Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Fakultät für Mathematik und Informatik

Differentialgeometrie

Prof. Pabel

Andreas Rosenberger, Nils Wisiol
info@nils-wisiol.de

16. April 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe und Bezeichnungen aus der linearen Algebra und analytischen Geometrie 3
1.1 Strukturen 3

2 Literaturhinweise 5

1 Grundbegriffe und Bezeichnungen aus der linearen Algebra und analytischen Geometrie

Die klassische Differentialgeometrie der Kurven und Flächen benutzt als umgebenden Raum einen n-dimensionalen, orientierten, euklidischen Raum E^n mit zugehörigem euklischem Richtungsvektorraum V^n.

1.1 Strukturen

V^n ist mit einem Skalarprodukt $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle \in \mathbb{R}$ ausgestattet. Damit lassen sich messen:

- die Länge von Vektoren X: $|X| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$
- die Orthogonalität von Vektoren X, Y: $X \perp Y \Leftrightarrow \langle X, Y \rangle = 0$
- der Winkel zwischen zwei Vektoren X, Y: $\cos \angle(X, Y) = \langle \frac{X}{|X|}, \frac{Y}{|Y|} \rangle$
- der Abstand von Punkten p, q: $\mathrm{d}(p, q) = |\vec{pq}|$
- Flächeninhalte, Volumina, usw.

Ist zusätzlich eine feste Orthonormalbasis $(\mathring{e}_1, ...\mathring{e}_n)$ (definiert durch $\langle \mathring{e}_i, \mathring{e}_k \rangle = \delta_{ik}$) ausgezeichnet als positiv orientiert, erhält man eine Orientierung des Raumes und kann alle Basen in positiv und negativ orientierte einteilen.

Standard-Modell. $E^n = V^n = \mathbb{R}^n$, ausgestattet mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n X^i Y^i$ und der (positiv orientierten) Standardbasis $\mathring{e}_1, ...\mathring{e}_n)$ mit $\mathring{e}_i = (0, ...1, ...0)^T$. Dieses Standardmodell reicht bei uns meist aus: Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems $(0; e_1, ...e_n)$ in einem abstraktem, orientiertem euklidschem Raum E^n, bestehend aus

- einem „Ursprung" („Nullpunkt") $0 \in E^n$
- einer positiv orientierten Orthonormalbasis $(e_1, ...e_n)$ im V^n

kann man jedem Punkt und jedem Vektor eindeutig reelle Koordinaten zuordnen:

- Vektor: $X = \sum_{i=1}^n X^i e_i \in V^n \mapsto (X^1, ...X^n) \in \mathbb{R}^n$
- Punkt: $p = 0 + \sum_{i=1}^n p^i e_i \mapsto (p^1, ...p^n) \in \mathbb{R}^n$

Aus einem Skalarprodukt in V^n wird in Koordinaten

$$\langle X, Y\rangle = \left\langle \sum X^i e_i, \sum Y^k e_k \right\rangle = \sum_i \sum_k X^i Y^k \langle e_i, e_k\rangle = \sum_{i=1}^n X^i Y^i$$

das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Man ist im Stanard-Modell angelangt. Ein Wechsel des kartesischen Koordinatensystems im E^n induziert im Koordinatenraum $\mathbb{R}^n$ eine *Bewegung*

$$p \mapsto p' = Dp + t$$

bestehend aus einer eigentlichen orthogonalen Drehmatrix $D \in SO(u, \mathbb{R})$ mit $\det D = +1$ und einem Translationsvektor $t \in \mathbb{R}^n$. In der euklidschen Differentialgeometrie werden Eigenschaften von Objekten (Kurven, Flächen, ...) untersucht, die invariant gegenüber solchen Transformationen sind, also nicht vom gewählten kartesischen Koordinatensystem abhängig sind. Bemerkung: in der sogenannten affinen Differentialgeometrie untersucht man Eigenschaften von Objekten, die (in Koordinaten) invariant sind gegenüber beliebigen affinen Transformationen $p \mapsto p' = Ap + t$, A regulär. Man ignoriert dort vollständig die metrische Struktur des $\mathbb{R}^n$. Der umgebende Raum ist dann ein *affiner Punktraum* (bei uns nur am Rande betrachtet).

2 Literaturhinweise

Kühnel: Differentialgeometrie: Kurven, Flächen, Mannigfaltigkeiten