

Julius-Maximilians-Universität Würzburg  
Fakultät für Mathematik und Informatik

# Differentialgeometrie

**Prof. Pabel**

Andreas Rosenberger, Nils Wisiol  
[andreas@rosenberger-home.de](mailto:andreas@rosenberger-home.de), [info@nils-wisiol.de](mailto:info@nils-wisiol.de)

23. April 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Grundbegriffe und Bezeichnungen aus der linearen Algebra und analytischen Geometrie</b>	<b>3</b>
0.1	Strukturen . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Lokale Kurventheorie im euklidischen Raum</b>	<b>6</b>
1.1	Grundbegriffe der Kurventheorie . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Literaturhinweise</b>	<b>12</b>

# 0 Grundbegriffe und Bezeichnungen aus der linearen Algebra und analytischen Geometrie

Die klassische Differentialgeometrie der Kurven und Flächen benutzt als umgebenden Raum einen  $n$ -dimensionalen, orientierten, euklidischen Raum  $E^n$  mit zugehörigem euklidischem Richtungsvektorraum  $V^n$ .

## 0.1 Strukturen

$V^n$  ist mit einem Skalarprodukt  $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle \in \mathbb{R}$  ausgestattet. Damit lassen sich messen:

- die Länge von Vektoren  $X$ :  $|X| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$
- die Orthogonalität von Vektoren  $X, Y$ :  $X \perp Y \Leftrightarrow \langle X, Y \rangle = 0$
- der Winkel zwischen zwei Vektoren  $X, Y$ :  $\cos \angle(X, Y) = \left\langle \frac{X}{|X|}, \frac{Y}{|Y|} \right\rangle$
- der Abstand von Punkten  $p, q$ :  $d(p, q) = |\vec{pq}|$
- Flächeninhalte, Volumina, usw.

Ist zusätzlich eine feste Orthonormalbasis  $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$  (definiert durch  $\langle \hat{e}_i, \hat{e}_k \rangle = \delta_{ik}$ ) ausgezeichnet als positiv orientiert, erhält man eine Orientierung des Raumes und kann alle Basen in positiv und negativ orientierte einteilen.

**Standard-Modell:**  $E^n = V^n = \mathbb{R}^n$ , ausgestattet mit dem Standard-Skalarprodukt  $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n X^i Y^i$  und der (positiv orientierten) Standardbasis  $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$  mit  $\hat{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ . Dieses Standardmodell reicht bei uns meist aus: Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems  $(0; e_1, \dots, e_n)$  in einem abstrakten, orientierten euklidischen Raum  $E^n$ , bestehend aus

- einem „Ursprung“ („Nullpunkt“)  $0 \in E^n$

- einer positiv orientierten Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  im  $V^n$

kann man jedem Punkt und jedem Vektor eindeutig reelle Koordinaten zuordnen:

- Vektor:  $X = \sum_{i=1}^n X^i e_i \in V^n \mapsto (X^1, \dots, X^n) \in \mathbb{R}^n$
- Punkt:  $p = 0 + \sum_{i=1}^n p^i e_i \mapsto (p^1, \dots, p^n) \in \mathbb{R}^n$

Aus einem Skalarprodukt in  $V^n$  wird in Koordinaten

$$\langle X, Y \rangle = \left\langle \sum X^i e_i, \sum Y^k e_k \right\rangle = \sum_i \sum_k X^i Y^k \langle e_i, e_k \rangle = \sum_{i=1}^n X^i Y^i$$

das Standard-Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$ . Man ist im Standard-Modell angelangt. Ein Wechsel des kartesischen Koordinatensystems im  $E^n$  induziert im Koordinatenraum  $\mathbb{R}^n$  eine Bewegung

$$p \mapsto p' = Dp + t$$

bestehend aus einer eigentlichen orthogonalen Drehmatrix  $D \in SO(n, \mathbb{R})$  mit  $\det D = +1$  und einem Translationsvektor  $t \in \mathbb{R}^n$ . In der euklidischen Differentialgeometrie werden Eigenschaften von Objekten (Kurven, Flächen, ...) untersucht, die invariant gegenüber solchen Transformationen sind, also nicht vom gewählten kartesischen Koordinatensystem abhängig sind.

### Bemerkung:

In der sogenannten affinen Differentialgeometrie untersucht man Eigenschaften von Objekten, die (in Koordinaten) invariant sind gegenüber beliebigen affinen Transformationen  $p \mapsto p' = Ap + t$ ,  $A$  regulär. Man ignoriert dort vollständig die metrische Struktur des  $\mathbb{R}^n$ . Der umgebende Raum ist dann ein affiner Punktraum (bei uns nur am Rande betrachtet).

Zum Vektorprodukt (Kreuzprodukt) im orientierten euklidischen  $\mathbb{R}^n$ :

Zu je  $n-1$  Vektoren  $X_1, \dots, X_{n-1} \in \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) gibt es genau einen Vektor  $Y \in \mathbb{R}^n$  mit den Eigenschaften

1.  $Y \perp X_k, (k = 1, \dots, n-1)$
2.  $|Y| = a_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-1}) = \sqrt{\det(\langle X_i, X_k \rangle)_{i,k=1, \dots, n-1}}$   
 $= (n-1)$ -dimensionaler Flächeninhalt des von  $X_1, \dots, X_{n-1}$  aufgespannten  $n-1$ -dimensionalen Parallelogramms  
 $=$  Wurzel aus der Gramschen Determinanten  $G(X_1, \dots, X_{n-1})$
3.  $\det(X_1, \dots, X_{n-1}, Y) \geq 0$  (d.h.  $(X_1, \dots, X_{n-1}, Y)$  ist positiv orientiert)

Bezeichnung:  $Y = X_1 \times \cdots \times X_{n-1}$

Eine explizite Formel ist (mit der Standardbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  des  $\mathbb{R}^n$ ):

$$\begin{aligned} X_1 \times \cdots \times X_{n-1} &= \sum_{i=1}^n \det(X_1, \dots, X_{n-1}, e_i) e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} X_1^1 & \cdots & X_{n-1}^1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_1^n & \cdots & X_{n-1}^n & 0 \end{vmatrix} (i) e_i = \begin{vmatrix} X_1^1 & \cdots & X_{n-1}^1 & e_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_1^n & \cdots & X_{n-1}^n & e_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

**Beispiel:**

$n = 2$

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} &\Rightarrow X^x = \begin{vmatrix} X^1 & e_1 \\ X^2 & e_2 \end{vmatrix} = -X^2 e_1 + X^1 e_2 = \begin{pmatrix} -X^2 \\ X^1 \end{pmatrix} \\ |X^x| &= a_1(X) = |X| \end{aligned}$$

**Beispiel:**

$n = 3$ :

$$X \times Y = \begin{vmatrix} X^1 & Y^1 & e_1 \\ X^2 & Y^2 & e_2 \\ X^3 & Y^3 & e_3 \end{vmatrix} = (X^2 Y^3 - X^3 Y^2) e_1 + \dots$$

$$|X \times Y| = a_2(X, Y) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle X, X \rangle & \langle X, Y \rangle \\ \langle Y, X \rangle & \langle Y, Y \rangle \end{pmatrix}}$$

**Anwendung:**

Jedes Orthonormalsystem  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  im  $\mathbb{R}^n$  lässt sich durch  $e_n := e_1 \times \cdots \times e_{n-1}$  eindeutig zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  ergänzen.

# 1 Lokale Kurventheorie im euklidischen Raum

## 1.1 Grundbegriffe der Kurventheorie

Wir betrachten zunächst (kurzzeitig) rein affingometrische Begriffe/Invarianten.

**Definition:**

Ein  $\mathcal{C}^r$ -Weg oder eine parametrisierte  $\mathcal{C}^r$ -Kurve ( $r \geq 0$ ) [ $\mathcal{C}^r$  =  $r$ -mal stetig differenzierbar] im (affinen)  $\mathbb{R}^n$  ist eine  $\mathcal{C}^r$ -Abbildung

$$c : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$$

eines offenen Intervalls  $I$  in den  $\mathbb{R}^n$ .

$t$  heißt Parameter, die Bildmenge  $c[I] \subset \mathbb{R}^n$  die Spur des Weges.

Ein  $\mathcal{C}^r$ -Weg ( $n \geq 1$ ) heißt regulär, wenn überall der Tangentenvektor  $\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt}(t) \neq 0$  ist. Nicht-reguläre Punkte  $c(t_0)$  mit  $\dot{c}(t_0) = 0$  heißen Singularitäten.

Kinematische Interpretation:

$t \mapsto c(t)$  beschreibt die zeitabhängige Bewegung eines Punktes im  $\mathbb{R}^n$ .  $\dot{c}$  ist die vektorielle Geschwindigkeit (und im euklidischen  $\mathbb{R}^n$   $w := |\dot{c}|$  die skalare Geschwindigkeit).

**Beispiel:**

1. Peano-Kurve: Stetiger ( $\mathcal{C}^0$ -)Weg im  $\mathbb{R}^2$ , dessen Spur jeden Punkt eines Gebietes  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  ausfüllt (nirgends differenzierbar, „unbrauchbar“)
2. Konstanter Weg:  $t \in I \mapsto c(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  (nirgends regulär, „unbrauchbar“)
3. Neil'sche Parabel:  $c : t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  ( $\mathcal{C}^\infty$ -Weg), in  $c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  nicht regulär („Spitze“) ( $w(0) = |\dot{c}(0)| = 0$ , „man hat Zeit, sich umzudrehen“)

4. Kreislinie:  $c : t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  ( $\infty$ -oft durchlaufbar) [Affin gesehen ist das eine Ellipse!]

Aber auch  $t \mapsto \tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \pm\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$  und  $t \mapsto \tilde{\tilde{c}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh t} \\ \tanh t \end{pmatrix}$  sind Parametrisierungen von Kreisstücken.

Wege, die nur mit veränderlicher „Zeitskala“ durchlaufen werden, sollen nicht als verschieden angesehen werden.

**Definition:**

$I, \tilde{I} \subset \mathbb{R}$  seien offene Intervalle.

Zwei Wege  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißen  $C^r$ -äquivalent ( $r \geq 0$ ), wenn ein orientierungstreuer (d.h. monoton wachsender)  $C^r$ -Diffeomorphismus  $\Phi : I \rightarrow \tilde{I}$  existiert, mit

$$c = \tilde{c} \circ \Phi, \text{ d.h. } \forall_t c(t) = \tilde{c}(\Phi(t))$$

**Bemerkung:**

0.  $\Phi$   $C^r$ -Diffeomorphismus  $\Leftrightarrow \Phi$  bijektiv und  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$   $C^r$ -differenzierbar. [Bsp.:  $\Phi : t \in \mathbb{R} \rightarrow t^3 \in \mathbb{R}$  ist kein  $C^1$ -Diffeomorphismus]

Bei  $C^r$ -Diffeomorphismus ist stets  $\dot{\Phi}(t) \neq 0$  (falls  $r \geq 1$ )

1.  $\Phi$  ist (für  $r \geq 1$ ) genau dann orientierungstreu, wenn überall  $\dot{\Phi}(t) > 0$  ist.
2. Äquivalente Wege besitzen (für  $r \geq 1$ ) das gleiche Regularitätsverhalten.

$$\dot{c}(t) = \dot{\tilde{c}}(\Phi(t)) \cdot \underbrace{\dot{\Phi}(t)}_{>0}$$

3. Die Äquivalenz von Wegen ist wirklich eine Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv)

**Definition:**

Eine (orientierte, reguläre)  $C^r$ -Kurve ( $r \geq 1$ ) im (affinen)  $\mathbb{R}^n$  ist eine Äquivalenzklasse  $[c]$  von regulären  $C^r$ -Wegen  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ein Repräsentant heißt eine (zulässige) Parametrisierung der  $C^r$ -Kurve, eine die Äquivalenz vermittelnde Abbildung  $\Phi$  eine (zulässige) Parametertransformation.

**Beispiel:**

Die „Kreis“-Darstellungen

$$t \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left(|t| < \frac{\pi}{2}\right)$$

und

$$\tilde{t} \mapsto \tilde{c}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh \tilde{t}} \\ \tanh \tilde{t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 (\tilde{t} \in \mathbb{R})$$

sind  $\mathcal{C}^\infty$ -äquivalente Parametertransformationen:

$$\Phi(t) = \text{Artanh} \sin t = \tilde{t}$$

mit

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{\cos t} > 0$$

**Bemerkung:**

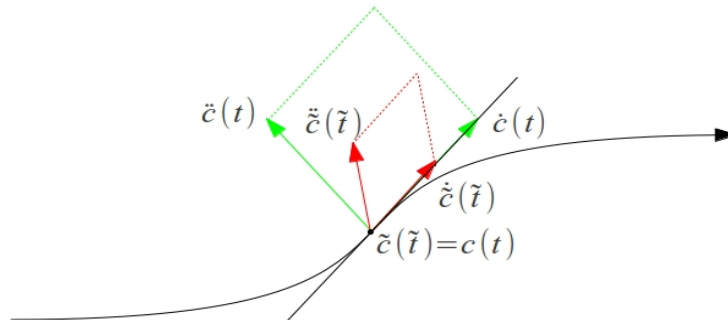
Nicht jedes 1-dimensionale „Gebilde“ im  $\mathbb{R}^n$  (z.B. eine vollständige Kreislinie) lässt sich global und injektiv als Bild eines offenen Intervalls darstellen.

Objekte, die sich nur lokal so parametrisieren lassen, heißen (1-dimensionale) differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Für lokale Untersuchungen ist eine solche Erweiterung der Kurvenbegriffs nicht nötig.

Die bisher eingeführten Begriffe sind offensichtlich affin-invariant. Aber im Folgenden sind auch nur Eigenschaften von Kurven von Interesse, also Eigenschaften, die nicht von der Parametrisierung abhängen.

Hier ein Beispiel aus der rein affinen Differentialgeometrie.

**Beispiel:**



**Satz 1.1.1:**

$t \mapsto c(t)$  sei Parameterdarstellung einer  $\mathcal{C}^r$ -Kurve im (affinen)  $\mathbb{R}^n$  mit  $r \geq n$ . Dann sind die Ableitungsvektoren

$$c_p := \frac{d^p c}{dt^p} (p = 1, \dots, n)$$

nicht invariant gegenüber Parametertransformationen, jedoch die (punktualen, orientierten) Schmiege-



räume (oskulierende Räume, „osculating spaces“)

$$S_p(t) := c(t) + \langle \langle c_1(t), \dots, c_p(t) \rangle \rangle$$

Spezialfälle:

Tangente  $S_1(t) = c(t) + \langle \langle \dot{c}(t) \rangle \rangle$

Schmiegeebene  $S_2(t)c(t) + \langle \langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle \rangle$

**Beweis (von Satz 1.1.1):**

Aus  $c = \tilde{c} \circ \Phi$  folgt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}\dot{c} &= \dot{\Phi} (\dot{\tilde{c}} \circ \Phi) \\ \ddot{c} &= \dot{\Phi}^2 (\ddot{\tilde{c}} \circ \Phi) + Q_2^1 (\dot{\Phi}, \ddot{\Phi}) \cdot \dot{\tilde{c}}(t)\end{aligned}$$

allgemein

$$c_p = \dot{\Phi}^p (\tilde{c}_p \circ \Phi) + \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{Q_p^k (\dot{\Phi}, \ddot{\Phi})}_{\text{„Kettenregelpolynome“}} (\tilde{c}_k \circ \Phi)$$

Also hat man die Transformationsformel

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\Phi} & 0 & \dots & 0 \\ Q_2^1 & \dot{\Phi}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ Q_p^1 & \dots & Q_p^k & \dot{\Phi}^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \circ \Phi \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{c}_p \circ \Phi \end{pmatrix}$$

mit einer regulären Transformationsmatrix positiver Determinante.

Das zeigt

$$\langle \langle c_1, \dots, c_p \rangle \rangle = \langle \langle \tilde{c}_1 \circ \Phi, \dots, \tilde{c}_p \circ \Phi \rangle \rangle$$

und die weiteren Behauptungen.

□

**Bemerkung:**

Die Regularitätsforderung  $\dot{c}(t) \neq 0$  bedeutet, dass in jedem Punkt die Tangenten als 1-dimensionale Unterräume existieren.

Die Schmiegräume kann man dazu benutzen, um festzustellen, ob eine Kurve in einem echten affinen Teilraum  $U_p \subset \mathbb{R}^n$  liegt, in einer Geraden, einer Ebene usw. (affin-invariant!)

Zunächst gilt offensichtlich

$$S_1(t) \subseteq S_2(t) \subseteq \dots \subseteq S_n(t) \leq p$$

**Satz 1.1.2:**

- a) Liegt eine  $\mathcal{C}^{p+1}$ -Kurve in einem  $p$ -dimensionalen affinen Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  ( $1 \leq p \leq n-1$ ), so ist

$$\forall_t \dim S_{p+1}(t) < p+1$$

d.h. der  $(p+1)$ -te Schmiegraum degeneriert.

- b) Gilt umgekehrt

$$\forall_t \dim S_{p+1}(t) = \dim S_p(t) \stackrel{!}{=} p$$

so liegt die Kurve in einem  $p$ -dimensionalen, aber keinem niedriger dimensionalen affinen Unterraum.

### Anwendung:

1. Eine  $\mathcal{C}^2$ -Kurve  $[c]$  im  $\mathbb{R}^n$  verläuft genau dann geradlinig, wenn  $\forall_t (\dot{c}(t), \ddot{c}(t))$  linear abhängig ist.  
 $[„\Rightarrow“$  nach a),  $„\Leftarrow“$  nach b), da  $[c]$  regulär]

### Definition:

Ein (regulärer) Kurvenpunkt  $c(t)$  heißt Wendepunkt (WP, inflection point), falls  $(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))$  linear abhängig ist.

2. Eine wendepunktfreie  $\mathcal{C}^3$ -Kurve  $[c]$  im  $\mathbb{R}^n$  verläuft genau dann in einer Ebene, wenn  $\forall_t (\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t))$  linear abhängig ist.

### Definition:

Ein Nicht-Wendepunkt  $\dot{c}(t)$  heißt „Henkelpunkt“ (handle point), wenn  $(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t))$  linear abhängig ist.

### Beweis (von Satz 1.1.2):

- a)

$$\forall_t \quad c(t) = p_0 + \sum_{k=1}^p \lambda_k(t) \cdot a_k \in U_p = p_0 + \langle\langle a_1, \dots, a_p \rangle\rangle \Rightarrow$$

$$\forall_{l=1}^{p+1} \quad \forall_t \quad c_l(t) = c^{(l)}(t) = \sum_{k=1}^p \lambda_k^{(l)}(t) \cdot a_k \in \langle\langle a_1, \dots, a_p \rangle\rangle \Rightarrow$$

$$\forall_t \quad \dim S_{p+1}(t) \leq p < p+1$$

- b) Nach Voraussetzung ist  $(c_1, \dots, c_p)(t)$  linear unabhängig, aber  $(c_1, \dots, c_{p+1})(t)$  linear abhängig.

Es existieren also Funktionen  $t \mapsto \lambda_0(t), \dots, \lambda_{p-1}(t)$  mit

$$c_{p+1} = \sum_{k=1}^p \lambda_{k-1} c_k \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{(\dot{c})^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k (\dot{c})^k}_{(*)} \quad (*)$$

Die Funktionen sind stetig auf  $I$ , denn  $(*)$  kann nach  $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$  aufgelöst werden (Inhomogenes lineares Gleichungssystem mit vollrangiger Koeffizientenmatrix, da  $c_1, \dots, c_p$  linear unabhängig; Einträge und „rechte Seite“ stetig).

Die Koeffizientenfunktionen  $t \mapsto \dot{c}^i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) genügen also der linearen Differentialgleichung  $p$ -ter Ordnung

$$y^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k y^{(k)}$$

mit stetigen Koeffizienten. für sie existiert ein Fundamentalsystem  $y_1, \dots, y_p : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass für jede Lösung gilt

$$y(t) = \sum_{k=1}^p a_k y_k(t)$$

also auch

$$\dot{c}^i(t) = \sum_{k=1}^p a_k^i y_k(t)$$

und damit

$$\dot{c}(t) = \sum_{k=1}^p y_k(t) a_k$$

mit konstanten Vektoren  $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$ .

Integration liefert  $\forall t \in I$

$$c(t) = c(t_0) + \sum_{k=1}^p \left( \int_{t_0}^t y_k(\tau) d\tau \right) a_k \in c(t_0) + \langle\langle a_1, \dots, a_p \rangle\rangle =: U_p$$

Es ist schließlich

$$\underline{\dim U_p = p}$$

denn aus  $\dim U_p = k < p$  folgt nach a), dass  $\dim S_{k+1} < k + 1$ , also auch  $\dim S_p < p$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

□

## 2 Literaturhinweise

Kühnel: Differentialgeometrie: Kurven, Flächen, Mannigfaltigkeiten