

Einführung in die Funktionalanalysis

23. Oktober 2013

Organisatorisches

Vorlesung Di 12.15 - 13.45 HS4; Mi 14.15 - 15.45 HS4

15.10.13

Übung Do 16.00 - 17.30 HS4

Dozent Christian Lageman <christian.lageman@mathematik.uni-wuerzburg.de>
Sprechstunde: Mi 10.00 - 11.30 Übungsblätter: Abgabe Vorlesung Dienstag

Wuecampus

Klausur 5.4.2014, 14:00 HS4

Literatur D. Werner, Funktionalanalysis, Springer-Verlag 2011 F. Hirzebruch, W. Scharlau, Einführung in die Funktionalanalysis, Spektrum Akademischer Verlage, 1991 E. Kreyzig, Introduction Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, 1989 R. Meise, D. Vogt, Einführung in die Funktionalanalysis, Vieweg + Teubner Verlag, 2011

Voraussetzungen Lineare Algebra I und II; Analysis I und II; Veriefung Analysis; insbesondere metrische Räume, Folgen in metrischen Räumen, offene und abgeschlossene Mengen, Integration im \mathbb{R}^n

1 Normierte Räume

Sprechen wir von einem \mathbb{K} -Vektorraum, so meinen wir einen \mathbb{R} - oder \mathbb{C} -Vektorraum, d.h. die entsprechenden Definitionen und Sätze gelten sowohl für reelle als auch für komplexe Vektorräume. Wir verwenden \mathbb{K} als Platzhalter für \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} in den Sätzen und Definitionen.

Definition 1. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum. Wir nennen eine Funktion $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ eine *Halbnorm auf X* , falls gilt:

1. $\forall_{v \in X, \lambda \in \mathbb{K}} : \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
2. $\forall_{v, w \in X} : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Gilt zusätzlich noch $\forall v \in X : \|v\| = 0 \implies v = 0$, so nennen wir $\|\cdot\|$ eine *Norm* auf X . Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X , so bezeichnen wir $(X, \|\cdot\|)$ als *normierten Raum*.

Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem \mathbb{K} -Vektorraum X induziert durch $d(v, w) = \|v - w\|$ eine Metrik $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ auf X , die wir als kanonische Metrik auf $(X, \|\cdot\|)$ bezeichnen. \square

Ein normierter Raum ist damit auch ein metrischer Raum. Die Begriffe von offenen und abgeschlossenen Mengen, Konvergenz von Folgen, Cauchy-Folgen, Vollständigkeit, Stetigkeit von Abbildungen ergeben sich für normierte Räume aus den entsprechenden Begriffen für metrische Räume.

Example 1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Folge (v_n) in X heißt konvergent gegen $v^* \in X$ falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \|v_n - v^*\| < \varepsilon$$

wobei $\|v_n - v^*\| = d(v_n, v^*)$ mit der kanonischen Metrik d ist. \triangle

Für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ notieren wir:

1. den Abschluss einer Menge $M \subset X$ mit \overline{M} ,
2. den Rand einer Menge $M \subset X$ mit ∂M ,
3. das Innere einer Menge $M \subset X$ mit $\text{int } M$,

Aus der entsprechenden Definitionen für metrische Räume ergibt sich: eine Folge (v_n) in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *Cauchy-Folge*, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N : \|v_n - v_m\| < \varepsilon.$$

Ein metrischer Raum und entsprechend auch ein normierter Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, nennt man *vollständig*.

1. die offene Kugel um $v \in X$ mit Radius r mit $U_r(v) = \{w \in X : \|v - w\| < r\}$.

Definition 2. Einen vollständigen normierten Raum bezeichnet man als *Banachraum*. \square

Example 2. 1. Versehen wir \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n mit einer Norm $\|\cdot\|$, so ist der normierte Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ bzw. $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Es sei daran erinnert, dass auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind, d.h. sind $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_+$ Normen auf einem endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum X , so gibt es Konstanten $m, M > 0$ mit $\forall v \in X : m\|v\|_* \leq \|v\|_+ \leq M\|v\|_*$. Die Vollständigkeit im \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n ist damit nur für eine Norm nachzuweisen und aus der Analysis bekannt.

2. Sei M eine nicht-leere Menge. Wir bezeichnen mit $l^\infty(M)$ den \mathbb{K} -Vektorraum der beschränkten Funktionen $M \rightarrow \mathbb{K}$. Wir definieren auf $l^\infty(M)$ die Norm $\|\cdot\|_\infty$ durch $\|f\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x)|$ für $f \in l^\infty(M)$. Die Norm ist wohldefiniert, da f beschränkt ist. Man bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ auch als die sogenannte *Supremumsnorm*. $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm, denn:

- (a) für $f \in l^\infty(M), \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in M} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in M} |\lambda| |f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in M} |f(x)| = |\lambda| \|f\|_\infty$.
- (b) für $f, g \in l^\infty(M)$ gilt: $\|f+g\|_\infty = \sup_{x \in M} |(f+g)(x)| = \sup_{x \in M} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in M} |f(x)| + \sup_{x \in M} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
- (c) für $f \in l^\infty(M)$ gilt: $\|f\|_\infty = 0 \implies \sup_{x \in M} |f(x)| = 0 \implies \forall_{x \in M} : |f(x)| = 0 \implies f \equiv 0$.

$(l^\infty(M), \|\cdot\|_\infty)$ ist also ein normierter Raum. Wir zeigen nun, dass der Raum vollständig ist. Sei dazu (f_n) eine Cauchy-Folge in $l^\infty(M)$. Es gilt also $\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \in \mathbb{N} \forall_{n, m > N} : \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Es gilt außerdem $\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f_m(x)|$. Dies impliziert, dass $\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \in \mathbb{N} \forall_{n, m > N} \forall_{x \in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Insbesondere gilt für alle $x \in M$ daher $\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \in \mathbb{N} \forall_{n > N} \forall_{x \in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, und also ist $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge für jedes $x \in M$. Da \mathbb{R} und \mathbb{C} vollständig sind, ist für jedes $x \in M$ die Folge $(f_n(x))$ konvergent. Wir erhalten die Funktion $f^* : M \rightarrow \mathbb{K}$ durch $\forall_{x \in M} : f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Wir erhalten eine Funktion $f^* : M \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\forall_{x \in M} : f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Wir hatten uns überlegt, dass

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \in \mathbb{N} \forall_{n, m > N} \forall_{x \in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Damit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{n, m > N} \forall_{x \in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < 1$. (Dies ist äquivalent zu $f_m(x) \in U_1(f_n(x))$.) Also $\forall_{m > N} \forall_{x \in M} : f_m(x) \in U_1(f_{N+1}(x))$. Somit $\forall_{x \in M} : f^*(x) \in U_1(f_{N+1}(x))$. Damit $\forall_{x \in M} : |f_{N+1}(x) - f^*(x)| \leq 1$. Da $f_{N+1} \in l^\infty(M)$, also beschränkt ist, muss auch f^* beschränkt sein. Wir erhalten $f^* \in l^\infty(M)$. Wir zeigen nun die Konvergenz von (f_n) gegen f^* . Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall_{n, m > N} \forall_{x \in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Also $\forall_{x \in M} \forall_{n > N} \forall_{m > N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da es zu jedem $x \in M$ und $n > N$ ein $m(x, n) \in \mathbb{N}, m(x, n) > N$ gibt mit

$$|f_{m(x, n)}(x) - f^*(x)| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} - |f_n(x) - f_{m(x, n)}(x)|}_{> \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{1}{6}\varepsilon}.$$

folgt

$$\forall_{x \in M} \forall_{n > N} : \underbrace{|f_n(x) - f_{m(x, n)}(x)| + |f_{m(x, n)}(x) - f^*(x)|}_{|f_n(x) - f^*(x)| \leq} < \frac{\varepsilon}{2} - |f_n(x) - f_{m(x, n)}(x)| + |f_n(x) - f_{m(x, n)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Also $\forall_{n>N} \forall_{x \in M} : |f_n(x) - f^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit $\forall_{n>N} : \|f_n - f^*\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$. Damit konvergiert (f_n) gegen f^* . Somit ist $(l^\infty(M), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

△

Theorem 1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $U \subset X$ ein Unterraum von X .

1. Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und U eine abgeschlossene Teilmenge von X , so ist $(U, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.
2. Ist U vollständig, so ist U eine abgeschlossene Teilmenge von X .

○

Beweis. 1. Sei (u_n) eine Cauchy-Folge in $(U, \|\cdot\|)$. Dann ist (u_n) eine Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|)$. Also konvergiert (u_n) gegen ein $u^* \in X$. Damit ist $u^* \in \overline{U}$, also $u^* \in U$. Somit ist U vollständig.

2. Sei U vollständig. Ist $u^* \in \overline{U} \setminus U$, so gibt es Folge (u_n) in U die gegen u^* konvergiert. Diese Folge ist eine Cauchy-Folge in U und konvergiert somit gegen einen Grenzwert $u^{**} \in U$. Wegen der Eindeutigkeit von Grenzwerten folgt $u^* = u^{**} \in U$. Also $\overline{U} \setminus U = \emptyset$ und U abgeschlossen.

□

Example 3. Wir verwenden die Notation $l^\infty = l^\infty(\mathbb{N})$. Da eine Folge in \mathbb{K} eine Funktion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ ist, ist l^∞ also der Raum aller beschränkten Folgen in \mathbb{K} . Wir definieren die folgenden Unterräume von l^∞ : $c = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, (x_n) \text{ konvergent}\}$, $c_0 = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$, $d = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, x_n \text{ bis auf endlich viele Folgenglieder gleich } 0\}$. Da die konvergente Folge in \mathbb{K} in \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} beschränkt ist, folgt $d \subset c_0 \subset c \subset l^\infty$. Sei $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm auf l^∞ . Es sind $(d, \|\cdot\|_\infty)$, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, $(c, \|\cdot\|_\infty)$ normierte Räume. Welche dieser Räume sind Banachräume? Mit Satz 1 reicht es zu zeigen, dass der entsprechende Raum abgeschlossen in l^∞ ist.

Sei (f_n) eine Folge in c , die konvergent gegen ein $f^* \in l^\infty$ ist. Um Doppelindizes zu vermeiden, verwenden wir die Darstellung von Folgen als Funktionen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$. Da (f_n) eine Folge in c ist, können wir durch $x_n = \lim_{m \rightarrow \infty} f_n(m)$ eine Folge (x_n) in \mathbb{K} definieren. Es gilt $|x_n - x_l| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} |f_n(m) - f_l(m)| = \|f_n - f_l\|_\infty$. Da (f_n) eine Cauchy-Folge ist, ist durch diese Abschätzung die Folge (x_n) eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} . Also konvergiert (x_n) gegen ein $x^* \in \mathbb{K}$. Wir wollen nun zeigen, dass f^* gegen x^* konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|f^* - f_N\| < \frac{\varepsilon}{3}$ und $|x_N - x^*| < \frac{\varepsilon}{3}$. Wähle $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > M$ gilt $|f_N(m) - x_N| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann gilt für alle $m > M$

$$|f^*(m) - x^*| \leq \underbrace{|f^*(m) - f_N(m)|}_{\leq \|f^* - f_N\|_\infty} + \underbrace{|f_N(m) - x_N|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|x_N - x^*|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \underbrace{\|f^* - f_N\|_\infty}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Also ist f^* konvergente Folge und $f^* \in c$. Damit ist c abgeschlossen und nach Satz 1 ein Banachraum.

Sei (f_n) eine Folge in c_0 die konvergent gegen ein $f^* \in l^\infty$ ist. Wiederholen wir das obige Argument, so erhalten wir zusätzlich dass (x_n) konstant 0 ist. Damit ist $x^* = 0$ und $f^* \in c_0$. Somit ist c_0 abgeschlossen und nach Satz 1 ein Banachraum. Der Raum $(d, \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Banachraum.

△

Wir definieren nun weitere Folgenräume.

Definition 3. Für $p \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < \infty$ setzen wir $l^p = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}$ und $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ für $(x_n) \in l^p$. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass $(l^p, \|\cdot\|_p)$ Banachräume sind.

□

22.10.13

Theorem 2. Für $1 \leq p < \infty$ ist l^p versehen mit der Addition und Skalarmultiplikation von Folgen ein \mathbb{K} -Vektorraum.

○

Beweis. Offensichtlich ist die konstante Folge (a_n) für alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n = 0$ in l^p enthalten. Desweiteren ist für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $(x_n) \in l^p$ auch $(\lambda x_n) \in l^p$, da $\sum_{n=1}^\infty |\lambda x_n|^p = |\lambda|^p \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ konvergiert. Schließlich, sind $(x_n), (y_n) \in l^p$, so gilt $\sum_{n=1}^\infty |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=1}^\infty (|x_n| + |y_n|)^p \leq \sum_{n=1}^\infty (2 \max\{|x_n|, |y_n|\})^p = 2^p \sum_{n=1}^\infty (\max\{|x_n|, |y_n|\})^p \leq 2^p \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p + |y_n|^p = 2^p (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p + \sum_{n=1}^\infty |y_n|^p) < \infty$. Also $(x_n + y_n) \in l^p$.

□

Theorem 3. Holdesche Ungleichung

1. Sind $(x_n) \in l'$ und $(y_n) \in l^\infty$, so ist $(x_n y_n) \in l'$ und $\|(x_n y_n)\|_{l'} \leq \|(x_n)\|_{l'} \|(y_n)\|_\infty$.
2. Sei $1 < p < \infty$ und $q = \frac{p}{p-1}$. Sind $(x_n) \in l^p$ und $(y_n) \in l^q$, so ist $(x_n y_n) \in l'$ und $\|(x_n y_n)\|_{l'} \leq \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q$.

○

Beweis. 1. Es gilt $\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n| \leq \sum_{n=1}^\infty |x_n| \|(y_n)\|_\infty = \|(y_n)\|_\infty \sum_{n=1}^\infty |x_n| = \|(y_n)\|_\infty \|(x_n)\|_{l'} < \infty$.

2. Wir haben $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $a, b > 0$ und $A = p \log a$ sowie $B = q \log b$. Die Funktion $t \mapsto \exp(t)$ ist konvex, also $\exp(\frac{1}{p}A + \frac{1}{q}B) \leq \frac{1}{p} \exp(A) + \frac{1}{q} \exp(B)$. Somit

$$ab = \exp(\underbrace{\log a}_{=\frac{1}{p}A} + \underbrace{\log b}_{=\frac{1}{q}B}) \leq \frac{1}{p} \exp(\underbrace{p \log a}_A) + \frac{1}{q} \exp(\underbrace{q \log b}_B) = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Wir haben für $(x_n) \in l^p, (y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p = 1 = \|(y_n)\|_q$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p} |x_n|^p + \frac{1}{q} |y_n|^q \right) = \underbrace{\frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (1)$$

Sind $(x_n) \in l^p, (y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p \neq 0$ und $\|(y_n)\|_q \neq 0$, so ist mit (1)

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|}_{= \|(x_n y_n)\|} = \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|x_m|}{\|(x_n)\|_p} \cdot \frac{|y_m|}{\|(y_n)\|_q} \leq \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q \cdot 1.$$

Sind $(x_n) \in l^p$ und $(y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p = 0$ oder $\|(y_n)\|_q = 0$, so ist $(x_n y_n) \in l^1$ und $\|(x_n y_n)\|_1 = 0$. □

Theorem 4. *Minkowskische Ungleichung.* Sei $1 \leq p < \infty$. Für $(x_n), (y_n) \in l^p$ gilt $\|(x_n + y_n)\|_p \leq \|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p$. ◦

Beweis. Für $p = 1$ erhalten wir die Ungleichung direkt. Sei $p > 1$ und $q = \frac{p}{p-1}$. Weiterhin seien $(x_n), (y_n) \in l^p$. Nach Satz 2 ist $(x_n + y_n) \in l^p$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n + y_n|^{p-1})^q$ konvergent¹. Somit ist $(|x_n + y_n|^{p-1}) \in l^q$. Nach Satz 3 ist damit $(|x_n| |x_n + y_n|^{p-1}) \in l^1$ und $(|y_n| |x_n + y_n|^{p-1}) \in l^1$ und wir erhalten $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |x_n + y_n|^{p-1} = \|(|x_n| |x_n + y_n|^{p-1})\|_1 \leq \|(x_n)\|_p \|(x_n + y_n)\|_p^{p-1}$. Also $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \leq \|(y_n)\|_p \|(x_n + y_n)\|_p^{p-1}$. Somit $\|(x_n + y_n)\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|x_n + y_n|^p}_{= |x_n + y_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|) \cdot |x_n + y_n|^{p-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \leq \|(x_n)\|_p \|(x_n + y_n)\|_p^{p-1} + \|(y_n)\|_p \|(x_n + y_n)\|_p^{p-1} = (\|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p) \|(x_n + y_n)\|_p^{p-1}$. Für $\|(x_n + y_n)\|_p \neq 0$ liefert Division die Minkowski-Ungleichung. Für $\|(x_n + y_n)\|_p = 0$ ist die Minkowski-Ungleichung trivial. □

Theorem 5. Für $1 \leq p < \infty$ ist $(l^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum. Ebenso ist $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum. ◦

Beweis. Die Behauptung für l^∞ wurde bereits in Beispiel 1 gezeigt. Sei $1 \leq p < \infty$. Nach Satz 2 ist l^p ein \mathbb{K} -Vektorraum. Für all $(x_n) \in l^p, \lambda \in \mathbb{K}$ ist $\|(\lambda x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|(x_n)\|_p$. Die Dreiecksungleichung gilt für $\|\cdot\|_p$ nach Satz 4. Ist für $(x_n) \in l^p, \|(x_n)\|_p = 0$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 0$, also $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt ist $\|\cdot\|_p$ also eine Norm auf l^p .

¹Nebenrechnung: $(p-1)q = p$.

Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in l^p . Wir verwenden für den Rest des Beweises die Schreibweise von Elementen aus l^p als Funktionen $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{K}$. Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_n(m) - f_k(m)| = (|f_n(m) - f_k(m)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{l=1}^{\infty} |f_n(l) - f_k(l)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f_n - f_k\|_p.$$

Wie schon für l^∞ folgt, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n(m))_n$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} ist. Somit konvergiert für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n(m))_n$ und wir erhalten eine Funktion $f^* : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ mit $f^*(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(m)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall_{n,k > N} : \|f_n - f_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit gilt $\forall_{n,k > N}$ und alle $M \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{m=1}^M |f_n(m) - f_k(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f_n - f_k\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $k \rightarrow \infty$ erhalten wir $\forall_{n > N}, \forall_{M \in \mathbb{N}}$

$$\left(\sum_{m=1}^M |f_n(m) - f^*(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also $\forall_{n > N}$

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} |f_n(m) - f^*(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somit $f_n - f^* \in l^p$ für $n > N$, also wegen $f^* = f_n - (f_n - f^*)$ auch $f^* \in l^p$. Desweiteren $\forall_{n > N} : \|f_n - f^*\|_p < \varepsilon$. Also konvergiert (f_n) gegen f^* . Damit ist $(l^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum. □

Example 4. 1. Sei X ein metrischer Raum mit Metrik $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$.

Wir bezeichnen $C^b(X)$ den Vektorraum der stetigen, beschränkten Funktionen $X \rightarrow \mathbb{K}$. $C^b(X)$ ist ein Unterraum von $l^\infty(X)$, also ist $C^b(X)$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein normierter Raum.

Die Konvergenz in $C^b(X)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ entspricht der gleichmäßigen Konvergenz wie wir sie aus der Analysis kennen.

Sei (f_n) eine Folge in $C^b(X)$, die gegen ein $f^* \in l^\infty(X)$ konvergiert. Aus der Analysis wissen wir, dass dann f^* stetig, also $f^* \in C^b(X)$ ist. Also ist $C^b(X)$ abgeschlossener Unterraum von $l^\infty(X)$ und $(C^b(X), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

Ist der Raum X kompakt, z.B. eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n mit der euklidischen Metrik, so sind alle stetigen Funktionen $X \rightarrow \mathbb{K}$ beschränkt, also $C^b(X) = C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} | f \text{ stetig}\}$.

2. Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Wir bezeichnen mit $C^1([a, b])$ den Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen $[a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. Es ist $C^1([a, b]) \subset l^\infty([a, b])$.

Der Raum $(C^1([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Banachraum (siehe 3. Übungsblatt). Wir können auf $C^1([a, b])$ jedoch eine andere Norm definieren und zwar $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Mit dieser Norm versehen ist $C^1([a, b])$ ein Banachraum. Dies folgt aus dem nächsten Beispiel.

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ eine r -mal stetig differenzierbare Funktion so verwenden wir die Multiindexschreibweise $D^\alpha f$ mit $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ für die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x_1, \dots, x_n)$$

der Ordnung $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq r$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so können wir durch

$C^r(\overline{\Omega}) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ ist } r\text{-mal stetig differenzierbar, für alle Multiindizes } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } 0 \leq |\alpha| \leq r \text{ ist}$
einen Unterraum von $l^\infty(\Omega)$ definieren. Durch

$$\|f\| := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} \|D^\alpha f\|_\infty$$

für $f \in C^r(\overline{\Omega})$ definieren wir eine Norm auf $C^r(\overline{\Omega})$ (siehe 2. Übungsblatt). Der normierte Raum $(C^r(\overline{\Omega}), \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

△

1.1 Eigenschaften normierter Räume

Lemma 1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Es gilt

1. $\forall v, w \in X : |||v|| - ||w||| \leq \|v - w\|$.
2. Die Abbildung $\|\cdot\| : x \mapsto [0, \infty)$ ist stetig.
3. Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen $x \in X$ wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

■

Beweis. Für 1 und 2 siehe erstes Übungsblatt. 3 folgt direkt aus der entsprechenden Eigenschaft für metrische Räume.

□

Theorem 6. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein metrischer Raum.

1. Konvergiert die Folge (x_n) in X gegen $x \in X$ und die Folge (y_n) in X gegen $y \in X$, so konvergiert für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ die Folge $(\lambda x_n + \mu y_n)$ gegen $\lambda x + \mu y$.
2. Ist U ein Unterraum von X , so ist auch \overline{U} ein Unterraum von X .

◦

Beweis. 1. Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $\|\lambda x_n + \mu y_n - (\lambda x + \mu y)\| \leq \|\lambda x_n - \lambda x + \mu y_n - \mu y\| \leq |\lambda| \|x_n - x\| + |\mu| \|y_n - y\|$. Mit Lemma 1 (3) folgt dann die Behauptung.

2. Sei $x, y \in \overline{U}$. Dann gibt es Folgen $(x_n), (y_n)$ in U mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Sei $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Da U linearer Unterraum von X ist, ist $(\lambda x_n + \mu y_n)$ Folge in U . Nach 1 ist $(\lambda x_n + \mu y_n)$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n + \mu y_n = \lambda x + \mu y$. Also $\lambda x + \mu y \in \overline{U}$. Da $U \neq \emptyset$ und $\overline{U} \subset \overline{U}$ ist $\overline{U} \neq \emptyset$. Damit ist \overline{U} Unterraum von X .

□

Definition 4. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ auf X heißen äquivalent, falls es $m, M > 0$ gibt, so dass $\forall_{v \in X} m\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq M\|v\|_a$.

□

Lemma 2. Die Äquivalenz von Normen auf einem \mathbb{K} -Vektorraum X definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf X .

■

Beweis. Siehe 2. Übungsblatt.

□

Theorem 7. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum und $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ Normen auf X . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Die Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ sind äquivalent.
2. Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen $x \in X$ bzgl. $\|\cdot\|_a$, wenn sie gegen x bzgl. $\|\cdot\|_b$ konvergiert.
3. Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen 0 bzgl. $\|\cdot\|_a$, wenn sie gegen 0 bzgl. $\|\cdot\|_b$ konvergiert.

◦

Beweis. 1 \implies 2: Sei $m, M, \widetilde{m}, \widetilde{M} > 0$ mit $\forall_{v \in X} : m\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq M\|v\|_a$ und $\forall_{v \in X} : \widetilde{m}\|v\|_b \leq \|v\|_a \leq \widetilde{M}\|v\|_b$ (siehe Lemma 2). Dann gilt für Folge (x_n) in X und $x \in X$ stets $\|x_n - x\|_a \leq \widetilde{M}\|x_n - x\|_b$ und $\|x_n - x\|_b \leq M\|x_n - x\|_a$.

2 \implies 3: 3 ist Sonderfall von 2.

3 \implies 1: Angenommen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ sind nicht äquivalent. Dann gibt es kein $M > 0$ oder kein $\widetilde{M} > 0$ so dass für alle $v \in X$: $\|v\|_b \leq M\|v\|_a$ und $\|v\|_a \leq \widetilde{M}\|v\|_b$.

□