EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONALANALYSIS

Inhaltsverzeichnis

Organisatorisches 1

1. Normierte Räume 1

1.1. Eigenschaften normierter Räume 7

1.2. Quotientenräume und die Räume L^p 13

2. Übungsblätter 15

2.1. Übungsblatt 1 15

Organisatorisches

Vorlesung: Di 12.15 - 13.45 HS4; Mi 14.15 - 15.45 HS4 15.10.13
Übung: Do 16.00 - 17.30 HS4
Dozent: Christian Lageman <christian.lageman@mathematik.uni-wuerzburg.de>
Sprechstunde: Mi 10.00 - 11.30 Übungsblätter: Abgabe Vorlesung Dienstag
Wuecampus:
Klausur: 5.4.2014, 14:00 HS4
Literatur: D. Werner, Funktionalanalysis, Springer-Verlag 2011 F. Hirzebruch, W. Scharlau, Einführung in die Funktionalanalysis, Sprektrum Akademischer Verlage, 1991 E. Kreyzig, Introduction Functional Analysis with Applications, John Wiley & Songs, 1989 R. Meise, D. Vogt, Einführung in die Funktionalanalysis, Vieweg + Teubner Verlag, 2011
Voraussetzungen: Lineare Algebra I und II; Analysis I und II; Veriefung Analysis; insbesondere metrische Räume, Folgen in metrischen Räumen, offene und abgeschlossene Mengen, Integration im $\mathbb{R}^n$

1. Normierte Räume

Sprechen wir von einem $\mathbb{K}$-Vektorraum, so meinen wir einen $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum, d.h. die entsprechenden Definitionen und Sätze gelten sowohl für reelle als auch für komplexe Vektorräume. Wir verwenden $\mathbb{K}$ als Platzhalter für $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ in den Sätzen und Definitionen.

Definition 1. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir nennen eine Funktion $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ eine *Halbnorm auf* X, falls gilt:

(1) $\forall_{v\in X,\lambda\in\mathbb{K}} : \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
(2) $\forall_{v,w\in X} : \|v+w\| \le \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Gilt zusätzlich noch $\forall v \in X : \|v\| = 0 \implies v = 0$, so nennen wir $\|\cdot\|$ eine *Norm auf* X. Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X, so bezeichnen wir $(X, \|\cdot\|)$ als *normierten Raum*.

Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X induziert durch $d(v, w) = \|v - w\|$ eine Metrik $d : X \times X \to [0, \infty)$ auf X, die wir als kanonische Metrik auf $(X, \|\cdot\|)$ bezeichnen.

Ein normierter Raum ist damit auch ein metrischer Raum. Die Begriffe von offenen und abgeschlossenen Mengen, Konvergenz von Folgen, Cauchy-Folgen, Vollständigkeit, Stetigkeit von Abbildungen ergeben sich für normierte Räume aus den entsprechenden Begriffen für metrische Räume.

Beispiel 1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Folge (v_n) in X heißt konvergent gegen $v^* \in X$ falls gilt:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}} : \|v_n - v^*\| < \varepsilon$$

wobei $\|v_n - v^*\| = d(v_n, v^*)$ mit der kanonischen Metrik d ist.

Für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ notieren wir:

(1) den Abschluss einer Menge $M \subset X$ mit $\overline{M}$,
(2) den Rand einer Menge $M \subset X$ mit ∂M,
(3) das Innere einer Menge $M \subset X$ mit $\operatorname{int} M$,

Aus der entsprechenden Definitionen für metrische Räume ergibt sich: eine Folge (v_n) in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *Cauchy-Folge*, falls gilt

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N} : \|v_n - v_m\| < \varepsilon.$$

Ein metrischer Raum und entsprechend auch ein normierter Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, nennt man *vollständig*.

(1) die offene Kugel um $v \in X$ mit Radius r mit $U_r(v) = \{w \in X : \|v - w\| < r\}$.

Definition 2. Einen vollständigen normierten Raum bezeichnet man als *Banachraum*.

Beispiel 2. zur Verdeutlichung.

(1) Versehen wir $\mathbb{R}^n$ bzw $\mathbb{C}^n$ mit einer Norm $\|\cdot\|$, so ist der normierte Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ bzw. $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Es sei daran erinnert, dass auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind, d.h. sind $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_+$ Normen auf einem endlichen-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum X, so gibt es Konstanten $m, M > 0$ mit $\forall_{v\in X} : m\|v\|_* \leq \|v\|_+ \leq M\|v\|_*$. Die Vollständigkeit im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ ist damit nur für eine Norm nachzuweisen und aus der Analysis bekannt.
(2) Sei M eine nicht-leere Menge. Wir bezeichnen mit $l^\infty(M)$ den $\mathbb{K}$-Vektorraum der beschränkten Funktionen $M \to \mathbb{K}$. Wir definieren auf $l^\infty(M)$ die Norm $\|\cdot\|_\infty$ durch $\|f\|_\infty = \sup_{x\in M} |f(x)|$ für $f \in l^\infty(M)$. Die Norm ist wohldefiniert, da f beschränkt ist. Man bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ auch als die sogenannte *Supremumsnorm*. $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm, denn:
   (a) für $f \in l^\infty(M), \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in M} |\lambda f(x)| = \sup_{x\in M} |\lambda||f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in M} |f(x)| = |\lambda|\|f\|_\infty$.

(b) für $f, g \in l^\infty(M)$ gilt: $\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in M} |(f+g)(x)| = \sup_{x\in M} |f(x)+g(x)| \le \sup_{x\in M} |f(x)| + |g(x)| \le \sup_{x\in M} |f(x)| + \sup_{x\in M} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
(c) für $f \in l^\infty(M)$ gilt: $\|f\|_\infty = 0 \implies \sup_{x\in M} |f(x)| = 0 \implies \forall_{x\in M} : |f(x)| = 0 \implies f \equiv 0$.

$(l^\infty(M), \|\cdot\|_\infty)$ ist also ein normierter Raum. Wir zeigen nun, dass der Raum vollständig ist. Sei dazu (f_n) eine Cauchy-Folge in $l^\infty(M)$. Es gilt also $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N} : \|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Es gilt außerdem $\|f_n - f_m\| = \sup_{x\in M} |f_n(x)-f_m(x)|$. Dies impliziert, dass $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N}\forall_{x\in M} : |f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon$. Insbesondere gilt für alle $x \in M$ daher $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in M}\forall_{n,m>N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, und also ist $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge für jedes $x \in M$. Da $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ vollständig sind, ist für jedes $x \in M$ die Folge $(f_n(x))$ konvergent. Wir erhalten die Funktion $f^* : M \to \mathbb{K}$ durch 16.10.13 $\forall_{x\in M} : f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Wir erhalten eine Funktion $f^* : M \to \mathbb{K}$ mit $\forall_{x\in M} : f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Wir hatten uns überlegt, dass

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N}\forall_{x\in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Damit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{n,m>N}\forall_{x\in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < 1$. (Dies ist äquivalent zu $f_m(x) \in U_1(f_n(x))$.) Also $\forall_{m>N}\forall_{x\in M} : f_m(x) \in U_1(f_{N+1}(x))$. Somit $\forall_{x\in M} : f^*(x) \in U_1(f_{N+1}(x))$. Damit $\forall_{x\in M} : |f_{N+1}(x) - f^*(x)| \le 1$. Da $f_{N+1} \in l^\infty(M)$, also beschränkt ist, muss auch f^* beschränkt sein. Wir erhalten $f^* \in l^\infty(M)$. Wir zeigen nun die Konvergenz von (f_n) gegen f^*. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es sein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall_{n,m>N}\forall_{x\in M} : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Also $\forall_{x\in M}\forall_{n>N}\forall_{m>N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da es zu jedem $x \in M$ und $n > N$ ein $m(x, n) \in \mathbb{N}$,$m(x, n) > N$ gibt mit

$$|f_{m(x,n)}(x) - f^*(x)| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} - |f_n(x) - f_{m(x,n)}(x)|}_{>\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{3}=\frac{1}{6}\varepsilon}.$$

folgt

$$\forall_{x\in M}\forall_{n>N} : \underbrace{|f_n(x) - f_{m(x,n)}(x)| + |f_{m(x,n)}(x) - f^*(x)}_{|f_n(x)-f^*(x)|\le} < \frac{\varepsilon}{2} - |f_n(x) - f_{m(x,n)}(x)| + |f_n(x) - f_{m(x,n)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also $\forall_{n>N}\forall_{x\in M} : |f_n(x) - f^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit $\forall_{n>N} : \|f_n - f^*\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon$. Damit konvergiert (f_n) gegen f^*. Somit ist $(l^\infty(M), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Theorem 1. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $U \subset X$ ein Unterraum von X.*

Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und U eine abgeschlossene Teilmenge von X, so ist $(U, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

Ist U vollständig, so ist U eine abgeschlossene Teilmenge von X.

Beweis. Der Beweis gliedert sich in zwei Teile. □

(1) Sei (u_n) eine Cauchy-Folge in $(U, \|\cdot\|)$. Dann ist (u_n) eine Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|)$. Also konvergiert (u_n) gegen ein $u^* \in X$. Damit ist $u^* \in \overline{U}$, also $u^* \in U$. Somit ist U vollständig.

(2) Sei U vollständig. Ist $u^* \in \overline{U} \setminus U$, so gibt es Folge (u_n) in U die gegen u^* konvergiert. Diese Folge ist eine Cauchy-Folge in U und konvergiert somit gegen einen Grenzwert $u^{**} \in U$. Wegen der Eindeutigkeit von Grenzwerten folgt $u^* = u^{**} \in U$. Also $\overline{U} \setminus U = \emptyset$ und U abgeschlossen.

Beispiel 3. Wir verwenden die Notation $l^\infty = l^\infty(\mathbb{N})$. Da eine Folge in $\mathbb{K}$ eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$ ist, ist l^∞ also der Raum aller beschränkten Folgen in $\mathbb{K}$. Wir definieren die folgenden Unterräume von l^∞: $c = \{(x_n)|x_n \in \mathbb{K}, (x_n) \text{ konvergent }\}$, $c_0 = \{(x_n)|x_n \in \mathbb{K}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$, $d = \{(x_n)|x_n \in \mathbb{K}, x_n \text{bis auf endlich viele Folgenglieder gleich } 0\}$. Da die konvergente Folge in $\mathbb{K}$ in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ beschränkt ist, folgt $d \subset c_0 \subset c \subset l^\infty$. Sei $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm auf l^∞. Es sind $(d, \|\cdot\|_\infty)$, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, $(c, \|\cdot\|_\infty)$ normierte Räume. Welche dieser Räume sind Banachräume? Mit Satz 1 reicht es zu zeigen, dass der entsprechende Raum abgeschlossen in l^∞ ist.

Sei (f_n) eine Folge in c, die konvergent gegen ein $f^* \in l^\infty$ ist. Um Doppelindizes zu vermeiden, verwenden wir die Darstellung von Folgen als Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Da (f_n) eine Folge in c ist, können wir durch $x_n = \lim_{m\to\infty} f_n(m)$ eine Folge (x_n) in $\mathbb{K}$ definieren. Es gilt $|x_n - x_l| \le \sup_{m\in\mathbb{N}} |f_n(m) - f_l(m)| = \|f_n - f_l\|_\infty$. Da (f_n) eine Cauchy-Folge ist, ist durch diese Abschätzung die Folge (x_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Also konvergiert (x_n) gegen ein $x^* \in \mathbb{K}$. Wir wollen nun zeigen, dass f^* gegen x^* konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|f^* - f_N\| < \frac{\varepsilon}{3}$ und $|x_N - x^*| < \frac{\varepsilon}{3}$. Wähle $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > M$ gilt $|f_N(m) - x_N| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann gilt für alle $m > M$

$$|f^*(m)-x^*| \le \underbrace{|f^*(m) - f_N(m)}_{\le\|f^*-f_N\|_\infty} + |\underbrace{f_N(m) - x_N}_{<\frac{\varepsilon}{3}}| + |\underbrace{x_N - x^*}_{<\frac{\varepsilon}{3}}| < \underbrace{\|f^* - f_N\|_\infty}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Also ist f^*konvergente Folge und $f^* \in c$. Damit ist c abgeschlossen und nach Satz 1 ein Banachraum.

Sei (f_n) eine Folge in c_0 die konvergent gegen ein $f^* \in l^\infty$ ist. Wiederholen wir das obige Argument, so erhalten wir zusätzlich dass (x_n) kontant 0 ist. Damit ist $x^* = 0$ und $f^* \in c_0$. Somit ist c_0 abgeschlossen und nach Satz 1 ein Banachraum. Der Raum $(d, \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Banachraum.

Wir definieren nun weitere Folgenräume.

Definition 3. Für $p \in \mathbb{R}$ mit $1 \le p < \infty$ setzen wir $l^p = \{(x_n)|x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}$ und $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ für $(x_n) \in l^p$. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass $(l^p, \|\cdot\|_p)$ Banachräume sind.

22.10.13

Theorem 2. *Für $1 \le p < \infty$ ist l^p versehen mit der Addition und Skalarmultiplikation von Folgen ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

Beweis. Offensichtlich ist die konstante Folge (a_n) für alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n = 0$ in l^p enthalten. Desweiteren ist für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $(x_n) \in l^p$ auch $(\lambda x_n) \in l^p$, da $\sum_{n=1}^\infty |\lambda x_n|^p = |\lambda|^p \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ konvergiert. Schließlich, sind $(x_n), (y_n) \in l^p$, so gilt $\sum_{n=1}^\infty |x_n + y_n|^p \le \sum_{n=1}^\infty (|x_n|+|y_n|)^p \le \sum_{n=1}^\infty (2\max\{|x_n|, |y_n|\})^p = 2^p \sum_{n=1}^\infty (\max\{|x_n|, |y_n|\})^p \le 2^p \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p + |y_n|^p = 2^p (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p + \sum_{n=1}^\infty |y_n|^p) < \infty$. Also $(x_n + y_n) \in l^p$. $\square$

Theorem 3. *Holdesche Ungleichung*
Sind $(x_n) \in l'$ *und* $(y_n) \in l^\infty$*, so ist* $(x_n y_n) \in l'$ *und* $\|(x_n y_n)\|_{'} \leq \|(x_n)\|_{'} \|(y_n)\|_\infty$.
Sei $1 < p < \infty$ *und* $q = \frac{p}{p-1}$. *Sind* $(x_n) \in l^p$ *und* $(y_n) \in l^q$*, so ist* $(x_n y_n) \in l'$ *und* $\|(x_n y_n)\|_{'} \leq \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q$.

Beweis. Der Beweis besteht aus zwei Teilen.

(1) Es gilt $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n}_{=\|(x_n y_n)\|_{'}} \leq \sum_{n=1}^\infty |x_n| \|(y_n)\|_\infty = \|(y_n)\|_\infty \sum_{n=1}^\infty |x_n| = \|(y_n)\|_\infty \|(x_n)\|_{'} < \infty$.

(2) Wir haben $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $a, b > 0$ und $A = p \log a$ sowie $B = q \log b$. Die Funktion $t \mapsto \exp(t)$ ist konvenx, also $\exp(\frac{1}{p}A + \frac{1}{q}B) \leq \frac{1}{p}\exp(A) + \frac{1}{q}\exp(B)$. Somit

$$ab = \exp(\underbrace{\log a}_{=\frac{1}{p}A} + \underbrace{\log b}_{=\frac{1}{q}B}) \leq \frac{1}{p}\exp(\underbrace{p \log a}_{A}) + \frac{1}{q}\exp(\underbrace{q \log b}_{B}) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Wir haben für $(x_n) \in l^p, (y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p = 1 = \|(y_n)\|_q$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n||y_n| \leq \sum_{n=1}^\infty (\frac{1}{p}|x_n|^p + \frac{1}{q}|y_n|^q) = \frac{1}{p}\underbrace{\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p}_{=1} + \frac{1}{q}\underbrace{\sum_{n=1}^\infty |y_n|^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.1}$$

Sind $(x_n) \in l^p$, $(y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p \neq 0$ und $\|(y_n)\|_q \neq 0$, so ist mit (1.1)

$$\underbrace{\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n|}_{=\|(x_n y_n)\|} = \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q \sum_{m=1}^\infty \frac{|x_m|}{\|(x_n)\|_p} \cdot \frac{|y_m|}{\|(y_n)\|_q} \leq \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q \cdot 1.$$

Sind $(x_n) \in l^p$ und $(y_n) \in l^q$ mit $\|(x_n)\|_p = 0$ oder $\|(y_n)\|_q = 0$, so ist $(x_n y_n) \in l^1$ und $\|(x_n y_n)\|_{'} = 0$.

□

Theorem 4. *Minkowskische Ungleichung. Sei* $1 \leq p < \infty$. *Für* $(x_n), (y_n) \in l^p$ *gilt* $\|(x_n + y_n)\|_p \leq \|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p$.

Beweis. Für $p = 1$ erhalten wir die Ungleichung direkt. Sei $p > 1$ und $q = \frac{p}{q-1}$. Weiterhin seien $(x_n), (y_n) \in l^p$. Nach Satz 2 ist $(x_n + y_n) \in l^p$ und $\sum_{n=1}^\infty |x_n + y_n|^p = \sum_{n=1}^\infty (|x_n + y_n|^{p-1})^q$ konvergent[1]. Somit ist $(|x_n + y_n|^{p-1}) \in l^q$. Nach Satz 3 ist damit $(|x_n||x_n + y_n|^{p-1}) \in l^1$ und $(|y_n||x_n + y_n|^{p-1}) \in l^1$ und wir erhalten $\sum_{n=1}^\infty |x_n||x_n + y_n|^{p-1} = \|(|x_n||x_n + y_n|^{p-1})\|_1 \leq \|(x_n)\|_p \|(|x_n + y_n|^{p-1})\|_q = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{n=1}^\infty (|x_n + y_n|^{p-1})^q$ $\|(x_n)\|_p (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1}$. Also $\sum_{n=1}^\infty |y_n||x_n + y_n|^{p-1} \leq \|(x_y)\|_p (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1}$. Somit $\|(x_n + y_n)\|_p^p = \sum_{n=1}^\infty \underbrace{|x_n + y_n|^p}_{=|x_n + y_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1}} \leq \sum_{n=1}^\infty (|x_n| + |y_n|) \cdot |x_n + y_n|^{p-1} \leq$ $\sum_{n=1}^\infty |x_n||x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^\infty |y_n||x_n + y_n|^{p-1} \leq \|(x_n)\|_p (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1} + \|(y_n)\|_p (\|(x_n + y_n)\|_p)^{p-1} = (\|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p) \|(x_n + y_n)\|_p^{p-1}$. Für $\|(x_n + y_n)\|_p \neq 0$

[1] Nebenrechnung: $(p-1)q = p$.

liefert Divion die Minkowski-Ungleichung. Für $\|(x_n + y_n)\|_p = 0$ ist die Minkowski-Ungleichung trivial. □

Theorem 5. *Für $1 \leq p < \infty$ ist $(l^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum. Ebenso ist $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.*

Beweis. Die Behauptung für l^∞wurde bereits in Beispiel 1 gezeigt. Sei $1 \leq p < \infty$. Nach Satz 2 ist l^p ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für all $(x_n) \in l^p$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\|(\lambda x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |\lambda x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|(x_n)\|_p$. Die Dreiecksungleichung gilt für $\|\cdot\|_p$ nach Satz 4. Ist für $(x_n) \in l^p$, $\|(x_n)\|_p = 0$, so ist $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p = 0$, also $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt ist $\|\cdot\|_p$ also eine Norm auf l^p.

Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in l^p. Wir verwenden für den Rest des Beweises die Schreibweise von Elementen aus l^p als Funktionen $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{K}$. Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_n(m) - f_k(m)| = (|f_n(m) - f_k(m)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{l=1}^\infty |f_n(l) - f_k(l)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f_n - f_k\|_p.$$

Wie schon für l^∞ folgt, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n(m))_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ ist. Somit konvergiert für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n(m))_n$ und wir erhalten eine Funktion $f^* : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ mit $f^*(m) = \lim_{n\to\infty} f_n(m)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall_{n,k>N} : \|f_n - f_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit gilt $\forall_{n,k>N}$ und alle $M \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{m=1}^M |f_n(m) - f_k(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f_n - f_k\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $k \to \infty$ erhalten wir $\forall_{n>N}$, $\forall_{M\in\mathbb{N}}$

$$\left(\sum_{m=1}^M |f_n(m) - f^*(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also $\forall_{n>N}$

$$\left(\sum_{m=1}^\infty |f_n(m) - f^*(m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somit $f_n - f^* \in l^p$ für $n > N$, also wegen $f^* = f_n - (f_n - f^*)$ auch $f^* \in l^p$. Desweiteren $\forall_{n>N} : \|f_n - f^*\|_p < \varepsilon$. Also konvergiert (f_n) gegen f^*. Damit ist $(l^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum. □

Beispiel 4. zur Verdeutlichung.

(1) Sei X ein metrischer Raum mit Metrik $d : X \times X \to [0, \infty)$. Wir bezeichnen $C^b(X)$ den Vektorraum der stetigen, beschränkten Funktionen $X \to \mathbb{K}$. $C^b(X)$ ist ein Unterraum von $l^\infty(X)$, also ist $C^b(X)$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein normierter Raum.
Die Konvergenz in $C^b(X)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ entspricht der gleichmäßigen Konvergenz wie wir sie aus der Analysis kennen.
Sei (f_n) eine Folge in $C^b(X)$, die gegen ein $f^* \in l^\infty(X)$ konvergiert. Aus der Analysis wissen wir, dass dann f^* stetig, also $f^* \in C^b(X)$ ist. Also ist $C^b(X)$ abgeschlossener Unterraum von $l^\infty(X)$ und $(C^b(X), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.
Ist der Raum X kompakt, z.B. eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit der

euklidschen Metrik, so sind alle stetigen Funktionen $X \to \mathbb{K}$ beschränkt, also $C^b(X) = C(X) = \{f : X \to \mathbb{K} | f \text{ stetig}\}$.

(2) Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wir bezeichnen mit $C^1([a,b])$ den Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen $[a,b] \to \mathbb{K}$. Es ist $C^1([a,b]) \subset l^\infty([a,b])$. Der Raum $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Banachraum (siehe 3. Übungsblatt). Wir können auf $C^1([a,b])$ jedoch eine andere Norm definieren und zwar $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Mit dieser Norm versehen ist $C^1([a,b])$ ein Banachraum. Dies folgt aus dem nächsten Beispiel.

(3) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $f : \Omega \to \mathbb{K}$ eine r-mal stetig differenzierbare Funktion so verwenden wir die Multiindexschreibweise $D^\alpha f$ mit $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ für die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}\cdots\partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} f(x_1, ..., x_n)$$

der Ordnung $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n \leq r$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.
Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so können wir durch

$$C^r(\overline{\Omega}) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f \text{ ist } r\text{-mal stetig differenzierbar, für alle Multiindizes } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{mit } 0 \leq |\alpha| \leq r \text{ist } D^\alpha f \text{auf }$$

einen Unterraum von $l^\infty(\Omega)$ definieren. Durch

$$\|f\| := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq r} \|D^\alpha f\|_\infty$$

für $f \in C^r(\overline{\Omega})$ definieren wir eine Norm auf $C^r(\overline{\Omega})$ (siehe 2. Übungsblatt). Der normierte Raum $(C^r(\overline{\Omega}), \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

1.1. **Eigenschaften normierter Räume.**

Lemma 1. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Es gilt*

(1) $\forall_{v,w \in X} : |\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\|$.
(2) *Die Abbildung $\|\cdot\| : x \mapsto [0, \infty)$ ist stetig.*
(3) *Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen $x \in X$ wenn $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.*

Beweis. Für 1 und 2 siehe erstes Übungsblatt. 3 folgt direkt aus der entsprechenden Eigenschaft für metrische Räume. □

Theorem 6. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein metrischer Raum.*

(1) Konvergiert die Folge (x_n) in X gegen $x \in X$ und die Folge (y_n) in X gegen $y \in X$, so konvergiert für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ die Folge $(\lambda x_n + \mu y_n)$ gegen $\lambda x + \mu y$.
(2) Ist U ein Unterraum von X, so ist auch $\overline{U}$ ein Unterraum von X.

Beweis. In zwei Teilen.

(1) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $\|\lambda x_n + \mu y_n - (\lambda x + \mu y)\| \leq \|\lambda x_n - \lambda x + \mu y_n - \mu y\| \leq |\lambda| \|x_n - x\| + |\mu| \|y_n - y\|$. Mit Lemma 1 (3) folgt dann die Behauptung.
(2) Sei $x, y \in \overline{U}$. Dann gibt es Folgen $(x_n), (y_n)$ in U mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$,$\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Sei $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Da U linearer Unterraum von X ist, ist $(\lambda x_n + \mu y_n)$ Folge in U. Nach 1 ist $(\lambda x_n + \mu y_n)$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} \lambda x_n + \mu y_n = \lambda x + \mu y$. Also $\lambda x + \mu y \in \overline{U}$. Da $U \neq \emptyset$ und $\underline{U \subset \overline{U}}$ ist $\overline{U} \neq \emptyset$. Damit ist $\overline{U}$ Unterraum von X.

□

Definition 4. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ auf X heißen äquivalent, falls es $m, M > 0$ gibt, so dass $\forall_{v\in X} m\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq M\|v\|_a$.

Lemma 2. *Die Äquivalenz von Normen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf X.*

Beweis. Siehe 2. Übungsblatt. □

Theorem 7. *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ Normen auf X. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Die Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ sind äquivalent.*
(2) *Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen $x \in X$ bzgl. $\|\cdot\|_a$, wenn sie gegen x bzgl. $\|\cdot\|_b$ konvergiert.*
(3) *Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen 0 bzgl. $\|\cdot\|_a$, wenn sie gegen 0 bzgl. $\|\cdot\|_b$ konvergiert.*

Beweis. $1 \implies 2$: Sei $m, M, \widetilde{m}, \widetilde{M} > 0$ mit $\forall_{v\in X} : m\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq M\|v\|_a$ und $\forall_{v\in X} : \widetilde{m}\|v\|_b \leq \|v\|_a \leq \widetilde{M}\|v\|_b$ (siehe Lemma 2). Dann gilt für Folge (x_n) in X und $x \in X$ stets $\|x_n - x\|_a \leq \widetilde{M}\|x_n - x\|_b$ und $\|x_n - x\|_b \leq M\|x_n - x\|_a$.

$2 \implies 3$: 3 ist Sonderfall von 2.

$3 \implies 1$: Angenommen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ sind nicht äquivalent. Dann gibt es kein $M > 0$ oder kein $\widetilde{M} > 0$ so dass für alle $v \in X$: $\|v\|_b \leq M\|v\|_a$ und $\|v\|_a \leq \widetilde{M}\|v\|_b$. Damit gibt es eine Folge (v_n) in X so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $v_n \neq 0$ und $\left(\frac{\|v_n\|_b}{\|v_n\|_a}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt. Damit gibt es eine Teilfolge $(v_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ von (v_n), so dass $\left(\frac{\|v_{n_m}\|_a}{\|v_{n_m}\|_b}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Also konvergiert $\left(\|\frac{1}{\|v_{n_m}\|_b} v_{n_m}\|_a\right)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen 0. Damit ist $\left(\frac{1}{\|v_{n_m}\|_b} v_{n_m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $0 \in X$ bezüglich $\|\cdot\|_a$. Da für alle $m \in \mathbb{N}$ jedoch gilt 29.10.13

$$\|\frac{v_{n_m}}{\|v_{n_m}\|_b}\|_b = \frac{\|v_{n_m}\|_b}{\|v_{n_m}\|_b} = 1,$$

ist $\left(\frac{1}{\|v_{n_m}\|_b} v_{n_m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent gegen $0 \in X$ bezüglich $\|\cdot\|_b$. □

Theorem 8. *Ist X ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, so sind auf X alle Normen äquivalent.*

Beweis. O.B.d.A. ist $X = \mathbb{K}^n$. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{K}^n$. Bekanntlich ist $\|(x_1, ..., x_n)\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ auch eine Norm auf dem $\mathbb{K}^n$. Sei $\{e_1, ..., e_n\}$ die Standardbasis des $\mathbb{K}^n$. Für $x = (x_1, ..., x_n)$ gilt (mit der Hölderschen Ungleichung)

$$\|x\| = \|\sum_{j=1}^n x_j e_j\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \|e_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{M} = M \cdot \|x\|_2.$$

Insbesondere gilt für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$ dass $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq M\|x - y\|_2$. Damit ist $\|\cdot\|$ stetig bezüglich $\|\cdot\|_2$. Die Menge $S = \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_2 = 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also nach Heine-Borel kompakt. $\|\cdot\|$ nimmt also auf S ihr Minimum an. Da $0 \notin S$, gilt $m = \min_{x \in S} \|x\| > 0$. Da für alle $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gilt $\frac{x}{\|x\|_2} \in S$ haben wir

$$\|x\|_2 m \leq \|x\|_2 \underbrace{\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|}_{\geq \min_{y \in S} \|y\|} = \|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. □

Im unendlich-dimensionalen gilt eine solche allgemeine Äquivalent nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5. Wir betrachten $C([0,1])$. Auf diesen Raum können wir durch $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(s)|ds$ eine Norm auf $C([0,1])$ definieren. Diese Norm ist nicht äquivalent zur Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, denn sei für $n \in \mathbb{N}$ $f_n : [0,1] \to \mathbb{K}$

$$f_n(s) = \begin{cases} 1 - ns & s \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 & s \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $f_n \in C([0,1])$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Supremumsnorm $\|f_n\|_\infty = 1$. Also konvergiert (f_n) nicht gegen $0 \in C([0,1])$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Es ist aber für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(s)|ds = \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(s)|ds = \int_0^{\frac{1}{n}} (1-ns)ds = [s - \frac{1}{n}s^2]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n} \to_{n\to\infty} 0$. Also konvergiert (f_n) gegen $0 \in C([0,1])$ bezüglich $\|\cdot\|_1$. Nach Satz 7 sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ nicht äquivalent auf $C([0,1])$.

Korollar 1. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein endlich-dimensionaler, normierter Raum. Dann sind beschränkte, abgeschlossene Mengen kompakt.*

Beweis. O.B.d.A. $X = \mathbb{K}^n$. Für die Norm $\|(x_1, ..., x_n)\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ liefert der Satz von Heine-Borel die Behauptung. Da $\|\cdot\|$ zu $\|\cdot\|_2$ äquivalent ist, stimmen sowohl abgeschlossene beschränkte und kompakte Mengen bezüglich der beiden Normen überein. □

Wir werden zeigen, dass die Aussage von Korollar 1 nur im endlich-dimensionalen gilt.

Lemma 3. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum von X mit $U \neq X$. Für jedes $\delta \in (0,1)$ existiert ein $x_\delta \in X$ mit $\|x_\delta\| = 1$ und $\|x_\delta - u\| \geq 1 - \delta$ für alle $u \in U$.*

Beweis. Wähle $x \in X \setminus U$. Setze $d := \inf\{\|x - u\| : u \in U\}$. Ist $d = 0$, so gibt es eine Folge (u_n) in U mit $\|x - u_n\| \to 0$ für $n \to \infty$, also $\lim_{n\to\infty} u_n = x$ und $x \in \overline{U} = U$. Widerspruch. Damit ist $d > 0$. Insbesondere ist $\frac{d}{1-\delta} > d$. Damit gibt es ein $u_\delta \in U$ mit $d \leq \|x - u_\delta\| < \frac{d}{1-\delta}$. Sei

$$x_\delta = \frac{x - u_\delta}{\|x - u_\delta\|}.$$

Klar ist $\|x_\delta\| = 1$. Für $u \in U$ gilt nun

$$\|x_\delta - u\| = \|\frac{x-u_\delta}{\|x-u_\delta\|} - u\| = \frac{1}{\|x-u_\delta\|} \cdot \underbrace{\|x - \overbrace{u_\delta + (\|x-u_\delta\| u))}^{\in U}\|}_{\geq d} \geq \frac{1}{\|x-u_\delta\|} d \geq \frac{1-\delta}{d} d = 1-\delta.$$

□ 30.10.13

Theorem 9. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *X ist endlich-dimensional*
(2) *$\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ist kompakt*
(3) *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge*

Beweis. Gliederung in folgende Teile:

1 $\Longrightarrow$ **2:** Korollar 1.
2 $\Longrightarrow$ **3:** Sei (x_n) beschränkte Folge in X und $r > 0$ mit $\forall_{n\in\mathbb{N}} : \|x_n\| < r$. Dann ist $\left(\frac{1}{r}x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Da B kompakt ist besitzt $\left(\frac{1}{r}x_n\right)$ eine konvergente Teilfolge. Mit Satz 6 besitzt dann auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(r \cdot \frac{1}{r}x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.
3 $\Longrightarrow$ **1:** Beweis per Kontroposition. Sei X unendlich-dimensional. Wir konstruieren eine beschränkte Folge (x_n) in X wie folgt: Wähle $x_1 \in X$ mit $\|x_1\| = 1$. Wähle $\delta \in (0,1)$ fest. Haben wir $x_1, ..., x_n$ mit $\|x_1\| = ... = \|x_n\| = 1$ gewählt, so sei $U_n := \mathrm{span}\{x_1, ..., x_n\}$. Da $\dim U_n \leq n$ ist $(U_n, \|\cdot\|)$ vollständig (Satz 8) und nach Satz 1 ist U_n abgeschlossen in X. Weiterhin $X \neq U_n$. Nach Lemma 3 gibt es x_{n+1} in X mit $\|x_{n+1}\| = 1$ und $\forall_{u\in U_n} : \|x_{n+1} - u\| \geq 1 - \delta$. Wir erhalten Folge (x_n) in X mit $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Per Konstruktion gilt für $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ stets $\|x_n - x_m\| \geq 1 - \delta$. Damit kann es keine Teilfolge von (x_n) geben, die eine Cauchy-Folge ist. Insbesondere hat (x_n) keine konvergente Teilfolge (konvergente Folgen sind nämlich Cauchy-Folgen).

□

Definition 5. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Wir nennen X *separabel*, falls es eine abzählbare Menge $M \subset X$ gibt mit $\overline{M} = X$, d.h. M ist *dicht* in X.

Theorem 10. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Es sind äquivalent:*

(1) *X ist separabel*
(2) *Es gibt abzählbare Teilmenge M von X mit $X = \overline{\mathrm{span} M}$.*

Beweis. In zwei Teilen. □

1 $\Longrightarrow$ **2:** Sei $M \subset X$ abzählbar mit $\overline{M} = X$. Dann ist $X = \overline{M} \subset \overline{\mathrm{span} M} \subset X$ also $\overline{\mathrm{span} M} = X$.
2 $\Longrightarrow$ **1:** Wir betrachten zunächst den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für $B = \{\sum_{j=1}^n q_j v_j | n \in \mathbb{N}, q_j \in \mathbb{Q}, v_j \in M\}$ gilt $\overline{\mathrm{span} B} \subset \overline{B}$ da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist. Somit ist $X = \overline{\mathrm{span} M} \subset \overline{B} \subset X$, also $X = \overline{B}$. Da B abzählbar ist, ist X separabel. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist analog mit $B = \{\sum_{j=1}^n (q_j + ip_j) | n \in \mathbb{N}, p_j, q_j \in \mathbb{Q}, v_j \in M\}$.

Beispiel 6. Zur Verdeutlichung.

(1) $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind separabel bezüglich jeder Norm, denn $\mathbb{Q}^n$ und $\mathbb{Q}^n + i\mathbb{Q}^n$ sind dicht in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$.

(2) $(l^p, \|\cdot\|_p)$ für $1 \leq p < \infty$ ist separabel: Für $e_j : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$,
$$e_j(m) := \begin{cases} 1 & j = m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
ist $d = \operatorname{span}\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$. Ist nun $f \in l^p$ so können wir die Folge (f_n) in d definieren mit
$$f_n(m) = \begin{cases} f(m) & m \leq n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f Grenzwert von (f_n) in $(l^p, \|\cdot\|_p)$, denn
$$\|f - f_n\|_p = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |f(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$
für $n \to \infty$. Somit $l^p = \overline{d}$. Nach Satz 10 ist l^p separabel.

(3) $(C_0, \|\cdot\|_\infty)$ ist separabel (Beweis in der Übung).

(4) $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ist nicht separabel.

Beweis. Für $M \subseteq \mathbb{N}$ definiere $f_M : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ durch
$$f_M(m) = \begin{cases} 1 & m \in M, \\ 0 & m \notin M. \end{cases}$$
Offensichtlich ist $f_M \in l^\infty$ für alle $M \in \mathbb{N}$. Dann ist $W := \{f_M | M \subset \mathbb{N}\}$ überabzählbar. Weiterhin ist für alle $M, N \subset \mathbb{N}$, $M \neq N$ stets $\|f_M - f_N\|_\infty = 1$. Sei $A \subset l^\infty$ abzählbar mit $\overline{A} = l^\infty$. Für $a \in A$ kann $U_{\frac{1}{4}}(a)$ nur höchstens ein Element aus W enthalten, denn
$$x, y \in U_{\frac{1}{4}}(a) \cap W \implies \|x - y\|_\infty \leq \|x - a\|_\infty + \|y - a\|_\infty < \frac{1}{2} \implies x = y$$
Widerspruch zu A abzählbar und $\overline{A} = l^\infty$. □

Wir wollen zeigen, dass für jedes kompakte, nicht-leere Intervall $[a, b]$ der Raum $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ separabel ist.

Theorem 11. *Sei $P([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{K} | \exists_{p \in \mathbb{K}[x]} \forall_{x \in [a,b]} : f(x) = p(x)\}$ der Raum der Polynomfunktionen $[a, b] \to \mathbb{K}$. Dann ist $P([a, b])$ dicht in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $a = 0$, $b = 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $c_n := \left(\int (1 - s^2)^n ds\right)^{-1}$. Wir zeigen zunächst die Abschätzung $c_n \leq e\sqrt{n}$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Es gilt
$$c_n^{-1} = \int_{-1}^{1} (1 - s^2)^n ds \geq \int_{\frac{-1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - s^2)^n ds = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - s^2)^n ds \geq 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - \frac{1}{n})^n ds = 2\sqrt{n}^{-1} (1 - \frac{1}{n})^n.$$

Da $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$ ist für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ stets $(1-\frac{1}{n})^n \geq \frac{1}{2e}$. Also für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ stets $c_n^{-1} \geq \frac{1}{\sqrt{n}e}$. Wir definieren nun für $n \in \mathbb{N}$ Polynome $\varphi_n(x) := C_n(1-x^2)^n$. Es gilt

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [-1,1]$ gilt $\varphi_n(x) \geq 0$.
(2) $\int_{-1}^1 \varphi_n(x)dx = 1$ per Definition von c_n.
(3) Für alle $\delta \in (0,1]$ ist $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[\delta,1]} \varphi_n(x) = 0$, da $\sup_{x\in[\delta,1]} \varphi_n(x) = c_n(1-\delta^2)^n$ und

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(1-\delta^2)^n = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2}(\log n)+n\underbrace{\log(\overbrace{1-\delta^2}^{\in(0,1)})}_{<0}} = 0.$$

Sei $f \in C([0,1])$. Wir betrachten zuerst den Fall $f(0) = f(1) = 0$. Wir definieren die stetige Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ durch

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in [0,1]), \\ 0 & (\text{sonst}). \end{cases}$$

Da f gleichmäßig stetig auf $[0,1]$ ist, ist $\widetilde{f}$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$. Wir definieren nun Funktionen $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, $p_n(x) = \int_{-1}^1 \widetilde{f}(x-s)\varphi_n(s)ds$ für $n \in \mathbb{N}$. p_n ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Polynomfunktion, denn mit Substitution $s = t + x$ ergibt sich

$$\int_{-1}^1 \widetilde{f}(x-s)\varphi_n(s)ds = \int_{\underbrace{-1-x}_{\in[-2,-1]}}^{\overbrace{1-x}^{\in[0,1]}} \widetilde{f}(-t)\varphi_n(t-x)dt = \int_{-1}^0 \widetilde{f}(-t)\varphi_n(t+x)dt,$$

denn $\widetilde{f}|_{\mathbb{R}\setminus[0,1]} \equiv 0$. Dies ergibt dann weiterhin das Polynom

$$= \int_{-1}^0 \widetilde{f}(-t)c_n(1-(t+x)^2)^n dt.$$

Da $\int_{-1}^1 \varphi_n(s)ds = 1$ ist $p_n(x) - \widetilde{f}(x) = \int_{-1}^1 \left(\widetilde{f}(x-s) - \widetilde{f}(x)\right)\varphi_n(s)ds$. Also für alle $\delta \in (0,1)$ und $x \in [-1,1]$ gilt $|p_n(x) - \widetilde{f}(x)| \leq \int_{-1}^1 |\widetilde{f}(x-s) - \widetilde{f}(x)|\varphi_n(s)ds =$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{\left|\widetilde{f}(x-s) - \widetilde{f}(x)\right|}_{\leq \sup_{s\in[-\delta,\delta]} |\widetilde{f}(x-s)-\widetilde{f}(x)|} \varphi_n(s)ds + \int_{-1}^{\delta} \underbrace{\left|\widetilde{f}(x-s) - \widetilde{f}(x)\right|}_{\leq 2\sup_{y\in[0,1]}|f(y)|} \varphi_n(s)ds \\
&\quad + \int_{\delta}^{1} \underbrace{\left|\widetilde{f}(x-s) - \widetilde{f}(x)\right|}_{\leq 2\sup_{y\in[0,1]}|f(y)|} \varphi_n(s)ds \\
&\leq \sup_{s\in[-\delta,\delta]} \left|\widetilde{f}(x-s) - \widetilde{f}(x)\right| \cdot \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(s)ds}_{\leq \int_{-1}^1 \varphi_n(s)ds = 1} + 4 \sup_{y\in[0,1]} |f(y)| \cdot \sup_{s\in[\delta,1]} \varphi_n(s)
\end{aligned}$$

$$\leq \sup_{s\in[-\delta,\delta]} \left|\widetilde{f}(x-s) - \widetilde{f}(x)\right| + 4 \sup_{y\in[0,1]} |f(y)| \sup_{s\in[\delta,1]} \varphi_n(s) \tag{1.2}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta \in (0,1)$ so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sup_{s\in[-\delta,\delta]} \left|\widetilde{f}(x-s) - \widetilde{f}(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dies ist möglich, da $\widetilde{f}$ gleichmäßig stetig ist. Wähle nun $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n > N$

$$\sup_{s\in[\delta,1]} \varphi_n(s) < \frac{1}{4\max\{1, \sup_{y\in[0,1]} |f(y)|\}} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dies ist möglich, da $\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in[\delta,1]} \varphi_n(s) = 0$. Mit (1.2) folgt für alle $n > N$ und $x \in [0,1]$ dass $|p_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, also

$$\|p_n|_{[0,1]} - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Damit wird f durch p_n auf $[0,1]$ approximiert.

Sei $f \in C([0,1])$ mit $f(0) \neq f(1)$ oder $f(0) \neq 0$. Konstruiere obige Folge $(p_n)_n$ für $\widehat{f}(x) = f(x) - (1-x)f(0) - xf(1)$, dann ist $\widehat{f} \in C([0,1])$ und $\widehat{f}(0) = \widehat{f}(1) = 0$. Dann sind $q_n(x) = p_n(x) + (1-x)f(0) + xf(1)$ für $n \in \mathbb{N}$ Polynomfunktionen und $\|f - q_n|_{[0,1]}\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - p_n(x) - (1-x)f(0) - xf(1)| = \|\widehat{f} - p_n|_{[0,1]}\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$. Damit wird $\widehat{f}$ durch q_n auf $[0,1]$ approximiert.

Sei $f \in C([a,b])$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann liefert $\widehat{f}(x) = f(a+(b-a)x)$ ein $\widehat{f} \in C([0,1])$. Konstruiere q_n wie oben. Definiere

$$r_n(x) = q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

Da

$$\frac{(a+(b-a)x) - a}{b-a} = x$$

ist

$$\begin{aligned} \|f - r_n\|_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - r_n(x)| = \sup_{y\in[0,1]} |f(x) - r_n(x)| \\ &= \sup_{y\in[0,1]} |f(a+(b-a)y) - r_n(a+(b-a)y)| = \|\widehat{f} - q_n|_{[0,1]}\|_\infty \to 0 \end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Also wird f durch r_n auf $[a,b]$ approximiert. □

Korollar 2. *Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ist $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ separabel.*

Beweis. Da $P([a,b])$ dicht in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$, ist

$$C([a,b]) = \overline{\operatorname{span}\{t^n : n \in \mathbb{N}\}}$$

Mit Satz 10 folgt die Behauptung. □

1.2. **Quotientenräume und die Räume L^p.** Wir übertragen zunächst die Begriffe der Cauchy-Folge und Vollständigkeit auf $\mathbb{K}$-Vektorräume mit einer Halbnorm.

Definition 6. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Halbnorm $\|\cdot\|$. Wir nennen eine Folge (x_n) in X *Cauchy-Folge*, falls $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N} : \|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Wir nennen X *vollständig*, falls zu jeder Cauchy-Folge in X ein $x \in X$ existiert mit $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Bemerkung 1. Man beachte, dass in einem vollständigen $\mathbb{K}$-Vektorraum X mit Halbnorm $\|\cdot\|$, dass $x^* \in X$ zu einer Cauchy-Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x^*\| = 0$ nicht unbedingt eindeutig ist.

Theorem 12. *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Halbnorm $\|\cdot\|$. Es gilt*

(1) $N = \{x \in X | \|x\| = 0\}$ *ist ein Unterraum von X.*
(2) $\|x + N\| := \|x\|$ *definiert eine Norm auf X/N.*
(3) *Ist X vollständig (in Sinne von Definition 6), so ist X/N mit der Norm $\|x + N\|$ vollständig.*

Beweis. In drei Teilen.

(1) $0 \in N$, da $\|0\| = 0$. Für $x, y \in \mathbb{N}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt $\|\lambda x + \mu y\| \leq |\lambda|\|x\| + |\mu|\|y\| \leq 0$ und damit $\lambda x + \mu y \in N$.
(2) $\|\cdot\|$ ist auf X/N wohldefiniert, denn für $x + N = y + N$ gilt $(x - y) + N = N$, d.h. $x - y \in N$, und daher gilt $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| = 0$. Es folgt $\|x\| = \|y\|$. Überprüfung der Normaxiome:
   (a) Für $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\|\lambda x + N\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| = |\lambda|\|x + N\|$.
   (b) Für $x, y \in X$ gilt $\|(x + N) + (y + N)\| = \|(x + y) + N\| = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| = \|x + N\| + \|y + N\|$.
   (c) Sei $x \in X$ mit $\|x + N\| = 0$. Damit $\|x\| = 0$, also $x \in N$ und $x + N = N$.
   Somit ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X/N.
(3) Sei $(x_k + N)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in X/N. Da $\forall_{k,m\in\mathbb{N}}$: $\|\,(x_k + N) - (x_m + N)\,\| = \|x_k - x_m\|$ ist (x_k) Cauchy-Folge in X. Somit gibt es ein $x \in X$ mit $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0$. Damit ist $\lim_{k\to\infty} \|(x_k + N) - (x + N)\| = \lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0$. Also konvergiert $(x_k + N)$.

□

Theorem 13. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $U \subset X$ ein Unterraum.*

(1) $\|x\|_d := \inf\{\|x - u\| | u \in U\}$ *für $x \in X$ definiert eine Halbnorm.*
(2) *Ist U abgeschlossen, so definiert $\|x + U\|_q := \|x\|_d$ eine Norm auf X/U.*
(3) *Ist X vollständig und U abgeschlossen, so ist $(X/U, \|\cdot\|_q)$ ein Banachraum.*

Beweis. In drei Teilen.

(1) Nachweis der Halbnormaxiome:
   (a) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\|\lambda x\|_d = \inf\{\|\lambda x - u\| | u \in U\} = \inf\{\|\lambda x - \lambda u\| | u \in U\} = |\lambda|\|x\|_d$. Für $\lambda = 0$ ist $\|\lambda x\|_d = \inf\{\|u\| | u \in U\} = 0$.
   (b) Für $x, y \in X$ ist $\|x + y\|_d = \inf\{\|x + y - u\| | u \in U\}$ $=\inf\{\|x + y - u - v\| | u, v \in U\} \leq \inf\{\|x - u\| + \|y - v\| | u \in U, v \in U\} \leq \inf\{\|x - u\| | u \in U\} + \inf\{\|y - v\| | v \in U\} = \|x\|_d + \|y\|_d$.
(2) Sei $N = \{x \in X | \|x\|_d = 0\}$. Es ist $U \subset N$. Sei $x \in N$, also $\|x\|_d = 0$. Dann gibt es eine Folge (u_n) in U mit $\lim_{n\to\infty} \|u_n - x\| = 0$. Damit $x \in \overline{U} = U$. Also $U \subset N \subset U$ und $U = N$. Nach Satz 12 ist $\|\cdot\|_q$ eine Norm auf X/U.
(3) Sei (x_n) Cauchy-Folge in X bezüglich $\|\cdot\|_d$. Wähle Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) mit $\forall_{k\in\mathbb{N}}$: $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|_d < 2^{-k}$. Wir konstruieren Folge (u_k) in U, so dass $\forall_{k\in\mathbb{N}}$: $\|x_{n_k} + u_k - (x_{n_{k+1}} + u_{k+1})\| < 2^{-k}$. Wähle $u_1 = 0$. Haben wir $u_1, ..., u_k$ in U für $k \in \mathbb{N}$ gewählt, so ist $2^{-k} > \|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|_d = \|x_{n_k} + u_k - x_{n_{k+1}}\|_d = \inf\{\|(x_{n_k} + u_k) - (x_{n_{k+1}} + u)\| | u \in U\}$. Somit haben wir $\widetilde{u} \in U$ mit

$2^{-k} > \|(x_{n_k}+u_k)-(x_{n_{k+1}}+\widetilde{u})\|$. Setze $u_{k+1} = \widetilde{u}$. Wir erhalten induktiv die gesuchte Folge (u_k) in U. Wir definieren die Folge (z_k) durch $z_k = x_{n_k}+u_k$. Da für $m, k \in \mathbb{N}$, $m > k$ gilt $\|z_m - z_k\| \leq \sum_{j=k}^{m-1} \|z_j - z_{j+1}\| < \sum_{j=k}^{m-1} 2^{-j}$ und die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}$ konvergiert, ist (z_k) Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|)$. Da X vollständig ist, konvergiert (z_k) gegen $\widetilde{z} \in X$ bezüglich $\|\cdot\|$. Da für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\|\widetilde{z} - x_{n_k}\|_d \leq \underbrace{\|\widetilde{z} - z_k\|_d}_{\leq\|\widetilde{z}-z_k\|} + \overbrace{\| \underbrace{z_k - x_{n_k}}_{x_{n_k}+u_k-x_{n_k}=u_k} \|_d}^{=0}$$

folgt $\|\widetilde{z} - x_{n_k}\|_d \to 0$ für $k \to \infty$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $K \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall_{k>K}$: $\|\widetilde{z} - x_{n_k}\|_d < \frac{\varepsilon}{2}$ und

$$\forall_{m,l>\underbrace{\min\{n_k\in\mathbb{N}|k>K\}}_{n_{k+1}}} : \|x_l - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt $\forall_{m\geq\min\{n_k\in\mathbb{N}|k>K\}} : \|\widetilde{z}-x_m\|_d \leq \|\widetilde{z}-x_{n_{k+1}}\|_d+\|x_{n_{k+1}}-x_m\|_d < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$. Also $\|x_k-\widetilde{z}\|_d \to 0$ für $k \to \infty$. Damit ist X bezüglich $\|\cdot\|_d$ vollständig. Nach Satz 12 ist X/U vollständig.

□

Wir kommen nun zu den L^p-Räumen. Dazu wiederholen wir zunächst ein paar Fakten aus der Integrationstheorie. Ist $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ein nicht-leerer Quader, so definiert man das Volumen $\mathrm{vol}(Q) := \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$. Für $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert man das äußere Lebesgue-Maß durch

$$\lambda^{\alpha}(M) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_j)|Q_j \text{ nicht-leere Quader im } \mathbb{R}^n, M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\}.$$

Wir nennen $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-Messbar, falls

$$\forall_{D\subset\mathbb{R}^n} : \lambda^*(D) = \lambda^*(M \cap D) + \lambda^*((\mathbb{R}^n \setminus M)$$

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, so definieren wir das Lebesgue-Maß von M als $\lambda(M) := \lambda^A(M)$.

2. Übungsblätter

2.1. **Übungsblatt 1.**

2.1.1. *Aufgabe 1.1.* Zunächst zeigen wir: $\forall_{x,y\in X} : |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$:

$$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\| = \|x - y\|$$

$$\|y\| - \|x\| = \|y - x + x\| - \|x\| \leq \|y - x\| + \|x\| - \|x\| = \|x - y\|$$

Dies impliziert die Ungleichung.

Sei $x \in X$ gegeben und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle $y \in U_\delta(x)$:$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \delta = \varepsilon$. Damit ist die Abbildung $x \mapsto \|x\|$ stetig.

2.1.2. *Aufgabe 1.2.* Sei $v \in X$ und $r > 0$. Ist (w_n) Folge in $U_r(v)$, die gegen $w \in X$ konvergiert, so folgt wegen der Stetigkiet von $x \mapsto \|x\|$, dass $\|w - v\| = \lim_{n\to\infty} \|w_n - v\| \leq r$. Also $\overline{U_r(v)} \subset \{w \in X : \|w - v\| \leq r\}$. Sei $w \in X$ mit $\|w - v\| = r$. Definiere Folge (w_n) durch $w_n = v + (1 - \frac{1}{n})(w - v)$. Da $\|w - w_n\| = \|w - v - (1 - \frac{1}{n})(w - v)\| = \|w - w + \frac{w}{n} - v + v - \frac{v}{n}\| = \|\frac{1}{n}(w - v)\| = \frac{1}{n}\|w - v\| = \frac{1}{n}r \to_{n\to\infty} 0$ konvergiert (w_n) gegen w. Weiterhin ist $\|v - w_n\| = \|v - v - (1 - \frac{1}{n})(w - v)\| = (1 - \frac{1}{n})\|w - v\| = (1 - \frac{1}{n})r < r$ also (w_n) Folge in $U_r(v)$. Damit $\{w \in X \| \|w - v\| \leq r\} \subset \overline{U_r(v)}$ und es folgt die Gleichheit der Mengen. Gegenbeispiel für metrische Räume: Sei $X = \mathbb{Z}$ und $d(v, w) = |v - w|$. X ist mit d ein metrischer Raum und es gilt $\overline{\{w \in X : d(w, 0) < 1\}} = \overline{\{0\}} = \{0\} \neq \{-1, 0, 1\} = \{w \in X : d(w, 0) \leq 1\}$.

2.1.3. *Aufgabe 1.3.* Behauptung: Für $1 < p < q < \infty$ gilt: $l^1 \subset l^p \subset l^q \subset l^\infty$. Beweis: Sei $(x_n) \in l^p$ für $1 \leq p < \infty$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ konvergent. Damit konvergiert $(|x_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ und somit (x_n) gegen 0. Also ist (x_n) beschränkt und $(x_n) \in l^\infty$.

Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $p < q$. Da (x_n) gegen 0 konvergiert, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$: $|x_n| < 1$. Damit ist für alle $n > N$: $|x_n|^q < |x_n|^p$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ konvergiert ist nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q$ konvergent und $(x_n) \in l^q$.

Beweis, dass die Inklusionen echt sind: Sei $p \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < \infty$. Die konstante Folge (a_n), $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1$, ist beschränkt, also $(a_n) \in l^\infty$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} |1|^p$ divergent, ist $(a_n) \notin l^p$. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $p < q$. Wähle $\alpha \in (\frac{1}{q}, \frac{1}{p})$. Dann ist $\alpha p < \frac{1}{p}p = 1$ und $\alpha q > \frac{1}{q}q = 1$. Betrachte die Folge $x = \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha p}}$ ist divergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha q}}$ ist konvergent. Damit $x \notin l^p$ und $x \in l^q$.

2.1.4. *Aufgabe 1.4.* Wir verwenden wieder die Schreibweise von Folgen als Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Wir definieren $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$f_n(m) = \begin{cases} \frac{1}{m} & (m < n) \\ 0 & (m \geq n) \end{cases}$$

(also (0,0,0,...), (1,0,0,0,...), (1,$\frac{1}{2}$,0,0,0,...), ...) und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}, f(m) = \frac{1}{m}$. Es ist (f_n) Folge in d und $f \in c_0 \setminus d$. Da

$$(f_n - f)(m) = \begin{cases} 0 & m < n \\ -\frac{1}{m} & m \geq n \end{cases}$$

folgt $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n}$. Also konvergiert (f_n) in $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ gegen f. Damit ist d nicht abgeschlossen in $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$. Somit ist $(d, \|\cdot\|_\infty)$ nicht vollständig (nach Satz 1).

2.1.5. *Aufgabe 2.1.*

(1) Wir überprüfen die drei Normaxiome.
   (a) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in C^r(\overline{\Omega})$. Es gilt $\|\lambda f\| = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n, 0\leq|\alpha|\leq r} \|D^\alpha(\lambda f)\|_\infty = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n, 0\leq|\alpha|\leq r} \|\lambda D^\alpha f\|_\infty = |\lambda| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n, 0\leq|\alpha|\leq r} \|D^\alpha f\|_\infty = |\lambda|\|f\|$.

(b) Seien $f, g \in C^r(\overline{\Omega})$. Es gilt $\|f+g\| = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n, 0\le|\alpha|\le r} \|D^\alpha(f+g)\|_\infty = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n, 0\le|\alpha|\le r} \|(D^\alpha f)+(D^\alpha g)\|_\infty \le \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n, 0\le|\alpha|\le r} (\|D^\alpha f\|_\infty + \|D^\alpha g\|_\infty) = \|f\| + \|g\|$.

(c) Sei $f \in C^r(\overline{\Omega})$. Es sei $\|f\| = 0$. Also $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n, 0\le|\alpha|\le r} \|D^\alpha f\|_\infty = 0$. Damit folgt $\|D^0 f\|_\infty = 0$ und somit $\|f\|_\infty = 0$. Da $f \in l^\infty(\Omega)$, folgt für alle $x \in \Omega$ dass $f(x) = 0$.

(d) Wir zeigen zuerst, dass f auf Ω stetig fortsetzbar ist. Konvergiere (f_m) auf Ω gleichmäßig gegen f, mit (f_m) Folge wie in Aufgabenstellung und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist für alle $x \in \Omega$: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Die Folge $(f_m|_\Omega)_{m\in\mathbb{N}}$ ist konvergent in $(l^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$, also Cauchy-Folge in $(l^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$. Da für alle $k, m \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{\sup_{x\in\Omega} |f_k(x) - f_m(x)|}_{\|f_k|_\Omega - f_m|_\Omega\|_\infty} = \underbrace{\sup_{x\in\overline{\Omega}} |f_k(x) - f_m(x)|}_{\|f_k - f_m\|_\infty}$$

ist $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $(l^\infty(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$. Da dieser Raum ein Banachraum ist, gibt es $\widetilde{f} \in l^\infty(\overline{\Omega})$ mit $\lim_{k\to\infty} \|f_k - \widetilde{f}\|_\infty = 0$. Also konvergiert (f_m) gleichmäßig gegen $\widetilde{f}$ und damit ist $\widetilde{f}$ stetig. Da für alle $x \in \Omega$ gilt:

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x).$$

Damit ist f stetig fortsetzbar auf $\overline{\Omega}$. Analog für g_j. Nun zeigen wir die Differenzierbarkeit von f nach x_j: Wir schreiben $f(\_, x_j, \_)$ für $f(x_1, ..., x_j, ..., x_n)$ und $f(\_, x_j+h, \_)$ für $f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j+h, x_{j+1}, ..., x_n)$. Sei $j \in \{1, ..., n\}$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$. Wähle $r > 0$, so dass $U_r(x) \subset \Omega$ mit $U_r(x)$ bezüglich $\|\cdot\|_2$-Norm auf $\mathbb{R}^n$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es für jedes $h \in (-r, r)$ und $m \in \mathbb{N}$ ein $\zeta_{h,m} \in [-|h|, |h|]$ mit

$$\left| f_m(\_, x_j + h, \_) - f_m(\_, x_j, \_) - h\frac{d}{dx_j} f_m(\_, x_j + \zeta_{h,m}, \_) \right| = 0 \tag{2.1}$$

$(\zeta_{h,m})_{m\in\mathbb{N}}$ ist Folge in $[-|h|, |h|]$. Durch Übergang zu einer Teilfolge von (f_m) können wir o.B.d.A. annehmen, dass $(\zeta_{h,m})_{m\in\mathbb{N}}$ gegen ein $\zeta_h^* \in [-|h|, |h|]$ konvergiert. Mit der Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{d}{dx_j} f_m(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) - g_j(_, x_j + \zeta_h^*, _) \right| \\
\le\ & \left| \frac{d}{dx_j} f_m(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) - g_j(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) \right| \\
&+ |g_j(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) - g_j(_, x_j + \zeta_h^*, _)| \\
\le\ & \underbrace{\left\| \frac{d}{dx_j} f_m - g_j \right\|_\infty}_{\to 0} + \underbrace{|g_j(_, x_j + \zeta_{h,m}, _) - g_j(_, x_j + \zeta_h^*, _)|}_{\to 0}.
\end{aligned}$$

folgt, dass $\left(\frac{d}{dx_j} f_m(\_, x_j + \zeta_{h,m}, \_)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen $g_j(\_, x_j + \zeta_h^*, \_)$ konvergiert. Für $m \to \infty$ folgt aus (2.1), dass

$$|f(\_, x_j + h, \_) - f_j(\_, x_j, \_) - hg_j(\_, x_j + \zeta_h^*, \_)| = 0.$$

Sei $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $(-r,r)$ mit $h_k \to 0$ für $k \to \infty$ mit $h_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt mit (2.1)

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} \frac{f(\_, x_j + h_k, \_) - f(\_, x_j, \_)}{h_k} \\ =\ &\lim_{k\to\infty} g_j(\_, x_j + \underbrace{\zeta^*_{h_k}}_{\to 0\ (k\to\infty)}, \_) \\ =\ &g_j(\_, x_j, \_) \end{aligned}$$

mit $|\zeta^*_{h_k}| \leq |h_k|$ und g_j stetig. Somit ist f nach x_j partiell differenzierbar und $\frac{d}{dx_j} f(x) = g_j(x)$.

2.1.6. *Aufgabe 2.3.*

(1) Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < q$. Wähle $\alpha \in (\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$. Dann gilt $\alpha p < 1$ und $\alpha q > 1$. Wir schreiben Elemente aus l^p als Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ durch

$$f_n(m) = \begin{cases} \frac{1}{m^\alpha} & m \leq n, \\ 0 & m > n. \end{cases}$$

Da $f_n \in d$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n \in l^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist die Folge $\left(\|f_n\|_p^p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, da $\|f_n\|_p^p = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^{\alpha p}}$ mit $\alpha p < 1$. Die Folge $\left(\|f_n\|_q^q\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, da $\|f_n\|_q^q = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^{\alpha q}}$ mit $\alpha q > 1$. Also ist die Folge $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und die Folge $(\|f_n\|_q)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. Damit können $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ nicht äquivalent sein, denn sonst gäbe es $M > 0\ \forall_{n\in\mathbb{N}} : \|f_n\|_p \leq M\|f_n\|_q$. (Unter Verwendung von Aufgabe 2.2.) Widerspruch.

(2) Sei $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ durch

$$f_n(m) = \begin{cases} 1 & m \leq n, \\ 0 & m > n. \end{cases}$$

Wieder ist für alle $n \in \mathbb{N}$: $f_n \in d \subset l^p$, also (f_n) Folge in l^p. Es ist $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\|f_n\|_p = \left(\sum_{m=1}^n 1^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}.$$

Damit ist $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. Analog zur obigen Aufgabe folgt, dass $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_p$ nicht äquivalent sind.