbb{R}^3$ , 17
  - $\mathbb{R}^n$ , 31
- Ableitungsvektor, 8
- affin, 4
- Böschungslinie, 27
- Böschungswinkel, 27
- Begleitbasis
  - Berechnung (unbekannte BLP), 18
- Begleitebene, 16
- Berührbedingung, 21
- Binormalenvektor, 15
- Bogenlängenfunktion, 12
- Bogenlängenparametrisierung, 12
  - Berechnung, 13
- Christoffelsymbole, 43
- Darboux-Vektor, 19
- Diffeomorphismus, 7
- Drehung, 19
  - Drehachse, 19
  - Einheitsvektor, 19
- Einsteinsche Summationskonvention, 37
- Ellipse, 13
- euklidisch, 11
- Fläche, 35
  - Äquivalenz, 36
  - Parameter, 35
  - Parameterlinie, 35
  - regulär, 35
  - Singularität, 35
  - Skalarprodukt, 38
  - Spur, 35
- Flachpunkt, 60
- Frenet-Begleitbasis, 15
  - Ableitungsgleichungen, 17
- Fundamentalsatz, 24, 33
- Gaußabbildung, 43
- Gaußsche Ableitungsgleichungen], 43
- Gaußsche Krümmung, 48
- Geodätische, 52
- geodätische Parallelität, 50
- geodätische Vollständigkeit, 54
- Geschwindigkeit, 6
  - Bahn-, 19
  - Winkel-, 19
- Hauptnormalenvektor, 15
- Henkelpunkt, 10
- Hyperfläche
  - Begleitbasis, 42
  - regulär, 36
- innergeometrische Größen, 40
- Isometrie, 40
- kartesisches Koordinatensystem, 3
- kovariante Ableitung, 46
- Krümmung, 14
  - 2. Krümmung, 16
  - Berechnung (unbekannte BLP), 18
  - Gesamtkrümmung, 18
  - konische, 28
- Krümmungsachse, 23
- Krümmungskreis, 21, 23

- Krümmungsradius, 23
- Kreis, 7
- Kreuzprodukt, 4
- Kurve, 6
- linearer Zusammenhang, 46
- lokale kanonische Form, 20
- Mannigfaltigkeit, 8
- mittlere Krümmung, 48
- Nabelpunkt, 60
- Nicht-Wendepunkt, 10
- normal, 12
- Normalebene, 16
- orientierungstreu, 7
- Orthogonalprojektion, 20
- Orthonormalbasis, 3
  - feld, 17
- Parallelfeld, 50
- Parallelverschiebung, 50
- Parameter, 6
- Parametertransformation, 7
- Parametrisierung, 7
- regulär, 6
- rektifizierende Ebene, 16
- Richtungsableitung, 44
- Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren, 18
- Schmiegeebene, 16
- Schmiegekugel, 21, 23
- Schmiegeparaboloid, 64
- Schmiegraum, 9
  - degeneriert, 10
- Singularität, 6
- Skalarprodukt, 3
- Sphäre
  - 2-, 36
- sphärisch, 29
- sphärisches Bild, 43
- Spur, 6
- Standard-Skalarprodukt, 3
- Standardbasis, 3
- Tangenteneinheitsvektor, 14
- Tangentenvektor, 6, 15
- Tangentialraum, 35
  - Basistransformation, 37
- Taylorentwicklung, 20
- Torsion, 16
  - Berechnung (unbekannte BLP), 18
- Translation, 19
- Vektor, 3
  - länge, 3
  - orthogonal, 3
  - Winkel, 3
- Vektorprodukt, 4
- verbiegbar, 40
- Weg, 6
  - länge, 12
- Weingarten-Endomorphismus, 46
- Weingartenschen Ableitungsgleichungen, 43
- Wendepunkt, 10
  - frei, 10
- Windung, 16