

Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Fakultät für Mathematik und Informatik

SS12, Dr. Spoerhase

Exakte Algorithmen

Nils Wisiol

15. Mai 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Dynamisches Programmieren	4
3	Inklusion-Exklusion	5

1 Einführung

Hier fehlt noch et-
was.

2 Dynamisches Programmieren

Lemma 1. Sei $\alpha \leq 1/2$. Dann gilt

$$\sum_{i=0}^{\alpha \cdot n} \binom{n}{i} = O^*(2^{h(\alpha) \cdot n}),$$

wobei $h(\alpha) = -\alpha \log_2 \alpha - (1 - \alpha) \log_2 (1 - \alpha)$.

Beweis. Es ist $\sum_{i=0}^{\alpha n} \binom{n}{i} \leq n \binom{n}{\alpha n} = O^*(\binom{n}{\alpha n})$, denn die Binomialkoeffizienten $\binom{a}{b}$ steigen für $b \leq n/2$ monoton an. Per Definition gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Die Fakultät kann abgeschätzt werden durch $\sqrt{2\pi n}(n/e)^n \leq n! \leq 2\sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, also ist $n!$ proportional zu $(n/e)^n$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \binom{n}{\alpha n} &= O^* \left(\frac{(n/e)^n}{(\alpha n/e)^{\alpha n} ((1-\alpha)n/e)^{(1-\alpha)n}} \right) = O^* \left(\alpha^{-\alpha n} (1-\alpha)^{-(1-\alpha)n} \right) \\ &= O^* \left(2^{-\alpha \log_2 \alpha n} \cdot 2^{-(1-\alpha) \log_2 (1-\alpha)n} \right), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Satz 2. Eine kleinste dominierende Menge lässt sich in $O(1, 7088^n)$ ermitteln.

Beweis. Zunächst bestimmen wir eine nicht-erweiterbare unabhängige Menge I . Falls $|I| \leq \alpha n$, testen wir in $O^*(2^{h(\alpha)n})$ alle Teilmengen $D \subseteq V$ mit $|D| \leq |I|$. Falls $|I| > \alpha n$, wende Satz ?? an und berechne kleinste dominierende Menge in $O^*(2^{(1-\alpha)n})$.

Bild 2

Aus der Skizze ergibt sich die Laufzeit als das Maximum der beiden dargestellten Funktionen bei $\alpha^* \leq 0,22711$ bzw. $O(2^{0,7729n}) = O(1,7088^n)$. □

Der schnellste derzeit bekannte Algorithmus für dieses Problem benötigt ca. $O(1,5^n)$ und stammt aus 2010.

Hier fehlt noch et.
was
15.5.12
Hier fehlt noch et.
was

Bild 1: En-
tropiekurve

3 Inklusion-Exklusion

Bild 3: Venn-Diagramm aus 3 Mengen

Gehe von einem Problem aus, bei es leicht ist zu zählen, welche Elemente aus dem Universum S die Eigenschaft A oder B , A und B , ... erfüllen; es aber schwer ist zu zählen, wie viele Elemente diese Eigenschaften nicht besitzen. Es ergibt sich jedoch der Zusammenhang

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - (|A \cap B \cap C|)$$

Sind N Objekte und eine Menge $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ von Eigenschaften gegeben, bezeichnen wir für jedes $S \subseteq P$ mit $N(S)$ die Anzahl der Objekte, die (mindestens) die Eigenschaften in S erfüllen. Mit $N(\emptyset)$ bezeichnen wir die Anzahl der Objekte, die keine der Eigenschaften erfüllen. Wir können oben skizzierte Formel dann verallgemeinern, es ergibt sich

Satz 3. $N(\emptyset) = \sum_{S \subseteq P} (-1)^{|S|} N(S) = N(\emptyset) + \sum_i N(P_i) + \sum_{i < j} N(P_i, P_j) + \dots$

Beweis. Elemente des Universums, die keine der Eigenschaften besitzen, werden auf beiden Seiten der Gleichung einmal gezählt. Betrachte nun die Elemente, die genau die Eigenschaften $S = \{P_{i_1}, \dots, P_{i_s}\}$, $|S| = s$. Diese werden genau in den $N(S')$ mit $S' \subseteq S$ gezählt. Daraus folgt, dass diese Objekte zur rechten Seite der Gleichung jeweils $\sum_{S' \subseteq S} (-1)^{|S'|} = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \cdot (-1)^i = (-1+1)^s = 0$ beitragen. Objekte, die mindestens eine Eigenschaft besitzen, werden also auf der rechten Seite nicht gezählt. \square