Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Fakultät für Mathematik und Informatik

Differentialgeometrie

Prof. Pabel

Andreas Rosenberger, Nils Wisiol
andreas@rosenberger-home.de, info@nils-wisiol.de

23. April 2012

Inhaltsverzeichnis

0 Grundbegriffe und Bezeichnungen aus der linearen Algebra und analytischen Geometrie

Die klassische Differentialgeometrie der Kurven und Flächen benutzt als umgebenden Raum einen n-dimensionalen, orientierten, euklidischen Raum E^n mit zugehörigem euklischem Richtungsvektorraum V^n.

0.1 Strukturen

V^n ist mit einem Skalarprodukt $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle \in \mathbb{R}$ ausgestattet. Damit lassen sich messen:

- die Länge von Vektoren X: $|X| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$
- die Orthogonalität von Vektoren X, Y: $X \perp Y \Leftrightarrow \langle X, Y \rangle = 0$
- der Winkel zwischen zwei Vektoren X, Y: $\cos \angle(X, Y) = \left\langle \frac{X}{|X|}, \frac{Y}{|Y|} \right\rangle$
- der Abstand von Punkten p, q: $\mathrm{d}(p, q) = |\overrightarrow{pq}|$
- Flächeninhalte, Volumina, usw.

Ist zusätzlich eine feste Orthonormalbasis $(\mathring{e}_1, ...\mathring{e}_n)$ (definiert durch $\langle \mathring{e}_i, \mathring{e}_k \rangle = \delta_{ik}$) ausgezeichnet als positiv orientiert, erhält man eine Orientierung des Raumes und kann alle Basen in positiv und negativ orientierte einteilen.

Standard-Modell: $E^n = V^n = \mathbb{R}^n$, ausgestattet mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n X^i Y^i$ und der (positiv orientierten) Standardbasis $\mathring{e}_1, ...\mathring{e}_n)$ mit $\mathring{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$. Dieses Standardmodell reicht bei uns meist aus: Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems $(0; e_1, ...e_n)$ in einem abstrakten, orientierten euklidschen Raum E^n, bestehend aus

- einem „Ursprung“ („Nullpunkt“) $0 \in E^n$

- einer positiv orientierten Orthonormalbasis $(e_1, ...e_n)$ im V^n

kann man jedem Punkt und jedem Vektor eindeutig reelle Koordinaten zuordnen:

- Vektor: $X = \sum_{i=1}^n X^i e_i \in V^n \mapsto (X^1, ...X^n) \in \mathbb{R}^n$
- Punkt: $p = 0 + \sum_{i=1}^n p^i e_i \mapsto (p^1, ...p^n) \in \mathbb{R}^n$

Aus einem Skalarprodukt in V^n wird in Koordinaten

$$\langle X, Y \rangle = \left\langle \sum X^i e_i, \sum Y^k e_k \right\rangle = \sum_i \sum_k X^i Y^k \langle e_i, e_k \rangle = \sum_{i=1}^n X^i Y^i$$

das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Man ist im Stanard-Modell angelangt. Ein Wechsel des kartesischen Koordinatensystems im E^n induziert im Koordinatenraum $\mathbb{R}^n$ eine Bewegung

$$p \mapsto p' = Dp + t$$

bestehend aus einer eigentlichen orthogonalen Drehmatrix $D \in SO(u, \mathbb{R})$ mit $\det D = +1$ und einem Translationsvektor $t \in \mathbb{R}^n$. In der euklidschen Differentialgeometrie werden Eigenschaften von Objekten (Kurven, Flächen, ...) untersucht, die invariant gegenüber solchen Transformationen sind, also nicht vom gewählten kartesischen Koordinatensystem abhängig sind.

Bemerkung:
In der sogenannten affinen Differentialgeometrie untersucht man Eigenschaften von Objekten, die (in Koordinaten) invariant sind gegenüber beliebigen affinen Transformationen $p \mapsto p' = Ap + t$, A regulär. Man ignoriert dort vollständig die metrische Struktur des $\mathbb{R}^n$. Der umgebende Raum ist dann ein affiner Punktraum (bei uns nur am Rande betrachtet).

Zum Vektorprodukt (Kreuzprodukt) im orientierten euklidischen $\mathbb{R}^n$:
Zu je $n-1$ Vektoren $X_1, \dots, X_{n-1} \in \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ gibt es genau einen Vektor $Y \in \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften

1. $Y \perp X_k, (k = 1, \dots, n-1)$
2. $|Y| = a_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-1}) = \sqrt{\det \left(\langle X_i, X_k \rangle \right)_{i=k=1,\dots,n-1}}$
   $= (n-1)$-dimensionaler Flächeninhalt des von $X_1, \dots, X_{n-1}$ aufgespannten $n-1$-dimensionalen Parallelogramms
   $=$ Wurzel aus der Gramschen Determinanten $G(X_1, \dots, X_{n-1})$
3. $\det(X_1, \dots, X_{n-1}, Y) \geq 0$ (d.h. $(X_1, \dots, X_{n-1}, Y)$ ist positiv orientiert)

Bezeichnung: $Y = X_1 \times \cdots \times X_{n-1}$
Eine explizite Formel ist (mit der Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ des $\mathbb{R}^n$):

$$X_1 \times \cdots \times X_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \det(X_1, \ldots, X_{n-1}, e_i) e_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} X_1^1 & \cdots & X_{n-1}^1 & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & 1 & (i) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ X_1^n & \cdots & X_{n-1}^n & 0 & \end{vmatrix} e_i = \begin{vmatrix} X_1^1 & \cdots & X_{n-1}^1 & e_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_1^n & \cdots & X_{n-1}^n & e_n \end{vmatrix}$$

Beispiel:
<u>$n = 2$</u>

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} \Rightarrow X^x = \begin{vmatrix} X^1 & e_1 \\ X^2 & e_2 \end{vmatrix} = -X^2 e_1 + X^1 e_2 = \begin{pmatrix} -X^2 \\ X^1 \end{pmatrix}$$
$$|X^x| = a_1(X) = |X|$$

Beispiel:
<u>$n = 3$</u>:

$$X \times Y = \begin{vmatrix} X^1 & Y^1 & e_1 \\ X^2 & Y^2 & e_2 \\ X^3 & Y^3 & e_3 \end{vmatrix} = (X^2 Y^3 - X^3 Y^2) e_1 + \ldots$$

$$|X \times Y| = a_2(X, Y) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle X, X \rangle & \langle X, Y \rangle \\ \langle Y, X \rangle & \langle Y, Y \rangle \end{pmatrix}}$$

Anwendung:
Jedes Orthonormalsystem $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ im $\mathbb{R}^n$ lässt sich durch $e_n := e_1 \times \cdots \times e_{n-1}$ eindeutig zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ ergänzen.

1 Lokale Kurventheorie im euklidischen Raum

1.1 Grundbegriffe der Kurventheorie

Wir betrachten zunächst (kurzzeitig) rein affingeometrische Begriffe/Invarianten.

Definition:
Ein $\mathcal{C}^r$-Weg oder eine parametrisierte $\mathcal{C}^r$-Kurve ($r \geq 0$) [$\mathcal{C}^r$ = r-mal stetig differenzierbar] im (affinen) $\mathbb{R}^n$ ist eine $\mathcal{C}^r$-Abbildung

$$c : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$$

eines offenen Intervalls I in den $\mathbb{R}^n$.
t heißt Parameter, die Bildmenge $c[I] \subset \mathbb{R}^n$ die Spur des Weges.
Ein $\mathcal{C}^r$-Weg ($n \geq 1$) heißt regulär, wenn überall der Tangentenvektor $\dot{c}(t) = \frac{\mathrm{d}\,c}{\mathrm{d}\,t}(t) \neq 0$ ist. Nicht-reguläre Punkte $c(t_0)$ mit $\dot{c}(t_0) = 0$ heißen Singularitäten.

Kinematische Interpretation:
$t \mapsto c(t)$ beschreibt die zeitabhängige Bewegung eines Punktes im $\mathbb{R}^n$. $\dot{c}$ ist die vektorielle Geschwindigkeit (und im euklidischen $\mathbb{R}^n$ $w := |\dot{c}|$ die skalare Geschwindigkeit).

Beispiel:

1. Peano-Kurve: Stetiger ($\mathcal{C}^0$-)Weg im $\mathbb{R}^2$, dessen Spur jeden Punkt eines Gebietes $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ausfüllt (nirgends differenzierbar, „unbrauchbar“)

2. Konstanter Weg: $t \in I \mapsto c(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ (nirgends regulär, „unbrauchbar“)

3. Neil'sche Parabel: $c : t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ($\mathcal{C}^\infty$-Weg), in $c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht regulär („Spitze“) ($w(0) = |\dot{c}(0)| = 0$, „man hat Zeit, sich umzudrehen“)

4. Kreislinie: $c : t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (∞-oft durchlaufbar) [Affin gesehen ist das eine Ellipse!]
   Aber auch $t \mapsto \tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \pm\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$ und $t \mapsto \tilde{\tilde{c}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh t} \\ \tanh t \end{pmatrix}$ sind Parametrisierungen von Kreisstücken.

Wege, die nur mit veränderlicher „Zeitskala“ durchlaufen werden, sollen nicht als verschieden angesehen werden.

Definition:
$I, \tilde{I} \subset \mathbb{R}$ seien offene Intervalle.
Zwei Wege $c : I \to \mathbb{R}^n, \tilde{c} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ heißen C^r-äquivalent ($r \geq 0$), wenn ein orientierungstreuer (d.h. monoton wachsender) $\mathcal{C}^r$-Diffiomorphismus $\Phi : I \to \tilde{I}$ existiert, mit

$$\underline{c = \tilde{c} \circ \Phi}, \text{ d.h. } \underline{\forall_t c(t) = \tilde{c}(\Phi(t))}$$

Bemerkung:

0. $\Phi\, \mathcal{C}^r$-Diffeomorphismus $\Leftrightarrow \Phi$ bijektiv und Φ und Φ^{-1} C^r-differenzierbar. [Bsp.: $\Phi : t \in \mathbb{R} \to t^3 \in \mathbb{R}$ ist kein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus]
   Bei C^r-Diffeomorphismus ist stets $\dot{\Phi}(t) \neq 0$ (falls $r \geq 1$)

1. Φ ist (für $r \geq 1$) genau dann orientierungstreu, wenn überall $\dot{\Phi}(t) > 0$ ist.

2. Äquivalente Wege besitzen (für $r \geq 1$) das gleiche Regularitätsverhalten.

$$\dot{c}(t) = \dot{\tilde{c}}(\Phi(t)) \cdot \underbrace{\dot{\Phi}(t)}_{>0}$$

3. Die Äquivalenz von Wegen ist wirklich eine Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv)

Definition:
Eine (orientierte, reguläre) $\mathcal{C}^r$-Kurve ($r \geq 1$) im (affinen) $\mathbb{R}^n$ ist eine Äquivalenzklasse $[c]$ von regulären $\mathcal{C}^r$-Wegen $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Ein Repräsentant heißt eine (zulässige) Parametrisierungen der $\mathcal{C}^r$-Kurve, eine die Äquivalenz vermittelnde Abbildung Φ eine (zulässige) Parametertransformation.

Beispiel:
Die „Kreis“-Darstellungen

$$t \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left(|t| < \frac{\pi}{2}\right)$$

und

$$\tilde{t} \mapsto \tilde{c}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh \tilde{t}} \\ \tanh \tilde{t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 (\tilde{t} \in \mathbb{R})$$

sind $\mathcal{C}^\infty$-äquivalente Parametertransformationen:

$$\Phi(t) = \operatorname{Artanh} \sin t = \tilde{t}$$

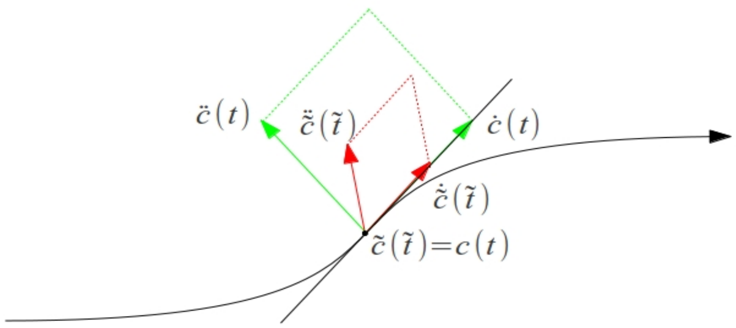
mit

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{\cos t} > 0$$

Bemerkung:
Nicht jedes 1-dimensionale „Gebilde" im $\mathbb{R}^n$ (z.B. eine vollständige Kreislinie) lässt sich global und injektiv als Bild eines offenen Intervalls darstellen.
Objekte, die sich nur lokal so parametrisieren lassen, heißen (1-dimensionale) differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Für lokale Untersuchungen ist eine solche Erweiterung der Kurvenbegriffs nicht nötig.

Die bisher eingeführten Begriffe sind offensichtlich affin-invariant. Aber im Folgenden sind auch nur Eigenschaften von Kurven von Interesse, also Eigenschaften, die nicht von der Parametrisierung abhängen.
Hier ein Beispiel aus der rein affinen Differentialgeometrie.

Beispiel:



Satz 1.1.1:
$t \mapsto c(t)$ sei Parameterdarstellung einer $\mathcal{C}^r$-Kurve im (affinen) $\mathbb{R}^n$ mit $r \geq n$. Dann sind die Ableitungsvektoren

$$c_p := \frac{\mathrm{d}^p c}{\mathrm{d} t^p} \, (p = 1, \ldots, n)$$

nicht invariant gegenüber Parametertransformationen, jedoch die (punktualen, orientierten) Schmiegräume (oskulierende Räume, „osculating spaces“)

$$S_p(t) := c(t) + \langle\langle c_1(t), \dots, c_p(t) \rangle\rangle$$

Spezialfälle:
Tangente $S_1(t) = c(t) + \langle\langle \dot{c}(t) \rangle\rangle$
Schmiegebene $S_2(t) c(t) + \langle\langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle\rangle$

Beweis:
Aus $c = \tilde{c} \circ \Phi$ folgt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \dot{\Phi} \left(\dot{\tilde{c}} \circ \Phi \right) \\ \ddot{c} &= \dot{\Phi}^2 \left(\ddot{\tilde{c}} \circ \Phi \right) + Q_2^1 \left(\dot{\Phi}, \ddot{\Phi} \right) \cdot \dot{\tilde{c}}(t) \end{aligned}$$

allgemein

$$c_p = \dot{\Phi}^p (\tilde{c}_p \circ \Phi) + \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{Q_p^k \left(\dot{\Phi}, \ddot{\Phi} \right)}_{\text{„Kettenregelpolynome“}} \quad (\tilde{c}_k \circ \Phi)$$

Also hat man die Transformationsformel

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\Phi} & 0 & \cdots & 0 \\ Q_2^1 & \dot{\Phi}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ Q_p^1 & \cdots & Q_p^k & \dot{\Phi}^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \circ \Phi \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{c}_p \circ \Phi \end{pmatrix}$$

mit einer regulären Transformationsmatrix positiver Determinante.
Das zeigt

$$\langle\langle c_1, \dots, c_p \rangle\rangle = \langle\langle \tilde{c}_1 \circ \Phi, \dots, \tilde{c}_p \circ \Phi \rangle\rangle$$

und die weiteren Behauptungen.

$\square$

Bemerkung:
Die Regularitätsforderung $\dot{c}(t) \neq 0$ bedeutet, dass in jedem Punkt die Tangenten als 1-dimensionale Unterräume existieren.

Die Schmiegräume kann man dazu benutzen, um festzustellen, ob eine Kurve in einem echten affinen Teilraum $U_p \subset \mathbb{R}^n$ liegt, in einer Geraden, einer Ebene usw. (affin-invariant!)
Zunächst gilt offensichtlich

$$S_1(t) \subseteq S_2(t) \subseteq \cdots \subseteq S_n(t) \leq p$$

Satz 1.1.2:

a) Liegt eine $\mathcal{C}^{p+1}$-Kurve in einem p-dimensionalen affinen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ $(1 \leq +p \leq n-1)$, so ist

$$\forall_t \dim S_{p+1}(t) < p+1$$

d.h. der $(p+1)$-te Schmiegraum degeneriert.

b) Gilt umgekehrt

$$\forall_t \dim S_{p+1}(t) = \dim S_p(t) \overset{!}{=} p$$

so liegt die Kurve in einem p-dimensionalen, aber keinem niedriger dimensionalen affinen Unterraum.

Anwendung:

1. Eine $\mathcal{C}^2$-Kurve $[c]$ im $\mathbb{R}^n$ verläuft genau dann geradlinig, wenn $\forall_t \big(\dot{c}(t), \ddot{c}(t)\big)$ linear abhängig ist.
   $\big[$„$\Rightarrow$“ nach a), „$\Leftarrow$“ nach b), da $[c]$ regulär$\big]$

Definition:
Ein (regulärer) Kurvenpunkt $c(t)$ heißt Wendepunkt (WP, inflection point), falls $\big(\dot{c}(t), \ddot{c}(t)\big)$ linear abhängig ist.

2. Eine wendepunktfreie $\mathcal{C}^3$-Kurve $[c]$ im $\mathbb{R}^n$ verläuft genau dann in einer Ebene, wenn $\forall_t \big(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t)\big)$ linear abhängig ist.

Definition:
Ein Nicht-Wendepunkt $\dot{c}(t)$ heißt „Henkelpunkt“ (handle point), wenn $\big(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t)\big)$ linear abhängig ist.

Beweis: a)

$$\begin{aligned}
&\forall_t \quad c(t) = p_0 + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k(t) \cdot a_k \in U_p = p_0 + \langle\!\langle a_1, \dots, a_p \rangle\!\rangle \Rightarrow \\
&\overset{p+1}{\underset{l=1}{\forall}} \forall_t \quad c_l(t) = c^{(l)}(t) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^{(l)}(t) \cdot a_k \in \langle\!\langle a_1, \dots, a_p \rangle\!\rangle \Rightarrow \\
&\forall_t \quad \dim S_{p+1}(t) \leq p < p
\end{aligned}$$

b) Nach Voraussetzung ist $(c_1, \dots, c_p)(t)$ linear unabhängig, aber $c_1, \dots, c_{p+1})(t)$ linear abhängig. Es existieren also Funktionen $t \mapsto \lambda_0(t), \dots, \lambda_{p_1}(t)$ mit

$$c_{p+1} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_{k-1} c_k \text{ bzw. } \underline{(\dot{c})^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k (\dot{c})^k} \qquad (*)$$

Die Funktionen sind stetig auf I, denn $(*)$ kann nach $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ aufgelöst werden (Inhomogenes lineares Gleichungssystem mit vollrangiger Koeffizientenmatrix, da $c_1, \dots, c_p$ linear unabhängig; Einträge und „rechte Seite“ stetig).
Die Koeffizientenfunktionen $t \mapsto \dot{c}^i(t)\,(i = 1, \dots, n)$ genügen also der linearen Differentialgleichung p-ter Ordnung

$$y^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k y^{(k)}$$

mit stetigen Koeffizienten. für sie existiert ein Fundamentalsystem $y_1, \dots y_p : I \to \mathbb{R}$, so dass für jede Lösung gilt

$$y(t) = \sum_{k=1}^{p} a_k y_k(t)$$

also auch

$$\dot{c}^i(t) = \sum_{k=1}^{p} a_k^i y_k(t)$$

und damit

$$\dot{c}(t) = \sum_{k=1}^{p} y_k(t) a_k$$

mit konstanten Vektoren $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$.
Integration liefert $\forall_{t \in I}$

$$c(t) = c(t_0) + \sum_{k=1}^{p} \left(\int_{t_0}^{t} y_k(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \right) a_k \in c(t_0) + \langle\langle a_1, \dots, a_p \rangle\rangle =: U_p$$

Es ist schließlich

$$\underline{\dim U_p = p}$$

denn aus $\dim U_p = k < p$ folgt nach a), dass $\dim S_{k+1} < k+1$, also auch $\dim S_p < p$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

$\square$

2 Literaturhinweise

Kühnel: Differentialgeometrie: Kurven, Flächen, Mannigfaltigkeiten