Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Fakultät für Mathematik und Informatik

SS12, Dr. Spoerhase

Exakte Algorithmen

Nils Wisiol

15. Mai 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Hier fehlt noch etwas.

2 Dynamisches Programmieren

Hier fehlt noch etwas

15.5.12

Hier fehlt noch etwas

Lemma 1. *Sei $\alpha \leq 1/2$. Dann gilt*

$$\sum_{i=0}^{\alpha \cdot n} \binom{n}{i} = O^*(2^{h(\alpha)\cdot n}),$$

wobei $h(\alpha) = -\alpha \log_2 \alpha - (1-\alpha)\log_2(1-\alpha)$.

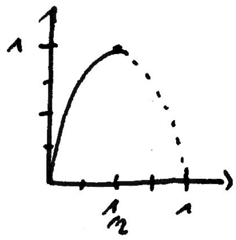


Abbildung 2.1: Graph des Binomialkoeffizienten

Beweis. Es ist $\sum_{i=0}^{\alpha n} \leq n\binom{n}{\alpha n} = O^*(\binom{n}{\alpha n})$, denn die Binomialkoeffizienten $\binom{a}{b}$ steigen für $b \leq n/2$ monoton an. Per Definition gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Die Fakultät kann abgeschätzt werden durch $\sqrt{2\pi n}(n/e)^n \leq n! \leq 2\sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, also ist $n!$ proportional zu $(n/e)^n$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \binom{n}{\alpha n} &= O^*\left(\frac{(n/e)^n}{(\alpha n/e)^{\alpha n}((1-\alpha)n/e)^{(1-\alpha)n}}\right) = O^*\left(\alpha^{-\alpha n}(1-\alpha)^{-(1-\alpha)n}\right) \\ &= O^*\left(2^{-\alpha \log_2 \alpha n} \cdot 2^{-(1-\alpha)\log_2(1-\alpha)n}\right), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Satz 2. *Eine kleinste dominierende Mänge lässt sich in $O(1,7088^n)$ ermitteln.*

Beweis. Zunächst bestimmen wir eine nicht-erweiterbare unabhänge Menge I. Falls $|I| \leq \alpha n$, testen wir in $O^*(2^{h(\alpha)n})$ alle Teilmengen $D \subseteq V$ mit $|D| \leq |I|$. Falls $|I| > \alpha n$, wende Satz **??** an und berechne kleinste dominierende Menge in $O^*(2^{(1-\alpha)n})$.

Aus der Skizze ergibt sich die Laufzeit als das Maximum der beiden dargestellten Funktionen bei $\alpha^* \leq 0,22711$ bzw. $O(2^{0,7729n}) = O(1,7088^n)$. □

Der schnellste derzeit bekannte Algorithmus für dieses Problem benötigt ca. $O(1,5^n)$ und stammt aus 2010.

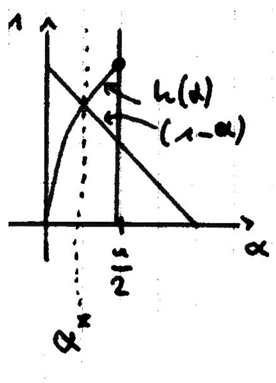
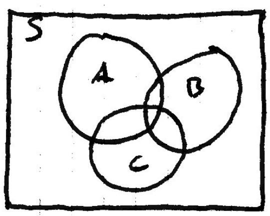


Abbildung 2.2: Bestimmung von α^* als Maximum der zwei möglichen Funktionen

3 Inklusion-Exklusion



Gehe von einem Problem aus, bei es leicht ist zu zählen, welche Elemente aus dem Universum S die Eigenschaft A oder B, A und B, ... erfüllen; es aber schwer ist zu zählen, wie viele Elemente diese Eigenschaften nicht besitzen. Es ergibt sich jedoch der Zusammenhang

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + (|A \cap B \cap C|)$$

Sind N Objekte und eine Menge $P = \{P_1, ...P_n\}$ von Eigenschaften gegeben, bezeichnen wir für jedes $S \subseteq P$ mit $N(S)$ die Anzahl der Objekte, die (mindestens) die Eigenschaften in S erfüllen. Mit $N(0)$ bezeichnen wir die Anzahl der Objekte, die keine der Eigenschaften erfüllen. Wir können oben skizzierte Formel dann verallgemeinern, es ergibt sich

Satz 3. $N(0) = \sum_{S \subseteq P} (-1)^{|S|} N(S) = N(\emptyset) + \sum_i N(P_i) + \sum_{i \leq j} N(P_i, P_j) + ...$

Beweis. Elemente des Universums, die keine der Eigenschaften besitzen, werden auf beiden Seiten der Gleichung einmal gezählt. Betrachte nun die Elemente, die genau die Eigenschaften $S = \{P_{i_1}, ..., P_{i_s}\}$, $|S| = s$. Diese werden genau in den $N(S')$ mit $S' \subseteq S$ gezählt. Daraus folgt, dass diese Objekte zur rechten Seite der Gleichung jeweils $\sum_{S' \subseteq S} (-1)^{|S'|} = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} \cdot (-1)^i = (-1+1)^s = 0$ beitragen. Objekte, die mindestens eine Eigenschaft besitzen, werden also auf der rechten Seite nicht gezählt. $\square$