

Julius-Maximilians-Universität Würzburg  
Fakultät für Mathematik und Informatik

**SS14, Dr. Spoerhase**  
auf Basis von SS12

# **Exakte Algorithmen**

Nils Wisiol, Andre Löffler

13. Mai 2014

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
1.1	Motivation . . . . .	3
1.2	Der Held-Karp-Algorithmus für TSP . . . . .	4
1.3	Ein Branching-Algorithmus für Größte unabhängige Teilmenge (Maximum independent Set, MIS) . . . . .	5
1.4	Anwendungsgebiete für exakte Algorithmen . . . . .	7
1.4.1	NP-Entscheidungsprobleme . . . . .	7
1.4.2	NP-Optimierungsprobleme . . . . .	7
1.4.3	Teilmengenprobleme . . . . .	7
1.4.4	Permutationsprobleme . . . . .	7
1.4.5	Partitionierungsprobleme . . . . .	7
1.5	Weitere Branching-Algorithmen . . . . .	7
1.5.1	SAT . . . . .	9
1.5.2	$k$ -SAT . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Dynamisches Programmieren</b>	<b>11</b>
2.1	Dominating Set . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Inklusion-Exklusion</b>	<b>14</b>
3.1	Hamiltonpfad . . . . .	14
3.2	Graphfärbung . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Measure &amp; Conquer</b>	<b>17</b>
4.1	Maximal Independent Set . . . . .	17
4.2	Dominating Set . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Tree width</b>	<b>20</b>
5.1	Dynamisches Programm für Vertex Cover . . . . .	20
5.2	Definition . . . . .	20
5.3	Beispiele . . . . .	21
5.4	Verbessertes dynamisches Programm für Vertex Cover für Graphen mit beschränkter Tree Width . . . . .	23

# 1 Einführung

## 1.1 Motivation

- effiziente Algorithmen vs. ineffiziente Algorithmen (also: polynomiell vs. super-polynomiell)
- Warum beschäftigen wir uns mit ineffizienten Algorithmen? Damit wir NP-schwere Probleme angehen können.
- Um mit NP-schweren Problemen umgehen zu können, bedient man sich:
  - Näherungsverfahren
    - \* Approximationsalgorithmen
    - \* Heuristiken
  - Exakte Verfahren
    - \* exakte exponentielle Algorithmen
    - \* parametrisierte Algorithmen, also Laufzeiten der Form  $f(k) \cdot \text{poly}(n)$
- Warum haben wir Interesse an exakten Verfahren?
  - (Laufzeit nicht entscheidend)
  - nicht-approximierbare Probleme
  - moderate Eingabegröße
    - \* z.B.:  $n^3 > 1,0941^n \cdot n$  für  $n \leq 100$
    - \* TSP exakt lösbar für  $n \leq 2000$  (für euklidische Instanzen sogar bis 15000)
    - \*  $2^{100} \cdot n > 2^n$  für  $n \leq 100$
  - Entscheidungsprobleme (z.B.: Hamiltonkreis)
  - theoretisches Interesse
- Thema: geht es intelligenter und schneller als Brute-Force?
- typisches Resultat:

BF:	$O(2^n)$	$O^*(2^n)$
Alg1:	$O(n \cdot 1,5^n)$	$O^*(1,5^n)$
Alg2:	$O(n^2 \cdot 1,4^n)$	$O^*(1,4^n)$

- Wozu solche Ergebnisse?

$$\begin{aligned} a^{n'_0} &= c \cdot a^{n_0} \\ n'_0 \cdot \log a &= \log c + n_0 \log a \\ n'_0 &= \frac{\log c}{\log a} + n_0 \end{aligned}$$

⇒ mehr Rechenleistung bringt nicht immer die gewünschte Laufzeitverbesserung, aber:

$$\begin{aligned} a^n, b^n, a &< b \\ a^{n'_0} &= b^{n_0} \\ n'_0 &= \frac{\log b}{\log a} n_0 \end{aligned}$$

- Literatur: *Exact Exponential Algorithms* von Fomin/Kratsch.

**Definition 1** ( $O^*$ -Notation).

$$f(n) = O^*(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = O(g(n) \cdot \text{poly}(n))$$

*Mathematische Definition aus der Übung:*

$$f(n) \in O^*(g) \Leftrightarrow \exists c, d, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot n^d \cdot g(n)$$

z.B.:  $O(1, 498^n \cdot n^{100}) \subsetneq O(1, 499^n)$

## 1.2 Der Held-Karp-Algorithmus für TSP

Gegeben seien  $n$  Städte  $c_1, \dots, c_n$  und für jedes Paar  $c_i \neq c_j$  eine Distanz  $d(c_i, c_j)$ . Wir suchen eine Permutation (Rundtour)  $\Pi$  auf  $\{1, \dots, n\}$ , sodass die Gesamtlänge der Tour

$$\left( \sum_{i=1}^{n-1} d(c_{\Pi(i)}, c_{\Pi(i+1)}) \right) + d(c_{\Pi(n)}, c_{\Pi(1)})$$

minimal ist.

Ein brute-force-Algorithmus würde alle Permutation ausprobieren und damit Laufzeit  $O(n! \cdot n)$  haben. Dies ist eine exponentielle Laufzeit, denn es gilt

$$\begin{aligned} \Theta(n! \cdot n) &= n \cdot 2^{\Theta(n \cdot \log_2 n)} \\ 2^{O(n \log n)} &= \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n = 2^{n \log n} \end{aligned}$$

### Dynamisches Programm

Für den Algorithmus von Held-Karp definieren wir  $\text{OPT}[S, c_i]$  mit der nichtleeren Menge  $S \subseteq \{c_2, \dots, c_n\}$  und  $c_i \in S$  als Länge des kürzesten Weges von  $c_1$  nach  $c_i$ , der genau die Städte  $S \cup \{c_1\}$  besucht. Damit ist für  $|S| = 1$  gerade  $\text{OPT}[\{c_i\}, c_i] = d(c_1, c_i)$  und für  $|S| \geq 2$ :

$$\text{OPT}[S, c_i] = \min_{c_j \in S \setminus \{c_i\}} \{ \text{OPT}[S \setminus \{c_i\}, c_j] + d(c_j, c_i) \}.$$

**Name:** *Algorithmus von Held-Karp*  
**Data:** Städte  $c_1, \dots, c_n$  und Distanzfunktion  $d$   
**Result:** Länge der kürzesten Rundreise durch alle  $c_i$   
**for**  $i = 1$  *bis*  $n$  **do**  
    |  $\text{OPT}[\{c_i\}, c_i] \leftarrow d(c_1, c_i)$   
**end**  
**for**  $j = 2$  *bis*  $n$  **do**  
    | **for**  $S \subseteq \{c_2, \dots, c_n\}$  *mit*  $|S| = j$  **do**  
        | | **for**  $c_i \in S$  **do**  
            | |  $\text{OPT}[S, c_i] \leftarrow \min_{c_j \in S \setminus \{c_i\}} \{\text{OPT}[S \setminus \{c_i\}, c_j] + d(c_j, c_i)\}$   
        | | **end**  
    | **end**  
**end**  
**return**  $\min_{i \in \{2, \dots, n\}} \{\text{OPT}[\{c_2, \dots, c_n\}, c_i] + d(c_i, c_1)\}$

**Algorithm 1:** Algorithmus von Held-Karp zum Lösen von TSP

Laufzeit von Held-Karp:

Der innere Ausdruck der For-Schleifen dauert  $O(n)$ . Dieser wird für höchstens alle Paare  $(S, c_i)$  mit  $S \subseteq \{c_2, \dots, c_n\}$  und  $c_i \in S$  ausgewertet. Davon gibt es  $O(n \cdot 2^n)$  viele, da es  $2^n$  Teilmengen gibt und jede dieser Teilmengen  $O(n)$  viele Elemente hat. Damit ergibt sich eine Gesamtlaufzeit von  $O(2^n \cdot n^2) \subseteq O^*(2^n)$ .

Speicherplatz:  $O(n \cdot 2^n)$

### 1.3 Ein Branching-Algorithmus für Größte unabhängige Teilmenge (Maximum independent Set, MIS)

Es sei ein Graph  $G = (V, E)$  gegeben. Gesucht ist ein  $I \subseteq V$  maximaler Kardinalität, so dass keine zwei Knoten aus  $I$  adjazent in  $G$  sind.

Ein brute-force-Algorithmus würde in  $O^*(2^n)$  alle möglichen Teilmengen ausprobieren. Stattdessen wollen wir einen Algorithmus für MIS angeben, der in  $O^*(3^{n/3}) = O^*(1.4423^n)$  liegt. Wir beobachten zunächst: Ist  $I$  eine maximale unabhängige Menge, so gilt:

- (i)  $v \in I \implies N(v) \cap I = \emptyset$ ,
- (ii)  $v \notin I \implies |N(v) \cap I| \geq 1$ ,
- (iii)  $N[v] =_{\text{def}} N(v) \cup v$  :  $N[v]$  enthält immer einen Knoten  $y$  aus  $I$  und kein anderer Knoten aus  $N[y]$  liegt in  $I$ .

**Name:** *MIS*  
**Data:** Graph  $G = (V, E)$   
**Result:** Mächtigkeit einer größten unabhängigen Menge  
**if**  $|V| = 0$  **then**  
    | **return** 0  
**else**  
    | wähle  $v \in V$  mit geringstem Grad  
    | **return**  $1 + \max_{y \in N[v]} \{MIS(G \setminus N[y])\}$   
**end**

**Algorithm 2:** Algorithmus zur Berechnung der Mächtigkeit einer größten unabhängigen Menge

Analyse:

Die Ausführung korrespondiert zu einem Suchbaum. Die Laufzeit entspricht  $O^*(\# \text{Knoten im Suchbaum})$ . Knoten vom Grad 2 können für die Laufzeit-Analyse ignoriert werden, da ein Pfad aus Grad-2 Knoten im Suchbaum höchstens  $n$  lang sein kann. Es reicht also, den reduzierten Suchbaum zu betrachten. In diesem sind aber mindestens die Hälfte aller Knoten Blätter.

Alternativ:

Sei  $l$  ein Blatt im Suchbaum, dann sei  $L(l)$  die Länge des Pfades von der Wurzel zu  $l$ . Dann gilt für die Laufzeit des Algorithmus:

$$O^*(\# \text{Knoten}) \subseteq O^*\left(\sum_{l \text{ Blatt}} L(l)\right) \subseteq O^*\left(\sum_{l \text{ Blatt}} n\right) = O^*(\# \text{Knoten})$$

Für die Anzahl der Knoten im Baum gilt folgende Rekursionsgleichung:

$$\begin{aligned} B(n) &\leq \sum_{y \in N[v]} B(n - (d(y) + 1)) \\ &\leq \sum_{y \in N[v]} B(n - (d(v) + 1)) \\ &= (d(v) + 1) \cdot B(n - \underbrace{(d(v) + 1)}_{=:s}) \\ &= s \cdot B(n - s) \end{aligned}$$

Auflösen der Rekursionsgleichung durch Beweis per Induktion:

$$\begin{aligned} B(0) &= 1 \\ \text{Behauptung: } B(n) &= 3^{\frac{n}{3}} \\ \text{Induktion: (IA) } B(0) &= 1 \leq 3^{\frac{n}{3}} \\ B(n) &\stackrel{\text{(IA)}}{\leq} s \cdot 3^{\frac{n-s}{3}} = 3^{\frac{n}{3}} \cdot \frac{s}{3^{\frac{s}{3}}} \leq 3^{\frac{n}{3}} \end{aligned}$$

Dieser Algorithmus hat also Laufzeit  $O^*(1.4423^n)$ .

## 1.4 Anwendungsgebiete für exakte Algorithmen

### 1.4.1 NP-Entscheidungsprobleme

Gegeben ist die Eingabe  $x \in \{0, 1\}^*$ . Gesucht ist die Lösung  $y \in \{0, 1\}^*$  mit  $|y| \leq m(|x|)$  für ein Polynom  $m$  und  $R(x, y) = \text{true}$ , wobei  $R$  ein polynomialzeit-berechenbare Relation ist.

Der brute-force Ansatz hat eine Laufzeit von  $O^*(2^{m(|x|)})$ .

### 1.4.2 NP-Optimierungsprobleme

Gegeben ist eine Eingabe  $x$ , gesucht ist eine zulässige Lösung  $y$  mit  $R(x, y) = \text{true}$  und  $|y| \leq m(|x|)$ . Ziel ist es, einen minimalen (maximalen) Zielfunktionswert  $\text{obj}(x, y) \in \mathbb{N}^+$ . Hierbei sind  $R, m, \text{obj}$  polynomialzeit-berechenbare Funktionen und  $m$  zusätzlich polynomiell.

### 1.4.3 Teilmengenprobleme

Eine zulässige Lösung ist eine Teilmenge einer gegebenen Grundmenge der Kardinalität  $n$ , z.B. MIS. Brute-force Ansätze haben hier eine Laufzeit von  $O^*(2^n)$  – alle möglichen Teilmengen testen.

### 1.4.4 Permutationsprobleme

Eine zulässige Lösung ist eine Permutation einer gegebenen Grundmenge mit Kardinalität  $n$ , z.B. TSP. Brute-force Ansätze dafür laufen in  $O^*(n!) = O^*(2^{O(n \log n)})$

### 1.4.5 Partitionierungsprobleme

Eine zulässige Lösung ist eine Partitionierung einer gegebenen Grundmenge mit Kardinalität  $n$ , z.B. Graph-Färbbarkeit. Brute-force:  $O^*(n^n) = O^*(2^{n \log n})$ .

## 1.5 Weitere Branching-Algorithmen

Allgemeine Form (Branch & Reduce):

Ein Branching-Algorithmus besteht aus Branching- und Reduktionsregeln.

- Branch-Regel: Unterscheide verschiedene Möglichkeiten und löse für jedes ein entsprechendes Teilproblem; gewinne daraus die Lösung für das Gesamtproblem.
- Reduce-Regel: Reduziere die Problemgröße; stop

Die *Korrektheit* von Branching-Algorithmen wird oft nicht bewiesen, da sie sich direkt aus dem vorliegenden Code ergibt. Die *Laufzeit* von Branching-Algorithmen analysiert man auf Basis der Anzahl der Blätter des Suchbaum.

**Definition 2** (Branching-Vektor). Betrachte die Anwendung einer Branching-Regel  $b$  auf einer Eingabe der Größe  $n$ . Angenommen,  $b$  zerlegt die Problemistanz in  $r \geq 2$  verschiedene Teilinstanzen der Größe  $n - t_1, \dots, n - t_r$ , so heißt  $(t_1, \dots, t_r)$  Branching-Vektor von  $b$ .

Für die Laufzeit ergibt sich daher folgende Rekurrenzgleichung für  $T(n)$ :

$$T(n) \leq \sum_{i=1}^r T(n - t_i)$$

$$T(0) = 1$$

für die Anzahl der Blätter.

**Satz 1.** Sei  $b$  eine Branching-Regel mit Branching-Vektor  $(t_1, \dots, t_r)$ . Dann führt die ausschließliche Anwendung von  $b$  zur Laufzeit  $O^*(\alpha^n)$ , wobei  $\alpha$  die eindeutige positive reelle Lösung der Gleichung

$$x^t - x^{t-t_1} - x^{t-t_2} - \dots - x^{t-t_r} = 0$$

mit  $t = \max t_i, i \in [1, r]$  ist.

*Beweis.* Wir nehmen an:  $T(n) = x^n$ . Dann ergibt sich daraus:

$$x^n \stackrel{!}{=} x^{n-t_1} + x^{n-t_2} + \dots + x^{n-t_r}$$

Division mit  $x^{n-t}$  ergibt

$$x^t = x^{t-t_1} + x^{t-t_2} + \dots + x^{t-t_r}$$

Zu zeigen bleibt noch, dass immer eine eindeutige reelle positive Lösung existiert.  $\square$

Problematisch dabei ist, dass die Lösung oft irrational ist und dass üblicherweise auf 5 Stellen gerundet wird. In Normalfall wird die Lösung mit  $\tau(t_1, \dots, t_r)$  bezeichnet. Dieses  $\tau$  nennt man auch *Branching-Faktor*.

**Lemma 2.** Sei  $r \geq 2$  und  $t_i > 0$  für  $i = 1, \dots, r$ , dann gilt

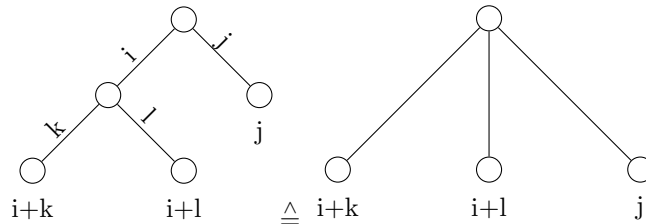
- i)  $\tau(t_1, \dots, t_r) > 1$
- ii)  $\tau(t_1, \dots, t_r) = \tau(t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(r)})$  für alle Permutationen  $\pi$ . Permutation der Fallreihenfolge ändert nichts an der Laufzeit, da es zum gleichen Suchbaum führt.
- iii)  $\tau(t_1, \dots, t_r) < \tau(t'_1, \dots, t_r)$  für  $t_1 > t'_1$ . Man sagt dann auch,  $\tau(t'_1, \dots, t_r)$  dominiert  $\tau(t_1, \dots, t_r)$ .

**Lemma 3** (Balancing-Lemma). i)  $\tau(k, k) \leq \tau(i, j)$  mit  $2 \cdot k = i + j$

ii)  $\tau(i, j) < \tau(i + \varepsilon, j - \varepsilon)$  für  $0 < i < j$  und  $0 < \varepsilon < \frac{j-i}{2}$ .

#### Addition von Branching-Vektoren:

Wir wissen, dass im rechten Baum  $\tau(i, j) > \tau(k, l)$  gilt. Dann lässt sich der Baum wie folgt vereinfachen:



Mit der neuen Darstellung:  $\tau(i + k, i + l, j)$ .



### 1.5.1 SAT

Eingabe ist eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform (KNF). Existiert eine erfüllende Belegung der Variablen? Ein brute-force-Algorithmus hat Laufzeit  $O^*(2^n)$ ; ob ein Algorithmus mit Laufzeit  $O^*((2 - \varepsilon)^n)$  existiert ist ungeklärt.

### 1.5.2 $k$ -SAT

Eingabe ist eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform, in der jede Klausel Länge kleiner oder gleich  $k$  besitzt.

Wir entwickeln für  $k$ -SAT einen Algorithmus mit Laufzeit  $O^*(\alpha_k^n)$ , wobei  $\alpha_k < 2$ .

- Der Algorithmus erweitert rekursiv partielle Belegungen der Variablen zu (ggf.) vollständigen Belegungen.
- Falls  $t$  eine partielle Belegung einer Formel  $F$  in KNF ist, dann ist  $F[t]$  die *reduzierte* Formel, die entsteht, indem man Klauseln streicht, die positive Literale enthalten und negierte Literale löschen.
- Also ist  $F[t]$  erfüllbar, genau dann wenn  $t$  sich zu einer erfüllbaren Belegung erweitern lässt.
- Enthält  $F[t]$  leere Klauseln, so ist  $F[t]$  nicht erfüllbar.
- Ist  $F[t]$  leer, so ist  $F[t]$  erfüllt.

**Name:**  $k$ -SAT1

**Data:** Formel  $F$  in konjunktiver Normalform und maximaler Klausellänge  $k$

**Result:** Erfüllbarkeit von  $F$

**if**  $F$  *enthält leere Klausel* **then**

  | **return** false

**else if**  $F$  *ist die leere Formel* **then**

  | **return** true

**end**

wähle Klausel  $l = (l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_q)$ ;

$t_1 \leftarrow l_1 = \text{true}$ ;

$t_2 \leftarrow l_1 = \text{false}, l_2 = \text{true}$ ;

$\vdots$

$t_q \leftarrow l_1 = \text{false}, \dots, l_{q-1} = \text{false}, l_q = \text{true}$ ;

**return**  $k\text{-SAT1}(F[t_1]) \vee k\text{-SAT1}(F[t_2]) \vee \dots \vee k\text{-SAT1}(F[t_q])$ ;

**Algorithm 3:** Algorithmus zur Entscheidung einer  $k$ -CNF-Formel  $F$

Für die Laufzeit ergibt sich die rekursive Formel  $T(n) \leq T(n-1) + T(n-2) + \dots + T(n-q)$  mit einem  $q \leq k$ . Die Laufzeit ergibt sich dann nach Satz 1 als  $O^*(\beta_k^n)$ , für 3-SAT beispielsweise  $O^*(1.8393^n)$ .

**Verbesserung.** Wir modifizieren den Algorithmus zu  $k$ -SAT2, indem wir immer die kleinste Klausel wählen. Dazu benötigen wir die folgende Definition:

**Definition 3.** Wir nennen eine partielle Belegung  $t$  einer Formel autark, wenn jede Klausel, die mindestens ein von  $t$  belegtes Literal enthält, auch ein von  $t$  mit wahr belegtes Literal enthält. Dies

bedeutet, dass die Klausel unabhängig von allen anderen Literalen der Klausel wahr ist.

**Beispiel.**

$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_4)$$

Für  $t = \{x_1 = \text{true}, x_2 = \text{false}\}$  ergibt sich  $F[t] = \{(x_3 \vee \bar{x}_4)\}$ .

Für  $t' = \{x_1 = \text{true}\}$  ergibt sich  $F[t'] = \{(\bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_4)\}$

Daraus ergeben sich die folgenden Beobachtungen.

- (i) Wenn  $t$  autark ist, dann ist  $F$  genau dann erfüllbar, wenn  $F[t]$  erfüllbar ist. Das bedeutet, dass wir für autarke  $t$  das Ergebnis von  $k\text{-SAT2}(F[t])$  zurückgeben können.
- (ii) Wenn  $t$  nicht autark ist, dann enthält  $F[t]$  eine Klausel von Länge höchstens  $k - 1$ .

Der verbesserte Algorithmus sieht dann wie folgt aus (Änderungen in **rot**):

**Name:**  $k\text{-SAT2}$

**Data:** Formel  $F$  in konjunktiver Normalform und maximaler Klausellänge  $k$

**Result:** Erfüllbarkeit von  $F$

**if**  $F$  enthält leere Klausel **then**

**return** false

**else if**  $F$  ist die leere Formel **then**

**return** true

**end**

wähle **kürzeste** Klausel  $l = (l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_q)$ ;

$t_1 \leftarrow l_1 = \text{true}$ ;

$t_2 \leftarrow l_1 = \text{false}, l_2 = \text{true}$ ;

$\vdots$

$t_q \leftarrow l_1 = \text{false}, \dots, l_{q-1} = \text{false}, l_q = \text{true}$ ;

**if**  $t_i$  autark für ein  $i = 1, \dots, q$  **then**

**return**  $k\text{-SAT2}(F[t_i])$

**return**  $k\text{-SAT2}(F[t_1]) \vee k\text{-SAT2}(F[t_2]) \vee \dots \vee k\text{-SAT2}(F[t_q])$ ;

**Algorithm 4:** Verbesserter Algorithmus zur Entscheidung einer  $k\text{-CNF}$ -Formel  $F$

**Behauptung.** Der Algorithmus hat eine Laufzeit von  $O^*(\alpha_k^n)$ , wobei  $\alpha_k = \beta_{k-1}$ .

**Beobachtung.** Sei  $v$  ein Knoten im Suchbaum, nicht die Wurzel. Wenn  $v$  ein  $k$ -Branching ist, dann ist sein Vater ein Reduce-Knoten. (Immer, wenn gebranched wird, enthält Formel  $F[t_i]$  mindestens eine Klausel der Länge  $\leq k - 1$ .)

## 2 Dynamisches Programmieren

### 2.1 Dominating Set

**Definition 4.** Sei ein Graph  $G = (V, E)$  gegeben. Wir nennen eine Menge  $D \subseteq V$  dominierend für  $G$ , falls jeder Knoten  $v \in V$  entweder in  $D$  liegt, oder adjazent zu einem Knoten aus  $D$  ist.

**Problem Minimum Dominating Set (MDS).** Eingabe ist ein Graph  $G = (V, E)$ , gesucht ist eine Dominierende Menge  $D$  für  $G$  mit minimaler Kardinalität  $\gamma(G)$ .

Ein brute-force-Algorithmus für das kleinste dominating set läuft in  $O^*(2^n)$  durch Ausprobieren aller Teilmengen von  $V$ . Zur Verbesserung dieser Laufzeit betrachten wir nicht erweiterbare unabhängige Mengen (UM) und verwenden dynamische Programmierung.

**Lemma 4.** Eine UM lässt sich effizient berechnen.

*Beweis.* Der folgende Algorithmus hat Laufzeit  $O(n + m)$  und löst das gegebene Problem.

**Name:** *neUM*

**Data:** Graph  $G$

**Result:** nicht-erweiterbare UM

**if**  $V = \emptyset$  **then**

**return**  $\emptyset$

    Wähle  $v \in V$  mit höchstem Grad

**return**  $v + \text{neUM}(G - N[v])$

**Algorithm 5:** Algorithmus zum Bestimmen einer nicht-erweiterbaren Unabhängigen Menge

□

**Lemma 5.** Jede nicht erweiterbare UM  $I$  eines Graphen  $G$  ist dominierend für  $G$ .

*Beweis.* Angenommen, dass nicht, dann gäbe es ein  $v \in V - I$ , dass nicht adjazent zu Knoten aus  $I$  ist. Dann wäre  $I + v$  eine unabhängige Menge, Widerspruch zur Nichterweiterbarkeit. □

**Idee.** Zunächst bestimmen wir ein nicht-erweiterbare UM  $I$  für  $G$ . Dann verfahren wir wie folgt:

- i) Falls dieses “genügend klein” ( $|I| \leq \alpha \cdot n$ ) ist, können wir alle Knotenmengen  $D \subseteq V$  mit  $|D| \leq |I|$  ausprobieren.
- ii) Falls  $I$  “groß” ( $|I| > \alpha \cdot n$ ) ist, wenden wir das folgende Verfahren an, dass sich aus der Struktur von  $G$  ergibt.

**Lemma 6.** Sei  $G$  ein Graph und  $I$  eine nicht-erweiterbare UM für  $G$ . Dann lässt sich eine kleinste dominierende Menge für  $G$  in  $O^*(2^{n-|I|})$  ermitteln.

*Beweis.* Wir definieren uns eine Menge  $J =_{\text{def}} V - I$ . Anstatt alle  $2^n$  Teilmengen  $D \subseteq V$  zu betrachten, probieren wir “nur” die  $2^{|J|} = 2^{n-|I|}$  vielen Projektionen  $J_D =_{\text{def}} D \cap J$  von allen möglichen  $D \subseteq V$  in  $J$ . Wir bestimmen eine dominierende Menge  $D$  mit den Eigenschaften:

- $J_D = J \cap D$  und
- $|D| = \min\{|D'| : D' \text{ dominierende Menge, } J_D = J \cap D'\}$ .

Für diese Menge gilt dann  $D = J_D \cup I_D$ , wobei  $I_D =_{\text{def}} I \setminus N(J_D)$ . Dann folgt daraus

$$\gamma(G) = \min_{J_D \subseteq J} |D|.$$

Es bleibt die Frage, wie man von  $J_D$  auf  $D$  kommt. Es gilt, dass  $I_D \subseteq D$ , da  $I_D$  von keinem Knoten aus  $I - I_D$  und  $J$  dominiert werden kann. Die einzigen von  $I_D \cup J_D$  noch nicht dominierten Knoten sind die Knoten:

$$J_X =_{\text{def}} J - (N[J_D] \cup N(I_D)).$$

Um  $D$  zu ermitteln, müssen wir daher “nur” die kleine Menge  $D_{J_X} \subseteq I - I_X$  finden, die  $J_X$  dominiert. Dann ist  $D = J_D \cup I_D \cup D_{J_X}$ .

Der naive Ansatz wäre, für jedes  $J_X$  das entsprechende  $D_{J_X}$  separat zu bestimmen. Dies ist jedoch zu langsam. Cleverer bestimmt man simultan für jedes  $X \subseteq J$  das kleinste  $D_X \subseteq I$ , dass  $X$  dominiert. Dazu betrachten wir folgendes dynamisches Programm:

Dynamisches Programm:

Sei  $I = \{v_1, \dots, v_k\}$ . Dann sei  $D_{X,i}$  die kleinste Teilmenge von  $\{v_1, \dots, v_k\}$ , die  $X$  dominiert.  $\Rightarrow D_X = D_{X,R}$ .

- $i = 0$ :  

$$D_{X,0} = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } X = \emptyset \\ \{v_1, \dots, v_k\} & \text{falls } X \neq \emptyset \end{cases}$$
- $i \geq 1$ :  
 $D_{X,i} = \text{die kleinere der Mengen } D_{X,i-1} \text{ und } D_{X-N(v_i),i-1} \cup \{v_i\}$

Laufzeit des dyn. Programms:  $O(2^{|J| \cdot n^2}) = O^*(2^{|J|})$

Gesamte Laufzeit des Algorithmus:

- dyn. Programm:  $O^*(2^{|J|})$
- ermittle für jedes der  $2^{|J|}$ -vielen  $J_D \subseteq J$  die Menge  $I_D, J_X, D_{J_X}$ , wobei sich die dominierende Menge durch  $D = I_D \cup J_D \cup D_{J_X}$  ergibt.  $\Rightarrow O^*(2^{|J|})$

$$\Rightarrow O^*(2^{|J|}) = O^*(2^{n-|I|})$$

□

**Lemma 7** (Hilfslemma). Sei  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ , dann ist

$$\sum_{k=0}^{\alpha n} \binom{n}{k} = O^*(2^{h(\alpha) \cdot n}),$$

wobei  $h(\alpha) = -\alpha \log_2 \alpha - (1 - \alpha) \log_2 (1 - \alpha)$ .

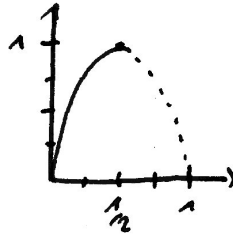


Abbildung 2.1: Graph des Binomialkoeffizienten

*Beweis.* Es ist  $\sum_{i=0}^{\alpha n} \leq n \binom{n}{\alpha n} = O^*\left(\binom{n}{\alpha n}\right)$ , denn die Binomialkoeffizienten  $\binom{a}{b}$  steigen für  $b \leq n/2$  monoton an. Per Definition gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Die Fakultät kann abgeschätzt werden durch  $\sqrt{2\pi n}(n/e)^n \leq n! \leq 2\sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ , also ist  $n!$  proportional zu  $(n/e)^n$ . Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \binom{n}{\alpha n} &= O^*\left(\frac{(n/e)^n}{(\alpha n/e)^{\alpha n}((1-\alpha)n/e)^{(1-\alpha)n}}\right) = O^*\left(\alpha^{-\alpha n}(1-\alpha)^{-(1-\alpha)n}\right) \\ &= O^*\left(2^{-\alpha \log_2 \alpha n} \cdot 2^{-(1-\alpha) \log_2 (1-\alpha)n}\right), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**Satz 8.** Eine kleinste dominierende Menge lässt sich in  $O(1,7088^n)$  ermitteln.

*Beweis.* Zunächst bestimmen wir eine nicht-erweiterbare unabhängige Menge  $I$ . Falls  $|I| \leq \alpha n$ , testen wir in  $O^*(2^{h(\alpha)n})$  alle Teilmengen  $D \subseteq V$  mit  $|D| \leq |I|$ . Falls  $|I| > \alpha n$ , wende Lemma 6 an und berechne kleinste dominierende Menge in  $O^*(2^{(1-\alpha)n})$ .

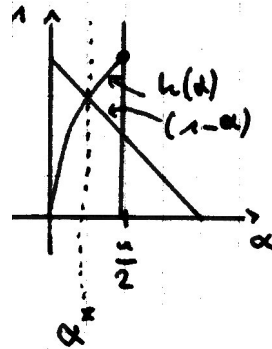
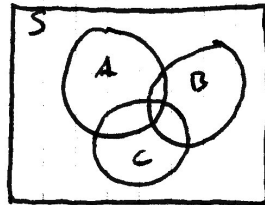


Abbildung 2.2: Bestimmung von  $\alpha^*$  als Maximum der zwei möglichen Funktionen

Aus der Skizze ergibt sich die Laufzeit als das Maximum der beiden dargestellten Funktionen bei  $\alpha^* \leq 0,22711$  bzw.  $O(2^{0,7729n}) = O(1,7088^n)$ .  $\square$

Der schnellste derzeit bekannte Algorithmus für dieses Problem benötigt ca.  $O(1,5^n)$  und stammt aus 2010.

### 3 Inklusion-Exklusion



Gehe von einem Problem aus, bei es leicht ist zu zählen, welche Elemente aus dem Universum  $S$  die Eigenschaft  $A$  oder  $B$ ,  $A$  und  $B$ , ... erfüllen; es aber schwer ist zu zählen, wie viele Elemente diese Eigenschaften nicht besitzen. Es ergibt sich jedoch der Zusammenhang

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - (|A \cap B \cap C|).$$

Sind  $N$  Objekte und eine Menge  $P = \{P_1, \dots, P_n\}$  von Eigenschaften gegeben, bezeichnen wir für jedes  $S \subseteq P$  mit  $N(S)$  die Anzahl der Objekte, die (mindestens) die Eigenschaften in  $S$  erfüllen. Mit  $N(\emptyset)$  bezeichnen wir die Anzahl der Objekte, die keine der Eigenschaften erfüllen. Wir können oben skizzierte Formel dann verallgemeinern, es ergibt sich

**Satz 9.**  $N(0) = \sum_{S \subseteq P} (-1)^{|S|} N(S) = N(\emptyset) + \sum_i N(P_i) + \sum_{i < j} N(P_i, P_j) + \dots$

*Beweis.* Elemente des Universums, die keine der Eigenschaften besitzen, werden auf beiden Seiten der Gleichung einmal gezählt. Betrachte nun die Elemente, die genau die Eigenschaften  $S = \{P_{i_1}, \dots, P_{i_s}\}$ ,  $|S| = s$ . Diese werden genau in den  $N(S')$  mit  $S' \subseteq S$  gezählt. Daraus folgt, dass diese Objekte zur rechten Seite der Gleichung jeweils  $\sum_{S' \subseteq S} (-1)^{|S'|} = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \cdot (-1)^i = (-1+1)^s = 0$  beitragen. Objekte, die mindestens eine Eigenschaft besitzen, werden also auf der rechten Seite nicht gezählt.  $\square$

**Korollar 10.**  $N(P) = \sum_{S \subseteq P} (-1)^{|S|} \overline{N}(S)$ , wobei  $\overline{N}(S)$  die Anzahl der Objekte mit keiner der Eigenschaften in  $S$  ist.

*Beweis.* Es sei  $P'_i$  die Eigenschaft, dass ein Objekt die Eigenschaft  $P_i$  nicht besitzt. Es ist dann  $N'(0) = N(P)$  und  $N'(P'_1, \dots, P'_k) = \overline{N}(P_1, \dots, P_k)$ . Es folgt die Behauptung.  $\square$

#### 3.1 Hamiltonpfad

Wir betrachten nun das gerichtete Hamiltonpfadproblem. Gegeben sei ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  sowie Knoten  $s, t \in V$ . Das gerichtete Hamiltonpfadproblem bezeichnet das Problem, ob ein einfacher  $s$ - $t$ -Pfad existiert, der alle Knoten in  $V$  besucht. Dieses Problem ist NP-schwer. Brute force benötigt  $O^*(n!)$  Zeit. Wir geben einen Algorithmus an, der  $O^*(2^n)$  Zeit und polynomiellen Speicherplatz benötigt.

**Satz 11.** Die Anzahl der  $s$ - $t$ -Hamiltonpfade kann in  $O^*(2^n)$  Zeit und mit polynomiellen Speicherplatzverbrauch ermittelt werden.

*Beweis.* Wir verwenden das Inklusion-Exklusion-Prinzip. Als Objekte sehen wir alle  $s$ - $t$ -Pfade der Länge  $n - 1$  an – auch solche, die nicht einfach sind. Die Eigenschaften  $v \in V$  sind definiert als „Pfad besucht den Knoten  $v$ “. Also ergibt sich  $N(V)$  als die Anzahl der  $s$ - $t$ -Hamiltonpfade. Zur Berechnung von  $N(V)$  bestimmen wir zunächst für  $W \subseteq V$  jeweils  $\overline{N}(W)$ , die Anzahl der  $s$ - $t$ -Pfade der Länge  $n - 1$ , die  $W$  vermeiden.

Dies erreichen wir durch dynamische Programmierung. Das Programm berechnet für ein festes  $W \subseteq V \setminus \{s, t\}$ , ein  $k = 0, \dots, n - 1$  und ein  $u \in V \setminus W$  die Anzahl der  $s$ - $u$ -Pfade der Länge  $k$ , die  $W$  vermeiden. Diese Zahl nennen wir  $\overline{N}(W, u, k)$ . Es folgt  $\overline{N}(W, t, n - 1) = \overline{N}(w)$ . Die Berechnung erfolgt für  $k = 0$  durch

$$\overline{N}(W, u, 0) = \begin{cases} 1 & (u = s) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

und für  $k > 0$  durch

$$\overline{N}(W, u, k) = \sum_{vu \in E, v \notin W} \overline{N}(W, v, k - 1)$$

Die Laufzeit des dynamischen Programms für ein festes  $W$  ist  $O(n \cdot m)$  mit  $m = |E|$ . Durch Wiederverwendung von Speicherplatz erreicht man einen Speicherverbrauch von  $O(n \cdot \log 2^m) = O(n \cdot m)$ .

Zur Berechnung des Endergebnisses iterieren wir über alle  $W \subseteq V \setminus \{s, t\}$  und berechnen jeweils  $\overline{N}(w)$  mit dem oben angegebenen dynamischen Programm. Wir addieren den Wert des Ausdrucks  $(-1)^{|W|} \cdot \overline{N}(w)$  und erhalten  $N(V)$  als Wert dieser Summe. Die Gesamtlaufzeit ergibt sich damit als  $O(m \cdot n \cdot 2^n)$ , der Gesamtspeicherbedarf als  $O(m \cdot n)$ , da der Speicher wiederverwendet werden kann.  $\square$

## 3.2 Graphfärbung

Wir betrachten nun das Problem der Graph-Färbung. Als Eingabe sei ein Graph  $G = (V, E)$  gegeben. Eine *zulässige Färbung* weist jedem Knoten so einer Farbe zu, dass keine zwei benachbarten Knoten die selbe Farbe haben. Gesucht ist die minimale Anzahl an Farben, mit denen dies möglich ist. Brute force benötigt die Zeit  $O^*(n^n)$ . Wir geben einen Algorithmus an, der  $O^*(2^n)$  Zeit und Speicherplatz benötigt.

Wir nennen die Menge aller Knoten einer bestimmten Farbe eine *Farbklasse*. Für korrekte Färbungen ist eine Farbklasse eine unabhängige Knotenmenge, daher können wir das Graphfärbungsproblem auch als Problem, die kleine Anzahl an unabhängigen Knotenmengen  $I_1, \dots, I_k$ , die  $V$  partitionieren, formulieren. Dies ist verwandt zum Set-Cover-Problem  $(\mathcal{I}, V)$ , wobei  $\mathcal{I}$  die Menge aller unabhängigen Mengen ist. Verallgemeinert betrachten wir daher Set-Cover-Instanzen  $(S, U)$ , bei denen  $U$  explizit gegeben ist und  $S$  in  $O^*(2^n)$  mit  $n = |U|$  aufgezählt werden kann.

Wir nennen ein  $k$ -Tupel  $(S_1, \dots, S_k) \in S^k$  ein *geordnetes  $k$ -Cover*, falls  $\bigcup_{i=1}^k S_i = U$  und geben einen Algorithmus an, der die Anzahl der geordnetes  $k$ -Cover ermittelt. Für  $W \subseteq U$  sei  $S[W]$  definiert als  $\{S_i \in S : S_i \cap W = \emptyset\}$  sowie  $s[W] = |S[W]|$ .

**Lemma 12.** Die Anzahl der geordneten  $k$ -Cover beträgt  $c_k = \sum_{W \subseteq U} (-1)^{|W|} s[W]^k$ .

5.6.12

*Beweis.* Wir betrachten die  $k$ -Tupel  $(S_1, \dots, S_k)$  als Objekte und für  $v \in U$  den Ausdruck  $v \in \bigcup_{i=1}^k S_i$  als Eigenschaft, und wenden darauf die Inklusions- / Exklusionsformel an. Die Eigenschaft  $v \in U$  für ein  $k$ -Tupel gilt also nicht, wenn  $v \notin \bigcup_{i=1}^k S_i$ . Ist ein  $W \subseteq U$  gegeben, so gelten alle Eigenschaften aus  $W$  nicht, wenn für alle  $v \in W$  stets  $v \notin \bigcup_i S_i$  gilt. Anders formuliert, muss für

alle  $i$  der Schnitt  $S_i \cap W = \emptyset$  sein. Da es genau  $s[W]$  Mengen gibt, die  $W$  vermeiden, gibt es  $s[W]^k$  Möglichkeiten, ein  $k$ -Tupel aus Mengen zu bilden, die  $W$  vermeiden. Es ist damit  $\overline{N}[W] = s[W]^k$ . Satz 9 liefert dann

$$c_k = N[U] = \sum_{W \subseteq U} (-1)^{|W|} s[W]^k$$

als Anzahl der Tupel, für die alle Eigenschaften  $v \in U$  gelten. Dies ist die Anzahl der Tupel, in denen für jedes  $v \in U$  gilt dass  $v \in \bigcup_i S_i$  ist.  $\square$

**Satz 13.** Die Anzahl  $c_k$  aller  $k$ -Cover kann in  $O^*(2^n)$  berechnet werden.

*Beweis.* Es ist  $c_k = \sum_{W \subseteq U} (-1)^{|W|} s[W]^k$ . Zum Auswerten der Formel müssen alle Teilmengen  $W \subseteq U$  aufgezählt und jeweils  $s[W]$  berechnet werden. Dazu ordnen wir die Elemente von  $U$  durch  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  beliebig. Dann sei für alle  $W \subseteq U$

$$g_i(W) = |\{S_i \in S[W] : \{u_1, \dots, u_i\} \setminus W \subseteq S_i\}|.$$

Dies ist die Anzahl der Mengen, die  $W$  vermeiden, und alle Elemente  $\{u_1, \dots, u_i\} \setminus W$  enthält. Mit dieser Definition gilt  $s[W] = g_0(W)$ , denn  $g_0(W) = |\{S_i \in S[W] : \emptyset \subseteq S_i\}| = |S[W]|$ . Wir verwenden ein dynamisches Programm, das über  $i = n, \dots, 0$  iteriert und zunächst

$$g_n(W) = \begin{cases} 1 & (U \setminus W \in S) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

berechnet. Für  $0 \leq i < n$  ist dann

$$g_{i-1}(W) = \begin{cases} g_i(W) & (u_i \in W), \\ g_i(W \cup \{u_i\}) + g_i(W) & (u_i \notin W). \end{cases}$$

Im Fall  $u_i \in W$  ändert sich durch den Ausschluss von  $W$  in der Definition von  $g_i$  nichts an der Bedingung, daher bleibt die Anzahl gleich. Im anderen Fall können zwei Fälle eintreten, deren Möglichkeiten addiert werden.  $g_i(W \cup \{u_i\})$  erfasst die Elemente, die  $u_i$  vermeiden, während  $g_i(W)$  die Möglichkeiten enthält, die  $u_i$  enthalten. Für jede Menge  $W \subseteq S$  wird der Ausdruck  $g_i(W)$   $n$ -mal ausgewertet, daher beträgt die Laufzeit  $O^*(2^n)$ . Der Speicherverbrauch liegt bei  $O(2^n)$ , wenn man zu jeder Zeit immer nur die vorhergehende Zeile in der dynamischen Tabelle speichert. Somit kann die Formel mit Hilfe von diesem Algorithmus in  $O(2^n)$  Speicher und Zeit ausgewertet werden.  $\square$



## 4 Measure & Conquer

### 4.1 Maximal Independent Set

Measure and Conquer bezeichnet ein Verfahren, um Rekursionsgleichungen wie beispielsweise  $T(n) \leq T(n-1) + T(n-5)$  zu lösen. Ein Algorithmus für unabhängige Mengen ist

```
Name: MIS
Data: Graph  $G$ 
Result: Größte Anzahl von unabhängigen Mengen
if ex.  $v$  mit  $d(v) = 0$  then
  | return  $1 + \text{MIS}(G - v)$ 
else if ex.  $v$  mit  $d(v) = 1$  then
  | return  $1 + \text{MIS}(G - N[v])$ 
else if  $\Delta(G) \geq 3$  then
  | wähle  $v$  mit  $d(v) \geq 3$ 
  | return  $\max\{1 + \text{MIS}(G - N[v]), \text{MIS}(G - v)\}$ 
else if  $\Delta(G) \leq 2$  then
  | löse diesen Spezialfall effizient
end
Algorithm 6: Algorithmus zur Berechnung der größten Anzahl unabhängiger Mengen
```

In Fall 3 handelt es sich um Branching, die Laufzeit wird hier durch die Rekursionsgleichung  $T(n) \leq T(n-1) + T(n-4)$  beschrieben. Die Standardanalyse liefert eine Abschätzung von  $O(1,3803^n)$ . Diese Analyse kann durch die Methode Measure & Conquer verbessert werden.

### 4.2 Dominating Set

Wir betrachten nun einen Algorithmus für Dominating Set, der bei konventioneller Analyse Laufzeit  $O(1,9052^n)$ , bei Analyse mit Measure & Conquer jedoch  $O(1,5259^n)$  ergibt. Dazu modellieren wir Dominating Set als Set Cover-Instanz, wobei  $U = V$  und  $S = \{N[v] : v \in V\}$  ist. Die Größe dieser Set Cover-Instanz ist dann  $|U| + |S| = n + n = 2n$ . Wir entwickeln daher einen Algorithmus für Set Cover mit  $O^*(c^{|U|+|S|})$  und  $c \ll 2$ .

Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass  $U = \bigcup_{S_i \in S} S_i$ . Damit ist eine Set Cover-Instanz durch  $S$  spezifiziert. Die *Häufigkeit* eines Elements  $u \in U$  sei definiert als die Anzahl der Mengen aus  $S$ ,

die  $u$  enthalten.

```

Name:  $SC$ 
Data: Set Cover-Instanz  $S$ 
Result:
if (1)  $|S| = 0$  then
  | return 0
else if (2) es existieren  $S_1, S_2 \in S$  mit  $S_1 \subseteq S_2$  then
  | return  $SC(S - S_1)$ 
else if (3) es existiert  $u \in U(S)$  mit Häufigkeit 1, d.h. liegt in genau einem  $S^* \in S$  then
  | return  $1 + SC(\text{del}(S^*, S))$ 
end
wähle Menge  $S' \in S$  mit maximaler Kardinalität ;
if (4)  $|S'| = 2$  then
  | löse in Polynomialzeit (vgl. Übungsaufgabe) ;
else if  $|S| \geq 3$  then
  |  $S_{in} = S - S^*$ ;
  |  $S_{out} = \text{del}(S, S^*)$ ;
  | return  $\min\{SC(S_{in}), 1 + SC(S_{out})\}$ 
end

```

**Algorithm 7:** Algorithmus für Set Cover

Dabei ist  $\text{del}(A, S) = \{T : T = R \setminus A \neq \emptyset, R \in S\}$ .

Für die konventionelle Analyse sei  $k'(S) = |S| + |U(S)|$ . Wir können aufgrund des Algorithmus die Rekursionsungleichung

$$T(k') \leq T(k' - 1) + T(k' - 4)$$

herleiten. Die übliche Lösungsmethode ergibt  $T(k') = O(1,3803^{k'})$ . Damit ergibt sich als Laufzeit für Dominating Set  $O(1,3803^{2n}) = O(1,9052^n)$ .

Für die Analyse mittels Measure & Konquer definiert man  $n_i$  als Anzahl der Mengen mit Kardinalität  $i$  und  $m_j$  als Anzahl der Elemente mit Häufigkeit  $j$ . Das Maß sei

$$k(S_i) = \underbrace{\sum_{i \geq 1} w_i n_i}_{k_w(S_i)} + \sum_{j \geq 1} v_j m_j$$

mit Gewichten  $w_i, v_j \in [0, 1]$ . Damit ist  $k(S_i) \leq |U| + |S|$ . Vereinfachend nehmen wir für die Gewichte an, dass

- (a)  $w_i \leq w_{i+1}, v_i \leq v_{i+1}$ ,
- (b)  $w_1 = v_1 = 0$ ,
- (c)  $w_1 = v_1 = 1$  für  $i \geq 6$ ,
- (d)  $\Delta w_i \geq \Delta w_{i+1}$  mit  $\Delta w_i := w_i - w_{i-1}$  und  $\Delta v_i$  analog.

Wir bestimmen den Branching-Vektor  $(\Delta k_{out}, \Delta k_{in})$  in Abhängigkeit der  $w_i$  und  $v_i$ .

- (1) Im Fall, dass  $S_i$  nicht gewählt wird, verändert sich  $\Delta k_{out}$  wie folgt.

- (i) Durch Wegfallen von  $S_i$  wird  $k_w(S)$  um  $w_{|S_i|}$  reduziert.

- (ii) Sei  $r_j$  definiert als Anzahl der Elemente von  $S_i$  mit Häufigkeit  $j$ . Die Reduktion von  $k_v(S)$  ist dann kleiner oder gleich  $\sum_{i=2}^6 r_i \Delta v_i$ .
- (iii) Angenommen  $r_2 > 0$ . Seien  $R_1, \dots, R_h$ ,  $h \leq r_2$  die Mengen ungleich  $S_i$ , die mindestens ein Element der Häufigkeit 2 mit  $S_i$  teilen. Die Mengen  $R_i$  werden nachfolgend durch Regel (3) reduziert. Sei dazu  $v_{2,i}$  die Anzahl solcher Elemente in  $R_i$ . Dann ist  $|R_i| \geq v_{2,i} + 1$  und  $|S_i| \geq v_{2,i} + 1$ . Die Reduktion von  $k_w(S)$  durch Wählen von  $R_i$  ist dann mindestens  $W_{v_{2,i}+1}$ . Damit existiert mindestens ein Element, das nicht in  $S_i$  liegt und aus der Instanz entfernt wird. Also wird  $k_v(S)$  mindestens um  $v_2$  reduziert.

Wir erhalten eine Reduktions von mindestens

$$\Delta k' = \begin{cases} 0 & (r_2 = 0), \\ v_2 + w_2 & (r_2 = 1), \\ v_2 + w_2 + w_3 & (r_2 = 2), \\ v_2 + w_4 & (r_2 \geq 3, |S_i| = 3), \end{cases}$$

Demnach ist in diesem Fall  $\Delta k_{out} = w_{|S_i|} + \sum_{i=2}^6 r_i \Delta v_i + \Delta k'$ .

- (2) Im Fall, dass  $S_i$  gewählt wird,
  - (i) wird  $k_w(S)$  durch Wegfall von  $S_i$  um  $w_{|S_i|}$  reduziert,
  - (ii) wird  $k_v(S)$  durch Wegfall von  $S_i$  um  $\sum_{i=2}^6 r_i v_i + r_{\geq 7}$  reduziert,
  - (iii) wird  $k_w(S)$  durch die Verkleinerung der Kardinalität derjenigen Mengen, die  $S_i$  schneiden, reduziert. Sei  $R$  eine solche Menge, d.h.  $R \cap S \neq \emptyset$ . Sei  $u$  also ein Element aus  $R \cap S$ , dann ist der Beitrag von  $u$  zur Verkleinerung der Kardinalität größer oder gleich  $\Delta w_{|R|} \geq \Delta w_{|S_i|}$ . Damit beträgt die gesamte Reduktion für diesen Beitrag mindestens

$$\Delta w_{|S_i|} \left( \sum_{i=2}^6 (i-1)r_i + 6 \cdot r_{\geq 7} \right).$$

Für den Fall, dass  $S_i$  gewählt wird beträgt die Gesamtreduktion also mindestens

$$\Delta k_{in} = w_{|S_i|} + \sum_{i=2}^6 r_i v_i + r_{\geq 7} + \Delta w_{|S_i|} \left( \sum_{i=2}^6 (i-1)r_i + 6 \cdot r_{\geq 7} \right).$$

Sei nun für feste  $(w, v) := (w_1, \dots, w_6, v_1, \dots, v_6)$  und  $|S| \geq 3$  und  $(r_i)_i$  mit  $\sum_{i=2}^6 r_i + r_{\geq 7} = |S|$  die Rekurrenz  $T(k) \leq T(k - \Delta k_{out}) + T(k - \Delta k_{in})$  definiert.

Wir beobachten, dass wir für jeden Branchingvektor mit  $|S_i| \geq 7$  einen Branchingvektor mit  $|S_i| = 7$  finden, der diesen dominiert. Dies folgt aus den Formeln für  $\Delta k_{in}$  und  $\Delta k_{out}$  zusammen mit der Tatsache, dass  $\Delta w_{|S_i|} = 0$  für  $|S_i| \geq 7$ . Wir nehmen daher an, dass  $3 \leq |S_i| \leq 7$  und damit ist die Anzahl der gültigen Belegungen für  $|S_i|$  und  $(r_i)_i$  endlich. Also ist für jedes feste  $(w, v)$  die Laufzeit beschränkt durch  $\alpha(w, v)^k$ , wobei  $\alpha(w, v)$  die größte der Nullstellen der Gleichungen  $x^t - x^{t-\Delta k_{out}} - x^{t-\Delta k_{in}} = 0$  für  $t := \max\{\Delta k_{in}, \Delta k_{out}\}$  über alle Belegungen für  $|S_i|, (r_i)_i$ . Für jedes  $(w, v)$  erhalten wir so eine Laufzeitschranke  $\alpha(w, v)^k$ . Wir wollen nun ein  $(w, v)$  finden, sodass  $\alpha(w, v)$  möglichst klein ist. Mit Methoden der quasi-konvexen Optimierung lässt sich eine Näherungslösung finden, diese liefert  $\alpha(w_0, v_0) < 1,2353$ .

**Satz 14.** *Set-Cover lässt sich in  $O(1,2353^{|U|+|S|})$  lösen.*

**Korollar 15.** *Dominating-Set lässt sich in  $O(1,5259^n)$  lösen.*

## 5 Tree width

### 5.1 Dynamisches Programm für Vertex Cover

3.7.12

Zunächst betrachten wir Vertex Cover auf Bäumen. Dazu berechnen wir, beginnend bei den Blättern, für jeden Teilbaum mit Wurzel  $v$  ein maximales Vertex Cover, in dem  $v$  enthalten ist, und ein Vertex Cover, in dem die Teilbaum-Wurzel  $v$  nicht enthalten ist. Wir speichern die Ergebnisse der Berechnung in den Tabellen  $IN(v)$  bzw.  $OUT(v)$  für Teilbäume mit Wurzel  $v$ , in denen  $v$  enthalten bzw. nicht enthalten ist.

Zur Berechnung von  $OUT(v)$  für einen beliebigen Knoten  $v$  berechnen wir (in binären Bäumen)  $IN(v_1) + IN(v_2)$  der beiden Kind-Knoten  $v_1$  und  $v_2$  von  $v$ . Wir müssen  $v_1$  und  $v_2$  in das Vertex Cover aufnehmen, da die Kanten  $(vv_1)$  und  $(vv_2)$  gecouvert werden müssen.

Zur Berechnung von  $IN(v)$  berechnen wir  $\max\{IN(v_1), OUT(v_2)\} + \max\{IN(v_2), OUT(v_1)\}$ , da die Kanten  $(vv_1)$  und  $(vv_2)$  bereits durch  $v$  gecouvert sind und wir daher die Wahl haben, ob wir  $v_1$  bzw.  $v_2$  in das Vertex Cover aufnehmen.

Diese Berechnung kann in  $O(\deg v)$  Zeit durchgeführt werden, wenn die Werte  $IN(v_1), \dots, IN(v_{\deg v})$  und  $OUT(v_1), \dots, OUT(v_{\deg v})$  bereits bekannt sind. Für alle Knoten ausgeführt, erhält man  $O(n)$ , denn die Anzahl von Kanten im Baum beträgt  $n - 1$ .

### 5.2 Definition

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine *tree decomposition* von  $G$  ist ein Paar  $\tilde{T} = (\{X_i : i \in I\}, T)$ , wobei jedes  $X_i$  Teilmengen von  $V$  sind, die man *bags* nennt, und  $T$  ein Baum mit der Knotenmenge  $I$  ist. Außerdem müssen noch weitere Eigenschaften gelten:

- (i) Es gilt  $\bigcup_{i \in I} X_i = V$ .
- (ii) Für jede Kante  $(uv) \in E$  gibt es ein  $i \in I$  mit  $\{u, v\} \subseteq X_i$ .
- (iii) Für alle  $i, j, k \in I$  so dass  $j$  auf einem Pfad zwischen  $i$  und  $k$  in  $T$  liegt, gilt  $X_i \cap X_k \subseteq X_j$ .

Die *width* einer *tree decomposition* wird definiert als  $\max\{|X_i| : i \in I\} - 1$ . Die *tree width*  $\text{tw}(G)$  eines Graphen  $G$  ist die kleinste natürliche Zahl  $w$ , für die eine tree decomposition mit width  $w$  existiert.

## 5.3 Beispiele

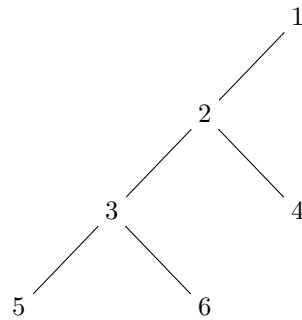


Abbildung 5.1: Beispiel (a): Eine tree decomposition dieses Graphen ist  $G$  selbst, wobei jedes bag zwei Knoten enthält. Die Menge der bags ist dann  $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}$ .

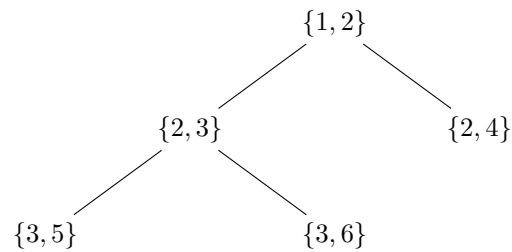


Abbildung 5.2: Die bags der tree decomposition aus  $G$  wie oben definiert.

Wie im Beispiel gesehen, haben alle Bäume stets tree width 1. Als nächstes Beispiel (b) betrachten wir einen Kreis mit  $n$  Knoten.

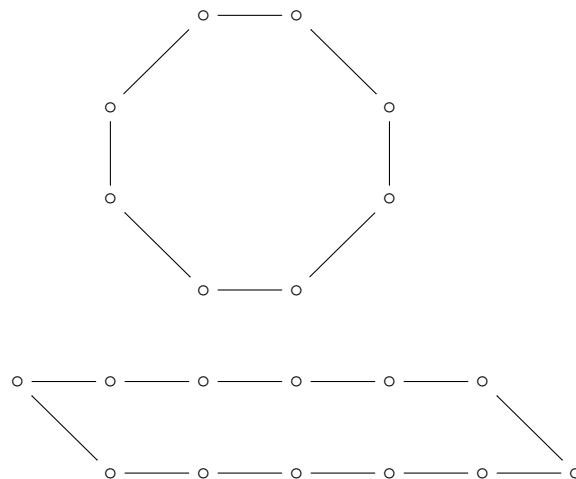


Abbildung 5.3: Beispiel (b): Zwei Bilder des selben Graphen  $C_n$ . Als bags wählt man die Mengen aus den drei linken und drei rechten Knoten, sowie jeweils 3 nebeneinanderliegende Knoten sowie einen gegenüberliegenden.



Abbildung 5.4: Bags der tree decomposition im Kreis  $C_n$ , also tree width 2.

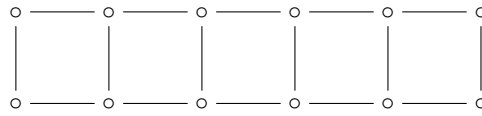


Abbildung 5.5: Beispiel (c): Eine Leiter  $G$ , die bags der tree decomposition sind wiederum 3-Mengen aus „L“ wie beim Kreis  $C_n$

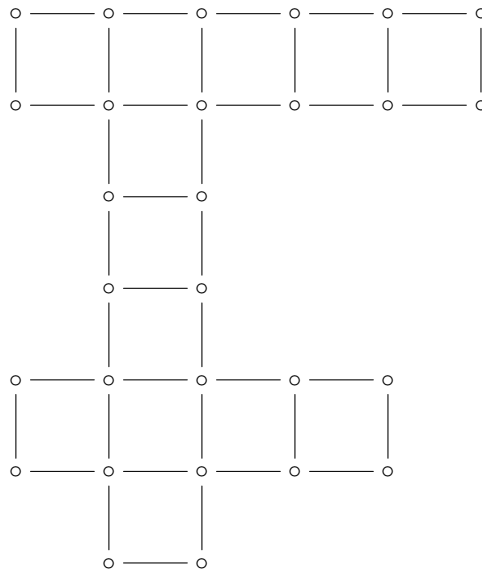


Abbildung 5.6: Beispiel (c'): Eine modifizierte Leiter  $G$ , die bags der tree decomposition sind 4-Mengen aus benachbarten Knoten (quadratisch angeordnet)

Beispiel (d): Der vollständige Graph  $K_n$ . Seine tree width beträgt  $n - 1$ , da alle Knoten in ein bag der tree decomposition müssen.

Beispiel (e): Ein Gitter-Graph  $G$  mit  $k \cdot l$  Knoten. Als Bags wählen wir jeweils zwei benachbarte Spalten, damit erhalten wir eine obere Schranke von  $\text{tw}(G) \leq 2 \cdot \min\{k, l\}$ .

17.7.12

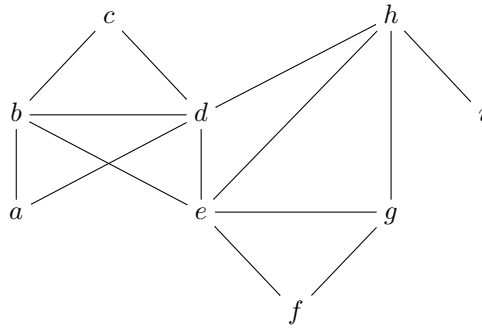


Abbildung 5.7: Beispiel (f)

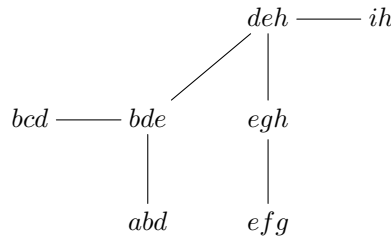


Abbildung 5.8: Tree decomposition für Beispiel (f)

**Satz 16.** Planare Graphen haben tree width  $O(\sqrt{n})$ .

**Satz 17.** Eine tree decomposition der width  $k$  eines Graphen  $G$  mit tree width kleiner oder gleich  $k$  kann in  $2^{O(k^3)} \cdot n$  Zeit berechnet werden.

## 5.4 Verbessertes dynamisches Programm für Vertex Cover für Graphen mit beschränkter Tree Width

**Satz 18.** Für einen Graphen  $G$  mit einer tree decomposition  $\tilde{T} = (\{X_i : i \in I\}, T)$  mit width  $k$  kann ein optimales vertex cover in  $O(2^k k |I|)$  Zeit berechnet werden.

Wir verwenden die folgende Idee. Für jeden bag  $X_i$  überprüfen wir für alle  $2^{|X_i|}$  Möglichkeiten, ob diese ein Vertex Cover für  $G[X_i]$  darstellen. Diese Information speichern wir in der Tabelle  $A_i$ . Das optimale Vertex Cover berechnen wir dann mit einem bottom-up dynamischen Programm in  $\tilde{T}$ . Die Schwierigkeit dabei ist die Sicherstellung der Konsistenz durch das Aktualisieren der Tabelle beim Verarbeiten der Kanten. Dazu verwenden wir folgende Schritte:

0. **table creation.** Für jeden bag  $X_i = \{x_{i1}, \dots, x_{in_i}\}$ ,  $n_i = |X_i|$  legen wir eine Tabelle  $A_i$  folgender Form mit  $2^{k_i}$  Zeilen an:

$x_{i1}$	$x_{i2}$	$\dots$	$x_{in_i}$	$m_i$
0	0	$\dots$	0	
0	0	$\dots$	1	
$\vdots$			$\vdots$	
1	1	$\dots$	1	

Eine *Zuordnung* für ein bag  $X_i$  ist eine Abbildung  $C_i : X_i \rightarrow \{0, 1\}$ , die für jeden Knoten in  $X_i$  festlegt, ob er im Vertex Cover enthalten ist. Die Tabelle  $A_i$  hat eine Zeile für jede mögliche Zuordnung von  $X_i$ . Wir setzen nun  $V_i := \bigcup_{j \in T_i} X_j$ . Ziel ist es, für jede Zuordnung  $C_i$  von  $X_i$  den Wert

$$m_i(C_i) := \min\{|V'| : V' \subseteq V_i \text{ ist ein Vertex Cover für } G[V_i] \text{ das } C_i \text{ respektiert}\}$$

berechnen.  $C_i$  wird von  $V'$  respektiert, wenn  $V' \cap V_i = C_i^{-1}(1)$  gilt.

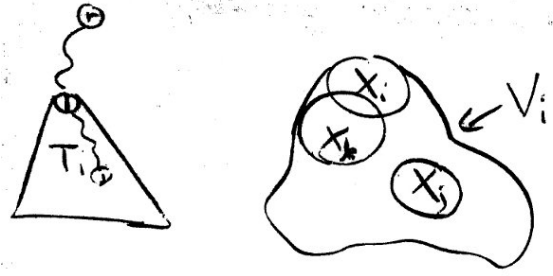


Abbildung 5.9: Skizze zum Vorgehen bei der Berechnung des Vertex Cover durch ein dynamisches Programm

1. **table init.** Sei  $X_i$  ein bag und  $C_i$  eine Zuordnung für  $X_i$ . Wir nennen  $C_i$  genau dann *gültig*, wenn  $C_i^{-1}(1)$  ein Vertex Cover für  $G[X_i]$  ist. Wir initialisieren für jede Zuordnung  $C_i$  den Wert  $m_i$  nach der Vorschrift

$$m_i(C_i) := \begin{cases} |C_i^{-1}(1)| & (C_i \text{ ist gültig}), \\ \infty & (\text{sonst}). \end{cases}$$

2. **dynamic program.** Wir durchlaufen den Baum bottom-up und aktualisieren „adjazente“ Tabellen gegeneinander. Sei  $i \in I$  der Vater von  $j \in I$ . Wir nehmen weiterhin an, dass

$$\begin{aligned} X_i &= \{z_1, \dots, z_s, v_1, \dots, v_{t_i}\}, \\ X_j &= \{z_1, \dots, z_s, u_1, \dots, u_{t_j}\}. \end{aligned}$$

Es folgt unmittelbar  $X_i \cap X_j = \{z_1, \dots, z_s\}$ . Eine *Erweiterung* einer Zuordnung  $C : W \rightarrow \{0, 1\}$  ist eine Zuordnung  $\tilde{C} : \tilde{W} \rightarrow \{0, 1\}$  mit  $\tilde{W} \supseteq W$  und  $\tilde{C}|_W = C$ .

Für jede Zuordnung  $C : \{z_1, \dots, z_s\} \rightarrow \{0, 1\}$  und jede Erweiterung  $C_i : X_i \rightarrow \{0, 1\}$  aktualisieren wir gemäß

$$m_i(C_i) := m_i(C_i) + \min\{m_j(C_j) : C_j : X_j \rightarrow \{0, 1\} \text{ ist Erweiterung von } C\} - |C^{-1}(1)|.$$

Der Term  $|C^{-1}(1)|$  vermeidet Doppelzählungen.

Hat  $i$  mehrere Kindknoten  $j_1, \dots, j_l$  in  $T$ , dann wird  $A_i$  für jedes Kind analog aktualisiert. Schritt 2 stoppt, wenn die Wurzel des Baumes erreicht wurde.

3. **result.** Die GröÙte des minimalen Vertex Cover kann aus der Tabelle  $A_r$  der Wurzel des Baumes abgelesen werden, denn es ist gegeben durch

$$\min\{m_r(C_r) : C_r \text{ ist eine Zuordnung für } X_i\}.$$

Durch Speichern der Vertex Cover der Teilbäume für jede Zurordnung und jeden bag kann man auch das Vertex Cover selbst berechnen.

Für die Laufzeitanalyse genügt es zu zeigen, dass die Aktualisierung in  $O(2^k k)$  durchzuführen ist.