DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

1. Phänomenologie

16.10.13

1.1. **Die logarithmische Spirale.** Welche differenzierbaren und regulären Kurven in $\mathbb{R}^2$ schneiden alle Geraden durch den Ursprung stets unter dem gleichen Winkel $\alpha \notin \{0, \pi\}$? Dies impliziert strenge Monotonie im Argument von $\gamma(t)$, $\gamma(t) = r(t)(\cos t \ \sin t)^T$. Der Winkel zwischen $\gamma(t)$ und $\dot{\gamma}(t)$ ist

$$\frac{\langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}{|\gamma(t)| \cdot |\dot{\gamma}(t)|} = \cos \alpha \Leftrightarrow \frac{\dot{r}(t)}{\sqrt{r^2 + \dot{r}^2}} = \cos \alpha$$

mit $\dot{\gamma}(t) = \dot{r}(t)(\cos t \ \sin t)^T + r(t)(-\sin t \ \cos t)$ und $\langle \gamma, \dot{\gamma} \rangle = r\dot{r}$. Spezialfall: $\cos \alpha = 0 \implies \dot{r} \equiv 0$.

Nehmen wir an, dass $\cos \alpha \neq 0$, d.h. in allen anderen Fällen $\dot{r}(t) = \alpha r(t)$ mit $a = \tan \alpha$, dann erhalten wir eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.

Theorem 1.1. *Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion mit $\dot{x}(t) = ax(t)$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$. Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit $x(t) = c \cdot e^{at}$, $t \in \mathbb{R}$.*

Hinweise zum 1. Übungblatt

18.10.13

Sei $f : V \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit V endlich-dimensionaler, normierter, reeller Vektorraum, $V = \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist die Ableitung von f ausgewertet in x $Df(x) : V \to \mathbb{R}, h \mapsto Df(x) \cdot h$. $Df(x) \cdot h$ ist die Richtungsableitung von f ausgewertet in x in Richtung h. Dann ist $Df : V \to d(V, \mathbb{R}), x \mapsto Df(x)$.

$$Df(x) \cdot h = \frac{d}{d\varepsilon} f(x + \varepsilon h)|_{\varepsilon = 0}.$$

Beispiel. Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, [x_1, ..., x_n]^T = x \mapsto g(x)$. Dann ist $\frac{\partial}{\partial x_i} g(x) = Dg(x) \cdot [0\,0 \ldots 1 \ldots 0\,0] =$

1.2. **Das n-Körperproblem.** Es seien n Körper (Massepunkte) $k_1, ..., k_n$ im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die Körper haben die Massen $m_1, ..., m_n$. Die Gravitationskraft, die die k_i, $i \neq j$ auf k_j ausüben ist gegeben durch $-\sum_{h \neq j} g m_j m_k \frac{x_j(t) - x_k(t)}{|x_j(t) - x_k(t)|^3}$. Wir erhalten n Gleichungen der Form

$$m_j x_j'' = -\sum_{h \neq j} g m_j m_k \frac{x_j(t) - x_k(t)}{|x_j(t) - x_k(t)|^3} \tag{1.1}$$

für $j = 1, ..., n$. Im Fall $n = 2$ und $k_1$immer im Ursprung des $\mathbb{R}^3$, d.h. $x_1(t) \equiv 0$ erhalten wir mit $x(t) := x_2(t)$ die Gleichung

$$x''(t) = -g m_1 \frac{x(t)}{|x(t)|^3}. \tag{1.2}$$

1.3. **Räuber-Beute-Modell.** Sei $x(t)$ die größe der Beutepopulation, sei $y(t)$ die Größte der Räuberpopulation, jeweils zur Zeit t. Wir modellieren $x' = ax$ mit $0 < a \in \mathbb{R}$ für den Fall von null Räubern. Für mehr als null Räuber ist die Anzahl der Aufeinandertreffen zwischen Beute und Räuber ist proportional zu $x(t) \cdot y(t)$. Daher $x' = ax - bxy$ mit $0 < b \in \mathbb{R}$. Weiterhin modellieren wir[1] $y' = -cy + dxy$. Zusammen erhalten wir

$$x' = ax - bxy, \;\; y' = -cy + dxy. \tag{1.3}$$

Nun wird gefischt. Das heißt, die Anzahl der Räuber- und Beutefische reduziert sich gleichmäßig proportional zu ihrer Population, d.h. die Abnahme der Zahl der Räuber ist εy und die der Beutefische entsprechend εx mit $\varepsilon > 0$. Wir erhalten das neue, verfeinerte Modell

$$x' = (a - \varepsilon)x - bxy, \;\; y' = -(c + \varepsilon)y + dxy. \tag{1.4}$$

Kann 1.4 erklären, warum eine Reduzierung des Fischfangs ε sich wesentlich günstiger auf die Räuberfische als auf Beutefische auswirken kann? Sei $\varepsilon < a$ (moderates Fischen). Lösungen dieser Gleichung sind

- $x(t) \equiv y(t) \equiv 0$
- Ansatz: $x'(t) \equiv y'(t) \equiv 0$, d.h. x bzw. y sind konstant. Wir erhalten $(a - \varepsilon)x(t) - bx(t)y(t) = 0$ und $-(c + \varepsilon)y(t) + dx(t)y(t) = 0$. Durch Umformung erhalten wir $x(t)y(t) = \frac{a-\varepsilon}{b}x(t)$ bzw. $x(t)y(t) = \frac{c+\varepsilon}{d}y(t)$. Damit ergibt sich $y(t) = \frac{a-\varepsilon}{b}$ und $x(t) = \frac{c+\varepsilon}{d}$ als zweite konstante Lösung. Diese Lösung beschreibt ein natürliches Gleichgewicht der beiden Populationen. Den Punkt $(\frac{c+\varepsilon}{d}, \frac{a-\varepsilon}{b}) \in \mathbb{R}^2$ nennen wir einen stationären Punkt von 1.4. Weitere konstante Lösungen existieren nicht.
- Aus 1.4 folgern wir $\frac{x'}{x} = (a - \varepsilon) - by$ und $\frac{y'}{y} = -(c + \varepsilon) + dx$. Wir multiplizieren mit $\frac{y'}{y}$ bzw. $\frac{x'}{x}$ und setzen dann gleich. Es ergibt sich $(-(c + \varepsilon) + dx)\frac{x'}{x} - ((a - \varepsilon) - by)\frac{y'}{y} = 0$. Den Ausdruck $\frac{x'}{x}$ nennt man auch die logarithmische Ableitung, da $\frac{d}{dx} \log x(t) = \frac{x'}{x}$. Wir können daher schreiben $\frac{d}{dt}\left(-(c + \varepsilon) \log x + dx - (a - \varepsilon) \log y + by\right) = 0$. Wir definieren $H(x, y) := -(c + \varepsilon) \log x + dx - (a - \varepsilon) \log y + by$. Also ist $H(x(t), y(t))$ konstant. Das heißt, jede Lösungskurve $t \mapsto (x(t), y(t))$ liegt auf einer Niveaumenge der Funktion $H(x(t), y(t))$. Solch eine Funktion H nennt man ein erstes Integral des Systems (1.4).

  Lemma 1.2. *Die Niveaumenge der Funktion H im ersten Quadranten sind einfach geschlossene Kurven um den Gleichgewichtspunkt $(\frac{c+\varepsilon}{d}, \frac{a-\varepsilon}{b})$.*

  Beweis. Siehe 2. Übungsblatt. □

  Man kann zeigen, dass die Lösungskurven die Niveaumengen des ersten Integrals vollständig und gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen. Alle nicht konstanten Lösungen der Differentialgleichung sind daher periodisch, das heißt es gibt ein $T > 0$ mit $x(t + T) = x(t)$ und $y(t + T) = y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

  Um die Langzeitentwicklung zu studieren, betrachten wir Mittelwerte $\overline{x} = \frac{1}{T}\int_0^t x(t)dt$, $\overline{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt$ einer nicht konstanten, also periodischen Lösung $(x(t), y(t))$ mit Periode $T > 0$.

[1] konfuse Begründung hier einfügen ...

Es gilt

$$0 = \frac{1}{T}(\log x(T) - \log x(0)) = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{x'(t)}{x(t)}dt = \frac{1}{T}\int_0^T ((a-\varepsilon) - by(t))\,dt.$$

Wir erhalten $\frac{1}{T}\int_0^T by(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T (a-\varepsilon)dt$ und daher $\frac{1}{T}\int_0^T by(t)dt = a-\varepsilon$. Es folgt $\overline{y} = \frac{a-\varepsilon}{b}$. Analog erhält man $\overline{x} = \frac{c+\varepsilon}{d}$.

Damit erhalten wir als Ergebnis, dass (innerhalb unseres Modells) eine Reduzierung des Fischfangs ε tatsächlich eine Zunahme der Räuberpopulation aber eine Abnahme der Beutepopulation bewirkt.

Dieses sogenannte Voltera-Prinzip gilt auch für den Einsatz von Insektenvernichtungsmitteln.

1.4. **Oszillatoren.**

Bild vom Pendel hier einfügen ...

1.4.1. *Das mathematische Pendel.* Für die Kraft gilt Kraft $= m\cdot a = m\cdot t\cdot \Theta''(t)$. Die Tangentialkraft wirkend auf das Pendel ist $m\cdot g\cdot \sin\Theta$. Wir nehmen an, dass die auch noch auftretende Reibungskraft sei proportional zur Geschwindigkeit $\dot{\Theta}$, also $-hl\Theta'(t)$ für $h\geq 0$. Damit folgt $\Theta''(t) = -\frac{k}{m}\Theta'(t) - \frac{g}{l}\sin\Theta(t)$. Wir betrachten die Anfangsbedingungen $\Theta(0)$ und $\Theta'(0)$. Lösungen:

(1) $\Theta(t)\equiv 0$. (Entspricht $\Theta(0)=0$ und $\Theta'(0)=0$.)
(2) $\Theta(t)\equiv \pi$. (Entspricht $\Theta(0)=\pi$ und $\Theta'(0)=0$.)
(3) Die Differentialgleichung zweiter Ordnung lässt sich in ein System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung äquivalent überführen. Sei dazu $x(t) := \Theta(t)$ und $y(t) := \Theta'(t)$. Also ist die Differentialgleichung äquivalent zu $x' = y$ und $y = -\frac{k}{m}y - \frac{g}{l}\sin x$. Durch Vergabe von Anfangsbedinungen $(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$ ist die Lösung $t\mapsto (x(t), y(t))$ eindeutig bestimmt[2]. Im Spezialfall $h=0$ erhalten wir das Gleichungssystem $x'=y$ und $y' = -\frac{g}{l}\sin x$. Frage: Gibt es ein erstes Integral, also eine Funktion $H(x,y)$, die konstant entlang von Lösungen ist? Wir versuchen es mit der Gesamtenergie $H(x,y) := W_{kin} + W_{pot} = \frac{1}{2}ml^2y^2 + mgl(1-\cos x)$.

Beweis. $\frac{d}{dt}(H\circ(x(t),y(t))) = ml^2yy' + mgl\sin x\cdot x' = ml^2x'\cdot(-\frac{g}{l}\sin x) + \ldots = 0$ □

Für Reibung $h>0$ streben fast alle Lösungen $(x(t),y(t))$ für $t\to\infty$ gegen die stabilen Ruhelagen $(2k\pi, 0)$, $k\in\mathbb{Z}$. Für jedes $k\in\mathbb{Z}$ konvergieren jeweils genau zwei Lösungskurven für $t\to\infty$ gegen die instabile Ruhelage $((2k+1)\pi, 0)$. Jede nicht konstante Lösung konvergiert für $t\to\infty$ gegen eine der Ruhelagen $(k\pi, 0)$, $k\in\mathbb{Z}$.

1.4.2. *Der harmonische Oszillator.* Es gilt $\sin\Theta(t) = \Theta(t) + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{2j+1}\frac{\Theta(t)^{2j+1}}{(2j+1)!} = \Theta(t) + \sigma(\Theta(t))$. Damit ist die Linearisierung um 0 gegeben durch $\Theta''(t) = -\frac{k}{m}\Theta'(t) - \frac{g}{l}\Theta(t)$. Dies ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Ohne Reibung ($h=0$) erhält man $\Theta'' = \frac{g}{l}\Theta$.

25.11.2013 Benutzername/Kennwort für Skrpit: dgl/skript

Theorem 1.3. *Sei $\omega\in\mathbb{R}$ und $x : [a,b]\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ für $t\in[a,b]$. Dann gibt es Konstanten c_1, $c_2\in\mathbb{R}$ mit $x(t) = c_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t$.*

[2] Das haben wir noch nicht bewiesen, klingt aber physikalisch plausibel.

Beweis. Sei $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine komplexe zweimal differenzierbare Funktion mit $x''(t) = -\omega^2 x(t)$. Wir setzen $x_1(t) := x'(t) - i\omega x(t)$. Dann gilt $x_1'(t) = x''(t) - i\omega x'(t) = -\omega^2 x(t) - i\omega x'(t) = -i\omega(-i\omega x(t) + x'(t)) = -i\omega x_1(t)$. Satz 1.1 impliziert dann $x_1(t) = \alpha e^{-i\omega t}$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$. Analog ergibt sich $x_2(t) = x'(t) + i\omega x(t) = \beta e^{i\omega t}$ für ein $\beta \in \mathbb{C}$. Also $x(t) = ae^{-i\omega t} + be^{i\omega t}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$. Ist $x(t)$ reell-wertig, so folgt $x(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$ für gewisse Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

Es ist also sinnvoll, Satz 1.1 für die komplexe Differentialgleichung $x'(t) = ax(t)$ für $a \in \mathbb{C}$ zur Verfügung zu haben.

2. Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Im Nachfolgenden ist $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 2.1. Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : J \times D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion. Eine differenzierbare Funktion $x : I \to D$ heißt *Lösung der Differentialgleichung* $x' = f(t,x)$, falls I ein Teilintervall von J ist und $x'(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in I$ gilt. Ist zusätzlich $x(t_0) = x_0$ für ein $t_0 \in I$, so nennt man $x : I \to D$ *Lösung des Anfangswertproblems* (AWP)

$$x' = f(t,x), x(t_0) = x_0. \tag{2.1}$$

Beispiel 2.2. Gegeben sei das Anfangswertproblem $x' = -tx^2$, $x(0) = -1$. Die rechte Seite $f(t,x) = -tx^2$ ist sicherlich auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert, d.h. $J = \mathbb{R}$ und $D = \mathbb{R}$. Der Seperationsansatz liefert

$$x(t) = \frac{2}{t^2 - 2}.$$

Das größte Intervall I mit $0 \in I$ (AWP) auf dem diese Lösung existiert, ist $I =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. Im Allgemeinen wird dieses Anfangswertproblem keine Lösung auf ganz J haben, wenn überhaupt nur auf einem Teilintervall.

2.1. **Eindeutigkeit.**

Anfangswertprobleme können mehrere Lösungen zeigen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2.3. Betrachte einen Eimer mit Loch. $x(t)$ sei die Füllhöhe des Eimers mit Wasser, a der Durchmesser des Lochs und A der Durchmesser des Eimers. Wir leiten aus der Physik her:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi v(t) = -\left(\frac{A}{2}\right)^2 \pi x'(t).$$

$\rho > 0$ sei die Dichte des Wassers. Wir erhalten mit der Fläche F

$$\Delta x F \rho g x = \frac{1}{2} \Delta x F \rho v^2 \implies v^2 = 2gx,$$

$$x'(t) = -c\sqrt{|x(t)|} \implies c = \sqrt{2g}\frac{a^2}{A^2} > 0.$$

Dies ist das Gesetz von Toricelli.

Sei der Eimer zum Zeitpunkt T leer, d.h. $x(T) = 0$ und für $c = 2$ haben wir dann das AWP

$$x' = -2\sqrt{|x(t)|}, x(T) = 0. \tag{2.2}$$

Mit dem Seperationsansatz ermittelt man unendlich viele Lösungen $x_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} (t-a)^2 & t < a, \\ 0 & a \leq t \leq b, \\ -(t-b)^2 & t > b. \end{cases}$$

a, b sind reelle Zahlen mit $a \leq T \leq b$, sonst beliebig. Die rechte Seite $f(t,x) = -2\sqrt{|x|}$ ist zwar stetig, jedoch ist die für alle $x \neq 0$ existierende partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = Dxf(t,x) = D_2 f(t,x) = f_x(t,x)$ unbeschränkt für $x \to 0$. Betrachte nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{|f(t,x_1) - f(t,x_2)|}{|x_1 - x_2|} \tag{2.3}$$

wird beliebig groß falls x_1, x_2 genügend nahe bei 0. Die Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblemes $x' = f(t,x), x(t_0) = x_0$ ist gesichert, falls (2.3) beschränkt bleibt.

Definition 2.4. Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ eine Menge. Man sagt eine Abbildung $f : G \to \mathbb{K}^n, (t,x) \mapsto f(t,x)$ erfüllt eine Lipschitzbedingung bezüglich x auf G, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt mit $|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ für alle Paare $(t,x_1), (t,x_2) \in G$ gibt. In diesem Fall heißt L *Lipschitz-Konstante* für f auf G. Die Funktion $f : G \to \mathbb{K}^n$ heißt *Lipschitz-stetig* bezüglich x, falls jeder Punkt $(t_0, x_0) \in G$ eine Umgebung U besitzt, so dass $f|_{U \cap G}$ einer Lipschitz-Bedingung bezüglich x auf $U \cap G$ genügt.

Beispiel 2.5. $f : \mathbb{R} \times [0;\infty[\to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto t\sqrt{x}$ ist Lipschitz-stetig bezüglich x auf $\mathbb{R} \times]0;\infty[$, aber nicht auf $\mathbb{R} \times [0;\infty[$.