

EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONALANALYSIS

ORGANISATORISCHES

Vorlesung: Di 12.15 - 13.45 HS4; Mi 14.15 - 15.45 HS4

15.10.13

Übung: Do 16.00 - 17.30 HS4

Dozent: Christian Lageman <christian.lageman@mathematik.uni-wuerzburg.de>

Sprechstunde: Mi 10.00 - 11.30 Übungsblätter: Abgabe Vorlesung Dienstag

Wuecampus:

Klausur: 5.4.2014, 14:00 HS4

Literatur: D. Werner, Funktionalanalysis, Springer-Verlag 2011 F. Hirzebruch, W. Scharlau, Einführung in die Funktionalanalysis, Spektrum Akademischer Verlage, 1991 E. Kreyzig, Introduction Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, 1989 R. Meise, D. Vogt, Einführung in die Funktionalanalysis, Vieweg + Teubner Verlag, 2011

Voraussetzungen: Lineare Algebra I und II; Analysis I und II; Veriefung Analysis; insbesondere metrische Räume, Folgen in metrischen Räumen, offene und abgeschlossene Mengen, Integration im \mathbb{R}^n

1. NORMIERTE RÄUME

Sprechen wir von einem \mathbb{K} -Vektorraum, so meinen wir einen \mathbb{R} - oder \mathbb{C} -Vektorraum, d.h. die entsprechenden Definitionen und Sätze gelten sowohl für reelle als auch für komplexe Vektorräume. Wir verwenden \mathbb{K} als Platzhalter für \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} in den Sätzen und Definitionen.

Definition 1. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum. Wir nennen eine Funktion $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ eine *Halbnorm auf X* , falls gilt:

- (1) $\forall v \in X, \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
- (2) $\forall v, w \in X : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Gilt zusätzlich noch $\forall v \in X : \|v\| = 0 \implies v = 0$, so nennen wir $\|\cdot\|$ eine *Norm auf X* . Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X , so bezeichnen wir $(X, \|\cdot\|)$ als *normierten Raum*.

Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem \mathbb{K} -Vektorraum X induziert durch $d(v, w) = \|v - w\|$ eine Metrik $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ auf X , die wir als kanonische Metrik auf $(X, \|\cdot\|)$ bezeichnen.

Ein normierter Raum ist damit auch ein metrischer Raum. Die Begriffe von offenen und abgeschlossenen Mengen, Konvergenz von Folgen, Cauchy-Folgen, Vollständigkeit, Stetigkeit von Abbildungen ergeben sich für normierte Räume aus den entsprechenden Begriffen für metrische Räume.

Beispiel 1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Folge (v_n) in X heißt konvergent gegen $v^* \in X$ falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \|v_n - v^*\| < \varepsilon$$

wobei $\|v_n - v^*\| = d(v_n, v^*)$ mit der kanonischen Metrik d ist.

Für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ notieren wir:

- (1) den Abschluss einer Menge $M \subset X$ mit \overline{M} ,
- (2) den Rand einer Menge $M \subset X$ mit ∂M ,
- (3) das Innere einer Menge $M \subset X$ mit $\text{int } M$,

Aus der entsprechenden Definitionen für metrische Räume ergibt sich: eine Folge (v_n) in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *Cauchy-Folge*, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N : \|v_n - v_m\| < \varepsilon.$$

Ein metrischer Raum und entsprechend auch ein normierter Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, nennt man *vollständig*.

- (1) die offene Kugel um $v \in X$ mit Radius r mit $U_r(v) = \{w \in X : \|v - w\| < r\}$.

Definition 2. Einen vollständigen normierten Raum bezeichnet man als *Banachraum*.

Beispiel 2. zur Verdeutlichung.

- (1) Versehen wir \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n mit einer Norm $\|\cdot\|$, so ist der normierte Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ bzw. $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Es sei daran erinnert, dass auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind, d.h. sind $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_+$ Normen auf einem endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum X , so gibt es Konstanten $m, M > 0$ mit $\forall v \in X : m\|v\|_* \leq \|v\|_+ \leq M\|v\|_*$. Die Vollständigkeit im \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n ist damit nur für eine Norm nachzuweisen und aus der Analysis bekannt.
- (2) Sei M eine nicht-leere Menge. Wir bezeichnen mit $l^\infty(M)$ den \mathbb{K} -Vektorraum der beschränkten Funktionen $M \rightarrow \mathbb{K}$. Wir definieren auf $l^\infty(M)$ die Norm $\|\cdot\|_\infty$ durch $\|f\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x)|$ für $f \in l^\infty(M)$. Die Norm ist wohldefiniert, da f beschränkt ist. Man bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ auch als die sogenannte *Supremumsnorm*. $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm, denn:
 - (a) für $f \in l^\infty(M)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in M} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in M} |\lambda| |f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in M} |f(x)| = |\lambda| \|f\|_\infty$.
 - (b) für $f, g \in l^\infty(M)$ gilt: $\|f+g\|_\infty = \sup_{x \in M} |(f+g)(x)| = \sup_{x \in M} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in M} |f(x)| + \sup_{x \in M} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
 - (c) für $f \in l^\infty(M)$ gilt: $\|f\|_\infty = 0 \implies \sup_{x \in M} |f(x)| = 0 \implies \forall x \in M : |f(x)| = 0 \implies f \equiv 0$.

$(l^\infty(M), \|\cdot\|_\infty)$ ist also ein normierter Raum. Wir zeigen nun, dass der Raum vollständig ist. Sei dazu (f_n) eine Cauchy-Folge in $l^\infty(M)$. Es gilt also $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N : \|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Es gilt außerdem $\|f_n - f_m\| = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f_m(x)|$. Dies impliziert, dass $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N \forall x \in M : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Insbesondere gilt für alle $x \in M$ daher $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, und also ist $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge für jedes $x \in M$. Da \mathbb{R} und \mathbb{C} vollständig sind, ist für jedes $x \in M$ die Folge $(f_n(x))$ konvergent. Wir erhalten die Funktion $f^* : M \rightarrow \mathbb{K}$ durch $\forall x \in M : f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Wir erhalten eine Funktion $f^* : M \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\forall x \in M : f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Wir hatten uns überlegt, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N \forall x \in M : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Damit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n, m > N \forall x \in M : |f_n(x) - f_m(x)| < 1$. (Dies ist äquivalent zu $f_m(x) \in U_1(f_n(x))$.) Also $\forall m > N \forall x \in M : f_m(x) \in U_1(f_{N+1}(x))$.

16.10.13

Somit $\forall x \in M : f^*(x) \in U_1(f_{N+1}(x))$. Damit $\forall x \in M : |f_{N+1}(x) - f^*(x)| \leq 1$. Da $f_{N+1} \in l^\infty(M)$, also beschränkt ist, muss auch f^* beschränkt sein. Wir erhalten $f^* \in l^\infty(M)$. Wir zeigen nun die Konvergenz von (f_n) gegen f^* . Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es sein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n, m > N \forall x \in M : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Also $\forall x \in M \forall n > N \forall m > N : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da es zu jedem $x \in M$ und $n > N$ ein $m(x, n) \in \mathbb{N}, m(x, n) > N$ gibt mit

$$|f_{m(x,n)}(x) - f^*(x)| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} - |f_n(x) - f_{m(x,n)}(x)|}_{> \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{1}{6}\varepsilon}$$

folgt

$$\forall x \in M \forall n > N : \underbrace{|f_n(x) - f_{m(x,n)}(x)| + |f_{m(x,n)}(x) - f^*(x)|}_{|f_n(x) - f^*(x)| \leq} < \frac{\varepsilon}{2} - |f_n(x) - f_{m(x,n)}(x)| + |f_n(x) - f_{m(x,n)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also $\forall n > N \forall x \in M : |f_n(x) - f^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit $\forall n > N : \|f_n - f^*\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$.
Damit konvergiert (f_n) gegen f^* . Somit ist $(l^\infty(M), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Theorem 1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $U \subset X$ ein Unterraum von X .

Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und U eine abgeschlossene Teilmenge von X , so ist $(U, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

Ist U vollständig, so ist U eine abgeschlossene Teilmenge von X .

Beweis. Der Beweis gliedert sich in zwei Teile. □

- (1) Sei (u_n) eine Cauchy-Folge in $(U, \|\cdot\|)$. Dann ist (u_n) eine Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|)$. Also konvergiert (u_n) gegen ein $u^* \in X$. Damit ist $u^* \in \overline{U}$, also $u^* \in U$. Somit ist U vollständig.
- (2) Sei U vollständig. Ist $u^* \in \overline{U} \setminus U$, so gibt es Folge (u_n) in U die gegen u^* konvergiert. Diese Folge ist eine Cauchy-Folge in U und konvergiert somit gegen einen Grenzwert $u^{**} \in U$. Wegen der Eindeutigkeit von Grenzwerten folgt $u^* = u^{**} \in U$. Also $\overline{U} \setminus U = \emptyset$ und U abgeschlossen.

Beispiel 3. Wir verwenden die Notation $l^\infty = l^\infty(\mathbb{N})$. Da eine Folge in \mathbb{K} eine Funktion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ ist, ist l^∞ also der Raum aller beschränkten Folgen in \mathbb{K} . Wir definieren die folgenden Unterräume von l^∞ : $c = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, (x_n) \text{ konvergent}\}$, $c_0 = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$, $d = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, x_n \text{ bis auf endlich viele Folgenglieder gleich } 0\}$. Da die konvergente Folge in \mathbb{K} in \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} beschränkt ist, folgt $d \subset c_0 \subset c \subset l^\infty$. Sei $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm auf l^∞ . Es sind $(d, \|\cdot\|_\infty)$, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, $(c, \|\cdot\|_\infty)$ normierte Räume. Welche dieser Räume sind Banachräume? Mit Satz 1 reicht es zu zeigen, dass der entsprechende Raum abgeschlossen in l^∞ ist.

Sei (f_n) eine Folge in c , die konvergent gegen ein $f^* \in l^\infty$ ist. Um Doppelindizes zu vermeiden, verwenden wir die Darstellung von Folgen als Funktionen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$. Da (f_n) eine Folge in c ist, können wir durch $x_n = \lim_{m \rightarrow \infty} f_n(m)$ eine Folge (x_n) in \mathbb{K} definieren. Es gilt $|x_n - x_l| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} |f_n(m) - f_l(m)| = \|f_n - f_l\|_\infty$. Da (f_n) eine Cauchy-Folge ist, ist durch diese Abschätzung die Folge (x_n) eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} . Also konvergiert (x_n) gegen ein $x^* \in \mathbb{K}$. Wir wollen nun zeigen, dass f^* gegen x^* konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|f^* - f_N\| < \frac{\varepsilon}{3}$ und $|x_N - x^*| < \frac{\varepsilon}{3}$. Wähle $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > M$ gilt $|f_N(m) - x_N| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann gilt für alle

$m > M$

$$|f^*(m) - x^*| \leq \underbrace{|f^*(m) - f_N(m)|}_{\leq \|f^* - f_N\|_\infty} + \underbrace{|f_N(m) - x_N|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|x_N - x^*|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \|f^* - f_N\|_\infty + \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Also ist f^* -konvergente Folge und $f^* \in c$. Damit ist c abgeschlossen und nach Satz 1 ein Banachraum.

Sei (f_n) eine Folge in c_0 die konvergent gegen ein $f^* \in l^\infty$ ist. Wiederholen wir das obige Argument, so erhalten wir zusätzlich dass (x_n) konstant 0 ist. Damit ist $x^* = 0$ und $f^* \in c_0$. Somit ist c_0 abgeschlossen und nach Satz 1 ein Banachraum. Der Raum $(d, \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Banachraum.

Wir definieren nun weitere Folgenräume.

Definition 3. Für $p \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < \infty$ setzen wir $l^p = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}$ und $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ für $(x_n) \in l^p$. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass $(l^p, \|\cdot\|_p)$ Banachräume sind.

22.10.13

Theorem 2. Für $1 \leq p < \infty$ ist l^p versehen mit der Addition und Skalarmultiplikation von Folgen ein \mathbb{K} -Vektorraum.

Beweis. Offensichtlich ist die konstante Folge (a_n) für alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n = 0$ in l^p enthalten. Desweiteren ist für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $(x_n) \in l^p$ auch $(\lambda x_n) \in l^p$, da $\sum_{n=1}^\infty |\lambda x_n|^p = |\lambda|^p \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ konvergiert. Schließlich, sind $(x_n), (y_n) \in l^p$, so gilt $\sum_{n=1}^\infty |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=1}^\infty (|x_n| + |y_n|)^p \leq \sum_{n=1}^\infty (2 \max\{|x_n|, |y_n|\})^p = 2^p \sum_{n=1}^\infty (\max\{|x_n|, |y_n|\})^p \leq 2^p \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p + |y_n|^p = 2^p (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p + \sum_{n=1}^\infty |y_n|^p) < \infty$. Also $(x_n + y_n) \in l^p$. \square

Theorem 3. Holdesche Ungleichung

Sind $(x_n) \in l^p$ und $(y_n) \in l^q$, so ist $(x_n y_n) \in l^1$ und $\|(x_n y_n)\|_1 \leq \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q$.

Sei $1 < p < \infty$ und $q = \frac{p}{p-1}$. Sind $(x_n) \in l^p$ und $(y_n) \in l^q$, so ist $(x_n y_n) \in l^1$ und $\|(x_n y_n)\|_1 \leq \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q$.

Beweis. Der Beweis besteht aus zwei Teilen.

$$(1) \text{ Es gilt } \underbrace{\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n|}_{= \|(x_n y_n)\|_1} \leq \sum_{n=1}^\infty |x_n| \|(y_n)\|_\infty = \|(y_n)\|_\infty \sum_{n=1}^\infty |x_n| = \|(y_n)\|_\infty \|(x_n)\|_1 < \infty.$$

(2) Wir haben $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $a, b > 0$ und $A = p \log a$ sowie $B = q \log b$. Die Funktion $t \mapsto \exp(t)$ ist konvex, also $\exp(\frac{1}{p}A + \frac{1}{q}B) \leq \frac{1}{p} \exp(A) + \frac{1}{q} \exp(B)$. Somit

$$ab = \exp(\underbrace{\log a}_{=\frac{1}{p}A} + \underbrace{\log b}_{=\frac{1}{q}B}) \leq \frac{1}{p} \exp(\underbrace{p \log a}_A) + \frac{1}{q} \exp(\underbrace{q \log b}_B) = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Wir haben für $(x_n) \in l^p, (y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p = 1 = \|(y_n)\|_q$. Es gilt

$$(1.1) \quad \sum_{n=1}^\infty |x_n| |y_n| \leq \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{p} |x_n|^p + \frac{1}{q} |y_n|^q \right) = \frac{1}{p} \underbrace{\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{n=1}^\infty |y_n|^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Sind $(x_n) \in l^p$, $(y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p \neq 0$ und $\|(y_n)\|_q \neq 0$, so ist mit (1.1)

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|}_{= \|(x_n y_n)\|} = \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|x_m|}{\|(x_n)\|_p} \cdot \frac{|y_m|}{\|(y_n)\|_q} \leq \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q \cdot 1.$$

Sind $(x_n) \in l^p$ und $(y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p = 0$ oder $\|(y_n)\|_q = 0$, so ist $(x_n y_n) \in l^1$ und $\|(x_n y_n)\|' = 0$.

□

Theorem 4. *Minkowskische Ungleichung.* Sei $1 \leq p < \infty$. Für $(x_n), (y_n) \in l^p$ gilt $\|(x_n + y_n)\|_p \leq \|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p$.

Beweis. Für $p = 1$ erhalten wir die Ungleichung direkt. Sei $p > 1$ und $q = \frac{p}{p-1}$.

Weiterhin seien $(x_n), (y_n) \in l^p$. Nach Satz 2 ist $(x_n + y_n) \in l^p$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n + y_n|^{p-1})^q$ konvergent¹. Somit ist $(|x_n + y_n|^{p-1}) \in l^q$. Nach Satz 3 ist damit $(|x_n| |x_n + y_n|^{p-1}) \in l^1$ und $(|y_n| |x_n + y_n|^{p-1}) \in l^1$ und wir erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |x_n + y_n|^{p-1} = \|(|x_n| |x_n + y_n|^{p-1})\|_1 \leq \|(x_n)\|_p \|(|x_n + y_n|^{p-1})\|_q = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n + y_n|^{p-1})^q)^{\frac{1}{q}} \\ = \|(x_n)\|_p (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1}. \text{ Also } \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \leq \|(y_n)\|_p (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1}. \\ \text{Somit } \|(x_n + y_n)\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|x_n + y_n|^p}_{= |x_n + y_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|) \cdot |x_n + y_n|^{p-1} \leq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \leq \|(x_n)\|_p (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1} + \|(y_n)\|_p (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1} = (\|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p) (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1}. \\ \text{Für } \|(x_n + y_n)\|_p \neq 0 \text{ liefert Division die Minkowski-Ungleichung. Für } \|(x_n + y_n)\|_p = 0 \text{ ist die Minkowski-Ungleichung trivial.}$$

□

Theorem 5. Für $1 \leq p < \infty$ ist $(l^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum. Ebenso ist $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Beweis. Die Behauptung für l^∞ wurde bereits in Beispiel 1 gezeigt. Sei $1 \leq p < \infty$. Nach Satz 2 ist l^p ein \mathbb{K} -Vektorraum. Für all $(x_n) \in l^p$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\|(\lambda x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|(x_n)\|_p$. Die Dreiecksungleichung gilt für $\|\cdot\|_p$ nach Satz 4. Ist für $(x_n) \in l^p$, $\|(x_n)\|_p = 0$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 0$, also $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt ist $\|\cdot\|_p$ also eine Norm auf l^p .

Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in l^p . Wir verwenden für den Rest des Beweises die Schreibweise von Elementen aus l^p als Funktionen $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{K}$. Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_n(m) - f_k(m)| = (|f_n(m) - f_k(m)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{l=1}^{\infty} |f_n(l) - f_k(l)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f_n - f_k\|_p.$$

Wie schon für l^∞ folgt, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n(m))_n$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} ist. Somit konvergiert für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n(m))_n$ und wir erhalten eine Funktion $f^* : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ mit $f^*(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(m)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall_{n,k > N} : \|f_n - f_k\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit gilt $\forall_{n,k > N}$ und alle $M \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{m=1}^M |f_n(m) - f_k(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f_n - f_k\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

¹Nebenrechnung: $(p-1)q = p$.

Für $k \rightarrow \infty$ erhalten wir $\forall_{n>N}, \forall_{M \in \mathbb{N}}$

$$\left(\sum_{m=1}^M |f_n(m) - f^*(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also $\forall_{n>N}$

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} |f_n(m) - f^*(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somit $f_n - f^* \in l^p$ für $n > N$, also wegen $f^* = f_n - (f_n - f^*)$ auch $f^* \in l^p$. Desweiteren $\forall_{n>N} : \|f_n - f^*\|_p < \varepsilon$. Also konvergiert (f_n) gegen f^* . Damit ist $(l^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum. \square

Beispiel 4. zur Verdeutlichung.

- (1) Sei X ein metrischer Raum mit Metrik $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$. Wir bezeichnen $C^b(X)$ den Vektorraum der stetigen, beschränkten Funktionen $X \rightarrow \mathbb{K}$. $C^b(X)$ ist ein Unterraum von $l^\infty(X)$, also ist $C^b(X)$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein normierter Raum.
Die Konvergenz in $C^b(X)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ entspricht der gleichmäßigen Konvergenz wie wir sie aus der Analysis kennen.
Sei (f_n) eine Folge in $C^b(X)$, die gegen ein $f^* \in l^\infty(X)$ konvergiert. Aus der Analysis wissen wir, dass dann f^* stetig, also $f^* \in C^b(X)$ ist. Also ist $C^b(X)$ abgeschlossener Unterraum von $l^\infty(X)$ und $(C^b(X), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.
Ist der Raum X kompakt, z.B. eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n mit der euklidischen Metrik, so sind alle stetigen Funktionen $X \rightarrow \mathbb{K}$ beschränkt, also $C^b(X) = C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} | f \text{ stetig}\}$.
- (2) Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Wir bezeichnen mit $C^1([a, b])$ den Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen $[a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. Es ist $C^1([a, b]) \subset l^\infty([a, b])$. Der Raum $(C^1([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Banachraum (siehe 3. Übungsblatt). Wir können auf $C^1([a, b])$ jedoch eine andere Norm definieren und zwar $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Mit dieser Norm versehen ist $C^1([a, b])$ ein Banachraum. Dies folgt aus dem nächsten Beispiel.
- (3) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ eine r -mal stetig differenzierbare Funktion so verwenden wir die Multiindexschreibweise $D^\alpha f$ mit $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ für die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x_1, \dots, x_n)$$

der Ordnung $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq r, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so können wir durch

$C^r(\overline{\Omega}) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ ist } r\text{-mal stetig differenzierbar, für alle Multiindizes } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } 0 \leq |\alpha| \leq r \text{ ist } D^\alpha f \text{ auf } \Omega \text{ stetig}\}$
einen Unterraum von $l^\infty(\Omega)$ definieren. Durch

$$\|f\| := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} \|D^\alpha f\|_\infty$$

für $f \in C^r(\overline{\Omega})$ definieren wir eine Norm auf $C^r(\overline{\Omega})$ (siehe 2. Übungsblatt). Der normierte Raum $(C^r(\overline{\Omega}), \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

1.1. Eigenschaften normierter Räume.

Lemma 1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Es gilt

$$\forall v, w \in X : \left| \|v\| - \|w\| \right| \leq \|v - w\|.$$

Die Abbildung $\|\cdot\| : x \mapsto [0, \infty)$ ist stetig.

Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen $x \in X$ wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

Beweis. Für 1 und 2 siehe erstes Übungsblatt. 3 folgt direkt aus der entsprechenden Eigenschaft für metrische Räume. \square

Theorem 6. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein metrischer Raum.

- (1) Konvergiert die Folge (x_n) in X gegen $x \in X$ und die Folge (y_n) in X gegen $y \in X$, so konvergiert für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ die Folge $(\lambda x_n + \mu y_n)$ gegen $\lambda x + \mu y$.
- (2) Ist U ein Unterraum von X , so ist auch \overline{U} ein Unterraum von X .

Beweis. In zwei Teilen.

- (1) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt $\|\lambda x_n + \mu y_n - (\lambda x + \mu y)\| \leq \|\lambda x_n - \lambda x + \mu y_n - \mu y\| \leq |\lambda| \|x_n - x\| + |\mu| \|y_n - y\|$. Mit Lemma 1 (3) folgt dann die Behauptung.
- (2) Sei $x, y \in \overline{U}$. Dann gibt es Folgen $(x_n), (y_n)$ in U mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Sei $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Da U linearer Unterraum von X ist, ist $(\lambda x_n + \mu y_n)$ Folge in U . Nach 1 ist $(\lambda x_n + \mu y_n)$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n + \mu y_n = \lambda x + \mu y$. Also $\lambda x + \mu y \in \overline{U}$. Da $U \neq \emptyset$ und $U \subset \overline{U}$ ist $\overline{U} \neq \emptyset$. Damit ist \overline{U} Unterraum von X .

\square

Definition 4. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ auf X heißen äquivalent, falls es $m, M > 0$ gibt, so dass $\forall v \in X m\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq M\|v\|_a$.

Lemma 2. Die Äquivalenz von Normen auf einem \mathbb{K} -Vektorraum X definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf X .

Beweis. Siehe 2. Übungsblatt. \square

Theorem 7. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum und $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ Normen auf X . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) Die Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ sind äquivalent.
- (2) Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen $x \in X$ bzgl. $\|\cdot\|_a$, wenn sie gegen x bzgl. $\|\cdot\|_b$ konvergiert.
- (3) Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen 0 bzgl. $\|\cdot\|_a$, wenn sie gegen 0 bzgl. $\|\cdot\|_b$ konvergiert.

Beweis. 1 \implies 2: Sei $m, M, \tilde{m}, \tilde{M} > 0$ mit $\forall v \in X : m\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq M\|v\|_a$ und $\forall v \in X : \tilde{m}\|v\|_b \leq \|v\|_a \leq \tilde{M}\|v\|_b$ (siehe Lemma 2). Dann gilt für Folge (x_n) in X und $x \in X$ stets $\|x_n - x\|_a \leq \tilde{M}\|x_n - x\|_b$ und $\|x_n - x\|_b \leq M\|x_n - x\|_a$.

2 \implies 3: 3 ist Sonderfall von 2.

3 \implies 1: Angenommen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ sind nicht äquivalent. Dann gibt es kein $M > 0$ oder kein $\tilde{M} > 0$ so dass für alle $v \in X$: $\|v\|_b \leq M\|v\|_a$ und $\|v\|_a \leq \tilde{M}\|v\|_b$. Damit gibt es eine Folge (v_n) in X so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $v_n \neq 0$ und $\left(\frac{\|v_n\|_b}{\|v_n\|_a} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist unbeschränkt. Damit gibt es eine Teilfolge $(v_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$ von (v_n) ,

so dass $\left(\frac{\|v_{n_m}\|_a}{\|v_{n_m}\|_b}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Also konvergiert $\left(\left\|\frac{1}{\|v_{n_m}\|_b}v_{n_m}\right\|_a\right)_{m \in \mathbb{N}}$ gegen 0. Damit ist $\left(\frac{1}{\|v_{n_m}\|_b}v_{n_m}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen $0 \in X$ bezüglich $\|\cdot\|_a$. Da für alle $m \in \mathbb{N}$ jedoch gilt

$$\left\|\frac{v_{n_m}}{\|v_{n_m}\|_b}\right\|_b = \frac{\|v_{n_m}\|_b}{\|v_{n_m}\|_b} = 1,$$

ist $\left(\frac{1}{\|v_{n_m}\|_b}v_{n_m}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent gegen $0 \in X$ bezüglich $\|\cdot\|_b$. □

Theorem 8. *Ist X ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum, so sind auf X alle Normen äquivalent.*

Beweis. O.B.d.A. ist $X = \mathbb{K}^n$. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem \mathbb{K}^n . Bekanntlich ist $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ auch eine Norm auf dem \mathbb{K}^n . Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis des \mathbb{K}^n . Für $x = (x_1, \dots, x_n)$ gilt (mit der Hölderschen Ungleichung)

$$\|x\| = \left\|\sum_{j=1}^n x_j e_j\right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \|e_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_M = M \cdot \|x\|_2.$$

Insbesondere gilt für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$ dass $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq M\|x - y\|_2$. Damit ist $\|\cdot\|$ stetig bezüglich $\|\cdot\|_2$. Die Menge $S = \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_2 = 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also nach Heine-Borel kompakt. $\|\cdot\|$ nimmt also auf S ihr Minimum an. Da $0 \notin S$, gilt $m = \min_{x \in S} \|x\| > 0$. Da für alle $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gilt $\frac{x}{\|x\|_2} \in S$ haben wir

$$\|x\|_2 m \leq \|x\|_2 \underbrace{\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|}_{\geq \min_{y \in S} \|y\|} = \|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. □

Im unendlich-dimensionalen gilt eine solche allgemeine Äquivalent nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5. Wir betrachten $C([0, 1])$. Auf diesen Raum können wir durch $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(s)| ds$ eine Norm auf $C([0, 1])$ definieren. Diese Norm ist nicht äquivalent zur Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, denn sei für $n \in \mathbb{N}$ $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$

$$f_n(s) = \begin{cases} 1 - ns & s \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 & s \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $f_n \in C([0, 1])$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Supremumsnorm $\|f_n\|_\infty = 1$. Also konvergiert (f_n) nicht gegen $0 \in C([0, 1])$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Es ist aber für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(s)| ds = \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(s)| ds = \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - ns) ds = [s - \frac{1}{2n}s^2]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Also konvergiert (f_n) gegen $0 \in C([0, 1])$ bezüglich $\|\cdot\|_1$. Nach Satz 7 sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ nicht äquivalent auf $C([0, 1])$.

Korollar 1. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein endlich-dimensionaler, normierter Raum. Dann sind beschränkte, abgeschlossene Mengen kompakt.*

Beweis. O.B.d.A. $X = \mathbb{K}^n$. Für die Norm $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ liefert der Satz von Heine-Borel die Behauptung. Da $\|\cdot\|$ zu $\|\cdot\|_2$ äquivalent ist, stimmen sowohl abgeschlossene beschränkte und kompakte Mengen bezüglich der beiden Normen überein. \square

Wir werden zeigen, dass die Aussage von Korollar 1 nur im endlich-dimensionalen gilt.

Lemma 3. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum von X mit $U \neq X$. Für jedes $\delta \in (0, 1)$ existiert ein $x_\delta \in X$ mit $\|x_\delta\| = 1$ und $\|x_\delta - u\| \geq 1 - \delta$ für alle $u \in U$.

Beweis. Wähle $x \in X \setminus U$. Setze $d := \inf\{\|x - u\| : u \in U\}$. Ist $d = 0$, so gibt es eine Folge (u_n) in U mit $\|x - u_n\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$ und $x \in \overline{U} = U$. Widerspruch. Damit ist $d > 0$. Insbesondere ist $\frac{d}{1-\delta} > d$. Damit gibt es ein $u_\delta \in U$ mit $d \leq \|x - u_\delta\| < \frac{d}{1-\delta}$. Sei

$$x_\delta = \frac{x - u_\delta}{\|x - u_\delta\|}.$$

Klar ist $\|x_\delta\| = 1$. Für $u \in U$ gilt nun

$$\|x_\delta - u\| = \left\| \frac{x - u_\delta}{\|x - u_\delta\|} - u \right\| = \frac{1}{\|x - u_\delta\|} \cdot \underbrace{\|x - u_\delta + (\|x - u_\delta\|u)\|}_{\geq d} \geq \frac{1}{\|x - u_\delta\|} d \geq \frac{1-\delta}{d} d = 1 - \delta.$$

\square

2. ÜBUNGSBLÄTTER

2.1. Übungsblatt 1.

2.1.1. *Aufgabe 1.1.* Zunächst zeigen wir: $\forall x, y \in X : ||x| - |y|| \leq \|x - y\|$:

$$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\| = \|x - y\|$$

$$\|y\| - \|x\| = \|y - x + x\| - \|x\| \leq \|y - x\| + \|x\| - \|x\| = \|x - y\|$$

Dies impliziert die Ungleichung.

Sei $x \in X$ gegeben und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle $y \in U_\delta(x) : ||x| - |y|| \leq \|x - y\| < \delta = \varepsilon$. Damit ist die Abbildung $x \mapsto \|x\|$ stetig.

2.1.2. *Aufgabe 1.2.* Sei $v \in X$ und $r > 0$. Ist (w_n) Folge in $U_r(v)$, die gegen $w \in X$ konvergiert, so folgt wegen der Stetigkeit von $x \mapsto \|x\|$, dass $\|w - v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - v\| \leq r$. Also $\overline{U_r(v)} \subset \{w \in X : \|w - v\| \leq r\}$. Sei $w \in X$ mit $\|w - v\| = r$. Definiere Folge (w_n) durch $w_n = v + (1 - \frac{1}{n})(w - v)$. Da $\|w - w_n\| = \|w - v - (1 - \frac{1}{n})(w - v)\| = \|w - w + \frac{w}{n} - v + v - \frac{v}{n}\| = \|\frac{1}{n}(w - v)\| = \frac{1}{n}\|w - v\| = \frac{1}{n}r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ konvergiert (w_n) gegen w . Weiterhin ist $\|v - w_n\| = \|v - v - (1 - \frac{1}{n})(w - v)\| = (1 - \frac{1}{n})\|w - v\| = (1 - \frac{1}{n})r < r$ also (w_n) Folge in $U_r(v)$. Damit $\{w \in X : \|w - v\| \leq r\} \subset \overline{U_r(v)}$ und es folgt die Gleichheit der Mengen. Gegenbeispiel für metrische Räume: Sei $X = \mathbb{Z}$ und $d(v, w) = |v - w|$. X ist mit d ein metrischer Raum und es gilt $\{w \in X : d(w, 0) < 1\} = \{0\} \neq \overline{\{0\}} = \{-1, 0, 1\} = \{w \in X : d(w, 0) \leq 1\}$.

2.1.3. *Aufgabe 1.3.* Behauptung: Für $1 < p < q < \infty$ gilt: $l^1 \subset l^p \subset l^q \subset l^\infty$. Beweis: Sei $(x_n) \in l^p$ für $1 \leq p < \infty$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ konvergent. Damit konvergiert $(|x_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ und somit (x_n) gegen 0. Also ist (x_n) beschränkt und $(x_n) \in l^\infty$.

Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $p < q$. Da (x_n) gegen 0 konvergiert, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$: $|x_n| < 1$. Damit ist für alle $n > N$: $|x_n|^q < |x_n|^p$. Da $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ konvergiert ist nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^q$ konvergent und $(x_n) \in l^q$.

Beweis, dass die Inklusionen echt sind: Sei $p \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < \infty$. Die konstante Folge (a_n) , $\forall n \in \mathbb{N} a_n = 1$, ist beschränkt, also $(a_n) \in l^\infty$. Da $\sum_{n=1}^\infty |1|^p$ divergent, ist $(a_n) \notin l^p$. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $p < q$. Wähle $\alpha \in (\frac{1}{q}, \frac{1}{p})$. Dann ist $\alpha p < \frac{1}{p} p = 1$ und $\alpha q > \frac{1}{q} q = 1$. Betrachte die Folge $x = (\frac{1}{n^\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty (\frac{1}{n^\alpha})^p = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\alpha p}}$ ist divergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty (\frac{1}{n^\alpha})^q = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\alpha q}}$ ist konvergent. Damit $x \notin l^p$ und $x \in l^q$.

2.1.4. *Aufgabe 1.4.* Wir verwenden wieder die Schreibweise von Folgen als Funktionen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$. Wir definieren $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$f_n(m) = \begin{cases} \frac{1}{m} & (m < n) \\ 0 & (m \geq n) \end{cases}$$

(also $(0,0,0,\dots)$, $(1,0,0,0,\dots)$, $(1, \frac{1}{2}, 0,0,0,\dots)$, ...) und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(m) = \frac{1}{m}$. Es ist (f_n) Folge in d und $f \in c_0 \setminus d$. Da

$$(f_n - f)(m) = \begin{cases} 0 & m < n \\ -\frac{1}{m} & m \geq n \end{cases}$$

folgt $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n}$. Also konvergiert (f_n) in $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ gegen f . Damit ist d nicht abgeschlossen in $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$. Somit ist $(d, \|\cdot\|_\infty)$ nicht vollständig (nach Satz 1).

2.1.5. *Aufgabe 2.1.*

(1) Wir überprüfen die drei Normaxiome.

- (a) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in C^r(\bar{\Omega})$. Es gilt $\|\lambda f\| = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} \|D^\alpha(\lambda f)\|_\infty = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} |\lambda| \|D^\alpha f\|_\infty = |\lambda| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} \|D^\alpha f\|_\infty = |\lambda| \|f\|$.
- (b) Seien $f, g \in C^r(\bar{\Omega})$. Es gilt $\|f + g\| = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} \|D^\alpha(f + g)\|_\infty = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} \|(D^\alpha f) + (D^\alpha g)\|_\infty \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} (\|D^\alpha f\|_\infty + \|D^\alpha g\|_\infty) = \|f\| + \|g\|$.
- (c) Sei $f \in C^r(\bar{\Omega})$. Es sei $\|f\| = 0$. Also $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} \|D^\alpha f\|_\infty = 0$. Damit folgt $\|D^0 f\|_\infty = 0$ und somit $\|f\|_\infty = 0$. Da $f \in l^\infty(\Omega)$, folgt für alle $x \in \Omega$ dass $f(x) = 0$.
- (d) Wir zeigen zuerst, dass f auf Ω stetig fortsetzbar ist. Konvergiere (f_m) auf Ω gleichmäßig gegen f , mit (f_m) Folge wie in Aufgabenstellung und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist für alle $x \in \Omega$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Die Folge $(f_m|_\Omega)_{m \in \mathbb{N}}$ ist konvergent in $(l^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$, also Cauchy-Folge in $(l^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$. Da für alle $k, m \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{\sup_{x \in \Omega} |f_k(x) - f_m(x)|}_{\|f_k|_\Omega - f_m|_\Omega\|_\infty} = \underbrace{\sup_{x \in \Omega} |f_k(x) - f_m(x)|}_{\|f_k - f_m\|_\infty}$$

ist $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $(l^\infty(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$. Da dieser Raum ein Banachraum ist, gibt es $\tilde{f} \in l^\infty(\bar{\Omega})$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - \tilde{f}\|_\infty = 0$. Also konvergiert (f_m) gleichmäßig gegen \tilde{f} und damit ist f stetig. Da für alle $x \in \Omega$ gilt:

$$\tilde{f}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x).$$

Damit ist f stetig fortsetzbar auf $\bar{\Omega}$. Analog für g_j . Nun zeigen wir die Differenzierbarkeit von f nach x_j : Wir schreiben $f(_, x_j, _)$ für $f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ und $f(_, x_j + h, _)$ für $f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n)$. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$. Wähle $r > 0$, so dass $U_r(x) \subset \Omega$ mit $U_r(x)$ bezüglich $\|\cdot\|_2$ -Norm auf \mathbb{R}^n . Nach dem Mittelwertsatz gibt es für jedes $h \in (-r, r)$ und $m \in \mathbb{N}$ ein $\zeta_{h,m} \in [-|h|, |h|]$ mit

$$(2.1) \quad \left| f_m(_, x_j + h, _) - f_m(_, x_j, _) - h \frac{d}{dx_j} f_m(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) \right| = 0$$

$(\zeta_{h,m})_{m \in \mathbb{N}}$ ist Folge in $[-|h|, |h|]$. Durch Übergang zu einer Teilfolge von (f_m) können wir o.B.d.A. annehmen, dass $(\zeta_{h,m})_{m \in \mathbb{N}}$ gegen ein $\zeta_h^* \in [-|h|, |h|]$ konvergiert. Mit der Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{dx_j} f_m(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) - g_j(_, x_j + \zeta_h^*, _) \right| \\ \leq & \left| \frac{d}{dx_j} f_m(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) - g_j(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) \right| \\ & + |g_j(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) - g_j(_, x_j + \zeta_h^*, _)| \\ \leq & \underbrace{\left\| \frac{d}{dx_j} f_m - g_j \right\|_\infty}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|g_j(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) - g_j(_, x_j + \zeta_h^*, _)|}_{\rightarrow 0}. \end{aligned}$$

folgt, dass $\left(\frac{d}{dx_j} f_m(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) \right)_{m \in \mathbb{N}}$ gegen $g_j(_, x_j + \zeta_h^*, _)$ konvergiert. Für $m \rightarrow \infty$ folgt aus (2.1), dass

$$|f(_, x_j + h, _) - f_j(_, x_j, _) - h g_j(_, x_j + \zeta_h^*, _)| = 0.$$

Sei $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in $(-r, r)$ mit $h_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ mit $h_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt mit (2.1)

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(_, x_j + h_k, _) - f(_, x_j, _)}{h_k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} g_j(_, x_j + \underbrace{\zeta_{h_k}^*}_{\rightarrow 0 \ (k \rightarrow \infty)}, _) \\ &= g_j(_, x_j, _) \end{aligned}$$

mit $|\zeta_{h_k}^*| \leq |h_k|$ und g_j stetig. Somit ist f nach x_j partiell differenzierbar und $\frac{d}{dx_j} f(x) = g_j(x)$.

2.1.6. Aufgabe 2.3.

- (1) Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < q$. Wähle $\alpha \in (\frac{1}{q}, \frac{1}{p})$. Dann gilt $\alpha p < 1$ und $\alpha q > 1$. Wir schreiben Elemente aus l^p als Funktionen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ durch

$$f_n(m) = \begin{cases} \frac{1}{m^\alpha} & m \leq n, \\ 0 & m > n. \end{cases}$$

Da $f_n \in d$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n \in l^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist die Folge $(\|f_n\|_p^p)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent, da $\|f_n\|_p^p = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^{\alpha p}}$ mit $\alpha p < 1$. Die Folge $(\|f_n\|_q^q)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent, da $\|f_n\|_q^q = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^{\alpha q}}$ mit $\alpha q > 1$. Also ist die Folge $(\|f_n\|_p)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent und die Folge $(\|f_n\|_q)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent. Damit können $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ nicht äquivalent sein, denn sonst gäbe es $M > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\|_p \leq M \|f_n\|_q$. (Unter Verwendung von Aufgabe 2.2.) Widerspruch.

- (2) Sei $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ durch

$$f_n(m) = \begin{cases} 1 & m \leq n, \\ 0 & m > n. \end{cases}$$

Wieder ist für alle $n \in \mathbb{N}$: $f_n \in d \subset l^p$, also (f_n) Folge in l^p . Es ist $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\|f_n\|_p = \left(\sum_{m=1}^n 1^p \right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}.$$

Damit ist $(\|f_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und $(\|f_n\|_p)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent. Analog zur obigen Aufgabe folgt, dass $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_p$ nicht äquivalent sind.