Einführung in die Funktionalanalysis

23. Oktober 2013

1 Organisatorisches

Vorlesung Di 12.15 - 13.45 HS4; Mi 14.15 - 15.45 HS4 15.10.13

Übung Do 16.00 - 17.30 HS4

Dozent Christian Lageman <christian.lageman@mathematik.uni-wuerzburg.de> Sprechstunde: Mi 10.00 - 11.30 Übungsblätter: Abgabe Vorlesung Dienstag

Wuecampus

Klausur 5.4.2014, 14:00 HS4

Literatur D. Werner, Funktionalanalysis, Springer-Verlag 2011 F. Hirzebruch, W. Scharlau, Einführung in die Funktionalanalysis, Sprektrum Akademischer Verlage, 1991 E. Kreyzig, Introduction Functional Analysis with Applications, John Wiley & Songs, 1989 R. Meise, D. Vogt, Einführung in die Funktionalanalysis, Vieweg + Teubner Verlag, 2011

Voraussetzungen Lineare Algebra I und II; Analysis I und II; Veriefung Analysis; insbesondere metrische Räume, Folgen in metrischen Räumen, offene und abgeschlossene Mengen, Integration im $\mathbb{R}^n$

2 Normierte Räume

Sprechen wir von einem $\mathbb{K}$-Vektorraum, so meinen wir einen $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum, d.h. die entsprechenden Definitionen und Sätze gelten sowohl für reelle als auch für komplexe Vektorräume. Wir verwenden $\mathbb{K}$ als Platzhalter für $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ in den Sätzen und Definitionen.

Definition 1. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir nennen eine Funktion $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ eine *Halbnorm auf* X, falls gilt:

1. $\forall_{v\in X,\lambda\in\mathbb{K}} : \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
2. $\forall_{v,w\in X} : \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Gilt zusätzlich noch $\forall v \in X : \|v\| = 0 \implies v = 0$, so nennen wir $\|\cdot\|$ eine *Norm auf* X. Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X, so bezeichnen wir $(X, \|\cdot\|)$ als *normierten Raum*.

Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X induziert durch $d(v,w) = \|v-w\|$ eine Metrik $d : X \times X \to [0,\infty)$ auf X, die wir als kanonische Metrik auf $(X, \|\cdot\|)$ bezeichnen. $\square$

Ein normierter Raum ist damit auch ein metrischer Raum. Die Begriffe von offenen und abgeschlossenen Mengen, Konvergenz von Folgen, Cauchy-Folgen, Vollständigkeit, Stetigkeit von Abbildungen ergeben sich für normierte Räume aus den entsprechenden Begriffen für metrische Räume.

Example 1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Folge (v_n) in X heißt konvergent gegen $v^* \in X$ falls gilt:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}} : \|v_n - v^*\| < \varepsilon$$

wobei $\|v_n - v^*\| = d(v_n, v^*)$ mit der kanonischen Metrik d ist. $\triangle$

Für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ notieren wir:

1. den Abschluss einer Menge $M \subset X$ mit $\overline{M}$,
2. den Rand einer Menge $M \subset X$ mit ∂M,
3. das Innere einer Menge $M \subset X$ mit $\operatorname{int} M$,

Aus der entsprechenden Definitionen für metrische Räume ergibt sich: eine Folge (v_n) in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *Cauchy-Folge*, falls gilt

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N} : \|v_n - v_m\| < \varepsilon.$$

Ein metrischer Raum und entsprechend auch ein normierter Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, nennt man *vollständig.*

1. die offene Kugel um $v \in X$ mit Radius r mit $U_r(v) = \{w \in X : \|v - w\| < r\}$.

Definition 2. Einen vollständigen normierten Raum bezeichnet man als *Banachraum.* $\square$

Example 2.

1. Versehen wir $\mathbb{R}^n$ bzw $\mathbb{C}^n$ mit einer Norm $\|\cdot\|$, so ist der normierte Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ bzw. $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Es sei daran erinnert, dass auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind, d.h. sind $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_+$ Normen auf einem endlichendimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum X, so gibt es Konstanten $m, M > 0$ mit $\forall_{v\in X} : m\|v\|_* \leq \|v\|_+ \leq M\|v\|_*$. Die Vollständigkeit im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ ist damit nur für eine Norm nachzuweisen und aus der Analysis bekannt.

2. Sei M eine nicht-leere Menge. Wir bezeichnen mit $l^\infty(M)$ den $\mathbb{K}$-Vektorraum der beschränkten Funktionen $M \to \mathbb{K}$. Wir definieren auf $l^\infty(M)$ die Norm $\|\cdot\|_\infty$ durch $\|f\|_\infty = \sup_{x\in M}|f(x)|$ für $f \in l^\infty(M)$. Die Norm ist wohldefiniert, da f beschränkt ist. Man bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ auch als die sogenannte *Supremumsnorm.* $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm, denn:

   (a) für $f \in l^\infty(M), \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in M}|\lambda f(x)| = \sup_{x\in M}|\lambda||f(x)| = |\lambda|\sup_{x\in M}|f(x)| = |\lambda|\|f\|_\infty$.

   (b) für $f, g \in l^\infty(M)$ gilt: $\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in M}|(f+g)(x)| = \sup_{x\in M}|f(x)+g(x)| \le \sup_{x\in M}|f(x)| + |g(x)| \le \sup_{x\in M}|f(x)| + \sup_{x\in M}|g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

   (c) für $f \in l^\infty(M)$ gilt: $\|f\|_\infty = 0 \implies \sup_{x\in M}|f(x)| = 0 \implies \forall_{x\in M} : |f(x)| = 0 \implies f \equiv 0$.

   $(l^\infty(M), \|\cdot\|_\infty)$ ist also ein normierter Raum. Wir zeigen nun, dass der Raum vollständig ist. Sei dazu (f_n) eine Cauchy-Folge in $l^\infty(M)$. Es gilt also $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N} : \|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Es gilt außerdem $\|f_n - f_m\| = \sup_{x\in M}|f_n(x) - f_m(x)|$. Dies impliziert, dass $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N}\forall_{x\in M} : |f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon$. Insbesondere gilt für alle $x \in M$ daher $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in M}\forall_{n,m>N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, und also ist $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge für jedes $x \in M$. Da $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ vollständig sind, ist für jedes $x \in M$ die Folge $(f_n(x))$ konvergent. Wir erhalten die Funktion $f^* : M \to \mathbb{K}$ durch 16.10.13
   $\forall_{x\in M} : f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Wir erhalten eine Funktion $f^* : M \to \mathbb{K}$ mit $\forall_{x\in M} : f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Wir hatten uns überlegt, dass

   $$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N}\forall_{x\in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

   Damit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{n,m>N}\forall_{x\in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < 1$. (Dies ist äquivalent zu $f_m(x) \in U_1(f_n(x))$.) Also $\forall_{m>N}\forall_{x\in M} : f_m(x) \in U_1(f_{N+1}(x))$. Somit $\forall_{x\in M} : f^*(x) \in U_1(f_{N+1}(x))$. Damit $\forall_{x\in M} : |f_{N+1}(x) - f^*(x)| \le 1$. Da $f_{N+1} \in l^\infty(M)$, also beschränkt ist, muss auch f^* beschränkt sein. Wir erhalten $f^* \in l^\infty(M)$. Wir zeigen nun die Konvergenz von (f_n) gegen f^*. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es sein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall_{n,m>N}\forall_{x\in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Also $\forall_{x\in M}\forall_{n>N}\forall_{m>N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da es zu jedem $x \in M$ und $n > N$ ein $m(x,n) \in \mathbb{N}, m(x,n) > N$ gibt mit

   $$|f_{m(x,n)}(x) - f^*(x)| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} - |f_n(x) - f_{m(x,n)}(x)|}_{> \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{1}{6}\varepsilon}.$$

   folgt

   $$\forall_{x\in M}\forall_{n>N} : \underbrace{|f_n(x) - f_{m(x,n)}(x)| + |f_{m(x,n)}(x) - f^*(x)}_{|f_n(x)-f^*(x)|\le} < \frac{\varepsilon}{2} - |f_n(x)-f_{m(x,n)}(x)| + |f_n(x)-f_{m(x,n)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Also $\forall_{n>N}\forall_{x\in M} : |f_n(x) - f^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit $\forall_{n>N} : \|f_n - f^*\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$. Damit konvergiert (f_n) gegen f^*. Somit ist $(l^\infty(M), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

△

Theorem 1. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $U \subset X$ ein Unterraum von X.*

1. *Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und U eine abgeschlossene Teilmenge von X, so ist $(U, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.*
2. *Ist U vollständig, so ist U eine abgeschlossene Teilmenge von X.*

∘

Beweis.

1. Sei (u_n) eine Cauchy-Folge in $(U, \|\cdot\|)$. Dann ist (u_n) eine Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|)$. Also konvergiert (u_n) gegen ein $u^* \in X$. Damit ist $u^* \in \overline{U}$, also $u^* \in U$. Somit ist U vollständig.
2. Sei U vollständig. Ist $u^* \in \overline{U} \setminus U$, so gibt es Folge (u_n) in U die gegen u^* konvergiert. Diese Folge ist eine Cauchy-Folge in U und konvergiert somit gegen einen Grenzwert $u^{**} \in U$. Wegen der Eindeutigkeit von Grenzwerten folgt $u^* = u^{**} \in U$. Also $\overline{U} \setminus U = \emptyset$ und U abgeschlossen.

□

Example 3. Wir verwenden die Notation $l^\infty = l^\infty(\mathbb{N})$. Da eine Folge in $\mathbb{K}$ eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$ ist, ist l^∞ also der Raum aller beschränkten Folgen in $\mathbb{K}$. Wir definieren die folgenden Unterräume von l^∞: $c = \{(x_n)|x_n \in \mathbb{K}, (x_n) \text{ konvergent } \}$, $c_0 = \{(x_n)|x_n \in \mathbb{K}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$, $d = \{(x_n)|x_n \in \mathbb{K}, x_n \text{ bis auf endlich viele Folgenglieder gleich } 0\}$. Da die konvergente Folge in $\mathbb{K}$ in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ beschränkt ist, folgt $d \subset c_0 \subset c \subset l^\infty$. Sei $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm auf l^∞. Es sind $(d, \|\cdot\|_\infty)$, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, $(c, \|\cdot\|_\infty)$ normierte Räume. Welche dieser Räume sind Banachräume? Mit Satz 1 reicht es zu zeigen, dass der entsprechende Raum abgeschlossen in l^∞ ist.

Sei (f_n) eine Folge in c, die konvergent gegen ein $f^* \in l^\infty$ ist. Um Doppelindizes zu vermeiden, verwenden wir die Darstellung von Folgen als Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Da (f_n) eine Folge in c ist, können wir durch $x_n = \lim_{m\to\infty} f_n(m)$ eine Folge (x_n) in $\mathbb{K}$ definieren. Es gilt $|x_n - x_l| \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} |f_n(m) - f_l(m)| = \|f_n - f_l\|_\infty$. Da (f_n) eine Cauchy-Folge ist, ist durch diese Abschätzung die Folge (x_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Also konvergiert (x_n) gegen ein $x^* \in \mathbb{K}$. Wir wollen nun zeigen, dass f^* gegen x^* konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|f^* - f_N\| < \frac{\varepsilon}{3}$ und $|x_N - x^*| < \frac{\varepsilon}{3}$. Wähle $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > M$ gilt $|f_N(m) - x_N| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann gilt für alle $m > M$

$$|f^*(m) - x^*| \leq |\underbrace{f^*(m) - f_N(m)}_{\leq \|f^* - f_N\|_\infty}| + |\underbrace{f_N(m) - x_N}_{< \frac{\varepsilon}{3}}| + |\underbrace{x_N - x^*}_{< \frac{\varepsilon}{3}}| < \underbrace{\|f^* - f_N\|_\infty}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Also ist f^*konvergente Folge und $f^* \in c$. Damit ist c abgeschlossen und nach Satz 1 ein Banachraum.

Sei (f_n) eine Folge in c_0 die konvergent gegen ein $f^* \in l^\infty$ ist. Wiederholen wir das obige Argument, so erhalten wir zusätzlich dass (x_n) kontant 0 ist. Damit ist $x^* = 0$ und $f^* \in c_0$. Somit ist c_0 abgeschlossen und nach Satz 1 ein Banachraum. Der Raum $(d, \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Banachraum.

△

Wir definieren nun weitere Folgenräume.

Definition 3. Für $p \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < \infty$ setzen wir $l^p = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}$ und $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ für $(x_n) \in l^p$. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass $(l^p, \|\cdot\|_p)$ Banachräume sind.

□ 22.10.13

Theorem 2. *Für $1 \leq p < \infty$ ist l^p versehen mit der Addition und Skalarmultiplikation von Folgen ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

∘

Beweis. Offensichtlich ist die konstante Folge (a_n) für alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n = 0$ in l^p enthalten. Desweiteren ist für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $(x_n) \in l^p$ auch $(\lambda x_n) \in l^p$, da $\sum_{n=1}^\infty |\lambda x_n|^p = |\lambda|^p \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ konvergiert. Schließlich, sind $(x_n), (y_n) \in l^p$, so gilt $\sum_{n=1}^\infty |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=1}^\infty (|x_n| + |y_n|)^p \leq \sum_{n=1}^\infty (2 \max\{|x_n|, |y_n|\})^p = 2^p \sum_{n=1}^\infty (\max\{|x_n|, |y_n|\})^p \leq 2^p \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p + |y_n|^p = 2^p (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p + \sum_{n=1}^\infty |y_n|^p) < \infty$. Also $(x_n + y_n) \in l^p$.

□

Theorem 3. *Holdesche Ungleichung*

1. *Sind $(x_n) \in l'$ und $(y_n) \in l^\infty$, so ist $(x_n y_n) \in l'$ und $\|(x_n y_n)\|_{'} \leq \|(x_n)\|_{'} \|(y_n)\|_\infty$.*
2. *Sei $1 < p < \infty$ und $q = \frac{p}{p-1}$. Sind $(x_n) \in l^p$ und $(y_n) \in l^q$, so ist $(x_n y_n) \in l'$ und $\|(x_n y_n)\|_{'} \leq \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q$.*

∘

Beweis.
1. Es gilt $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n}_{=\|(x_n y_n)\|_{'}} \leq \sum_{n=1}^\infty |x_n| \|(y_n)\|_\infty = \|(y_n)\|_\infty \sum_{n=1}^\infty |x_n| = \|(y_n)\|_\infty \|(x_n)\|_{'} < \infty$.
2. Wir haben $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $a, b > 0$ und $A = p \log a$ sowie $B = q \log b$. Die Funktion $t \mapsto \exp(t)$ ist konvenx, also $\exp(\frac{1}{p}A + \frac{1}{q}B) \leq \frac{1}{p}\exp(A) + \frac{1}{q}\exp(B)$. Somit

$$ab = \exp(\underbrace{\log a}_{=\frac{1}{p}A} + \underbrace{\log b}_{=\frac{1}{q}B}) \leq \frac{1}{p} \exp(\underbrace{p \log a}_{A}) + \frac{1}{q} \exp(\underbrace{q \log b}_{B}) = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Wir haben für $(x_n) \in l^p, (y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p = 1 = \|(y_n)\|_q$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n||y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{p}|x_n|^p + \frac{1}{q}|y_n|^q) = \frac{1}{p} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1}$$

Sind $(x_n) \in l^p$, $(y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p \neq 0$ und $\|(y_n)\|_q \neq 0$, so ist mit (1)

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|}_{=\|(x_n y_n)\|} = \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|x_m|}{\|(x_n)\|_p} \cdot \frac{|y_m|}{\|(y_n)\|_q} \leq \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q \cdot 1.$$

Sind $(x_n) \in l^p$ und $(y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p = 0$ oder $\|(y_n)\|_q = 0$, so ist $(x_n y_n) \in l^1$ und $\|(x_n y_n)\|_{'} = 0$.

□

Theorem 4. *Minkowskische Ungleichung. Sei* $1 \leq p < \infty$. *Für* $(x_n), (y_n) \in l^p$ *gilt* $\|(x_n + y_n)\|_p \leq \|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p$.

∘

Beweis. Für $p = 1$ erhalten wir die Ungleichung direkt. Sei $p > 1$ und $q = \frac{p}{q-1}$. Weiterhin seien $(x_n), (y_n) \in l^p$. Nach Satz 2 ist $(x_n + y_n) \in l^p$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n + y_n|^{p-1})^q$ konvergent[1]. Somit ist $(|x_n + y_n|^{p-1}) \in l^q$. Nach Satz 3 ist damit $(|x_n||x_n + y_n|^{p-1}) \in l^1$ und $(|y_n||x_n + y_n|^{p-1}) \in l^1$ und wir erhalten $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n||x_n + y_n|^{p-1} = \|(|x_n||x_n + y_n|^{p-1})\|_1 \leq \|(x_n)\|_p \|(|x_n + y_n|^{p-1})\|_q = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n + y_n|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|(x_n)\|_p \left(\|(x_n + y_n)\|_p\right)^{p-1}$. Also $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n||x_n + y_n|^{p-1} \leq \|(x_y)\|_p \left(\|(x_n + y_n)\|_p\right)^{p-1}$. Somit $\|(x_n + y_n)\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|x_n + y_n|^p}_{=|x_n+y_n| \cdot |x_n+y_n|^{p-1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|) \cdot |x_n + y_n|^{p-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n||x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n||x_n + y_n|^{p-1} \leq \|(x_n)\|_p (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1} + \|(y_n)\|_p (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1} = (\|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p) \|(x_n + y_n)\|_p^{p-1}$. Für $\|(x_n + y_n)\|_p \neq 0$ liefert Divion die Minkowski-Ungleichung. Für $\|(x_n + y_n)\|_p = 0$ ist die Minkowski-Ungleichung trivial.

□

Theorem 5. *Für* $1 \leq p < \infty$ *ist* $(l^p, \|\cdot\|_p)$ *ein Banachraum. Ebenso ist* $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *ein Banachraum.*

∘

Beweis. Die Behauptung für l^∞wurde bereits in Beispiel 1 gezeigt. Sei $1 \leq p < \infty$. Nach Satz 2 ist l^p ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für all $(x_n) \in l^p$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\|(\lambda x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|(x_n)\|_p$. Die Dreiecksungleichung gilt für $\|\cdot\|_p$ nach Satz 4. Ist für $(x_n) \in l^p$, $\|(x_n)\|_p = 0$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 0$, also $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt ist $\|\cdot\|_p$ also eine Norm auf l^p.

[1]Nebenrechnung: $(p-1)q = p$.

Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in l^p. Wir verwenden für den Rest des Beweises die Schreibweise von Elementen aus l^p als Funktionen $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{K}$. Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_n(m) - f_k(m)| = (|f_n(m) - f_k(m)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{l=1}^{\infty} |f_n(l) - f_k(l)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f_n - f_k\|_p.$$

Wie schon für l^∞ folgt, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n(m))_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ ist. Somit konvergiert für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n(m))_n$ und wir erhalten eine Funktion $f^* : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ mit $f^*(m) = \lim_{n\to\infty} f_n(m)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall_{n,k>N} : \|f_n - f_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit gilt $\forall_{n,k>N}$ und alle $M \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{m=1}^{M} |f_n(m) - f_k(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f_n - f_k\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $k \to \infty$ erhalten wir $\forall_{n>N}$, $\forall_{M\in\mathbb{N}}$

$$\left(\sum_{m=1}^{M} |f_n(m) - f^*(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also $\forall_{n>N}$

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} |f_n(m) - f^*(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somit $f_n - f^* \in l^p$ für $n > N$, also wegen $f^* = f_n - (f_n - f^*)$ auch $f^* \in l^p$. Desweiteren $\forall_{n>N} : \|f_n - f^*\|_p < \varepsilon$. Also konvergiert (f_n) gegen f^*. Damit ist $(l^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.

$\square$