Einführung in die Funktionalanalysis

31. Oktober 2013

Organisatorisches

Vorlesung Di 12.15 - 13.45 HS4; Mi 14.15 - 15.45 HS4 15.10.13

Übung Do 16.00 - 17.30 HS4

Dozent Christian Lageman <christian.lageman@mathematik.uni-wuerzburg.de>
Sprechstunde: Mi 10.00 - 11.30 Übungsblätter: Abgabe Vorlesung Dienstag

Wuecampus

Klausur 5.4.2014, 14:00 HS4

Literatur D. Werner, Funktionalanalysis, Springer-Verlag 2011 F. Hirzebruch, W. Scharlau, Einführung in die Funktionalanalysis, Sprektrum Akademischer Verlage, 1991 E. Kreyzig, Introduction Functional Analysis with Applications, John Wiley & Songs, 1989 R. Meise, D. Vogt, Einführung in die Funktionalanalysis, Vieweg + Teubner Verlag, 2011

Voraussetzungen Lineare Algebra I und II; Analysis I und II; Veriefung Analysis; insbesondere metrische Räume, Folgen in metrischen Räumen, offene und abgeschlossene Mengen, Integration im $\mathbb{R}^n$

1 Normierte Räume

Sprechen wir von einem $\mathbb{K}$-Vektorraum, so meinen wir einen $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum, d.h. die entsprechenden Definitionen und Sätze gelten sowohl für reelle als auch für komplexe Vektorräume. Wir verwenden $\mathbb{K}$ als Platzhalter für $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ in den Sätzen und Definitionen.

Definition 1. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir nennen eine Funktion $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ eine *Halbnorm auf X*, falls gilt:

1. $\forall_{v\in X,\lambda\in\mathbb{K}} : \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
2. $\forall_{v,w\in X} : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Gilt zusätzlich noch $\forall v \in X : \|v\| = 0 \implies v = 0$, so nennen wir $\|\cdot\|$ eine *Norm auf* X. Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X, so bezeichnen wir $(X, \|\cdot\|)$ als *normierten Raum*.

Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X induziert durch $d(v, w) = \|v-w\|$ eine Metrik $d : X \times X \to [0, \infty)$ auf X, die wir als kanonische Metrik auf $(X, \|\cdot\|)$ bezeichnen. □

Ein normierter Raum ist damit auch ein metrischer Raum. Die Begriffe von offenen und abgeschlossenen Mengen, Konvergenz von Folgen, Cauchy-Folgen, Vollständigkeit, Stetigkeit von Abbildungen ergeben sich für normierte Räume aus den entsprechenden Begriffen für metrische Räume.

Example 1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Folge (v_n) in X heißt konvergent gegen $v^* \in X$ falls gilt:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N \in \mathbb{N}} : \|v_n - v^*\| < \varepsilon$$

wobei $\|v_n - v^*\| = d(v_n, v^*)$ mit der kanonischen Metrik d ist. △

Für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ notieren wir:

1. den Abschluss einer Menge $M \subset X$ mit $\overline{M}$,
2. den Rand einer Menge $M \subset X$ mit ∂M,
3. das Innere einer Menge $M \subset X$ mit $\operatorname{int} M$,

Aus der entsprechenden Definitionen für metrische Räume ergibt sich: eine Folge (v_n) in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *Cauchy-Folge*, falls gilt

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n,m>N} : \|v_n - v_m\| < \varepsilon.$$

Ein metrischer Raum und entsprechend auch ein normierter Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, nennt man *vollständig*.

1. die offene Kugel um $v \in X$ mit Radius r mit $U_r(v) = \{w \in X : \|v - w\| < r\}$.

Definition 2. Einen vollständigen normierten Raum bezeichnet man als *Banachraum*. □

Example 2. 1. Versehen wir $\mathbb{R}^n$ bzw $\mathbb{C}^n$ mit einer Norm $\|\cdot\|$, so ist der normierte Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ bzw. $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Es sei daran erinnert, dass auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind, d.h. sind $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_+$ Normen auf einem endlichen-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum X, so gibt es Konstanten $m, M > 0$ mit $\forall_{v \in X} : m\|v\|_* \leq \|v\|_+ \leq M\|v\|_*$. Die Vollständigkeit im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ ist damit nur für eine Norm nachzuweisen und aus der Analysis bekannt.

2. Sei M eine nicht-leere Menge. Wir bezeichnen mit $l^\infty(M)$ den $\mathbb{K}$-Vektorraum der beschränkten Funktionen $M \to \mathbb{K}$. Wir definieren auf $l^\infty(M)$ die Norm $\|\cdot\|_\infty$ durch $\|f\|_\infty = \sup_{x\in M} |f(x)|$ für $f \in l^\infty(M)$. Die Norm ist wohldefiniert, da f beschränkt ist. Man bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ auch als die sogenannte *Supremumsnorm.* $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm, denn:

   (a) für $f \in l^\infty(M), \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in M} |\lambda f(x)| = \sup_{x\in M} |\lambda||f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in M} |f(x)| = |\lambda|\|f\|_\infty$.

   (b) für $f, g \in l^\infty(M)$ gilt: $\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in M} |(f+g)(x)| = \sup_{x\in M} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in M} |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x\in M} |f(x)| + \sup_{x\in M} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

   (c) für $f \in l^\infty(M)$ gilt: $\|f\|_\infty = 0 \implies \sup_{x\in M} |f(x)| = 0 \implies \forall_{x\in M} : |f(x)| = 0 \implies f \equiv 0$.

   $(l^\infty(M), \|\cdot\|_\infty)$ ist also ein normierter Raum. Wir zeigen nun, dass der Raum vollständig ist. Sei dazu (f_n) eine Cauchy-Folge in $l^\infty(M)$. Es gilt also $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N} : \|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Es gilt außerdem $\|f_n - f_m\| = \sup_{x\in M} |f_n(x) - f_m(x)|$. Dies impliziert, dass $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N}\forall_{x\in M} : |f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon$. Insbesondere gilt für alle $x \in M$ daher $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in M}\forall_{n,m>N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, und also ist $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge für jedes $x \in M$. Da $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ vollständig sind, ist für jedes $x \in M$ die Folge $(f_n(x))$ konvergent. Wir erhalten die Funktion $f^* : M \to \mathbb{K}$ durch 16.10.13
   $\forall_{x\in M} : f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Wir erhalten eine Funktion $f^* : M \to \mathbb{K}$ mit $\forall_{x\in M} : f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Wir hatten uns überlegt, dass

   $$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N}\forall_{x\in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

   Damit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{n,m>N}\forall_{x\in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < 1$. (Dies ist äquivalent zu $f_m(x) \in U_1(f_n(x))$.) Also $\forall_{m>N}\forall_{x\in M} : f_m(x) \in U_1(f_{N+1}(x))$. Somit $\forall_{x\in M} : f^*(x) \in U_1(f_{N+1}(x))$. Damit $\forall_{x\in M} : |f_{N+1}(x) - f^*(x)| \leq 1$. Da $f_{N+1} \in l^\infty(M)$, also beschränkt ist, muss auch f^* beschränkt sein. Wir erhalten $f^* \in l^\infty(M)$. Wir zeigen nun die Konvergenz von (f_n) gegen f^*. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es sein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall_{n,m>N}\forall_{x\in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Also $\forall_{x\in M}\forall_{n>N}\forall_{m>N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da es zu jedem $x \in M$ und $n > N$ ein $m(x,n) \in \mathbb{N}$,$m(x,n) > N$ gibt mit

   $$|f_{m(x,n)}(x) - f^*(x)| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} - |f_n(x) - f_{m(x,n)}(x)|}_{>\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{3}=\frac{1}{6}\varepsilon}.$$

   folgt

   $$\forall_{x\in M}\forall_{n>N} : \underbrace{|f_n(x) - f_{m(x,n)}(x)| + |f_{m(x,n)}(x) - f^*(x)}_{|f_n(x)-f^*(x)|\leq} < \frac{\varepsilon}{2} - |f_n(x) - f_{m(x,n)}(x)| + |f_n(x) - f_{m(x,n)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Also $\forall_{n>N}\forall_{x\in M}: |f_n(x) - f^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit $\forall_{n>N}: \|f_n - f^*\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$. Damit konvergiert (f_n) gegen f^*. Somit ist $(l^\infty(M), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

$\triangle$

Theorem 1. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $U \subset X$ ein Unterraum von X.*

1. *Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und U eine abgeschlossene Teilmenge von X, so ist $(U, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.*
2. *Ist U vollständig, so ist U eine abgeschlossene Teilmenge von X.*

$\circ$

Beweis.
1. Sei (u_n) eine Cauchy-Folge in $(U, \|\cdot\|)$. Dann ist (u_n) eine Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|)$. Also konvergiert (u_n) gegen ein $u^* \in X$. Damit ist $u^* \in \overline{U}$, also $u^* \in U$. Somit ist U vollständig.
2. Sei U vollständig. Ist $u^* \in \overline{U} \setminus U$, so gibt es Folge (u_n) in U die gegen u^* konvergiert. Diese Folge ist eine Cauchy-Folge in U und konvergiert somit gegen einen Grenzwert $u^{**} \in U$. Wegen der Eindeutigkeit von Grenzwerten folgt $u^* = u^{**} \in U$. Also $\overline{U} \setminus U = \emptyset$ und U abgeschlossen.

$\square$

Example 3. Wir verwenden die Notation $l^\infty = l^\infty(\mathbb{N})$. Da eine Folge in $\mathbb{K}$ eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$ ist, ist l^∞ also der Raum aller beschränkten Folgen in $\mathbb{K}$. Wir definieren die folgenden Unterräume von l^∞: $c = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, (x_n) \text{ konvergent }\}$, $c_0 = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$, $d = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, x_n \text{ bis auf endlich viele Folgenglieder gleich } 0\}$. Da die konvergente Folge in $\mathbb{K}$ in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ beschränkt ist, folgt $d \subset c_0 \subset c \subset l^\infty$. Sei $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm auf l^∞. Es sind $(d, \|\cdot\|_\infty)$, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, $(c, \|\cdot\|_\infty)$ normierte Räume. Welche dieser Räume sind Banachräume? Mit Satz 1 reicht es zu zeigen, dass der entsprechende Raum abgeschlossen in l^∞ ist.

Sei (f_n) eine Folge in c, die konvergent gegen ein $f^* \in l^\infty$ ist. Um Doppelindizes zu vermeiden, verwenden wir die Darstellung von Folgen als Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Da (f_n) eine Folge in c ist, können wir durch $x_n = \lim_{m\to\infty} f_n(m)$ eine Folge (x_n) in $\mathbb{K}$ definieren. Es gilt $|x_n - x_l| \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} |f_n(m) - f_l(m)| = \|f_n - f_l\|_\infty$. Da (f_n) eine Cauchy-Folge ist, ist durch diese Abschätzung die Folge (x_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Also konvergiert (x_n) gegen ein $x^* \in \mathbb{K}$. Wir wollen nun zeigen, dass f^* gegen x^* konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|f^* - f_N\| < \frac{\varepsilon}{3}$ und $|x_N - x^*| < \frac{\varepsilon}{3}$. Wähle $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > M$ gilt $|f_N(m) - x_N| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann gilt für alle $m > M$

$$|f^*(m) - x^*| \leq \underbrace{|f^*(m) - f_N(m)}_{\leq \|f^* - f_N\|_\infty} + |\underbrace{f_N(m) - x_N}_{<\frac{\varepsilon}{3}}| + |\underbrace{x_N - x^*}_{<\frac{\varepsilon}{3}}| < \underbrace{\|f^* - f_N\|_\infty}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Also ist f^*konvergente Folge und $f^* \in c$. Damit ist c abgeschlossen und nach Satz 1 ein Banachraum.

Sei (f_n) eine Folge in c_0 die konvergent gegen ein $f^* \in l^\infty$ ist. Wiederholen wir das obige Argument, so erhalten wir zusätzlich dass (x_n) kontant 0 ist. Damit ist $x^* = 0$ und $f^* \in c_0$. Somit ist c_0 abgeschlossen und nach Satz 1 ein Banachraum. Der Raum $(d, \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Banachraum.

△

Wir definieren nun weitere Folgenräume.

Definition 3. Für $p \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < \infty$ setzen wir $l^p = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}$ und $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ für $(x_n) \in l^p$. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass $(l^p, \|\cdot\|_p)$ Banachräume sind.

□

22.10.13

Theorem 2. *Für $1 \leq p < \infty$ ist l^p versehen mit der Addition und Skalarmultiplikation von Folgen ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

∘

Beweis. Offensichtlich ist die konstante Folge (a_n) für alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n = 0$ in l^p enthalten. Desweiteren ist für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $(x_n) \in l^p$ auch $(\lambda x_n) \in l^p$, da $\sum_{n=1}^\infty |\lambda x_n|^p = |\lambda|^p \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ konvergiert. Schließlich, sind $(x_n), (y_n) \in l^p$, so gilt $\sum_{n=1}^\infty |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=1}^\infty (|x_n| + |y_n|)^p \leq \sum_{n=1}^\infty (2 \max\{|x_n|, |y_n|\})^p = 2^p \sum_{n=1}^\infty (\max\{|x_n|, |y_n|\})^p \leq 2^p \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p + |y_n|^p = 2^p (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p + \sum_{n=1}^\infty |y_n|^p) < \infty$. Also $(x_n + y_n) \in l^p$.

□

Theorem 3. *Holdesche Ungleichung*

1. *Sind $(x_n) \in l'$ und $(y_n) \in l^\infty$, so ist $(x_n y_n) \in l'$ und $\|(x_n y_n)\|_{'} \leq \|(x_n)\|_{'} \|(y_n)\|_\infty$.*
2. *Sei $1 < p < \infty$ und $q = \frac{p}{p-1}$. Sind $(x_n) \in l^p$ und $(y_n) \in l^q$, so ist $(x_n y_n) \in l'$ und $\|(x_n y_n)\|_{'} \leq \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q$.*

∘

Beweis.

1. Es gilt $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n}_{=\|(x_n y_n)\|_{'}} \leq \sum_{n=1}^\infty |x_n| \|(y_n)\|_\infty = \|(y_n)\|_\infty \sum_{n=1}^\infty |x_n| = \|(y_n)\|_\infty \|(x_n)\|_{'} < \infty$.
2. Wir haben $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $a, b > 0$ und $A = p \log a$ sowie $B = q \log b$. Die Funktion $t \mapsto \exp(t)$ ist konvenx, also $\exp(\frac{1}{p} A + \frac{1}{q} B) \leq \frac{1}{p} \exp(A) + \frac{1}{q} \exp(B)$. Somit

$$ab = \exp(\underbrace{\log a}_{=\frac{1}{p}A} + \underbrace{\log b}_{=\frac{1}{q}B}) \leq \frac{1}{p} \exp(\underbrace{p \log a}_{A}) + \frac{1}{q} \exp(\underbrace{q \log b}_{B}) = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Wir haben für $(x_n) \in l^p, (y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p = 1 = \|(y_n)\|_q$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n||y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{p}|x_n|^p + \frac{1}{q}|y_n|^q) = \frac{1}{p} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1}$$

Sind $(x_n) \in l^p$, $(y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p \neq 0$ und $\|(y_n)\|_q \neq 0$, so ist mit (1)

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|}_{=\|(x_n y_n)\|} = \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|x_m|}{\|(x_n)\|_p} \cdot \frac{|y_m|}{\|(y_n)\|_q} \leq \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q \cdot 1.$$

Sind $(x_n) \in l^p$ und $(y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p = 0$ oder $\|(y_n)\|_q = 0$, so ist $(x_n y_n) \in l^1$ und $\|(x_n y_n)\|_{'} = 0$.

□

Theorem 4. *Minkowskische Ungleichung. Sei $1 \leq p < \infty$. Für $(x_n), (y_n) \in l^p$ gilt $\|(x_n + y_n)\|_p \leq \|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p$.*

○

Beweis. Für $p = 1$ erhalten wir die Ungleichung direkt. Sei $p > 1$ und $q = \frac{p}{q-1}$. Weiterhin seien $(x_n), (y_n) \in l^p$. Nach Satz 2 ist $(x_n + y_n) \in l^p$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n + y_n|^{p-1})^q$ konvergent[1]. Somit ist $(|x_n + y_n|^{p-1}) \in l^q$. Nach Satz 3 ist damit $(|x_n||x_n + y_n|^{p-1}) \in l^1$ und $(|y_n||x_n + y_n|^{p-1}) \in l^1$ und wir erhalten $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n||x_n + y_n|^{p-1} = \|(|x_n||x_n + y_n|^{p-1})\|_1 \leq \|(x_n)\|_p \|(|x_n + y_n|^{p-1})\|_q = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n + y_n|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|(x_n)\|_p \, (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1}$. Also $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n||x_n + y_n|^{p-1} \leq \|(x_y)\|_p \, (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1}$. Somit $\|(x_n + y_n)\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|x_n + y_n|^p}_{=|x_n+y_n| \cdot |x_n+y_n|^{p-1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|) \cdot |x_n + y_n|^{p-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n||x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n||x_n + y_n|^{p-1} \leq \|(x_n)\|_p (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1} + \|(y_n)\|_p (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1} = (\|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p) \|(x_n + y_n)\|_p^{p-1}$. Für $\|(x_n + y_n)\|_p \neq 0$ liefert Divion die Minkowski-Ungleichung. Für $\|(x_n + y_n)\|_p = 0$ ist die Minkowski-Ungleichung trivial.

□

Theorem 5. *Für $1 \leq p < \infty$ ist $(l^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum. Ebenso ist $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.*

○

Beweis. Die Behauptung für l^∞wurde bereits in Beispiel 1 gezeigt. Sei $1 \leq p < \infty$. Nach Satz 2 ist l^p ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für all $(x_n) \in l^p$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\|(\lambda x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|(x_n)\|_p$. Die Dreiecksungleichung gilt für $\|\cdot\|_p$ nach Satz 4. Ist für $(x_n) \in l^p$, $\|(x_n)\|_p = 0$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 0$, also $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt ist $\|\cdot\|_p$ also eine Norm auf l^p.

[1] Nebenrechnung: $(p-1)q = p$.

Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in l^p. Wir verwenden für den Rest des Beweises die Schreibweise von Elementen aus l^p als Funktionen $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{K}$. Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_n(m) - f_k(m)| = (|f_n(m) - f_k(m)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{l=1}^{\infty} |f_n(l) - f_k(l)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f_n - f_k\|_p.$$

Wie schon für l^∞ folgt, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n(m))_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ ist. Somit konvergiert für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n(m))_n$ und wir erhalten eine Funktion $f^* : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ mit $f^*(m) = \lim_{n\to\infty} f_n(m)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall_{n,k>N} : \|f_n - f_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit gilt $\forall_{n,k>N}$ und alle $M \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{m=1}^{M} |f_n(m) - f_k(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f_n - f_k\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $k \to \infty$ erhalten wir $\forall_{n>N}$, $\forall_{M\in\mathbb{N}}$

$$\left(\sum_{m=1}^{M} |f_n(m) - f^*(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also $\forall_{n>N}$

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} |f_n(m) - f^*(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somit $f_n - f^* \in l^p$ für $n > N$, also wegen $f^* = f_n - (f_n - f^*)$ auch $f^* \in l^p$. Desweiteren $\forall_{n>N} : \|f_n - f^*\|_p < \varepsilon$. Also konvergiert (f_n) gegen f^*. Damit ist $(l^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.

□

Example 4.

1. Sei X ein metrischer Raum mit Metrik $d : X \times X \to [0, \infty)$. Wir bezeichnen $C^b(X)$ den Vektorraum der stetigen, beschränkten Funktionen $X \to \mathbb{K}$. $C^b(X)$ ist ein Unterraum von $l^\infty(X)$, also ist $C^b(X)$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein normierter Raum.
   Die Konvergenz in $C^b(X)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ entspricht der gleichmäßigen Konvergenz wie wir sie aus der Analysis kennen.
   Sei (f_n) eine Folge in $C^b(X)$, die gegen ein $f^* \in l^\infty(X)$ konvergiert. Aus der Analysis wissen wir, dass dann f^* stetig, also $f^* \in C^b(X)$ ist. Also ist $C^b(X)$ abgeschlossener Unterraum von $l^\infty(X)$ und $(C^b(X), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.
   Ist der Raum X kompakt, z.B. eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit der euklidschen Metrik, so sind alle stetigen Funktionen $X \to \mathbb{K}$ beschränkt, also $C^b(X) = C(X) = \{f : X \to \mathbb{K} | f \text{ stetig}\}$.

2. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wir bezeichnen mit $C^1([a, b])$ den Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen $[a, b] \to \mathbb{K}$. Es ist $C^1([a, b]) \subset l^\infty([a, b])$.

Der Raum $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Banachraum (siehe 3. Übungsblatt). Wir können auf $C^1([a,b])$ jedoch eine andere Norm definieren und zwar $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Mit dieser Norm versehen ist $C^1([a,b])$ ein Banachraum. Dies folgt aus dem nächsten Beispiel.

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $f : \Omega \to \mathbb{K}$ eine r-mal stetig differenzierbare Funktion so verwenden wir die Multiindexschreibweise $D^\alpha f$ mit $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ für die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}\cdots\partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} f(x_1,...,x_n)$$

der Ordnung $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n \leq r$, $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$.
Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so können wir durch

$$C^r(\overline{\Omega}) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f \text{ ist } r\text{-mal stetig differenzierbar, für alle Multiindizes } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{mit } 0 \leq |\alpha| \leq r \text{ist } D$$

einen Unterraum von $l^\infty(\Omega)$ definieren. Durch

$$\|f\| := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} \|D^\alpha f\|_\infty$$

für $f \in C^r(\overline{\Omega})$ definieren wir eine Norm auf $C^r(\overline{\Omega})$ (siehe 2. Übungsblatt). Der normierte Raum $(C^r(\overline{\Omega}), \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

$\triangle$

1.1 Eigenschaften normierter Räume

Lemma 1. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Es gilt*

1. $\forall_{v,w \in X} : |\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\|$.
2. *Die Abbildung $\|\cdot\| : x \mapsto [0, \infty)$ ist stetig.*
3. *Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen $x \in X$ wenn $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.*

$\blacksquare$

Beweis. Für 1 und 2 siehe erstes Übungsblatt. 3 folgt direkt aus der entsprechenden Eigenschaft für metrische Räume.

$\square$

Theorem 6. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein metrischer Raum.*

1. *Konvergiert die Folge (x_n) in X gegen $x \in X$ und die Folge (y_n) in X gegen $y \in X$, so konvergiert für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ die Folge $(\lambda x_n + \mu y_n)$ gegen $\lambda x + \mu y$.*
2. *Ist U ein Unterraum von X, so ist auch $\overline{U}$ ein Unterraum von X.*

$\circ$

Beweis. 1. Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $\|\lambda x_n + \mu y_n - (\lambda x + \mu y)\| \leq \|\lambda x_n - \lambda x + \mu y_n - \mu y\| \leq |\lambda|\|x_n - x\| + |\mu|\|y_n - y\|$. Mit Lemma 1 (3) folgt dann die Behauptung.

2. Sei $x, y \in \overline{U}$. Dann gibt es Folgen $(x_n), (y_n)$ in U mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$,$\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Sei $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Da U linearer Unterraum von X ist, ist $(\lambda x_n + \mu y_n)$ Folge in U. Nach 1 ist $(\lambda x_n + \mu y_n)$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} \lambda x_n + \mu y_n = \lambda x + \mu y$. Also $\lambda x + \mu y \in \overline{U}$. Da $U \neq \emptyset$ und $U \subset \overline{U}$ ist $\overline{U} \neq \emptyset$. Damit ist $\overline{U}$ Unterraum von X.

$\square$

Definition 4. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ auf X heißen äquivalent, falls es $m, M > 0$ gibt, so dass $\forall_{v\in X} m\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq M\|v\|_a$.

$\square$

Lemma 2. *Die Äquivalenz von Normen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf X.*

$\blacksquare$

Beweis. Siehe 2. Übungsblatt.

$\square$

Theorem 7. *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ Normen auf X. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Die Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ sind äquivalent.*

2. *Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen $x \in X$ bzgl. $\|\cdot\|_a$, wenn sie gegen x bzgl. $\|\cdot\|_b$ konvergiert.*

3. *Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen 0 bzgl. $\|\cdot\|_a$, wenn sie gegen 0 bzgl. $\|\cdot\|_b$ konvergiert.*

$\circ$

Beweis. 1 $\Longrightarrow$ **2:** Sei $m, M, \widetilde{m}, \widetilde{M} > 0$ mit $\forall_{v\in X} : m\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq M\|v\|_a$ und $\forall_{v\in X} : \widetilde{m}\|v\|_b \leq \|v\|_a \leq \widetilde{M}\|v\|_b$ (siehe Lemma 2). Dann gilt für Folge (x_n) in X und $x \in X$ stets $\|x_n - x\|_a \leq \widetilde{M}\|x_n - x\|_b$ und $\|x_n - x\|_b \leq M\|x_n - x\|_a$.

2 $\Longrightarrow$ **3:** 3 ist Sonderfall von 2.

3 $\Longrightarrow$ **1:** Angenommen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ sind nicht äquivalent. Dann gibt es kein $M > 0$ oder kein $\widetilde{M} > 0$ so dass für alle $v \in X$: $\|v\|_b \leq M\|v\|_a$ und $\|v\|_a \leq \widetilde{M}\|v\|_b$.

$\square$

2 Übungsblätter

2.1 Übungsblatt 1

2.1.1 Aufgabe 1.1

Zunächst zeigen wir: $\forall_{x,y\in X}: |\|x\| - \|y\|| \le \|x-y\|$:

$$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \le \|x - y\| + \|y\| - \|y\| = \|x - y\|$$

$$\|y\| - \|x\| = \|y - x + x\| - \|x\| \le \|y - x\| + \|x\| - \|x\| = \|x - y\|$$

Dies impliziert die Ungleichung.

Sei $x \in X$ gegeben und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle $y \in U_\delta(x)$:$|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\| < \delta = \varepsilon$. Damit ist die Abbildung $x \mapsto \|x\|$ stetig.

2.1.2 Aufgabe 1.2

Sei $v \in X$ und $r > 0$. Ist (w_n) Folge in $U_r(v)$, die gegen $w \in X$ konvergiert, so folgt wegen der Stetigkiet von $x \mapsto \|x\|$, dass $\|w - v\| = \lim_{n\to\infty} \|w_n - v\| \le r$. Also $\overline{U_r(v)} \subset \{w \in X : \|w-v\| \le r\}$. Sei $w \in X$ mit $\|w-v\| = r$. Definiere Folge (w_n) durch $w_n = v + (1-\frac{1}{n})(w-v)$. Da $\|w - w_n\| = \|w - v - (1 - \frac{1}{n})(w - v)\| = \|w-w+\frac{w}{n}-v+v-\frac{v}{n}\| = \|\frac{1}{n}(w-v)\| = \frac{1}{n}\|w-v\| = \frac{1}{n}r \to_{n\to\infty} 0$ konvergiert (w_n) gegen w. Weiterhin ist $\|v - w_n\| = \|v - v - (1 - \frac{1}{n})(w - v)\| = (1 - \frac{1}{n})\|w - v\| = (1 - \frac{1}{n})r < r$ also (w_n) Folge in $U_r(v)$. Damit $\{w \in X | \|w - v\| \le r\} \subset \overline{U_r(v)}$ und es folgt die Gleichheit der Mengen. Gegenbeispiel für metrische Räume: Sei $X = \mathbb{Z}$ und $d(v, w) = |v - w|$. X ist mit d ein metrischer Raum und es gilt $\overline{\{w \in X : d(w, 0) < 1\}} = \overline{\{0\}} = \{0\} \ne \{-1, 0, 1\} = \{w \in X : d(w, 0) \le 1\}$.

2.1.3 Aufgabe 1.3

Behauptung: Für $1 < p < q < \infty$ gilt: $l^1 \subset l^p \subset l^q \subset l^\infty$. Beweis: Sei $(x_n) \in l^p$ für $1 \le p < \infty$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ konvergent. Damit konvergiert $(|x_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ und somit (x_n) gegen 0. Also ist (x_n) beschränkt und $(x_n) \in l^\infty$.

Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $p < q$. Da (x_n) gegen 0 konvergiert, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$: $|x_n| < 1$. Damit ist für alle $n > N$: $|x_n|^q < |x_n|^p$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ konvergiert ist nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q$ konvergent und $(x_n) \in l^q$.

Beweis, dass die Inklusionen echt sind: Sei $p \in \mathbb{R}$ mit $1 \le p < \infty$. Die konstante Folge (a_n), $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1$, ist beschränkt, also $(a_n) \in l^\infty$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} |1|^p$ divergent, ist $(a_n) \notin l^p$. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $p < q$. Wähle $\alpha \in (\frac{1}{q}, \frac{1}{p})$. Dann ist $\alpha p < \frac{1}{p}p = 1$ und $\alpha q > \frac{1}{q}q = 1$. Betrachte die Folge $x = \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha p}}$ ist divergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha q}}$ ist konvergent. Damit $x \notin l^p$ und $x \in l^q$.

2.1.4 Aufgabe 1.4

Wir verwenden wieder die Schreibweise von Folgen als Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Wir definieren $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$f_n(m) = \begin{cases} \frac{1}{m} & (m < n) \\ 0 & (m \geq n) \end{cases}$$

(also (0,0,0,...), (1,0,0,0,...), $(1,\frac{1}{2}$,0,0,0,...), ...) und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}, f(m) = \frac{1}{m}$. Es ist (f_n) Folge in d und $f \in c_0 \setminus d$. Da

$$(f_n - f)(m) = \begin{cases} 0 & m < n \\ -\frac{1}{m} & m \geq n \end{cases}$$

folgt $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n}$. Also konvergiert (f_n) in $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ gegen f. Damit ist d nicht abgeschlossen in $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$. Somit ist $(d, \|\cdot\|_\infty)$ nicht vollständig (nach Satz 1).

2.1.5 Aufgabe 2.1

1. Wir überprüfen die drei Normaxiome.

   (a) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in C^r(\overline{\Omega})$. Es gilt $\|\lambda f\| = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n, 0\leq|\alpha|\leq r} \|D^\alpha(\lambda f)\|_\infty = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n, 0\leq|\alpha|\leq r} \|\lambda D^\alpha f\|_\infty = |\lambda| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n, 0\leq|\alpha|\leq r} \|D^\alpha f\|_\infty = |\lambda|\|f\|$.

   (b) Seien $f, g \in C^r(\overline{\Omega})$. Es gilt $\|f+g\| = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n, 0\leq|\alpha|\leq r} \|D^\alpha(f+g)\|_\infty = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n, 0\leq|\alpha|\leq r} \|(D^\alpha f)+(D^\alpha g)\|_\infty \leq \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n, 0\leq|\alpha|\leq r} (\|D^\alpha f\|_\infty + \|D^\alpha g\|_\infty) = \|f\| + \|g\|$.

   (c) Sei $f \in C^r(\overline{\Omega})$. Es sei $\|f\| = 0$. Also $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n, 0\leq|\alpha|\leq r} \|D^\alpha f\|_\infty = 0$. Damit folgt $\|D^0 f\|_\infty = 0$ und somit $\|f\|_\infty = 0$. Da $f \in l^\infty(\Omega)$, folgt für alle $x \in \Omega$ dass $f(x) = 0$.

   (d) Wir zeigen zuerst, dass f auf Ω stetig fortsetzbar ist. Konvergiere (f_m) auf Ω gleichmäßig gegen f, mit (f_m) Folge wie in Aufgabenstellung und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist für alle $x \in \Omega$: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Die Folge $(f_m|_\Omega)_{m\in\mathbb{N}}$ ist konvergent in $(l^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$, also Cauchy-Folge in $(l^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$. Da für alle $k, m \in \mathbb{N}$:

   $$\underbrace{\sup_{x\in\Omega} |f_k(x) - f_m(x)|}_{\|f_k|_\Omega - f_m|_\Omega\|_\infty} = \underbrace{\sup_{x\in\overline{\Omega}} |f_k(x) - f_m(x)|}_{\|f_k - f_m\|_\infty}$$

   ist $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $(l^\infty(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$. Da dieser Raum ein Banachraum ist, gibt es $\widetilde{f} \in l^\infty(\overline{\Omega})$ mit $\lim_{k\to\infty} \|f_k - \widetilde{f}\|_\infty = 0$. Also konvergiert (f_m) gleichmäßig gegen $\widetilde{f}$ und damit ist $\widetilde{f}$ stetig. Da für alle $x \in \Omega$ gilt:

   $$\widetilde{f}(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x).$$

Damit ist f stetig fortsetzbar auf $\overline{\Omega}$. Analog für g_j. Nun zeigen wir die Differenzierbarkeit von f nach x_j: Wir schreiben $f(\_, x_j, \_)$ für $f(x_1, ..., x_j, ..., x_n)$ und $f(\_, x_j + h, \_)$ für $f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, ..., x_n)$. Sei $j \in \{1, ..., n\}$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$. Wähle $r > 0$, so dass $U_r(x) \subset \Omega$ mit $U_r(x)$ bezüglich $\| \cdot \|_2$-Norm auf $\mathbb{R}^n$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es für jedes $h \in (-r, r)$ und $m \in \mathbb{N}$ ein $\zeta_{h,m} \in [-|h|, |h|]$ mit

$$\left| f_m(\_, x_j + h, \_) - f_m(\_, x_j, \_) - h \frac{d}{dx_j} f_m(\_, x_j + \zeta_{h,m}, \_) \right| = 0 \tag{2}$$

$(\zeta_{h,m})_{m \in \mathbb{N}}$ ist Folge in $[-|h|, |h|]$. Durch Übergang zu einer Teilfolge von (f_m) können wir o.B.d.A. annehmen, dass $(\zeta_{h,m})_{m \in \mathbb{N}}$ gegen ein $\zeta_h^* \in [-|h|, |h|]$ konvergiert. Mit der Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{d}{dx_j} f_m(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) - g_j(_, x_j + \zeta_h^*, _) \right| \\
\leq & \left| \frac{d}{dx_j} f_m(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) - g_j(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) \right| \\
& + |g_j(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) - g_j(_, x_j + \zeta_h^*, _)| \\
\leq & \underbrace{\| \frac{d}{dx_j} f_m - g_j \|_\infty}_{\to 0} + \underbrace{|g_j(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) - g_j(_, x_j + \zeta_h^*, _)|}_{\to 0}.
\end{aligned}$$

folgt, dass $\left(\frac{d}{dx_j} f_m(\_, x_j + \zeta_{h,m}, \_) \right)_{m \in \mathbb{N}}$ gegen $g_j(\_, x_j + \zeta_h^*, \_)$ konvergiert. Für $m \to \infty$ folgt aus (2), dass

$$|f(\_, x_j + h, \_) - f_j(\_, x_j, \_) - h g_j(\_, x_j + \zeta_h^*, \_)| = 0.$$

Sei $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in $(-r, r)$ mit $h_k \to 0$ für $k \to \infty$ mit $h_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt mit (2)

$$\begin{aligned}
& \lim_{k \to \infty} \frac{f(_, x_j + h_k, _) - f(_, x_j, _)}{h_k} \\
= & \lim_{k \to \infty} g_j(_, x_j + \underbrace{\zeta_{h_k}^*}_{\to 0 \ (k \to \infty)}, _) \\
= & g_j(_, x_j, _)
\end{aligned}$$

mit $|\zeta_{h_k}^*| \leq |h_k|$ und g_j stetig. Somit ist f nach x_j partiell differenzierbar und $\frac{d}{dx_j} f(x) = g_j(x)$.

2.1.6 Aufgabe 2.3

1. Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < q$. Wähle $\alpha \in (\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$. Dann gilt $\alpha p < 1$ und $\alpha q > 1$. Wir schreiben Elemente aus l^p als Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Wir

definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ durch

$$f_n(m) = \begin{cases} \frac{1}{m^\alpha} & m \leq n, \\ 0 & m > n. \end{cases}$$

Da $f_n \in d$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n \in l^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist die Folge $\left(\|f_n\|_p^p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, da $\|f_n\|_p^p = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^{\alpha p}}$ mit $\alpha p < 1$. Die Folge $\left(\|f_n\|_q^q\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, da $\|f_n\|_q^q = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^{\alpha q}}$ mit $\alpha q > 1$. Also ist die Folge $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und die Folge $(\|f_n\|_q)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. Damit können $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ nicht äquivalent sein, denn sonst gäbe es $M > 0\ \forall_{n\in\mathbb{N}} : \|f_n\|_p \leq M\|f_n\|_q$. (Unter Verwendung von Aufgabe 2.2.) Widerspruch.

2. Sei $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ durch

$$f_n(m) = \begin{cases} 1 & m \leq n, \\ 0 & m > n. \end{cases}$$

Wieder ist für alle $n \in \mathbb{N}$: $f_n \in d \subset l^p$, also (f_n) Folge in l^p. Es ist $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\|f_n\|_p = \left(\sum_{m=1}^n 1^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}.$$

Damit ist $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. Analog zur obigen Aufgabe folgt, dass $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_p$ nicht äquivalent sind.