

EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONALANALYSIS

INHALTSVERZEICHNIS

Organisatorisches	1
1. Normierte Räume	1
1.1. Eigenschaften normierter Räume	7
1.2. Quotientenräume und die Räume L^p	13
2. Übungsblätter	19
2.1. Übungsblatt 1	19
2.2. Übungsblatt 2	21
2.3. Übungsblatt 3	23

ORGANISATORISCHES

Vorlesung: Di 12.15 - 13.45 HS4; Mi 14.15 - 15.45 HS4 15.10.13

Übung: Do 16.00 - 17.30 HS4

Dozent: Christian Lageman <christian.lageman@mathematik.uni-wuerzburg.de>

Sprechstunde: Mi 10.00 - 11.30 Übungsblätter: Abgabe Vorlesung Dienstag

Wuecampus:

Klausur: 5.4.2014, 14:00 HS4

Literatur: D. Werner, Funktionalanalysis, Springer-Verlag 2011 F. Hirzebruch, W. Scharlau, Einführung in die Funktionalanalysis, Spektrum Akademischer Verlage, 1991 E. Kreyzig, Introduction Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, 1989 R. Meise, D. Vogt, Einführung in die Funktionalanalysis, Vieweg + Teubner Verlag, 2011

Voraussetzungen: Lineare Algebra I und II; Analysis I und II; Veriefung Analysis; insbesondere metrische Räume, Folgen in metrischen Räumen, offene und abgeschlossene Mengen, Integration im \mathbb{R}^n

1. NORMIERTE RÄUME

Sprechen wir von einem \mathbb{K} -Vektorraum, so meinen wir einen \mathbb{R} - oder \mathbb{C} -Vektorraum, d.h. die entsprechenden Definitionen und Sätze gelten sowohl für reelle als auch für komplexe Vektorräume. Wir verwenden \mathbb{K} als Platzhalter für \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} in den Sätzen und Definitionen.

Definition 1. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum. Wir nennen eine Funktion $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ eine *Halbnorm auf X* , falls gilt:

- (1) $\forall v \in X, \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
- (2) $\forall v, w \in X : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Gilt zusätzlich noch $\forall v \in X : \|v\| = 0 \implies v = 0$, so nennen wir $\|\cdot\|$ eine *Norm* auf X . Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X , so bezeichnen wir $(X, \|\cdot\|)$ als *normierten Raum*.

Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem \mathbb{K} -Vektorraum X induziert durch $d(v, w) = \|v - w\|$ eine Metrik $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ auf X , die wir als kanonische Metrik auf $(X, \|\cdot\|)$ bezeichnen.

Ein normierter Raum ist damit auch ein metrischer Raum. Die Begriffe von offenen und abgeschlossenen Mengen, Konvergenz von Folgen, Cauchy-Folgen, Vollständigkeit, Stetigkeit von Abbildungen ergeben sich für normierte Räume aus den entsprechenden Begriffen für metrische Räume.

Beispiel 1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Folge (v_n) in X heißt konvergent gegen $v^* \in X$ falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \|v_n - v^*\| < \varepsilon$$

wobei $\|v_n - v^*\| = d(v_n, v^*)$ mit der kanonischen Metrik d ist.

Für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ notieren wir:

- (1) den Abschluss einer Menge $M \subset X$ mit \overline{M} ,
- (2) den Rand einer Menge $M \subset X$ mit ∂M ,
- (3) das Innere einer Menge $M \subset X$ mit $\text{int } M$,

Aus der entsprechenden Definitionen für metrische Räume ergibt sich: eine Folge (v_n) in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *Cauchy-Folge*, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N : \|v_n - v_m\| < \varepsilon.$$

Ein metrischer Raum und entsprechend auch ein normierter Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, nennt man *vollständig*.

- (1) die offene Kugel um $v \in X$ mit Radius r mit $U_r(v) = \{w \in X : \|v - w\| < r\}$.

Definition 2. Einen vollständigen normierten Raum bezeichnet man als *Banachraum*.

Beispiel 2. zur Verdeutlichung.

- (1) Versehen wir \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n mit einer Norm $\|\cdot\|$, so ist der normierte Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ bzw. $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Es sei daran erinnert, dass auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind, d.h. sind $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_+$ Normen auf einem endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum X , so gibt es Konstanten $m, M > 0$ mit $\forall v \in X : m\|v\|_* \leq \|v\|_+ \leq M\|v\|_*$. Die Vollständigkeit im \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n ist damit nur für eine Norm nachzuweisen und aus der Analysis bekannt.
- (2) Sei M eine nicht-leere Menge. Wir bezeichnen mit $l^\infty(M)$ den \mathbb{K} -Vektorraum der beschränkten Funktionen $M \rightarrow \mathbb{K}$. Wir definieren auf $l^\infty(M)$ die Norm $\|\cdot\|_\infty$ durch $\|f\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x)|$ für $f \in l^\infty(M)$. Die Norm ist wohldefiniert, da f beschränkt ist. Man bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ auch als die sogenannte *Supremumsnorm*. $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm, denn:

- (a) für $f \in l^\infty(M)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in M} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in M} |\lambda| |f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in M} |f(x)| = |\lambda| \|f\|_\infty$.
- (b) für $f, g \in l^\infty(M)$ gilt: $\|f+g\|_\infty = \sup_{x \in M} |(f+g)(x)| = \sup_{x \in M} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in M} |f(x)| + \sup_{x \in M} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
- (c) für $f \in l^\infty(M)$ gilt: $\|f\|_\infty = 0 \implies \sup_{x \in M} |f(x)| = 0 \implies \forall_{x \in M} : |f(x)| = 0 \implies f \equiv 0$.

$(l^\infty(M), \|\cdot\|_\infty)$ ist also ein normierter Raum. Wir zeigen nun, dass der Raum vollständig ist. Sei dazu (f_n) eine Cauchy-Folge in $l^\infty(M)$. Es gilt also $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n, m > N} : \|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Es gilt außerdem $\|f_n - f_m\| = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f_m(x)|$. Dies impliziert, dass $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n, m > N} \forall_{x \in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Insbesondere gilt für alle $x \in M$ daher $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n, m > N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, und also ist $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge für jedes $x \in M$. Da \mathbb{R} und \mathbb{C} vollständig sind, ist für jedes $x \in M$ die Folge $(f_n(x))$ konvergent. Wir erhalten die Funktion $f^* : M \rightarrow \mathbb{K}$ durch $\forall_{x \in M} : f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Wir erhalten eine Funktion $f^* : M \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\forall_{x \in M} : f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Wir hatten uns überlegt, dass

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n, m > N} \forall_{x \in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Damit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{n, m > N} \forall_{x \in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < 1$. (Dies ist äquivalent zu $f_m(x) \in U_1(f_n(x))$.) Also $\forall_{m > N} \forall_{x \in M} : f_m(x) \in U_1(f_{N+1}(x))$. Somit $\forall_{x \in M} : f^*(x) \in U_1(f_{N+1}(x))$. Damit $\forall_{x \in M} : |f_{N+1}(x) - f^*(x)| \leq 1$. Da $f_{N+1} \in l^\infty(M)$, also beschränkt ist, muss auch f^* beschränkt sein. Wir erhalten $f^* \in l^\infty(M)$. Wir zeigen nun die Konvergenz von (f_n) gegen f^* . Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es sein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall_{n, m > N} \forall_{x \in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Also $\forall_{x \in M} \forall_{n > N} \forall_{m > N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da es zu jedem $x \in M$ und $n > N$ ein $m(x, n) \in \mathbb{N}, m(x, n) > N$ gibt mit

$$|f_{m(x, n)}(x) - f^*(x)| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} - |f_n(x) - f_{m(x, n)}(x)|}_{> \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{1}{6}\varepsilon}.$$

folgt

$$\forall_{x \in M} \forall_{n > N} : \underbrace{|f_n(x) - f_{m(x, n)}(x)| + |f_{m(x, n)}(x) - f^*(x)|}_{|f_n(x) - f^*(x)| \leq} < \frac{\varepsilon}{2} - |f_n(x) - f_{m(x, n)}(x)| + |f_n(x) - f_{m(x, n)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also $\forall_{n > N} \forall_{x \in M} : |f_n(x) - f^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit $\forall_{n > N} : \|f_n - f^*\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$. Damit konvergiert (f_n) gegen f^* . Somit ist $(l^\infty(M), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Theorem 1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $U \subset X$ ein Unterraum von X .

Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und U eine abgeschlossene Teilmenge von X , so ist $(U, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

Ist U vollständig, so ist U eine abgeschlossene Teilmenge von X .

Beweis. Der Beweis gliedert sich in zwei Teile. □

- (1) Sei (u_n) eine Cauchy-Folge in $(U, \|\cdot\|)$. Dann ist (u_n) eine Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|)$. Also konvergiert (u_n) gegen ein $u^* \in X$. Damit ist $u^* \in \bar{U}$, also $u^* \in U$. Somit ist U vollständig.

- (2) Sei U vollständig. Ist $u^* \in \overline{U} \setminus U$, so gibt es Folge (u_n) in U die gegen u^* konvergiert. Diese Folge ist eine Cauchy-Folge in U und konvergiert somit gegen einen Grenzwert $u^{**} \in U$. Wegen der Eindeutigkeit von Grenzwerten folgt $u^* = u^{**} \in U$. Also $\overline{U} \setminus U = \emptyset$ und U abgeschlossen.

Beispiel 3. Wir verwenden die Notation $l^\infty = l^\infty(\mathbb{N})$. Da eine Folge in \mathbb{K} eine Funktion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ ist, ist l^∞ also der Raum aller beschränkten Folgen in \mathbb{K} . Wir definieren die folgenden Unterräume von l^∞ : $c = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, (x_n) \text{ konvergent}\}$, $c_0 = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$, $d = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, x_n \text{ bis auf endlich viele Folgenglieder gleich } 0\}$. Da die konvergente Folge in \mathbb{K} in \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} beschränkt ist, folgt $d \subset c_0 \subset c \subset l^\infty$. Sei $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm auf l^∞ . Es sind $(d, \|\cdot\|_\infty)$, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, $(c, \|\cdot\|_\infty)$ normierte Räume. Welche dieser Räume sind Banachräume? Mit Satz 1 reicht es zu zeigen, dass der entsprechende Raum abgeschlossen in l^∞ ist.

Sei (f_n) eine Folge in c , die konvergent gegen ein $f^* \in l^\infty$ ist. Um Doppelindizes zu vermeiden, verwenden wir die Darstellung von Folgen als Funktionen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$. Da (f_n) eine Folge in c ist, können wir durch $x_n = \lim_{m \rightarrow \infty} f_n(m)$ eine Folge (x_n) in \mathbb{K} definieren. Es gilt $|x_n - x_l| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} |f_n(m) - f_l(m)| = \|f_n - f_l\|_\infty$. Da (f_n) eine Cauchy-Folge ist, ist durch diese Abschätzung die Folge (x_n) eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} . Also konvergiert (x_n) gegen ein $x^* \in \mathbb{K}$. Wir wollen nun zeigen, dass f^* gegen x^* konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|f^* - f_N\| < \frac{\varepsilon}{3}$ und $|x_N - x^*| < \frac{\varepsilon}{3}$. Wähle $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > M$ gilt $|f_N(m) - x_N| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann gilt für alle $m > M$

$$|f^*(m) - x^*| \leq \underbrace{|f^*(m) - f_N(m)|}_{\leq \|f^* - f_N\|_\infty} + \underbrace{|f_N(m) - x_N|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|x_N - x^*|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \underbrace{\|f^* - f_N\|_\infty}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Also ist f^* -konvergente Folge und $f^* \in c$. Damit ist c abgeschlossen und nach Satz 1 ein Banachraum.

Sei (f_n) eine Folge in c_0 die konvergent gegen ein $f^* \in l^\infty$ ist. Wiederholen wir das obige Argument, so erhalten wir zusätzlich dass (x_n) konstant 0 ist. Damit ist $x^* = 0$ und $f^* \in c_0$. Somit ist c_0 abgeschlossen und nach Satz 1 ein Banachraum. Der Raum $(d, \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Banachraum.

Wir definieren nun weitere Folgenräume.

Definition 3. Für $p \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < \infty$ setzen wir $l^p = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}$ und $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ für $(x_n) \in l^p$. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass $(l^p, \|\cdot\|_p)$ Banachräume sind.

22.10.13

Theorem 2. Für $1 \leq p < \infty$ ist l^p versehen mit der Addition und Skalarmultiplikation von Folgen ein \mathbb{K} -Vektorraum.

Beweis. Offensichtlich ist die konstante Folge (a_n) für alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n = 0$ in l^p enthalten. Desweiteren ist für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $(x_n) \in l^p$ auch $(\lambda x_n) \in l^p$, da $\sum_{n=1}^\infty |\lambda x_n|^p = |\lambda|^p \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ konvergiert. Schließlich, sind $(x_n), (y_n) \in l^p$, so gilt $\sum_{n=1}^\infty |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=1}^\infty (|x_n| + |y_n|)^p \leq \sum_{n=1}^\infty (2 \max\{|x_n|, |y_n|\})^p = 2^p \sum_{n=1}^\infty (\max\{|x_n|, |y_n|\})^p \leq 2^p \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p + |y_n|^p = 2^p (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p + \sum_{n=1}^\infty |y_n|^p) < \infty$. Also $(x_n + y_n) \in l^p$. \square

Theorem 3. Holdesche Ungleichung

Sind $(x_n) \in l'$ und $(y_n) \in l^\infty$, so ist $(x_n y_n) \in l'$ und $\|(x_n y_n)\|' \leq \|(x_n)\|' \|(y_n)\|_\infty$.
 Sei $1 < p < \infty$ und $q = \frac{p}{p-1}$. Sind $(x_n) \in l^p$ und $(y_n) \in l^q$, so ist $(x_n y_n) \in l'$ und $\|(x_n y_n)\|' \leq \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q$.

Beweis. Der Beweis besteht aus zwei Teilen.

$$(1) \text{ Es gilt } \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|}_{= \|(x_n y_n)\|'} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \|(y_n)\|_\infty = \|(y_n)\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|(y_n)\|_\infty \|(x_n)\|' < \infty.$$

(2) Wir haben $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $a, b > 0$ und $A = p \log a$ sowie $B = q \log b$. Die Funktion $t \mapsto \exp(t)$ ist konvex, also $\exp(\frac{1}{p}A + \frac{1}{q}B) \leq \frac{1}{p} \exp(A) + \frac{1}{q} \exp(B)$.
 Somit

$$ab = \exp(\underbrace{\log a}_{=\frac{1}{p}A} + \underbrace{\log b}_{=\frac{1}{q}B}) \leq \frac{1}{p} \exp(\underbrace{p \log a}_A) + \frac{1}{q} \exp(\underbrace{q \log b}_B) = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Wir haben für $(x_n) \in l^p, (y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p = 1 = \|(y_n)\|_q$. Es gilt

$$(1.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p} |x_n|^p + \frac{1}{q} |y_n|^q \right) = \frac{1}{p} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Sind $(x_n) \in l^p, (y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p \neq 0$ und $\|(y_n)\|_q \neq 0$, so ist mit (1.1)

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|}_{= \|(x_n y_n)\|} = \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|x_m|}{\|(x_n)\|_p} \cdot \frac{|y_m|}{\|(y_n)\|_q} \leq \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q \cdot 1.$$

Sind $(x_n) \in l^p$ und $(y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p = 0$ oder $\|(y_n)\|_q = 0$, so ist $(x_n y_n) \in l^1$ und $\|(x_n y_n)\|' = 0$.

□

Theorem 4. Minkowskische Ungleichung. Sei $1 \leq p < \infty$. Für $(x_n), (y_n) \in l^p$ gilt $\|(x_n + y_n)\|_p \leq \|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p$.

Beweis. Für $p = 1$ erhalten wir die Ungleichung direkt. Sei $p > 1$ und $q = \frac{p}{p-1}$. Weiterhin seien $(x_n), (y_n) \in l^p$. Nach Satz 2 ist $(x_n + y_n) \in l^p$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n + y_n|^{p-1})^q$ konvergent¹. Somit ist $(|x_n + y_n|^{p-1}) \in l^q$. Nach Satz 3 ist damit $(|x_n| |x_n + y_n|^{p-1}) \in l^1$ und $(|y_n| |x_n + y_n|^{p-1}) \in l^1$ und wir erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |x_n + y_n|^{p-1} = \|(|x_n| |x_n + y_n|^{p-1})\|_1 \leq \|(x_n)\|_p \|(|x_n + y_n|^{p-1})\|_q = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n + y_n|^{p-1})^q)^{\frac{1}{q}} \\ = \|(x_n)\|_p (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1}. \text{ Also } \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \leq \|(y_n)\|_p (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1}. \\ \text{Somit } \|(x_n + y_n)\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|x_n + y_n|^p}_{= |x_n + y_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|) \cdot |x_n + y_n|^{p-1} \leq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \leq \|(x_n)\|_p (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1} + \|(y_n)\|_p (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1} = (\|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p) (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1}. \text{ Für } \|(x_n + y_n)\|_p \neq 0$$

¹Nebenrechnung: $(p-1)q = p$.

liefert Division die Minkowski-Ungleichung. Für $\|(x_n + y_n)\|_p = 0$ ist die Minkowski-Ungleichung trivial. \square

Theorem 5. Für $1 \leq p < \infty$ ist $(l^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum. Ebenso ist $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Beweis. Die Behauptung für l^∞ wurde bereits in Beispiel 1 gezeigt. Sei $1 \leq p < \infty$. Nach Satz 2 ist l^p ein \mathbb{K} -Vektorraum. Für all $(x_n) \in l^p$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\|(\lambda x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |\lambda x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|(x_n)\|_p$. Die Dreiecksungleichung gilt für $\|\cdot\|_p$ nach Satz 4. Ist für $(x_n) \in l^p$, $\|(x_n)\|_p = 0$, so ist $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p = 0$, also $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt ist $\|\cdot\|_p$ also eine Norm auf l^p .

Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in l^p . Wir verwenden für den Rest des Beweises die Schreibweise von Elementen aus l^p als Funktionen $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{K}$. Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_n(m) - f_k(m)| = (|f_n(m) - f_k(m)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{l=1}^\infty |f_n(l) - f_k(l)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f_n - f_k\|_p.$$

Wie schon für l^∞ folgt, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n(m))_n$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} ist. Somit konvergiert für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n(m))_n$ und wir erhalten eine Funktion $f^* : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ mit $f^*(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(m)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall_{n,k > N} : \|f_n - f_k\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit gilt $\forall_{n,k > N}$ und alle $M \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{m=1}^M |f_n(m) - f_k(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f_n - f_k\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $k \rightarrow \infty$ erhalten wir $\forall_{n > N}, \forall_{M \in \mathbb{N}}$

$$\left(\sum_{m=1}^M |f_n(m) - f^*(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also $\forall_{n > N}$

$$\left(\sum_{m=1}^\infty |f_n(m) - f^*(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somit $f_n - f^* \in l^p$ für $n > N$, also wegen $f^* = f_n - (f_n - f^*)$ auch $f^* \in l^p$. Desweiteren $\forall_{n > N} : \|f_n - f^*\|_p < \varepsilon$. Also konvergiert (f_n) gegen f^* . Damit ist $(l^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum. \square

Beispiel 4. zur Verdeutlichung.

- (1) Sei X ein metrischer Raum mit Metrik $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$. Wir bezeichnen $C^b(X)$ den Vektorraum der stetigen, beschränkten Funktionen $X \rightarrow \mathbb{K}$. $C^b(X)$ ist ein Unterraum von $l^\infty(X)$, also ist $C^b(X)$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein normierter Raum.

Die Konvergenz in $C^b(X)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ entspricht der gleichmäßigen Konvergenz wie wir sie aus der Analysis kennen.

Sei (f_n) eine Folge in $C^b(X)$, die gegen ein $f^* \in l^\infty(X)$ konvergiert. Aus der Analysis wissen wir, dass dann f^* stetig, also $f^* \in C^b(X)$ ist. Also ist $C^b(X)$ abgeschlossener Unterraum von $l^\infty(X)$ und $(C^b(X), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

Ist der Raum X kompakt, z.B. eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n mit der

euklidischen Metrik, so sind alle stetigen Funktionen $X \rightarrow \mathbb{K}$ beschränkt, also $C^b(X) = C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} | f \text{ stetig}\}$.

- (2) Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wir bezeichnen mit $C^1([a, b])$ den Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen $[a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. Es ist $C^1([a, b]) \subset l^\infty([a, b])$. Der Raum $(C^1([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Banachraum (siehe 3. Übungsblatt). Wir können auf $C^1([a, b])$ jedoch eine andere Norm definieren und zwar $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Mit dieser Norm versehen ist $C^1([a, b])$ ein Banachraum. Dies folgt aus dem nächsten Beispiel.
- (3) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ eine r -mal stetig differenzierbare Funktion so verwenden wir die Multiindexschreibweise $D^\alpha f$ mit $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ für die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x_1, \dots, x_n)$$

der Ordnung $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq r$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so können wir durch

$C^r(\overline{\Omega}) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ ist } r\text{-mal stetig differenzierbar, für alle Multiindizes } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } 0 \leq |\alpha| \leq r \text{ ist } D^\alpha f \text{ auf } \Omega \text{ stetig}\}$ einen Unterraum von $l^\infty(\Omega)$ definieren. Durch

$$\|f\| := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} \|D^\alpha f\|_\infty$$

für $f \in C^r(\overline{\Omega})$ definieren wir eine Norm auf $C^r(\overline{\Omega})$ (siehe 2. Übungsblatt).

Der normierte Raum $(C^r(\overline{\Omega}), \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

1.1. Eigenschaften normierter Räume.

Lemma 1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Es gilt

- (1) $\forall v, w \in X : |||v| - |w|| \leq \|v - w\|$.
- (2) Die Abbildung $\|\cdot\| : x \mapsto [0, \infty)$ ist stetig.
- (3) Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen $x \in X$ wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

Beweis. Für 1 und 2 siehe erstes Übungsblatt. 3 folgt direkt aus der entsprechenden Eigenschaft für metrische Räume. \square

Theorem 6. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein metrischer Raum.

- (1) Konvergiert die Folge (x_n) in X gegen $x \in X$ und die Folge (y_n) in X gegen $y \in X$, so konvergiert für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ die Folge $(\lambda x_n + \mu y_n)$ gegen $\lambda x + \mu y$.
- (2) Ist U ein Unterraum von X , so ist auch \overline{U} ein Unterraum von X .

Beweis. In zwei Teilen.

- (1) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt $\|\lambda x_n + \mu y_n - (\lambda x + \mu y)\| \leq \|\lambda x_n - \lambda x + \mu y_n - \mu y\| \leq |\lambda| \|x_n - x\| + |\mu| \|y_n - y\|$. Mit Lemma 1 (3) folgt dann die Behauptung.
- (2) Sei $x, y \in \overline{U}$. Dann gibt es Folgen $(x_n), (y_n)$ in U mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Sei $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Da U linearer Unterraum von X ist, ist $(\lambda x_n + \mu y_n)$ Folge in U . Nach 1 ist $(\lambda x_n + \mu y_n)$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n + \mu y_n = \lambda x + \mu y$. Also $\lambda x + \mu y \in \overline{U}$. Da $U \neq \emptyset$ und $\overline{U} \subset \overline{U}$ ist $\overline{U} \neq \emptyset$. Damit ist \overline{U} Unterraum von X .

□

Definition 4. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ auf X heißen äquivalent, falls es $m, M > 0$ gibt, so dass $\forall v \in X \ m\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq M\|v\|_a$.

Lemma 2. Die Äquivalenz von Normen auf einem \mathbb{K} -Vektorraum X definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf X .

Beweis. Siehe 2. Übungsblatt. □

Theorem 7. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum und $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ Normen auf X . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) Die Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ sind äquivalent.
- (2) Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen $x \in X$ bzgl. $\|\cdot\|_a$, wenn sie gegen x bzgl. $\|\cdot\|_b$ konvergiert.
- (3) Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen 0 bzgl. $\|\cdot\|_a$, wenn sie gegen 0 bzgl. $\|\cdot\|_b$ konvergiert.

Beweis. 1 \implies 2: Sei $m, M, \tilde{m}, \tilde{M} > 0$ mit $\forall v \in X : m\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq M\|v\|_a$ und $\forall v \in X : \tilde{m}\|v\|_b \leq \|v\|_a \leq \tilde{M}\|v\|_b$ (siehe Lemma 2). Dann gilt für Folge (x_n) in X und $x \in X$ stets $\|x_n - x\|_a \leq \tilde{M}\|x_n - x\|_b$ und $\|x_n - x\|_b \leq M\|x_n - x\|_a$.

2 \implies 3: 3 ist Sonderfall von 2.

3 \implies 1: Angenommen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ sind nicht äquivalent. Dann gibt es kein $M > 0$ oder kein $\tilde{M} > 0$ so dass für alle $v \in X$: $\|v\|_b \leq M\|v\|_a$ und $\|v\|_a \leq \tilde{M}\|v\|_b$. Damit gibt es eine Folge (v_n) in X so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $v_n \neq 0$ und $\left(\frac{\|v_n\|_b}{\|v_n\|_a}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist unbeschränkt. Damit gibt es eine Teilfolge $(v_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$ von (v_n) , so dass $\left(\frac{\|v_{n_m}\|_a}{\|v_{n_m}\|_b}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Also konvergiert $\left(\frac{1}{\|v_{n_m}\|_b} v_{n_m}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ gegen 0. Damit ist $\left(\frac{1}{\|v_{n_m}\|_b} v_{n_m}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen $0 \in X$ bezüglich $\|\cdot\|_a$. Da für alle $m \in \mathbb{N}$ jedoch gilt

$$\left\| \frac{v_{n_m}}{\|v_{n_m}\|_b} \right\|_b = \frac{\|v_{n_m}\|_b}{\|v_{n_m}\|_b} = 1,$$

ist $\left(\frac{1}{\|v_{n_m}\|_b} v_{n_m}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent gegen $0 \in X$ bezüglich $\|\cdot\|_b$. □

Theorem 8. Ist X ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum, so sind auf X alle Normen äquivalent.

Beweis. O.B.d.A. ist $X = \mathbb{K}^n$. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem \mathbb{K}^n . Bekanntlich ist $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ auch eine Norm auf dem \mathbb{K}^n . Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis des \mathbb{K}^n . Für $x = (x_1, \dots, x_n)$ gilt (mit der Hölderschen Ungleichung)

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \|e_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_M = M \cdot \|x\|_2.$$

Insbesondere gilt für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$ dass $||x|| - ||y|| \leq ||x - y|| \leq M||x - y||_2$. Damit ist $||\cdot||$ stetig bezüglich $||\cdot||_2$. Die Menge $S = \{x \in \mathbb{K}^n : ||x||_2 = 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also nach Heine-Borel kompakt. $||\cdot||$ nimmt also auf S ihr Minimum an. Da $0 \notin S$, gilt $m = \min_{x \in S} ||x|| > 0$. Da für alle $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gilt $\frac{x}{||x||_2} \in S$ haben wir

$$||x||_2 m \leq ||x||_2 \underbrace{||\frac{x}{||x||_2}||}_{\geq \min_{y \in S} ||y||} = ||x||$$

für alle $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. □

Im unendlich-dimensionalen gilt eine solche allgemeine Äquivalent nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5. Wir betrachten $C([0, 1])$. Auf diesen Raum können wir durch $||f||_1 = \int_0^1 |f(s)| ds$ eine Norm auf $C([0, 1])$ definieren. Diese Norm ist nicht äquivalent zur Supremumsnorm $||\cdot||_\infty$, denn sei für $n \in \mathbb{N}$ $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$

$$f_n(s) = \begin{cases} 1 - ns & s \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 & s \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $f_n \in C([0, 1])$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Supremumsnorm $||f_n||_\infty = 1$. Also konvergiert (f_n) nicht gegen $0 \in C([0, 1])$ bezüglich $||\cdot||_\infty$. Es ist aber für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $||f_n||_1 = \int_0^1 |f_n(s)| ds = \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(s)| ds = \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - ns) ds = [s - \frac{1}{2}ns^2]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Also konvergiert (f_n) gegen $0 \in C([0, 1])$ bezüglich $||\cdot||_1$. Nach Satz 7 sind $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_\infty$ nicht äquivalent auf $C([0, 1])$.

Korollar 1. Sei $(X, ||\cdot||)$ ein endlich-dimensionaler, normierter Raum. Dann sind beschränkte, abgeschlossene Mengen kompakt.

Beweis. O.B.d.A. $X = \mathbb{K}^n$. Für die Norm $||(x_1, \dots, x_n)||_2 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ liefert der Satz von Heine-Borel die Behauptung. Da $||\cdot||$ zu $||\cdot||_2$ äquivalent ist, stimmen sowohl abgeschlossene beschränkte und kompakte Mengen bezüglich der beiden Normen überein. □

Wir werden zeigen, dass die Aussage von Korollar 1 nur im endlich-dimensionalen gilt.

Lemma 3. Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum und $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum von X mit $U \neq X$. Für jedes $\delta \in (0, 1)$ existiert ein $x_\delta \in X$ mit $||x_\delta|| = 1$ und $||x_\delta - u|| \geq 1 - \delta$ für alle $u \in U$.

Beweis. Wähle $x \in X \setminus U$. Setze $d := \inf\{||x - u|| : u \in U\}$. Ist $d = 0$, so gibt es eine Folge (u_n) in U mit $||x - u_n|| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$ und $x \in \overline{U} = U$. Widerspruch. Damit ist $d > 0$. Insbesondere ist $\frac{d}{1-\delta} > d$. Damit gibt es ein $u_\delta \in U$ mit $d \leq ||x - u_\delta|| < \frac{d}{1-\delta}$. Sei

$$x_\delta = \frac{x - u_\delta}{||x - u_\delta||}.$$

Klar ist $\|x_\delta\| = 1$. Für $u \in U$ gilt nun

$$\|x_\delta - u\| = \left\| \frac{x - u_\delta}{\|x - u_\delta\|} - u \right\| = \frac{1}{\|x - u_\delta\|} \cdot \underbrace{\|x - u_\delta + (\|x - u_\delta\|u)\|}_{\geq d} \geq \frac{1}{\|x - u_\delta\|} d \geq \frac{1 - \delta}{d} d = 1 - \delta.$$

□ 30.10.13

Theorem 9. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) X ist endlich-dimensional
- (2) $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ist kompakt
- (3) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge

Beweis. Gliederung in folgende Teile:

- 1 \implies 2: Korollar 1.
- 2 \implies 3: Sei (x_n) beschränkte Folge in X und $r > 0$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| < r$. Dann ist $(\frac{1}{r}x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Da B kompakt ist besitzt $(\frac{1}{r}x_n)$ eine konvergente Teilfolge. Mit Satz 6 besitzt dann auch $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (r \cdot \frac{1}{r}x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.
- 3 \implies 1: Beweis per Kontraposition. Sei X unendlich-dimensional. Wir konstruieren eine beschränkte Folge (x_n) in X wie folgt: Wähle $x_1 \in X$ mit $\|x_1\| = 1$. Wähle $\delta \in (0, 1)$ fest. Haben wir x_1, \dots, x_n mit $\|x_1\| = \dots = \|x_n\| = 1$ gewählt, so sei $U_n := \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Da $\dim U_n \leq n$ ist $(U_n, \|\cdot\|)$ vollständig (Satz 8) und nach Satz 1 ist U_n abgeschlossen in X . Weiterhin $X \neq U_n$. Nach Lemma 3 gibt es x_{n+1} in X mit $\|x_{n+1}\| = 1$ und $\forall u \in U_n : \|x_{n+1} - u\| \geq 1 - \delta$. Wir erhalten Folge (x_n) in X mit $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Per Konstruktion gilt für $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ stets $\|x_n - x_m\| \geq 1 - \delta$. Damit kann es keine Teilfolge von (x_n) geben, die eine Cauchy-Folge ist. Insbesondere hat (x_n) keine konvergente Teilfolge (konvergente Folgen sind nämlich Cauchy-Folgen).

□

Definition 5. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Wir nennen X separabel, falls es eine abzählbare Menge $M \subset X$ gibt mit $\overline{M} = X$, d.h. M ist dicht in X .

Theorem 10. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Es sind äquivalent:

- (1) X ist separabel
- (2) Es gibt abzählbare Teilmenge M von X mit $X = \overline{\text{span}M}$.

Beweis. In zwei Teilen. □

- 1 \implies 2: Sei $M \subset X$ abzählbar mit $\overline{M} = X$. Dann ist $X = \overline{M} \subset \overline{\text{span}M} \subset X$ also $\overline{\text{span}M} = X$.
- 2 \implies 1: Wir betrachten zunächst den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für $B = \{\sum_{j=1}^n q_j v_j | n \in \mathbb{N}, q_j \in \mathbb{Q}, v_j \in M\}$ gilt $\text{span}B \subset \overline{B}$ da \mathbb{Q} dicht in \mathbb{R} ist. Somit ist $X = \overline{\text{span}M} \subset \overline{B} \subset X$, also $X = \overline{B}$. Da B abzählbar ist, ist X separabel. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist analog mit $B = \{\sum_{j=1}^n (q_j + ip_j) | n \in \mathbb{N}, p_j, q_j \in \mathbb{Q}, v_j \in M\}$.

Beispiel 6. Zur Verdeutlichung.

- (1) \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n sind separabel bezüglich jeder Norm, denn \mathbb{Q}^n und $\mathbb{Q}^n + i\mathbb{Q}^n$ sind dicht in \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n .
- (2) $(l^p, \|\cdot\|_p)$ für $1 \leq p < \infty$ ist separabel: Für $e_j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$,

$$e_j(m) := \begin{cases} 1 & j = m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist $d = \text{span}\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$. Ist nun $f \in l^p$ so können wir die Folge (f_n) in d definieren mit

$$f_n(m) = \begin{cases} f(m) & m \leq n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f Grenzwert von (f_n) in $(l^p, \|\cdot\|_p)$, denn

$$\|f - f_n\|_p = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |f(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Somit $l^p = \bar{d}$. Nach Satz 10 ist l^p separabel.

- (3) $(C_0, \|\cdot\|_{\infty})$ ist separabel (Beweis in der Übung).
- (4) $(l^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ ist nicht separabel.

Beweis. Für $M \subseteq \mathbb{N}$ definiere $f_M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ durch

$$f_M(m) = \begin{cases} 1 & m \in M, \\ 0 & m \notin M. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $f_M \in l^{\infty}$ für alle $M \in \mathbb{N}$. Dann ist $W := \{f_M | M \subset \mathbb{N}\}$ überabzählbar. Weiterhin ist für alle $M, N \subset \mathbb{N}$, $M \neq N$ stets $\|f_M - f_N\|_{\infty} = 1$. Sei $A \subset l^{\infty}$ abzählbar mit $\bar{A} = l^{\infty}$. Für $a \in A$ kann $U_{\frac{1}{4}}(a)$ nur höchstens ein Element aus W enthalten, denn

$$x, y \in U_{\frac{1}{4}}(a) \cap W \implies \|x - y\|_{\infty} \leq \|x - a\|_{\infty} + \|y - a\|_{\infty} < \frac{1}{2} \implies x = y$$

Widerspruch zu A abzählbar und $\bar{A} = l^{\infty}$. □

Wir wollen zeigen, dass für jedes kompakte, nicht-leere Intervall $[a, b]$ der Raum $(C([a, b]), \|\cdot\|_{\infty})$ separabel ist.

Theorem 11. Sei $P([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K} | \exists p \in \mathbb{K}[x] \forall x \in [a, b] : f(x) = p(x)\}$ der Raum der Polynomfunktionen $[a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. Dann ist $P([a, b])$ dicht in $(C([a, b]), \|\cdot\|_{\infty})$.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $a = 0$, $b = 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $c_n := \left(\int (1 - s^2)^n ds \right)^{-1}$. Wir zeigen zunächst die Abschätzung $c_n \leq e\sqrt{n}$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$c_n^{-1} = \int_{-1}^1 (1 - s^2)^n ds \geq \int_{-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - s^2)^n ds = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - s^2)^n ds \geq 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n ds = 2\sqrt{n}^{-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$ ist für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ stets $(1 - \frac{1}{n})^n \geq \frac{1}{2e}$. Also für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ stets $c_n^{-1} \geq \frac{1}{\sqrt{ne}}$. Wir definieren nun für $n \in \mathbb{N}$ Polynome $\varphi_n(x) := C_n(1 - x^2)^n$. Es gilt

- (1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [-1, 1]$ gilt $\varphi_n(x) \geq 0$.
- (2) $\int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx = 1$ per Definition von c_n .
- (3) Für alle $\delta \in (0, 1]$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [\delta, 1]} \varphi_n(x) = 0$, da $\sup_{x \in [\delta, 1]} \varphi_n(x) = c_n(1 - \delta^2)^n$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(1 - \delta^2)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{2}(\log n) + n \underbrace{\log(1 - \delta^2)}_{< 0}} = 0.$$

Sei $f \in C([0, 1])$. Wir betrachten zuerst den Fall $f(0) = f(1) = 0$. Wir definieren die stetige Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in [0, 1]), \\ 0 & (\text{sonst}). \end{cases}$$

Da f gleichmäßig stetig auf $[0, 1]$ ist, ist \tilde{f} gleichmäßig stetig auf \mathbb{R} . Wir definieren nun Funktionen $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, $p_n(x) = \int_{-1}^1 \tilde{f}(x - s) \varphi_n(s) ds$ für $n \in \mathbb{N}$. p_n ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Polynomfunktion, denn mit Substitution $s = t + x$ ergibt sich

$$\int_{-1}^1 \tilde{f}(x - s) \varphi_n(s) ds = \int_{\underbrace{-1-x}_{\in [-2, -1]}}^{\underbrace{1-x}_{\in [0, 1]}} \tilde{f}(-t) \varphi_n(t - x) dt = \int_{-1}^0 \tilde{f}(-t) \varphi_n(t + x) dt,$$

denn $\tilde{f}|_{\mathbb{R} \setminus [0, 1]} \equiv 0$. Dies ergibt dann weiterhin das Polynom

$$= \int_{-1}^0 \tilde{f}(-t) c_n (1 - (t + x)^2)^n dt.$$

Da $\int_{-1}^1 \varphi_n(s) ds = 1$ ist $p_n(x) - \tilde{f}(x) = \int_{-1}^1 (\tilde{f}(x - s) - \tilde{f}(x)) \varphi_n(s) ds$. Also für alle $\delta \in (0, 1)$ und $x \in [-1, 1]$ gilt $|p_n(x) - \tilde{f}(x)| \leq \int_{-1}^1 |\tilde{f}(x - s) - \tilde{f}(x)| \varphi_n(s) ds =$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|\tilde{f}(x - s) - \tilde{f}(x)|}_{\leq \sup_{s \in [-\delta, \delta]} |\tilde{f}(x - s) - \tilde{f}(x)|}} \varphi_n(s) ds + \int_{-1}^{-\delta} \underbrace{|\tilde{f}(x - s) - \tilde{f}(x)|}_{\leq 2 \sup_{y \in [0, 1]} |f(y)|}} \varphi_n(s) ds \\ &\quad + \int_{\delta}^1 \underbrace{|\tilde{f}(x - s) - \tilde{f}(x)|}_{\leq 2 \sup_{y \in [0, 1]} |f(y)|}} \varphi_n(s) ds \\ &\leq \sup_{s \in [-\delta, \delta]} |\tilde{f}(x - s) - \tilde{f}(x)| \cdot \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(s) ds}_{\leq \int_{-1}^1 \varphi_n(s) ds = 1} + 4 \sup_{y \in [0, 1]} |f(y)| \cdot \sup_{s \in [\delta, 1]} \varphi_n(s) \\ (1.2) &\leq \sup_{s \in [-\delta, \delta]} |\tilde{f}(x - s) - \tilde{f}(x)| + 4 \sup_{y \in [0, 1]} |f(y)| \sup_{s \in [\delta, 1]} \varphi_n(s) \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta \in (0, 1)$ so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sup_{s \in [-\delta, \delta]} |\tilde{f}(x-s) - \tilde{f}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dies ist möglich, da \tilde{f} gleichmäßig stetig ist. Wähle nun $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n > N$

$$\sup_{s \in [\delta, 1]} \varphi_n(s) < \frac{1}{4 \max\{1, \sup_{y \in [0, 1]} |f(y)|\}} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dies ist möglich, da $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in [\delta, 1]} \varphi_n(s) = 0$. Mit (1.2) folgt für alle $n > N$ und $x \in [0, 1]$ dass $|p_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, also

$$\|p_n|_{[0, 1]} - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Damit wird f durch p_n auf $[0, 1]$ approximiert.

Sei $f \in C([0, 1])$ mit $f(0) \neq f(1)$ oder $f(0) \neq 0$. Konstruiere obige Folge $(p_n)_n$ für $\hat{f}(x) = f(x) - (1-x)f(0) - xf(1)$, dann ist $\hat{f} \in C([0, 1])$ und $\hat{f}(0) = \hat{f}(1) = 0$. Dann sind $q_n(x) = p_n(x) + (1-x)f(0) + xf(1)$ für $n \in \mathbb{N}$ Polynomfunktionen und $\|f - q_n|_{[0, 1]}\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - p_n(x) - (1-x)f(0) - xf(1)| = \|\hat{f} - p_n|_{[0, 1]}\|_\infty \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Damit wird \hat{f} durch q_n auf $[0, 1]$ approximiert.

Sei $f \in C([a, b])$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann liefert $\hat{f}(x) = f(a + (b-a)x)$ ein $\hat{f} \in C([0, 1])$. Konstruiere q_n wie oben. Definiere

$$r_n(x) = q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

Da

$$\frac{(a + (b-a)x) - a}{b-a} = x$$

ist

$$\begin{aligned} \|f - r_n\|_\infty &= \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - r_n(x)| = \sup_{y \in [0, 1]} |f(a + (b-a)y) - r_n(a + (b-a)y)| \\ &= \sup_{y \in [0, 1]} |\hat{f}(y) - q_n(y)| = \|\hat{f} - q_n|_{[0, 1]}\|_\infty \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Also wird f durch r_n auf $[a, b]$ approximiert. \square

Korollar 2. Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ist $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ separabel.

Beweis. Da $P([a, b])$ dicht in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$, ist

$$C([a, b]) = \overline{\text{span}\{t^n : n \in \mathbb{N}\}}$$

Mit Satz 10 folgt die Behauptung. \square

1.2. Quotientenräume und die Räume L^p . Wir übertragen zunächst die Begriffe der Cauchy-Folge und Vollständigkeit auf \mathbb{K} -Vektorräume mit einer Halbnorm.

Definition 6. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Halbnorm $\|\cdot\|$. Wir nennen eine Folge (x_n) in X *Cauchy-Folge*, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N : \|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Wir nennen X *vollständig*, falls zu jeder Cauchy-Folge in X ein $x \in X$ existiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

Bemerkung 1. Man beachte, dass in einem vollständigen \mathbb{K} -Vektorraum X mit Halbnorm $\|\cdot\|$, dass $x^* \in X$ zu einer Cauchy-Folge (x_n) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0$ nicht unbedingt eindeutig ist.

Theorem 12. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Halbnorm $\|\cdot\|$. Es gilt

- (1) $N = \{x \in X \mid \|x\| = 0\}$ ist ein Unterraum von X .
- (2) $\|x + N\| := \|x\|$ definiert eine Norm auf X/N .
- (3) Ist X vollständig (in Sinne von Definition 6), so ist X/N mit der Norm $\|x + N\|$ vollständig.

Beweis. In drei Teilen.

- (1) $0 \in N$, da $\|0\| = 0$. Für $x, y \in N$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt $\|\lambda x + \mu y\| \leq |\lambda|\|x\| + |\mu|\|y\| \leq 0$ und damit $\lambda x + \mu y \in N$.
- (2) $\|\cdot\|$ ist auf X/N wohldefiniert, denn für $x + N = y + N$ gilt $(x - y) + N = N$, d.h. $x - y \in N$, und daher gilt $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| = 0$. Es folgt $\|x\| = \|y\|$.
Überprüfung der Normaxiome:
 - (a) Für $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\|\lambda x + N\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| = |\lambda|\|x + N\|$.
 - (b) Für $x, y \in X$ gilt $\|(x + N) + (y + N)\| = \|(x + y) + N\| = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| = \|x + N\| + \|y + N\|$.
 - (c) Sei $x \in X$ mit $\|x + N\| = 0$. Damit $\|x\| = 0$, also $x \in N$ und $x + N = N$.
Somit ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X/N .
- (3) Sei $(x_k + N)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in X/N . Da $\forall_{k, m \in \mathbb{N}}: \|(x_k + N) - (x_m + N)\| = \|x_k - x_m\|$ ist (x_k) Cauchy-Folge in X . Somit gibt es ein $x \in X$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0$. Damit ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \|(x_k + N) - (x + N)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0$. Also konvergiert $(x_k + N)$.

□

Theorem 13. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $U \subset X$ ein Unterraum.

- (1) $\|x\|_d := \inf\{\|x - u\| \mid u \in U\}$ für $x \in X$ definiert eine Halbnorm.
- (2) Ist U abgeschlossen, so definiert $\|x + U\|_q := \|x\|_d$ eine Norm auf X/U .
- (3) Ist X vollständig und U abgeschlossen, so ist $(X/U, \|\cdot\|_q)$ ein Banachraum.

Beweis. In drei Teilen.

- (1) Nachweis der Halbnormaxiome:
 - (a) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\|\lambda x\|_d = \inf\{\|\lambda x - u\| \mid u \in U\} = \inf\{\|\lambda x - \lambda u\| \mid u \in U\} = |\lambda| \inf\{\|x - u\| \mid u \in U\} = |\lambda| \|x\|_d$. Für $\lambda = 0$ ist $\|\lambda x\|_d = \inf\{\|0 - u\| \mid u \in U\} = 0$.
 - (b) Für $x, y \in X$ ist $\|x + y\|_d = \inf\{\|x + y - u\| \mid u \in U\} = \inf\{\|x + y - u - v + v\| \mid u, v \in U\} \leq \inf\{\|x - u\| + \|y - v\| \mid u \in U, v \in U\} \leq \inf\{\|x - u\| \mid u \in U\} + \inf\{\|y - v\| \mid v \in U\} = \|x\|_d + \|y\|_d$.
- (2) Sei $N = \{x \in X \mid \|x\|_d = 0\}$. Es ist $U \subset N$. Sei $x \in N$, also $\|x\|_d = 0$. Dann gibt es eine Folge (u_n) in U mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - x\| = 0$. Damit $x \in \overline{U} = U$. Also $U \subset N \subset \overline{U}$ und $U = N$. Nach Satz 12 ist $\|\cdot\|_q$ eine Norm auf X/U .
- (3) Sei (x_n) Cauchy-Folge in X bezüglich $\|\cdot\|_d$. Wähle Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) mit $\forall_{k \in \mathbb{N}}: \|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|_d < 2^{-k}$. Wir konstruieren Folge (u_k) in U , so dass $\forall_{k \in \mathbb{N}}: \|x_{n_k} + u_k - (x_{n_{k+1}} + u_{k+1})\| < 2^{-k}$. Wähle $u_1 = 0$. Haben wir u_1, \dots, u_k in U für $k \in \mathbb{N}$ gewählt, so ist $2^{-k} > \|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|_d = \|x_{n_k} + u_k - x_{n_{k+1}}\| = \|x_{n_k} + u_k - (x_{n_{k+1}} + u_{k+1}) + u_{k+1}\|$. Somit haben wir $\tilde{u} \in U$ mit $\|x_{n_{k+1}} + \tilde{u} - (x_{n_k} + u_k)\| < 2^{-k}$.

$2^{-k} > \|(x_{n_k} + u_k) - (x_{n_{k+1}} + \tilde{u})\|$. Setze $u_{k+1} = \tilde{u}$. Wir erhalten induktiv die gesuchte Folge (u_k) in U . Wir definieren die Folge (z_k) durch $z_k = x_{n_k} + u_k$. Da für $m, k \in \mathbb{N}$, $m > k$ gilt $\|z_m - z_k\| \leq \sum_{j=k}^{m-1} \|z_j - z_{j+1}\| < \sum_{j=k}^{m-1} 2^{-j}$ und die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}$ konvergiert, ist (z_k) Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|)$. Da X vollständig ist, konvergiert (z_k) gegen $\tilde{z} \in X$ bezüglich $\|\cdot\|$. Da für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\|\tilde{z} - x_{n_k}\|_d \leq \underbrace{\|\tilde{z} - z_k\|_d}_{\leq \|\tilde{z} - z_k\|} + \underbrace{\|z_k - x_{n_k}\|_d}_{\substack{=0 \\ x_{n_k} + u_k - x_{n_k} = u_k}}$$

folgt $\|\tilde{z} - x_{n_k}\|_d \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $K \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall_{k > K}: \|\tilde{z} - x_{n_k}\|_d < \frac{\varepsilon}{2}$ und

$$\forall_{m, l > \underbrace{\min\{n_k \in \mathbb{N} | k > K\}}_{n_{k+1}}}: \|x_l - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt $\forall_{m \geq \min\{n_k \in \mathbb{N} | k > K\}}: \|\tilde{z} - x_m\|_d \leq \|\tilde{z} - x_{n_{k+1}}\|_d + \|x_{n_{k+1}} - x_m\|_d < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. Also $\|x_k - \tilde{z}\|_d \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Damit ist X bezüglich $\|\cdot\|_d$ vollständig. Nach Satz 12 ist X/U vollständig.

□

Wir kommen nun zu den L^p -Räumen. Dazu wiederholen wir zunächst ein paar Fakten aus der Integrationstheorie. Ist $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ein nicht-leerer Quader, so definiert man das Volumen $\text{vol}(Q) := \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$. Für $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert man das äußere Lebesgue-Maß durch

$$\lambda^n(M) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(Q_j) \mid Q_j \text{ nicht-leere Quader im } \mathbb{R}^n, M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \right\}.$$

Wir nennen $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-Messbar, falls

$$\forall_{D \subset \mathbb{R}^n}: \lambda^n(D) = \lambda^n(M \cap D) + \lambda^n((\mathbb{R}^n \setminus M) \cap D)$$

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, so definieren wir das Lebesgue-Maß von M als $\lambda(M) := \lambda^n(M)$.

Bemerkung 2. Es gilt:

- (1) Offene und abgeschlossene Mengen sind Lebesgue-messbar.
- (2) Endliche Schnitte, Komplemente und abzählbare Vereinigungen Lebesgue-messbarer Mengen sind Lebesgue-messbar.

Wir nennen eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ mit $M \subset \mathbb{R}^n$ *Lebesgue-messbar*, falls für jede offene Menge $U \subset \mathbb{K}$ gilt, dass $f^{-1}(U)$ Lebesgue-messbar ist. Ist $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ Lebesgue-messbar, so ist $M = f^{-1}(\mathbb{K})$ Lebesgue-messbar.

Bemerkung 3. Es gilt:

- (1) Stetige Funktionen sind stets Lebesgue-messbar.
- (2) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann ist $\mathcal{M} := \{f: M \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ Lebesgue-messbar}\}$ ein Unterraum des Raumes der Funktionen $M \rightarrow \mathbb{K}$. Desweiteren sind Produkte Lebesgue-messbarer Funktionen $M \rightarrow \mathbb{K}$ wieder Lebesgue-messbar.

Wir nennen eine Lebesgue-messbare Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ *Lebesgue-Nullmenge* falls $\lambda(M) = 0$. Jede Teilmenge einer Lebesgue-Nullmenge ist eine Lebesgue-Nullmenge.

Im Folgenden meinen wir mit “messbar” stets “Lebesgue-messbar” und mit “Nullmenge” stets “Lebesgue-Nullmenge”.

Sind $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}^n$ messbare Mengen, $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{K}$ und χ_{A_j} die charakteristische Funktion der Menge A_j , so setzen wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^m c_j \chi_{A_j} d\lambda = \sum_{j=1}^m c_j \lambda(A_j)$$

wobei wir die Rechenregeln $\infty \pm c := \infty$ für $c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$, $\infty \cdot c = c \cdot \infty = \infty$ für $c \in (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ und die A_i paarweise disjunkt sind. Wir nennen eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{K}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, *Lebesgue-integrierbar*, falls es eine Folge von Funktionen $\varphi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ gibt mit

- $\varphi_k(x) = \sum_{j=1}^{m_k} c_{j,k} \chi_{A_{j,k}}(x)$ mit $A_{j,k} \subset M$ messbar und $A_{j,k} = \varphi_k^{-1}(c_{j,k})$.
- $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k, l > N : \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_k - \varphi_l| d\lambda < \varepsilon$. Der Integrand lässt sich als $\sum_{j=1}^{r_{k,l}} b_{j,kl} \chi_{B_{j,kl}}$ mit $B_{j,kl}$ messbar, $B_{j,kl} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |\varphi_k(x) - \varphi_l(x)| = b_{j,kl}\}$, $b_{j,kl} \neq b_{i,kl}$ für $i \neq j$ schreiben.
- es gibt Nullmenge $N \subset M$ so dass $\forall x \in M \setminus N : \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x)$.

Ist f eine Lebesgue-integrierbar, so ist f messbar und wir setzen

$$\int_M f d\lambda := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k d\lambda.$$

Definition 7. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $M \neq \emptyset$. Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^p(M) &= \{f : M \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ messbar, } \int_M |f|^p d\lambda < \infty\}, \\ \mathcal{L}^\infty(M) &= \{f : M \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ messbar,} \\ &\quad \text{es gibt Nullmenge } N_f \subset M \text{ und } c \in \mathbb{R} \text{ mit } \forall x \in M \setminus N_f : |f(x)| < c\} \end{aligned}$$

Für $1 \leq p < \infty$ und $f \in \mathcal{L}^p(M)$ definieren wir

$$\|f\|_p = \left(\int_M |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$$

und für $f \in \mathcal{L}^\infty(M)$

$$\|f\|_\infty = \inf_{N \subset M} \sup_{x \in M \setminus N} |f(x)|$$

mit N Nullmenge. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{L}^p(M)$ ein vollständiger Vektorraum bezüglich der $\|\cdot\|_p$ Halbnorm ist.

Theorem 14. (*Höldische Ungleichung*) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $M \neq \emptyset$. Sei $1 < p < \infty$ und $q = \frac{p}{p-1}$. Für $f \in \mathcal{L}^p(M)$ und $g \in \mathcal{L}^q(M)$ ist $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(M)$ mit

$$(1.3) \quad \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Für $f \in \mathcal{L}^1(M)$ und $g \in \mathcal{L}^\infty(M)$ ist $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(M)$ mit

$$(1.4) \quad \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Beweis. Nach Bemerkung zu messbaren Funktionen ist $f \cdot g$ und damit $|f \cdot g|$ messbar. In der Übung wird gezeigt, dass für $f \in \mathcal{L}^p(M)$, $g \in \mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}(M)$ gilt

$$\int_M |f \cdot g| d\lambda \leq \|f\|_p \|g\|_{\frac{p}{p-1}}$$

für $1 < p < \infty$. Für $f \in \mathcal{L}^1(M)$, $g \in \mathcal{L}^\infty(M)$ wird gezeigt, dass

$$\int_M |f \cdot g| d\lambda \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Damit folgt $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(M)$ und (1.3) bzw. (1.4). \square

Theorem 15. (Minkowskische Ungleichung) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $M \neq \emptyset$, und $p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$. Für $f, g \in \mathcal{L}^p(M)$ ist $f + g \in \mathcal{L}^p(M)$ und es gilt

$$(1.5) \quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Beweis. $f + g$ ist messbar. Die Ungleichung (1.5) wird in der Übung gezeigt. Somit ist $f + g \in \mathcal{L}^p(M)$. \square

Theorem 16. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $M \neq \emptyset$ und $p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$. Dann ist $\mathcal{L}^p(M)$ ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Halbnorm $\|\cdot\|_p$.

Beweis. Wir zeigen die Halbnorm-Axiome. \square

- (1) Sei $\mu \in \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}^p(M)$. Dann ist $\mu \cdot f$ messbar und für $p < \infty$ gilt

$$\left(\int_M |\mu \cdot f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\mu|^p \int_M |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = |\mu| \left(\int_M |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = |\mu| \|f\|_p.$$

Für $p = \infty$ gilt mit Nullmengen N

$$\inf_{N \subset M} \sup_{x \in M \setminus N} |\mu f(x)| = |\mu| \inf_{N \subset M} \sup_{x \in M \setminus N} |f(x)| = |\mu| \|f\|_\infty.$$

Also $\mu \cdot f \in \mathcal{L}^p(M)$ und $\|\mu \cdot f\|_p = |\mu| \|f\|_p$.

- (2) Sei $f, g \in \mathcal{L}^p(M)$. Nach Satz 15 ist $f + g \in \mathcal{L}^p(M)$ mit $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.
- (3) $\mathcal{L}^p(M) \neq 0$ da $M \neq \emptyset$ ist $f(x) \equiv 0$ konstant in $\mathcal{L}^p(M)$.

Lemma 4. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$, M messbar. Für $f \in \mathcal{L}^\infty(M)$ gilt: Es gibt Nullmenge $N_f \subset M$, so dass $\|f\|_\infty = \sup_{x \in M \setminus N_f} |f(x)|$.

Beweis. Definiere $N_f := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ mit $A_k = \{x \in M : |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{k}\}$. Zu jedem A_k gibt es eine Nullmenge $N_k \subset M$ mit $A_k \subset N_k$, da sonst $\sup_{x \in M \setminus N_k} |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{k}$ für alle Nullmengen $N \subset M$. Also sind die A_k alle Nullmengen. Die abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge, also ist N_f Nullmenge. Per Definition ist

$$\sup_{x \in M \setminus N_f} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

\square

Bemerkung 4. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, $M \subset \mathbb{R}^n$, $\forall x \in M: f(x) \geq 0$. Dann gibt es monoton wachsende Folge (φ_k) von messbaren, nicht negativen Funktionen $\varphi_k = \sum_{j=1}^{m_k} c_{j,k} \chi_{A_{j,k}}(x)$, $A_{i,k}$ und $A_{j,k}$ paarweise disjunkt und $\forall x \in M: \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x)$ und alle $A_{j,k} \subset M$.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

- (1) $(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k d\lambda)$ ist beschränkte Folge in \mathbb{R} . Nach Satz von Beppo Levi ist f Lebesgue-integrierbar mit $\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k d\lambda$.
- (2) Eins der $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k d\lambda$ ist ∞ oder $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k d\lambda = +\infty$. Dies gilt für alle solchen Folgen (φ_k) . Man kann hier $\int_M f d\lambda = \infty$ definieren.

Theorem 17. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $M \neq \emptyset$ und $p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$. Dann ist $\mathcal{L}^p(M)$ bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_p$ vollständig.

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle.

- (1) Im Fall $p = \infty$ sei (f_k) Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^\infty(M)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Nach Lemma 4 gibt es für $k, m \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge $N_{k,m} \subset M$ mit

$$\|f_k - f_m\|_\infty = \sup_{x \in M \setminus N_{k,m}} |f_k(x) - f_m(x)|.$$

Setze $N_q = \bigcup_{k,m \in \mathbb{N}} N_{k,m} \subset M$. Da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, ist N_q Nullmenge. Da für alle $k, m \in \mathbb{N}$ gilt $N_{k,m} \subset N_q$ folgt für alle $m, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|f_k - f_m\|_\infty &= \sup_{x \in M \setminus N_{k,m}} |f_k(x) - f_m(x)| \geq \sup_{x \in M \setminus N_q} |f_k(x) - f_m(x)| \\ &\geq \inf_{N \subset M} \sup_{x \in M \setminus N} \dots \end{aligned}$$

.... fehlt was Also $\forall m, k \in \mathbb{N} : \sup_{x \in M \setminus N_q} |f_k(x) - f_m(x)| = \|f_k - f_m\|_\infty$. Analog erhält man Nullmenge $N_u \subset M$ mit $\forall k \in \mathbb{N} : \sup_{x \in M \setminus N_u} |f_k(x)| = \|f_k\|_\infty$. Da $N = N_q \cup N_u \subset M$ Nullmenge ist, gilt mit analogen Argument die Aussagen

$$(1.6) \quad \forall k, m \in \mathbb{N} : \sup_{x \in M \setminus N} |f_k(x) - f_m(x)| = \|f_k - f_m\|_\infty,$$

$$(1.7) \quad \forall k \in \mathbb{N} : \sup_{x \in M \setminus N} |f_k(x)| = \|f_k\|_\infty.$$

Wegen (1.7) ist $(f_k|_{M \setminus N})$ Folge in $l^\infty(M \setminus N)$. Wegen (1.6) ist $(f_k|_{M \setminus N})$ Cauchy-Folge in $l^\infty(M \setminus N)$ bezüglich der Supremumsnorm. Damit konvergiert $(f_k|_{M \setminus N})$ gegen $f : M \setminus N \rightarrow \mathbb{K}$, $f \in l^\infty(M \setminus N)$ bezüglich der Supremumsnorm. Sei $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{K}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in M \setminus N) \\ 0 & (x \in N) \end{cases}$$

Da \tilde{f} beschränkt, ist $\tilde{f} \in \mathcal{L}^\infty(M)$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - \tilde{f}\|_\infty &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in M \setminus N} |f_k(x) - \tilde{f}(x)| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\|f_k|_{M \setminus N} - f\|_\infty}_{\text{Supremumsnorm auf } l^\infty(M \setminus N)} = 0. \end{aligned}$$

- (2) Im Fall $1 \leq p < \infty$ sei (f_k) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p(M)$. Wähle Teilfolge (f_{k_l}) von (f_k) mit $\forall l \in \mathbb{N} : \|f_{k_{l+1}} - f_{k_l}\|_p < 2^{-l}$. Wir definieren Folgen (g_l) und (h_m) in $\mathcal{L}^p(M)$ durch $g_l := f_{k_{l+1}} - f_{k_l}$ für $l \in \mathbb{N}$ und $h_m = \sum_{l=1}^m |g_l|$ für $m \in \mathbb{N}$. Wegen der Minkowski-Ungleichung (Satz 15) gilt für $m \in \mathbb{N}$ stets

$$\int_M (h_m)^p d\lambda = \left(\left\| \sum_{j=1}^m |g_l| \right\|_p \right)^p \leq \left(\sum_{l=1}^m \|g_l\| \right)^p \leq \left(\sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \right)^p = 1.$$

Die $(h_m^p)_{m \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\mathcal{L}^1(M)$ mit $h_m^p \leq h_{m+1}^p$ und $(\int_M h_m^p d\lambda)$ beschränkt. Nach dem Satz von Beppo Levi gibt es eine Funktion $h : M \rightarrow [0, \infty)$, $h^p \in \mathcal{L}^1(M)$ und Nullmenge N so dass $\forall x \in M \setminus N$ gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m^p(x) = h^p(x)$. Insbesondere $h \in \mathcal{L}^p(M)$. Die Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} g_l(x)$ konvergiert für $x \in M \setminus N$ absolut. Also ist die Funktion $g : M \rightarrow \mathbb{K}$,

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{l=1}^{\infty} g_l(x) & (x \in M \setminus N), \\ 0 & (x \in N) \end{cases}$$

wohldefiniert und messbar. Es ist $(\sum_{l=1}^m g_l)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^p(M)$ mit $|\sum_{l=1}^m g_l(x)|^p \leq (h(x))^p$ für alle $x \in M$, $m \in \mathbb{N}$. Da $h^p \in \mathcal{L}^1(M)$ folgt nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue, dass $g^p \in \mathcal{L}^1(M)$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_M (\sum_{l=1}^m g_l)^p d\lambda = \int_M g^p d\lambda$. Also $g \in \mathcal{L}^p(M)$. Es gilt nun²: $\|g + f_{k_1} - f_{k_m}\|_p = \|g - \sum_{l=1}^m g_l\|_p = \sum_{l=m+1}^{\infty} \|g_l\|_p \leq \sum_{l=m+1}^{\infty} \|g_l\|_p \leq \sum_{l=m+1}^{\infty} 2^{-l} = 2^{-m} \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$. Nach analogen Argument zum Beweis von Satz 13 (Teil 3) folgt $\|f_k - (g + f_{k_1})\|_p \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

□

Theorem 18. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $M \neq \emptyset$, und $p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$. Wir definieren

$$\mathcal{N}_p(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ messbar}, \|f\|_p = 0\}.$$

Auf dem Quotientenraum

$$L^p(M) := \mathcal{L}^p(M) / \mathcal{N}_p(M)$$

ist durch $\|f + \mathcal{N}_p(M)\|_p := \|f\|_p$ eine Norm definiert. Der Raum $(L^p(M), \|\cdot\|_p)$ ist ein Banachraum.

Beweis. Nach Satz 16 ist $\|\cdot\|_p$ Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(M)$. Damit folgt mit Satz 12 dass $\|f + \mathcal{N}_p(M)\|_p := \|f\|_p$ ist Norm auf $L^p(M)$. Satz 17 sagt, dass $\mathcal{L}^p(M)$ vollständig bezüglich $\|\cdot\|_p$ ist und damit folgt mit Satz 12 dass $(L^p(M), \|\cdot\|_p)$ Banachraum. □

2. ÜBUNGSBLÄTTER

2.1. Übungsblatt 1.

²Denn für Lebesgue-Integrale ist egal, wie der Integrand auf Nullmengen definiert ist

2.1.1. *Aufgabe 1.1.* Zunächst zeigen wir: $\forall x, y \in X : ||x|| - ||y|| \leq ||x - y||$:

$$||x|| - ||y|| = ||x - y + y|| - ||y|| \leq ||x - y|| + ||y|| - ||y|| = ||x - y||$$

$$||y|| - ||x|| = ||y - x + x|| - ||x|| \leq ||y - x|| + ||x|| - ||x|| = ||x - y||$$

Dies impliziert die Ungleichung.

Sei $x \in X$ gegeben und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle $y \in U_\delta(x) : ||x|| - ||y|| \leq ||x - y|| < \delta = \varepsilon$. Damit ist die Abbildung $x \mapsto ||x||$ stetig.

2.1.2. *Aufgabe 1.2.* Sei $v \in X$ und $r > 0$. Ist (w_n) Folge in $U_r(v)$, die gegen $w \in X$ konvergiert, so folgt wegen der Stetigkeit von $x \mapsto ||x||$, dass $||w - v|| = \lim_{n \rightarrow \infty} ||w_n - v|| \leq r$. Also $\overline{U_r(v)} \subset \{w \in X : ||w - v|| \leq r\}$. Sei $w \in X$ mit $||w - v|| = r$. Definiere Folge (w_n) durch $w_n = v + (1 - \frac{1}{n})(w - v)$. Da $||w - w_n|| = ||w - v - (1 - \frac{1}{n})(w - v)|| = ||w - w + \frac{w}{n} - v + v - \frac{v}{n}|| = ||\frac{1}{n}(w - v)|| = \frac{1}{n}||w - v|| = \frac{1}{n}r \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ konvergiert (w_n) gegen w . Weiterhin ist $||v - w_n|| = ||v - v - (1 - \frac{1}{n})(w - v)|| = (1 - \frac{1}{n})||w - v|| = (1 - \frac{1}{n})r < r$ also (w_n) Folge in $U_r(v)$. Damit $\{w \in X : ||w - v|| \leq r\} \subset \overline{U_r(v)}$ und es folgt die Gleichheit der Mengen. Gegenbeispiel für metrische Räume: Sei $X = \mathbb{Z}$ und $d(v, w) = |v - w|$. X ist mit d ein metrischer Raum und es gilt $\{w \in X : d(w, 0) < 1\} = \{0\} = \{0\} \neq \{-1, 0, 1\} = \{w \in X : d(w, 0) \leq 1\}$.

2.1.3. *Aufgabe 1.3.* Behauptung: Für $1 < p < q < \infty$ gilt: $l^1 \subset l^p \subset l^q \subset l^\infty$. Beweis: Sei $(x_n) \in l^p$ für $1 \leq p < \infty$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ konvergent. Damit konvergiert $(|x_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ und somit (x_n) gegen 0. Also ist (x_n) beschränkt und $(x_n) \in l^\infty$.

Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $p < q$. Da (x_n) gegen 0 konvergiert, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$: $|x_n| < 1$. Damit ist für alle $n > N$: $|x_n|^q < |x_n|^p$. Da $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ konvergiert ist nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^q$ konvergent und $(x_n) \in l^q$.

Beweis, dass die Inklusionen echt sind: Sei $p \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < \infty$. Die konstante Folge (a_n) , $\forall n \in \mathbb{N} a_n = 1$, ist beschränkt, also $(a_n) \in l^\infty$. Da $\sum_{n=1}^\infty |1|^p$ divergent, ist $(a_n) \notin l^p$. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $p < q$. Wähle $\alpha \in (\frac{1}{q}, \frac{1}{p})$. Dann ist $\alpha p < \frac{1}{p}p = 1$ und $\alpha q > \frac{1}{q}q = 1$. Betrachte die Folge $x = (\frac{1}{n^\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty (\frac{1}{n^\alpha})^p = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\alpha p}}$ ist divergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty (\frac{1}{n^\alpha})^q = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\alpha q}}$ ist konvergent. Damit $x \notin l^p$ und $x \in l^q$.

2.1.4. *Aufgabe 1.4.* Wir verwenden wieder die Schreibweise von Folgen als Funktionen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$. Wir definieren $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$f_n(m) = \begin{cases} \frac{1}{m} & (m < n) \\ 0 & (m \geq n) \end{cases}$$

(also $(0,0,0,\dots)$, $(1,0,0,0,\dots)$, $(1, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \dots)$, ...) und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(m) = \frac{1}{m}$. Es ist (f_n) Folge in d und $f \in c_0 \setminus d$. Da

$$(f_n - f)(m) = \begin{cases} 0 & m < n \\ -\frac{1}{m} & m \geq n \end{cases}$$

folgt $||f_n - f||_\infty = \frac{1}{n}$. Also konvergiert (f_n) in $(c_0, ||\cdot||_\infty)$ gegen f . Damit ist d nicht abgeschlossen in $(c_0, ||\cdot||_\infty)$. Somit ist $(d, ||\cdot||_\infty)$ nicht vollständig (nach Satz 1).

2.2. Übungsblatt 2.

2.2.1. Aufgabe 2.1.

- (1) Wir überprüfen die drei Normaxiome.
- (a) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in C^r(\bar{\Omega})$. Es gilt $\|\lambda f\| = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} \|D^\alpha(\lambda f)\|_\infty = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} \|\lambda D^\alpha f\|_\infty = |\lambda| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} \|D^\alpha f\|_\infty = |\lambda| \|f\|$.
 - (b) Seien $f, g \in C^r(\bar{\Omega})$. Es gilt $\|f + g\| = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} \|D^\alpha(f + g)\|_\infty = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} \|(D^\alpha f) + (D^\alpha g)\|_\infty \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} (\|D^\alpha f\|_\infty + \|D^\alpha g\|_\infty) = \|f\| + \|g\|$.
 - (c) Sei $f \in C^r(\bar{\Omega})$. Es sei $\|f\| = 0$. Also $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} \|D^\alpha f\|_\infty = 0$. Damit folgt $\|D^0 f\|_\infty = 0$ und somit $\|f\|_\infty = 0$. Da $f \in l^\infty(\Omega)$, folgt für alle $x \in \Omega$ dass $f(x) = 0$.
 - (d) Wir zeigen zuerst, dass f auf Ω stetig fortsetzbar ist. Konvergiere (f_m) auf Ω gleichmäßig gegen f , mit (f_m) Folge wie in Aufgabenstellung und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist für alle $x \in \Omega$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Die Folge $(f_m|_\Omega)_{m \in \mathbb{N}}$ ist konvergent in $(l^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$, also Cauchy-Folge in $(l^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$. Da für alle $k, m \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{\sup_{x \in \Omega} |f_k(x) - f_m(x)|}_{\|f_k|_\Omega - f_m|_\Omega\|_\infty} = \underbrace{\sup_{x \in \bar{\Omega}} |f_k(x) - f_m(x)|}_{\|f_k - f_m\|_\infty}$$

ist $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $(l^\infty(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$. Da dieser Raum ein Banachraum ist, gibt es $\tilde{f} \in l^\infty(\bar{\Omega})$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - \tilde{f}\|_\infty = 0$. Also konvergiert (f_m) gleichmäßig gegen \tilde{f} und damit ist \tilde{f} stetig. Da für alle $x \in \Omega$ gilt:

$$\tilde{f}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x).$$

Damit ist f stetig fortsetzbar auf $\bar{\Omega}$. Analog für g_j . Nun zeigen wir die Differenzierbarkeit von f nach x_j : Wir schreiben $f(_, x_j, _)$ für $f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ und $f(_, x_j + h, _)$ für $f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n)$. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$. Wähle $r > 0$, so dass $U_r(x) \subset \Omega$ mit $U_r(x)$ bezüglich $\|\cdot\|_2$ -Norm auf \mathbb{R}^n . Nach dem Mittelwertsatz gibt es für jedes $h \in (-r, r)$ und $m \in \mathbb{N}$ ein $\zeta_{h,m} \in [-|h|, |h|]$ mit

$$(2.1) \quad \left| f_m(_, x_j + h, _) - f_m(_, x_j, _) - h \frac{d}{dx_j} f_m(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) \right| = 0$$

$(\zeta_{h,m})_{m \in \mathbb{N}}$ ist Folge in $[-|h|, |h|]$. Durch Übergang zu einer Teilfolge von (f_m) können wir o.B.d.A. annehmen, dass $(\zeta_{h,m})_{m \in \mathbb{N}}$ gegen ein

$\zeta_h^* \in [-|h|, |h|]$ konvergiert. Mit der Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{dx_j} f_m(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) - g_j(_, x_j + \zeta_h^*, _) \right| \\ & \leq \left| \frac{d}{dx_j} f_m(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) - g_j(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) \right| \\ & \quad + |g_j(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) - g_j(_, x_j + \zeta_h^*, _)| \\ & \leq \underbrace{\left\| \frac{d}{dx_j} f_m - g_j \right\|_\infty}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|g_j(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) - g_j(_, x_j + \zeta_h^*, _)|}_{\rightarrow 0}. \end{aligned}$$

folgt, dass $\left(\frac{d}{dx_j} f_m(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) \right)_{m \in \mathbb{N}}$ gegen $g_j(_, x_j + \zeta_h^*, _)$ konvergiert. Für $m \rightarrow \infty$ folgt aus (2.1), dass

$$|f(_, x_j + h, _) - f_j(_, x_j, _) - h g_j(_, x_j + \zeta_h^*, _)| = 0.$$

Sei $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in $(-r, r)$ mit $h_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ mit $h_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt mit (2.1)

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(_, x_j + h_k, _) - f(_, x_j, _)}{h_k} \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} g_j(_, x_j + \underbrace{\zeta_{h_k}^*}_{\rightarrow 0 \text{ (} k \rightarrow \infty \text{)}}, _) \\ & = g_j(_, x_j, _) \end{aligned}$$

mit $|\zeta_{h_k}^*| \leq |h_k|$ und g_j stetig. Somit ist f nach x_j partiell differenzierbar und $\frac{d}{dx_j} f(x) = g_j(x)$.

2.2.2. Aufgabe 2.3.

- (1) Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < q$. Wähle $\alpha \in (\frac{1}{q}, \frac{1}{p})$. Dann gilt $\alpha p < 1$ und $\alpha q > 1$. Wir schreiben Elemente aus l^p als Funktionen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ durch

$$f_n(m) = \begin{cases} \frac{1}{m^\alpha} & m \leq n, \\ 0 & m > n. \end{cases}$$

Da $f_n \in l^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n \in l^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist die Folge $(\|f_n\|_p^p)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent, da $\|f_n\|_p^p = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^{\alpha p}}$ mit $\alpha p < 1$. Die Folge $(\|f_n\|_q^q)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent, da $\|f_n\|_q^q = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^{\alpha q}}$ mit $\alpha q > 1$. Also ist die Folge $(\|f_n\|_p)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent und die Folge $(\|f_n\|_q)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent. Damit können $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ nicht äquivalent sein, denn sonst gäbe es $M > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\|_p \leq M \|f_n\|_q$. (Unter Verwendung von Aufgabe 2.2.) Widerspruch.

- (2) Sei $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ durch

$$f_n(m) = \begin{cases} 1 & m \leq n, \\ 0 & m > n. \end{cases}$$

Wieder ist für alle $n \in \mathbb{N}$: $f_n \in d \subset l^p$, also (f_n) Folge in l^p . Es ist $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\|f_n\|_p = \left(\sum_{m=1}^n 1^p \right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}.$$

Damit ist $(\|f_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und $(\|f_n\|_p)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent. Analog zur obigen Aufgabe folgt, dass $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_p$ nicht äquivalent sind.

2.3. Übungsblatt 3.

2.3.1. *Aufgabe 3.1.* Wir betrachten zunächst den Fall $a = -1, b = 1$. Wir definieren $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} |x| & |x| > 1, \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} & |x| \leq 1. \end{cases}$$

Es ist $f \in C^1(\mathbb{R})$. Wir definieren $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{1}{n}f(nx)$. Dann ist (f_n) Folge in $C^1([-1, 1])$. (f_n) konvergiert in $(C([-1, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ gegen $g(x) = |x|$, denn $\|f_n - g\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - g(x)|$

$$\begin{aligned} &= \max \left\{ \underbrace{\sup_{x \in [-1, 1] \setminus [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} |f_n(x) - g(x)|}_{=0}, \sup_{x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} |f_n(x) - g(x)| \right\} \\ &= \sup_{x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} \left| \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}(nx)^2 + \frac{1}{2} \right) - |x| \right| \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{n} + \sup_{x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} \left| \frac{1}{2}n \overbrace{x^2}^{\leq \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{2n} \right|}_{\leq 2 \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}} \\ &\leq \frac{2}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Also (f_n) Cauchy-Folge in $(C^1([-1, 1]), \|\cdot\|_\infty)$. Aber (f_n) nicht konvergent in $C^1([-1, 1])$, da für einen Grenzwert \tilde{f} in $C^1([-1, 1])$ gilt $\tilde{f} = g$ gelten müsste. Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $h: [a, b] \rightarrow [-1, 1]$ durch $h(x) = 2 \frac{x-a}{b-a} - 1$ definiert. Da $\|f_n \circ h\|_\infty = \|f_n\|_\infty$ ist $(f_n \circ h)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $(C^1([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ die nicht konvergiert (da Grenzwert $\tilde{f} \in C^1([a, b])$ durch $\tilde{f} \circ h^{-1}$ einen Grenzwert von (f_n) in $C^1([-1, 1])$ liefert).

2.3.2. *Aufgabe 3.2.* Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(1) $\|\cdot\|_1$ ist Norm:

(a) Sei $f \in C([a, b])$, $\lambda \in \mathbb{K}$. $\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(s)| ds = \int_a^b |\lambda| |f(s)| ds = |\lambda| \int_a^b |f(s)| ds = |\lambda| \|f\|_1$.

(b) Seien $f, g \in C([a, b])$. $\|f + g\|_1 = \int_a^b |f(s) + g(s)| ds \leq \int_a^b |f(s)| + |g(s)| ds = \|f\|_1 + \|g\|_1$.

- (c) Sei $f \in C([a, b])$ mit $\|f\|_1 = 0$. Also $\int_a^b |f(s)|ds = 0$. Nach Ergebnissen aus der Analysis für stetige Funktionen folgt, dass f konstant 0 auf $[a, b]$ ist.
- (2) $(C([a, b]), \|\cdot\|_1)$ ist nicht vollständig. Betrachte zunächst $a = 0$, $b = 2$. Definiere für $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{K}$ durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1], \\ 1 & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Dann ist (f_n) Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_1$, denn $\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |x^n - x^m|dx \leq \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{1}{m+1}x^{m+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \rightarrow 0$ für $n, m \rightarrow \infty$. Angenommen (f_n) hat Grenzwert $g \in C([0, 2])$. Dann ist

$$\begin{aligned} \underbrace{\|f_n - g\|_1}_{\rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0} &= \int_0^1 |f_n(x) - g(x)|dx + \int_1^2 |f_n(x) - g(x)|dx \\ &= \int_0^1 |x^n - g(x)|dx + \int_1^2 |1 - g(x)|dx \\ &= \underbrace{\int_0^1 |x^n - g(x)|dx}_{\geq 0 \text{ und } \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{\int_1^2 |1 - g(x)|dx}_{\geq 0 \text{ und } \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0} \end{aligned}$$

und also $\|1 - g(x)|_{[1,2]}\|_1 = \int_1^2 |1 - g(x)|dx = 0$ und damit $g(x)|_{[1,2]} \equiv 1$. Mit der $\|\cdot\|_1$ Norm auf $C([0, 1])$ folgt

$$\int_0^1 |x^n - g(x)|dx \geq \left| \underbrace{\int_0^1 |x^n|dx}_{\rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0} - \int_0^1 |g(x)|dx \right|.$$

Es ergibt sich $\|g|_{[0,1]}\|_1 = 0$ und also $g(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Widerspruch.

2.3.3. Aufgabe 3.3. Nach Lemma 3 gibt es eine Folge (x_n) in X so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|x_1\| = 1$ und $\forall u \in U : \|u - x_n\| > 1 - \frac{1}{n}$. Sei $S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$. S ist abgeschlossen und beschränkt. Da X endlich dimensional ist, ist S kompakt. Somit gibt es eine konvergente Teilfolge (y_k) von (x_n) und Folge $\delta_k \in (0, 1)$ mit $\forall u \in U : \|u - y_k\| > 1 - \delta_k$ und $\delta_k \rightarrow 0$. Sei $y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$. Ist $u \in U$, so ist $\|u - y\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u - y_k\| \geq \lim_{k \rightarrow \infty} 1 - \delta_k = 1$. Also $1 \leq \inf\{\|u - y\| \mid u \in U\}$. Da $\|0 - y\| = \|y\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k\| = 1$ folgt die Gleichheit und $\|y\| = 1$.

2.3.4. Aufgabe 3.4. Sei $e_j \in d$, $e_j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ definiert durch

$$e_j(m) = \begin{cases} 1 & j = m, \\ 0 & j \neq m. \end{cases}$$

Es ist $d = \text{span}\{e_j \mid j \in \mathbb{N}\}$. Sei $f \in c_0$, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$. Definiere für $n \in \mathbb{N}$ die Folge $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ durch

$$f_n(m) = \begin{cases} f(m) & m \leq n, \\ 0 & m > n. \end{cases}$$

Dann ist (f_n) Folge in d . Da $\|f - f_n\|_\infty = \sup_{m \in \mathbb{N}} |f(m) - f_n(m)| = \sup_{m > n} |f(m)| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ ist f Grenzwert von (f_n) in $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$. Also $c_0 = \overline{d} = \overline{\text{span}\{e_j | j \in \mathbb{N}\}}$. Somit ist c_0 separabel.

2.3.5. *Aufgabe 3.5.* Sei $f \in C^r(\overline{\Omega})$. Alle Maxima und Summen beziehen sich auf Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq |\alpha| \leq r$. Dann gilt

$$\max \|D^\alpha f\|_\infty \leq \sum \|D^\alpha f\|_\infty.$$

Umgekehrt gilt

$$\sum \|D^\alpha f\|_\infty \leq (r+1)^n \max \|D^\alpha f\|_\infty.$$

Also $\forall f \in C^r(\overline{\Omega}) : \|f\|_a \leq \|f\| \leq (r+1)^n \|f\|_a$.