

Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Fakultät für Mathematik und Informatik

Differentialgeometrie

Prof. Pabel

Andreas Rosenberger, Nils Wisiol
info@nils-wisiol.de, andreas@rosenberger-home.de

18. April 2012

Inhaltsverzeichnis

0	Grundbegriffe und Bezeichnungen aus der linearen Algebra und analytischen Geometrie	3
0.1	Strukturen	3
1	Lokale Kurventheorie im euklidischen Raum	6
1.1	Grundbegriffe der Kurventheorie	6
2	Literaturhinweise	9

0 Grundbegriffe und Bezeichnungen aus der linearen Algebra und analytischen Geometrie

Die klassische Differentialgeometrie der Kurven und Flächen benutzt als umgebenden Raum einen n -dimensionalen, orientierten, euklidischen Raum E^n mit zugehörigem euklidischem Richtungsvektorraum V^n .

0.1 Strukturen

V^n ist mit einem Skalarprodukt $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle \in \mathbb{R}$ ausgestattet. Damit lassen sich messen:

- die Länge von Vektoren X : $|X| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$
- die Orthogonalität von Vektoren X, Y : $X \perp Y \Leftrightarrow \langle X, Y \rangle = 0$
- der Winkel zwischen zwei Vektoren X, Y : $\cos \angle(X, Y) = \left\langle \frac{X}{|X|}, \frac{Y}{|Y|} \right\rangle$
- der Abstand von Punkten p, q : $d(p, q) = |\vec{pq}|$
- Flächeninhalte, Volumina, usw.

Ist zusätzlich eine feste Orthonormalbasis $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ (definiert durch $\langle \hat{e}_i, \hat{e}_k \rangle = \delta_{ik}$) ausgezeichnet als positiv orientiert, erhält man eine Orientierung des Raumes und kann alle Basen in positiv und negativ orientierte einteilen.

Standard-Modell: $E^n = V^n = \mathbb{R}^n$, ausgestattet mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n X^i Y^i$ und der (positiv orientierten) Standardbasis $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ mit $\hat{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$. Dieses Standardmodell reicht bei uns meist aus: Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems $(0; e_1, \dots, e_n)$ in einem abstraktem, orientiertem euklidischen Raum E^n , bestehend aus

- einem „Ursprung“ („Nullpunkt“) $0 \in E^n$

- einer positiv orientierten Orthonormalbasis (e_1, \dots, e_n) im V^n

kann man jedem Punkt und jedem Vektor eindeutig reelle Koordinaten zuordnen:

- Vektor: $X = \sum_{i=1}^n X^i e_i \in V^n \mapsto (X^1, \dots, X^n) \in \mathbb{R}^n$
- Punkt: $p = 0 + \sum_{i=1}^n p^i e_i \mapsto (p^1, \dots, p^n) \in \mathbb{R}^n$

Aus einem Skalarprodukt in V^n wird in Koordinaten

$$\langle X, Y \rangle = \left\langle \sum X^i e_i, \sum Y^k e_k \right\rangle = \sum_i \sum_k X^i Y^k \langle e_i, e_k \rangle = \sum_{i=1}^n X^i Y^i$$

das Standard-Skalarprodukt im \mathbb{R}^n . Man ist im Standard-Modell angelangt. Ein Wechsel des kartesischen Koordinatensystems im E^n induziert im Koordinatenraum \mathbb{R}^n eine Bewegung

$$p \mapsto p' = Dp + t$$

bestehend aus einer eigentlichen orthogonalen Drehmatrix $D \in SO(n, \mathbb{R})$ mit $\det D = +1$ und einem Translationsvektor $t \in \mathbb{R}^n$. In der euklidischen Differentialgeometrie werden Eigenschaften von Objekten (Kurven, Flächen, ...) untersucht, die invariant gegenüber solchen Transformationen sind, also nicht vom gewählten kartesischen Koordinatensystem abhängig sind.

Bemerkung:

In der sogenannten affinen Differentialgeometrie untersucht man Eigenschaften von Objekten, die (in Koordinaten) invariant sind gegenüber beliebigen affinen Transformationen $p \mapsto p' = Ap + t$, A regulär. Man ignoriert dort vollständig die metrische Struktur des \mathbb{R}^n . Der umgebende Raum ist dann ein affiner Punktraum (bei uns nur am Rande betrachtet).

Zum Vektorprodukt (Kreuzprodukt) im orientierten euklidischen \mathbb{R}^n :

Zu je $n-1$ Vektoren $X_1, \dots, X_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) gibt es genau einen Vektor $Y \in \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften

1. $Y \perp X_k, (k = 1, \dots, n-1)$
2. $|Y| = a_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-1}) = \sqrt{\det(\langle X_i, X_k \rangle)_{i,k=1, \dots, n-1}}$
 $= (n-1)$ -dimensionaler Flächeninhalt des von X_1, \dots, X_{n-1} aufgespannten $n-1$ -dimensionalen Parallelogramms
 $=$ Wurzel aus der Gramschen Determinanten $G(X_1, \dots, X_{n-1})$
3. $\det(X_1, \dots, X_{n-1}, Y) \geq 0$ (d.h. X_1, \dots, X_{n-1}, Y ist positiv orientiert)

Bezeichnung: $Y = X_1 \times \cdots \times X_{n-1}$

Eine explizite Formel ist (mit der Standardbasis (e_1, \dots, e_n) des \mathbb{R}^n):

$$X_1 \times \cdots \times X_{n-1} = \sum_{i=1}^n \det(X_1, \dots, X_{n-1}, e_i) e_i = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} X_1^1 & \cdots & X_{n-1}^1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_1^n & \cdots & X_{n-1}^n & 0 \end{vmatrix} (i) e_i = \begin{vmatrix} X_1^1 & \cdots & X_{n-1}^1 & e_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_1^n & \cdots & X_{n-1}^n & e_n \end{vmatrix}$$

Beispiel:

$n = 2$:

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} \Rightarrow X^x = \begin{vmatrix} X^1 & e_1 \\ X^2 & e_2 \end{vmatrix} = -X^2 e_1 + X^1 e_2 = \begin{pmatrix} -X^2 \\ X^1 \end{pmatrix}$$

$$|X^x| = a_1(X) = |X|$$

Beispiel:

$n = 3$:

$$X \times Y = \begin{vmatrix} X^1 & Y^1 & e_1 \\ X^2 & Y^2 & e_2 \\ X^3 & Y^3 & e_3 \end{vmatrix} = (X^2 Y^3 - X^3 Y^2) e_1 + \dots$$

$$|X \times Y| = a_2(X, Y) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle X, X \rangle & \langle X, Y \rangle \\ \langle Y, X \rangle & \langle Y, Y \rangle \end{pmatrix}}$$

Anwendung: Jedes Orthonormalsystem (e_1, \dots, e_{n-1}) im \mathbb{R}^n lässt sich durch $e_n := e_1 \times \cdots \times e_{n-1}$ eindeutig zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis (e_1, \dots, e_n) ergänzen.

1 Lokale Kurventheorie im euklidischen Raum

1.1 Grundbegriffe der Kurventheorie

Wir betrachten zunächst (kurzzeitig) rein affingometrische Begriffe/Invarianten.

Definition:

Ein \mathcal{C}^r -Weg oder eine parametrisierte \mathcal{C}^r -Kurve ($r \geq 0$) [\mathcal{C}^r = r -mal stetig differenzierbar] im (affinen) \mathbb{R}^n ist eine \mathcal{C}^r -Abbildung

$$c : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$$

eines offenen Intervalls I in den \mathbb{R}^n .

t heißt Parameter, die Bildmenge $c[I] \subset \mathbb{R}^n$ die Spur des Weges.

Ein \mathcal{C}^r -Weg ($n \geq 1$) heißt regulär, wenn überall der Tangentenvektor $\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt}(t) \neq 0$ ist. Nicht-reguläre Punkte $c(t_0)$ mit $\dot{c}(t_0) = 0$ heißen Singularitäten.

Kinematische Interpretation:

$t \mapsto c(t)$ beschreibt die zeitabhängige Bewegung eines Punktes im \mathbb{R}^n . \dot{c} ist die vektorielle Geschwindigkeit (und im euklidischen \mathbb{R}^n $w := |\dot{c}|$ die skalare Geschwindigkeit).

Beispiel:

1. Peano-Kurve: Stetiger (\mathcal{C}^0 -)Weg im \mathbb{R}^2 , dessen Spur jeden Punkt eines Gebietes $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ausfüllt (niergends differenzierbar, „unbrauchbar“)
2. Konstanter Weg: $t \in I \mapsto c(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ (niergends regulär, „unbrauchbar“)
3. Neil'sche Parabel: $c : t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (\mathcal{C}^∞ -Weg), in $c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht regulär („Spitze“) ($w(0) = |\dot{c}(0)| = 0$, „man hat Zeit, sich umzudrehen“)

4. Kreislinie: $c : t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (∞ -oft durchlaufbar) [Affin gesehen ist das eine Ellipse!]

Aber auch $t \mapsto \tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \pm\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$ und $t \mapsto \tilde{\tilde{c}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh t} \\ \tanh t \end{pmatrix}$ sind Parametrisierungen von Kreisstücken.

Wege, die nur mit veränderlicher „Zeitskala“ durchlaufen werden, sollen nicht als verschieden angesehen werden.

Definition:

$I, \tilde{I} \subset \mathbb{R}$ seien offene Intervalle.

Zwei Wege $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißen C^r -äquivalent ($r \geq 0$), wenn ein orientierungstreuer (d.h. monoton wachsender) C^r -Diffeomorphismus $\Phi : I \rightarrow \tilde{I}$ existiert, mit

$$c = \tilde{c} \circ \Phi, \text{ d.h. } \forall_t c(t) = \tilde{c}(\Phi(t))$$

Bemerkung:

0. Φ C^r -Diffeomorphismus $\Leftrightarrow \Phi$ bijektiv und Φ und Φ^{-1} C^r -differenzierbar. [Bsp.: $\Phi : t \in \mathbb{R} \rightarrow t^3 \in \mathbb{R}$ ist kein C^1 -Diffeomorphismus]

Bei C^r -Diffeomorphismus ist stets $\dot{\Phi}(t) \neq 0$ (falls $r \geq 1$)

1. Φ ist (für $r \geq 1$) genau dann orientierungstreu, wenn überall $\dot{\Phi}(t) > 0$ ist.
2. Äquivalente Wege besitzen (für $r \geq 1$) das gleiche Regularitätsverhalten.

$$\dot{c}(t) = \dot{\tilde{c}}(\Phi(t)) \cdot \underbrace{\dot{\Phi}(t)}_{>0}$$

3. Die Äquivalenz von Wegen ist wirklich eine Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv)

Definition:

Eine (orientierte, reguläre) C^r -Kurve ($r \geq 1$) im (affinen) \mathbb{R}^n ist eine Äquivalenzklasse $[c]$ von regulären C^r -Wegen $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ein Repräsentant heißt eine (zulässige) Parametrisierung der C^r -Kurve, eine die Äquivalenz vermittelnde Abbildung Φ eine (zulässige) Parametertransformation.

Beispiel:

Die „Kreis“-Darstellungen

$$t \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left(|t| < \frac{\pi}{2}\right)$$

und

$$\tilde{t} \mapsto \tilde{c}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh \tilde{t}} \\ \tanh \tilde{t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 (\tilde{t} \in \mathbb{R})$$

sind \mathcal{C}^∞ -äquivalente Parametertransformationen:

$$\Phi(t) = \text{Artanh} \sin t = \tilde{t}$$

mit

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{\cos t} > 0$$

2 Literaturhinweise

Kühnel: Differentialgeometrie: Kurven, Flächen, Mannigfaltigkeiten