

Übungen zur Kryptographie und Datensicherheit

Andre Löffler

November 13, 2013

1. Übung

1.1 Aufgabe 1

$A \subseteq \mathbb{N}$, μ probabilistische Maschine mit $P(\mu(x) = c_A(x)) = \alpha \geq \frac{3}{4}$. O.B.d.A gibt μ nur Werte aus $0, 1$ zurück. μ' arbeitet wie folgt:

1. simuliere $\mu(x)$ und weise diesen Wert y_1 zu.
2. simuliere $\mu(x)$ und weise diesen Wert y_2 zu.
3. simuliere $\mu(x)$ und weise diesen Wert y_3 zu.
4. simuliere $\mu(x)$ und weise diesen Wert y_4 zu.
5. simuliere $\mu(x)$ und weise diesen Wert y_5 zu.
6. simuliere $\mu(x)$ und weise diesen Wert y_6 zu.
7. simuliere $\mu(x)$ und weise diesen Wert y_7 zu.
8. Falls Mehrzahl der y_i gleich 1 ist, gib 1 zurück.

$$P(\mu'(x) \neq c_A(x)) = P(\text{mind. 4 der } y_i \text{ haben nicht den Wert } c_A(x))$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=4}^7 P(\text{genau } k \text{ der } y_i \neq c_A(x)) \\ &= \binom{7}{4}(1-\alpha)^4\alpha^3 + \binom{7}{5}(1-\alpha)^5\alpha^2 + \binom{7}{6}(1-\alpha)^6\alpha + \binom{7}{7}(1-\alpha)^7 \end{aligned}$$

Nebenüberlegung:

$$\alpha(1-\alpha) = -(\alpha - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}. \quad \alpha \text{ ist im Intervall } [\frac{1}{2}, 1] \text{ monoton fallend:}$$

$$\alpha(1-\alpha) \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}.$$

Schätze damit $1-\alpha \leq \frac{1}{4}$ ab. Damit ist obige Summe $\leq 0,08$.

$$P(\mu'(x) = c_A(x)) = 1 - P(\mu'(x) \neq c_A(x)) \geq 1 - 0,08 \geq \frac{11}{12}$$

1.2 Aufgabe 2

1. Alphabet $\{1, 2\}$ ist endliche, nichtleere Menge. ✓
2.
 - K ist deterministisch, also auch probabilistischer Algorithmus.
 - Legendres Vermutung: zwischen n^2 und $(n+1)^2$ liegt stets eine Primzahl.
 - Angenommen, die Vermutung gilt und wir suchen ab $m = \underbrace{1 \dots 1}_{n+1}$ nach einer Primzahl, könnte es sein, dass wir erst bei $(\sqrt{m} + 1)^2 = m + 2\sqrt{m} + 1$ fündig werden.
 - Testen also, $O(\sqrt{n}) = O(n^{\frac{1}{2}}) = O(2^{\frac{1}{2}n})$ Zahlen
 \Rightarrow nicht klar, ob Polynomialzeit möglich ist.
3. $\varepsilon(e, m)$ liefert $e \cdot \text{dya}^{-1}(m)$ für $m \in \{1, 2\}^*$
 \Rightarrow Polynomialzeit-Algorithmus ✓

4. $D(d, c)$ liefert $\text{dya}(\frac{c}{q})$, wobei q der größte Primfaktor von c ist. \Rightarrow unklar ob im Polynomialzeit möglich, da Faktorisierung nötig.
5. Sei (e, d) ein von $K(1^n)$ genutztes Schlüsselpaar und $m \in \{1, 2\}$
 $\Rightarrow (e, d) = (q, 1)$, wobei q die kleine Primzahl mit $|\text{dya}(q)| > n$
 $\Rightarrow \varepsilon(e, m) = q \cdot \text{dya}^{-1}(m)$

$$D(d, \varepsilon(e, m)) = D(1, q \cdot \text{dya}^{-1}(m)) = \text{dya} \left(\overbrace{\frac{q \cdot \text{dya}^{-1}(m)}{q'}}^c \right), \text{ wobei } q' \text{ der}$$

größte Primfaktor von c ist.

$q = q'$, weil $|m| = n < |\text{dya}(q)|$, q größter Primfaktor von $q \cdot \text{dya}^{-1}(m)$

$\Rightarrow D(d, \varepsilon(e, m)) = \text{dya}(\text{dya}^{-1}(m)) = m \checkmark$

1.3 Hinweise zu Übungsblatt 2

1. Sei p eine Primzahl.
 $\mathbb{F}_p =_{\text{def}} (\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ mit $+_p, \cdot_p$: Addition und Multiplikation modulo p .
 \mathbb{F}_p ist ein endlicher Körper, der (bis auf Isomorphie) einzige endliche Körper mit genau p Elementen.
 Beispiel: \mathbb{F}_2 : 1 ist das Einselement, 0 ist das Nullelement. $5 \cdot 3 = 1$, also ist 3 das inverse Element zu 5.
2. Sei $q = p^n$ mit einer Primzahl p und $n \geq 2$. Ziel: der Körper \mathbb{F}_q mit q Elementen.

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_p[x] &= \text{Menge aller Polynome mit Koeffizienten aus } \mathbb{F}_p \\ &= \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 \mid n \geq 0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}_p\} \\ &= \{(a_n, \dots, a_0) \mid n \geq 0, a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{F}_p\} \end{aligned}$$

Die Multiplikation von Elementen aus $\mathbb{F}_p[x]$ entspricht der Polynommultiplikation.

Beispiel: $\mathbb{F}_2[x]: (x^2 + 1)(x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1 = x^4 + 1$

Definition 1 Ein Polynom $g \in \mathbb{F}_p[x]$ heißt irreduzibel über \mathbb{F}_p
 $\Leftrightarrow_{\text{def}}$ es gibt keine Polynome $p_1, p_2 \in \mathbb{F}_p[x]$ mit $\text{Grad} \geq 1$ mit $g = p_1 \cdot p_2$

Satz 1.1 $x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$ ist irreduzibel über \mathbb{F}_p .

Definition 2 Sei $g \in \mathbb{F}_p[x]$ irreduzibel und vom Grad $k \geq 1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_p[x]/g &=_{\text{def}} \{f \in \mathbb{F}_p[x] \mid \text{Grad von } f < k\} \\ &= \text{Reste bei Polynomdivision durch } g \\ &= \{(a_{k-1}, \dots, a_0) \mid a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{F}_p\} \end{aligned}$$

Satz 1.2 [Addition in F]

Addition der Polynome, wobei die Koeffizienten entsprechend \mathbb{F}_p addiert werden.

Satz 1.3 [Multiplikation in F]

$\underbrace{p_1 \cdot p_2}_{\text{Multiplikation in } \mathbb{F}_p[x]/g} = \text{Rest von } \underbrace{p_1 \cdot p_2}_{\text{Multiplikation in } \mathbb{F}_p[x]} \text{ bei Division durch } g.$

Beispiel: $p = 2$ und $g(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.

Sei $p_1 = x^7 + x^2 + 1$ und $p_2 = x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]/g$.

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= ((x^7 + x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)) \mod g \\ &= (x^9 + x^4 + x^2 + x^7 + x^2 + 1) \mod g \\ &= (x^9 + x^7 + x^4 + 1) \mod g \\ &= ((x^9 + x^7 + x^4 + 1) - x \cdot g) \mod g \\ &= ((x^9 + x^7 + x^4 + 1) - (x^9 + x^5 + x^4 + x^2 + x)) \mod g \\ &= (x^7 + x^5 + x^2 + x + 1) \mod g \\ &= (x^7 + x^5 + x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Satz 1.4 Sei p eine Primzahl, $k \geq 2$ und $g \in \mathbb{F}_p[x]$ irreduzibel und vom Grad k . Dann ist

$$\mathbb{F}_{p^k} = \text{def}(\mathbb{F}_p[x]/g, +, \cdot)$$

der einzige endliche Körper mit p^k Elementen (bis auf Isomorphie).

Beispiel: Sei $g = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$. Die Elemente von $\mathbb{F}_{2^8} = \mathbb{F}_2[x]/g = \{(a_7, \dots, a_0) | a_0, \dots, a_7 \in \{0, 1\}\}$ lassen sich als Bytes interpretieren.

$$\begin{aligned} 0x03 \cdot 0xa1 &= 0b00000011 \cdot 0b10100001 \\ &= (x + 1) \cdot (x^7 + x^5 + 1) \mod g \\ &= (x^8 + x^6 + x + x^7 + x^5 + 1) \mod g \\ &= (x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3) \\ &= 0b11111000 = 0xf8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 161 = 248.$$

2 Übung 2

2.1 Aufgabe 1

1. $(\{0, 1, 2, 3, 4\}, f)$ mit $f(x, y) = (x + y) \bmod 5$ ist eine endliche kommutative Gruppe

- $f : \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$ ist total ✓
- Assoziativität:

$$\begin{aligned} f(f(a, b), c) &= f((a + b) \bmod 5, c) \\ &= ((a + b) \bmod 5 + c) \bmod 5 \\ &= (a + b + c) \bmod 5 = (a + (b + c) \bmod 5) \bmod 5 \\ &= f(a, f(b, c)) \checkmark \end{aligned}$$

- Neutrales Element: $f(x, 0) = (x + 0) \bmod 5 = x$
 $f(0, x) = (0 + x) \bmod 5 = x$
- Inverses Element: Sei $a \in \mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} b &= (-a) \bmod 5 \\ &= (a + (-a) \bmod 5) \bmod 5 \\ &= 0 \bmod 5 = 0 \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: $0 \bmod 5 = 0$ ✓

Angenommen $f(a, b') = 0 = f(a, b)$ mit $b' \in \mathbb{Z}_5$

$$\Rightarrow b' \bmod 5 = b \bmod 5$$

$$\Rightarrow b' = b$$

\Rightarrow genau ein inverses Element.

- Kommutativität:
 $f(a, b) = f(b, a) = (a + b) \bmod 5 = (b + a) \bmod 5 = f(b, a) \checkmark$

2. (\mathbb{Z}_6, f, g) mit $f(x, y) = (x + y) \bmod 6$, $g(x, y) = (x \cdot y) \bmod 6$ ist kein Körper:

Damit (\mathbb{Z}_6, f, g) ein Körper ist, muss $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, g)$ kommutative Gruppe sein.

$$\Rightarrow \forall a \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \exists! b \in \{1, 2, 3, 4, 5\} : [g(a, b) = 1]$$

- $g(2, 1) = 2$
- $g(2, 2) = 4$
- $g(2, 3) = 0$
- $g(2, 4) = 2$
- $g(2, 5) = 4$

$$\Rightarrow 2 \text{ besitzt kein inverses Element in } (\{1, 2, 3, 4, 5\}, g)$$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_6, f, g)$ ist kein Körper.

2.2 Hinweise zu Übungsblatt 3

Monoalphabetische Verschlüsselung (Substitutionschiffre):
 ABCDEFGHJKLMNOPQRSTUVWXYZ
 pfeile und so

$$S = (\Sigma, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$$

- $\Sigma = \{A, \dots, Z\}$
- Schlüssel: $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ Bijektion

$$\begin{aligned} P &= \text{Menge aller Permutationen auf } \Sigma \\ &= \{\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma \mid \pi \text{ bijektiv}\} \end{aligned}$$

- $\mathcal{K}(1^n)$ liefert gleichverteilt Element aus $\{(\pi, \pi) \mid \pi \in P\}$
- $\mathcal{E}(\pi, m_1, m_2, \dots, m_n) = \pi(m_1)\pi(m_2)\dots\pi(m_n)$
- $\mathcal{D} = \pi^{-1}(c_1)\pi^{-1}(c_2)\dots\pi^{-1}(c_n)$

Ist S perfekt sicher?

- Betrachte Klartext der Länge 1
 $P_{\Sigma^1}(a) = \frac{1}{26}$ für alle $a \in \Sigma$
 Sei nun $m \in \Sigma^1$ beliebig.
 $P(E_m) = \frac{1}{26}$ [Wahrscheinlichkeit, das Klartext m gewählt wird.]
 Sei $c \in C_1$ beliebig. [$C_1 = \Sigma$ alle möglichen Chiffretexte der Länge 1]

$$\begin{aligned} P(E_m|E_c) &= P(\mathcal{K}(1) \text{ liefert Permutation } \pi \text{ mit } \pi(m) = c) \\ &= \frac{25!}{26!} = \frac{1}{26} = P(E_m) \end{aligned}$$

$\Rightarrow S$ ist perfekt sicher bezüglich P_{Σ^1}

- Betrachte gleichverteilte Klartexte der Länge 2
 $P_{\Sigma^2}(m) = \frac{1}{26^2}$ für alle $m \in \Sigma^2$ [$|\Sigma^2| = 26^2$]
 Wähle $m = AF \in \Sigma^2$:
 $P(E_m) = \frac{1}{26^2}$
 $C_2 = \Sigma^2$
 Sei $c = ww \in C_2$

$$\begin{aligned} P(E_m|E_c) &= P(\mathcal{K}(11) \text{ liefert Permutation } \pi \text{ mit } \pi(A) = w \text{ und } \pi(F) = w) \\ &= 0 \neq P(E_m) \end{aligned}$$

$\Rightarrow S$ nicht perfekt sicher bezüglich P_{Σ^2}

$\Rightarrow S$ nicht perfekt sicher

3 3. Übung

3.1 Aufgabe 2

a) $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\mathcal{P} = \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$$

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{6^5} \text{ für jedes } x \in \mathcal{M} \text{ wegen } |\mathcal{M}| = 6^5$$

b) $G = \{(a_1, \dots, a_5) \in \mathcal{M} \mid \{a_1, \dots, a_5\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}\}$

$$K = \{(a_1, \dots, a_5) \in \mathcal{M} \mid$$

$$\{1, 2, 3, 4\} \subseteq \{a_1, \dots, a_5\} \vee$$

$$\{2, 3, 4, 5\} \subseteq \{a_1, \dots, a_5\} \vee$$

$$\{3, 4, 5, 6\} \subseteq \{a_1, \dots, a_5\}\}$$

c) $P(G) = P((a_1, \dots, a_5) \mid \{a_1, \dots, a_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\})$
 $+ P(G) = P((a_1, \dots, a_5) \mid \{a_1, \dots, a_5\} = \{2, 3, 4, 5, 6\})$
 $= 2 \cdot \frac{5!}{6^5} = \frac{5}{16^2} \approx 3,1\%$
 $P(K) :$

1. Fall: Alle Würfel sind verschieden, dann gibt es die Möglichkeiten (bis auf Permutation): $\underbrace{1234}_{} 5, \underbrace{1234}_{} 6, 1 \underbrace{3456}_{} , \underbrace{2345}_{} 6$
 $\Rightarrow 4!$ viele Möglichkeiten

2. Fall: Genau eine Zahl kommt doppelt vor: Es gibt die Möglichkeiten:
 $1234, 2345, 3456$

$$\Rightarrow 3 \cdot \underbrace{4}_{\text{doppelte Ziffern}} \cdot \overbrace{\binom{5}{2}}^{\text{doppelte Ziffern}} \cdot \underbrace{3!}_{\text{3 verschiedene Möglichkeiten}}$$

$$\Rightarrow \text{Gesamt: } |K| = 4 \cdot 5! + 3 \cdot 4 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 3! = 4 \cdot 5! + 6!$$

$$\Rightarrow P(K) = \sum_{x \in K} P(x) = \sum_{x \in K} \frac{1}{6^5} = \frac{|K|}{6^5} = \frac{4 \cdot 5! + 6!}{6^5} = \frac{25}{16^2} \approx 15\%$$

4 4. Übung

4.1 Aufgabe 1

a) $S = (\Sigma, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ mit

- (i) $\exists n \geq 1 \exists e \in K_n$ mit $P(E_e) \neq \frac{1}{|K_n|}$
- (ii) $\forall n \geq 1 \forall m \in \Sigma^n \forall c \in C_n \exists! e \in K_n$ mit $E(e, m) = c$.
 $\Sigma = \{0, 1\}$
 $\mathcal{K}(1^n)$ liefert jedes Element aus $\{(e, e) | e \in 0\Sigma^n\}$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^n}$
 $\mathcal{K}(1^n)$ liefert jedes Element aus $\{(e, e) | e \in 1\Sigma^n\}$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^n}$
 $E(e_0 \cdots e_n, m_1 \cdots m_n) := e_0 c_1 \cdots c_n$ mit $c_i = (m_i + e_i) \mod 2$
 $D(e_0 \cdots e_n, c_0 \cdots c_n) := m_1 \cdots m_n$ mit $m_i = (c_i - e_i) \mod 2$
zu (i): $n = 1, |K_n| = 4, P(e_{00}) = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{|K_n|}$
zu (ii): Sei $m = m_1 \cdots m_n$ und $c = c_0 \cdots c_n \in C_n$
Der einzige Schlüssel $e \in K_1$ mit $E(e, m)$ ist: $e = e_0 \cdots e_m$ mit $e_0 = c_0$
und $e_i = (c_i + m_i) \mod 2$ für $i \geq 1$
Zeigen, dass S perfekt sicher ist:
Sei $n \geq 1$ und P_{Σ^n} eine Verteilung auf Σ^n
Sei $m \in \Sigma^n$ und $c = c_0 \cdots c_n \in C_n$
O.B.d.A. $c_0 = 0$, zeigen $P(E_m | E_c) = P(E_m)$
1. Fall: $P(E_m) = 0 : P(E_m | E_c) = P(E_m) = 0$
2. Fall: $P(E_m) > 0$:

- für jedes $q \in \Sigma^n$ gibt es genau ein $e \in \Sigma^{n+1}$, sodass $E(e, q) = c$
Bezeichnen dieses e mit $e_{m,c}$.
Es gilt $e_{m,c} \in 0\Sigma^n$
- Aus $P(E_m) > 0, P_{K_n} = \frac{3}{4} \frac{1}{2^n}$ und $E(e_{m,c}, m) = c$ folgt $P(E_c) > 0$
- $P(E_m | E_c) = \frac{P(E_m)P(E_c | E_m)}{P(E_c)} = \frac{P(E_m)P(e_{m,c} | E_m)}{P(E_c)} = \frac{P(E_m)P(E_c)}{P(E_c)} =$
 $\frac{P(E_m) \frac{3}{4} \frac{1}{2^n}}{P(E_c)} = \frac{P(E_m) \frac{3}{4} \frac{1}{2^n}}{\sum_{q \in \Sigma^n} P(E_q) P(E_{e_{q,c}})} = \frac{P(E_m) \frac{3}{4} \frac{1}{2^n}}{\frac{3}{4} \frac{1}{2^n} \sum_{q \in \Sigma^n} P(E_q)} = P(E_m)$

$\Rightarrow S$ ist perfekt sicher.

b) $S = (\Sigma, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ mit

- (i) $\exists n \geq 1 \exists e \in K_n$ mit $P(E_e) \neq \frac{1}{|K_n|}$
- (ii) $\forall n \geq 1 \forall m \in \Sigma^n \forall c \in C_n \exists e_1, e_2 \in K_n$ mit $e_1 \neq e_2$ und $E(e_1, m) = E(e_2, m) = c$.
 $\Sigma = \{0, 1\}, \mathcal{K}(1^n)$ liefert jedes Element aus Σ^{n+1} gleichverteilt.
 $\mathcal{E}(e_0 \cdots e_n, m_1 \cdots m_n) = c_1 \cdots c_n$ mit $c_i = (e_i + m_i) \mod 2$
 $\mathcal{D}(e_0 \cdots e_n, c_1 \cdots c_n) = m_1 \cdots m_n$ mit $m_i = (e_i + c_i) \mod 2$
Zu (ii): $n = 1, m = 0, c = 0 : e_1 = 10$ und $e_2 = 00$ mit $\mathcal{E}(10, 0) = 0 = \mathcal{E}(00, 0)$.
Zeige, dass S perfekt sicher ist: Sei $n \geq 1, P_{\Sigma^n}$ eine Verteilung über $\Sigma^n, m \in \Sigma^n, c = c_1 \cdots c_n \in C_n$
1. Fall: $E(E_m | E_c) = 0 = E(E_m)$
2. Fall: $E(E_m) > 0$

Zeigen, dass $P(E_m|E_c) = P(E_m)$:

Definiere $e_{0,m,c} = 0e_1 \cdots e_n$ und $e_{1,m,c} = 1e_1 \cdots e_n$

$\Rightarrow e_i = (m_i + c_i) \mod 2$

$$P(E_m|E_c) = \frac{P(E_m)P(E_c|E_m)}{P(E_c)} = \frac{P(E_m)P(E_{e_{0,m,c} \cup E_{e_{1,m,c}}}|P(E_m))}{\sum_{q \in \Sigma^n} P(E_q)P(E_{e_{0,m,c} \cup E_{e_{1,m,c}}})} = \frac{P(E_m) \frac{2}{|\Sigma^n|}}{\frac{2}{|\Sigma^n|} - \sum_{q \in \Sigma^n} P(E_q)} =$$

$P(E_m)$

$\Rightarrow S$ ist perfekt sicher.

c) $S = (\Sigma, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$. Annahme: $|\Sigma| \geq 2$:

zu $n \geq 1$: Wegen $|\Sigma| \geq 2$ finde $m, m' \in \Sigma^n, m \neq m'$.

Ferner gilt: Ausgaben von $\mathcal{E}(e_i, m)$ und $\mathcal{E}(e_i, m')$ stets verschieden, denn

$m = \mathcal{D}(d, \mathcal{E}(e, m)) = \mathcal{D}(d, \mathcal{E}(e, m')) = m'$

Sei P_{Σ^n} gleichverteilt auf Σ^n . Sei c Ausgabe von $\mathcal{E}(e, m')$:

$0 = P(E_m|E_c \cap E_e) < P(E_m|E_e) = P(E_m)$

4.2 Hinweise zu Blatt 5

Der erweiterte Euklidische Algorithmus für 99 und 78:

Ziel: Berechne $ggT(a, b)$

Erweiterter Euklidischer Algorithmus: Berechne $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$

$$99 = 1 \cdot 78 + 21$$

$$78 = 3 \cdot 21 + 15$$

$$21 = 1 \cdot 15 + 6$$

$$15 = 2 \cdot 6 + 3$$

$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

$$\Rightarrow ggT(99, 78) = 3$$

$$3 = 15 - 2 \cdot 6 = 15 - 2 \cdot (21 - 2 \cdot 15) = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 21 = 3 \cdot (78 - 3 \cdot 21) - 2 \cdot 21 =$$

$$3 \cdot 78 - 11 \cdot 21 = 3 \cdot 78 - 11 \cdot (99 - 1 \cdot 78) = 14 \cdot 78 - 11 \cdot 99 \Rightarrow s = -11 \text{ und } t = 14$$

in RSA: $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$

Berechne $d = e^{-1} \mod \varphi(n)$. Wir wissen: $ggT(e, \varphi(n)) = 1$.

Berechne mit euklidischem Algorithmus: $ggT(e, \varphi(n)) = s \cdot \varphi(n) + t \cdot e$

$t \cdot e = 1 - s \cdot \varphi(n) \Rightarrow t \cdot e = 1 \mod \varphi(n) \Rightarrow t$ ist Inverses von $e \mod \varphi(n)$