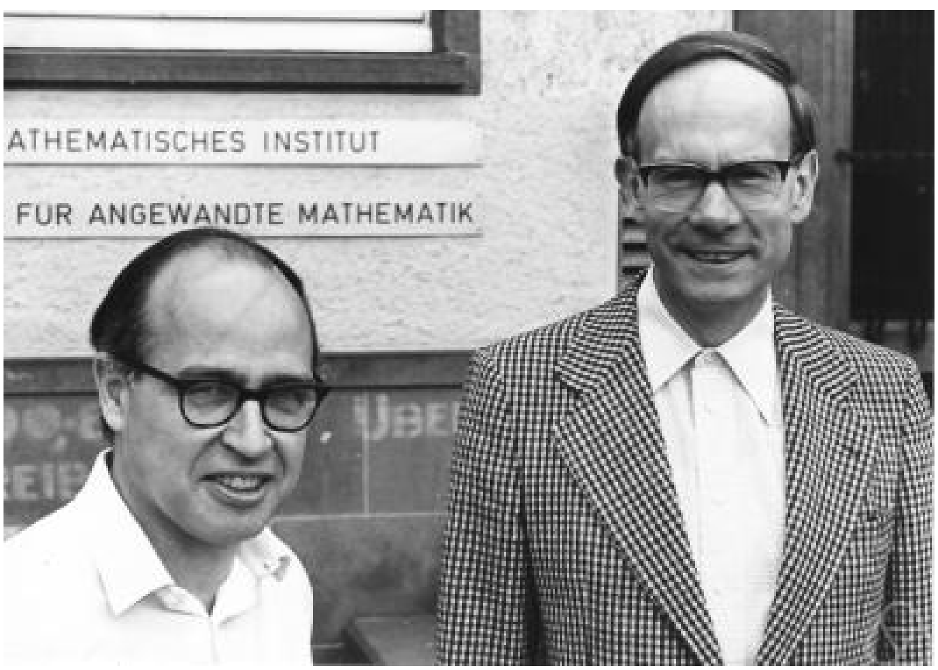
K–théorie topologique et périodicité de Bott

Zoé Chantreuil, Jacques Dubot, Paul Quiñones
TER sous la direction d'Omar Mohsen

« The way I first visualized a K-group was as a group of "classes of objects" of an abelian (or more generally, additive) category, such as coherent sheaves on an algebraic variety, or vector bundles, etc. I would presumably have called this group $C(X)$ (X being a variety or any other kind of "space"), C the initial letter of 'class', but my past in functional analysis may have prevented this, as $C(X)$ designates also the space of continuous functions on X (when X is a topological space). Thus, I reverted to K instead of C, since my mother tongue is German, Class = Klasse (in German), and the sounds corresponding to C and K are the same. »

— Alexander Grothendieck, lettre à Bruce Magurn, 9 février 1985 —



M.Atiyah et F.Hirzebruch, Oberwolfach, 1977

Année universitaire 2024-2025

Table des matières

Introduction

La K-théorie topologique trouve ses racines dans les travaux d'Alexandre Grothendieck à la fin des années 1950. En 1957, dans le contexte de la géométrie algébrique, Grothendieck introduit la notion de groupe de Grothendieck pour formaliser la classification des faisceaux cohérents sur une variété algébrique, dans le but de démontrer le théorème de Grothendieck–Hirzebruch–Riemann–Roch. Cette approche novatrice, qui consiste à associer à une catégorie additive un groupe abélien universel, marque un tournant conceptuel majeur.
Peu après, Michael Atiyah et Friedrich Hirzebruch, inspirés par ces idées, adaptent la construction de Grothendieck au cadre topologique : c'est ainsi que naît la K-théorie topologique.
Presque simultanément et de manière indépendante, R.Bott démontre que la suite des groupes d'homotopie de certains groupes classiques est périodique. Par exemple, on a les isomorphismes $\pi_{n+2}\mathrm{U}(\infty) \simeq \pi_n\mathrm{U}(\infty)$ pour tout entier naturel n, où $\mathrm{U}(\infty)$ est la limite inductive des $\mathrm{U}(n)$, i.e. l'union des $\mathrm{U}(n)$ où $\mathrm{U}(n)$ s'injecte naturellement dans $\mathrm{U}(n+1)$, le tout muni d'une topologie adéquate.

Il y a un analogue de cette périodicité dite de Bott dans la $\mathrm{K}-$théorie topologique. Dans ce mémoire, nous nous proposons d'introduire les outils nécessaires à la construction de la $\mathrm{K}-$théorie topologique, de définir les groupes K^0 et K^1, ainsi que d'énoncer et de démontrer la périodicité de Bott pour la $\mathrm{K}-$théorie. Nous finirons par donner une application de la $\mathrm{K}-$théorie topologique : le théorème d'Adams.

Chapitre 1

Fibrés vectoriels

1.1 Familles d'espaces vectoriels sur un espace topologique

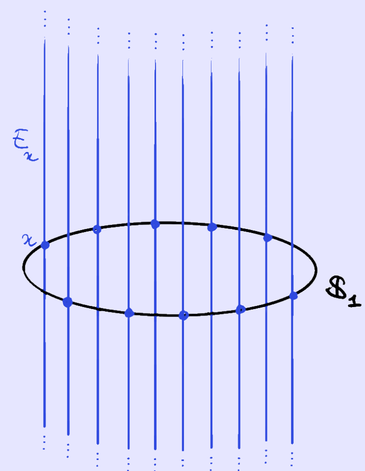
Tous les espaces vectoriels considérés seront des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 1.1.1 (Famille d'espaces vectoriels sur X)**.**

Soit X un espace topologique. Une famille d'espaces vectoriels (abrégé en FEV) sur X est la donnée :

1. *d'un espace topologique E (**espace total**),*
2. *d'une application continue $p : E \longrightarrow X$ (**projection**),*
3. *pour tout $x \in X$, d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie sur chaque **fibre** $E_x \overset{\text{def}}{=} p^{-1}(x)$ qui coïncide avec la topologie induite sur E_x.*

On notera $\xi = (E, X, p)$ une FEV, ou plus simplement E.



Définition 1.1.2 ((Iso)morphisme de FEVs)**.** *Soient $\zeta = (E, X, p)$ et $\xi = (F, Y, q)$ des FEVs. Un **morphisme** $\Phi : \zeta \longrightarrow \xi$ de FEVs est un couple d'applications $(\overline{\varphi}, \varphi)$ continues tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[d, "p"'] & F \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

commute, et tel que pour tout $x \in X$, $\overline{\varphi}\Big|_{E_x}^{F_{\varphi(x)}}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire. Lorsque $X = Y$ et $\varphi = \mathrm{id}_X$, on parle de morphisme sur la base X, et on dira que φ est un morphisme par abus de notation (au lieu de (φ, id_E)).

*Un **isomorphisme de FEVs** $\Phi = (\overline{\varphi}, \varphi) : \zeta \longrightarrow \xi$ est un morphisme de FEVs tel qu'il* *existe un morphisme* $\Psi = (\overline{\psi}, \psi) : \xi \longrightarrow \zeta$ *vérifiant*

$$\Phi \circ \Psi = (\overline{\varphi} \circ \overline{\psi}, \varphi \circ \psi) = (\mathrm{id}_F, \mathrm{id}_Y) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{id}_\xi, \quad \Psi \circ \Phi = (\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}, \psi \circ \varphi) = (\mathrm{id}_E, \mathrm{id}_X) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{id}_\zeta$$

Avec les notations ci-dessus, $\overline{\varphi}$ détermine φ, donc la donnée d'un morphisme de FEVs est équivalente à la donnée de $\overline{\varphi}$. On construit la catégorie **FEV** des FEVs, et la sous-catégorie $\mathbf{FEV_X}$ des FEVs de base X.

Définition 1.1.3 (Section d'une FEV)**.** *Soit* $\xi = (E, X, p)$ *une FEV. Une* ***section*** *de* ξ *est une application continue* $s : X \longrightarrow E$ *telle que* $p \circ s = \mathrm{id}_X$*.*

Exemple 1.1.1 (Famille produit)**.** *Soit* V *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel, et* $E = X \times V$, $p = \mathrm{pr}_1$ *la projection sur le premier facteur. On appelle* E *la* ***famille produit*** *de fibre* V*. Une FEV* ξ *est dite* ***triviale*** *si elle est isomorphe à une famille produit.*

1.2 Construction de FEV

On fixe $\xi = (E, X, p)$ une FEV sur X. On cherche à construire d'autres FEVs à partir de ξ.

Restriction Soit $Y \subset X$. Alors

$$\xi\Big|_Y \overset{\text{def}}{=} \left(p^{-1}(Y), Y, p\Big|_{p^{-1}(Y)}^{Y}\right)$$

est une FEV sur Y, aussi notée $E\Big|_Y$ et appelée **restriction** de E à Y.

Tiré en arrière Soit A un espace topologique, $f : A \longrightarrow X$ une application continue. Alors

$$f^*(\xi) \overset{\text{def}}{=} (f^*(E), A, f^*(p))$$

où

- $f^*(E) = \{(a, x) \in A \times E \mid f(a) = p(x)\}$
- $f^*(p) : (a, x) \mapsto a$

est une FEV sur A appelée **tiré en arrière** de ξ par f. On a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "f^*(p)"'] & E \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

où

$$\begin{aligned} \overline{f} : f^*(E) &\longrightarrow E \\ (a, x) &\longmapsto x \end{aligned}$$

est construite de sorte que $(\overline{f}, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FEV}}(f^*(\xi), \xi)$. Les fibres de $f^*(\xi)$ sont les $\{a\} \times E_{f(a)}$ pour tout $a \in A$.

Si $g : B \longrightarrow A$ est continue, alors on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} g^* f^*(E) &\xrightarrow{\sim} (fg)^*(E) \\ (b, (g(b), x)) &\longmapsto (b, x). \end{aligned}$$

Si $f : A \hookrightarrow X$ est l'injection canonique, on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} f^*(E) &\xrightarrow{\sim} E\Big|_A \\ (p(x), x) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

1.3 Fibrés vectoriels

Définition 1.3.1 (Fibré vectoriel)**.** *Soit X un espace topologique. Une FEV $\xi = (E, X, p)$ est un **fibré vectoriel** si tout point de X admet un voisinage ouvert U tel que $E\Big|_U$ est trivial. Autrement dit, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U_x (dit **trivialisant**) de x dans X, F un espace vectoriel de dimension finie et $f : p^{-1}(U_x) \longrightarrow U_x \times F$ un isomorphisme de FEVs sur X (appelé **trivialisation locale**), i.e. le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_x) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & U_x \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U_x & \end{tikzcd}$$

Nous noterons $\mathbf{VectBund_X}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{FEV_X}$ des fibrés vectoriels sur X.

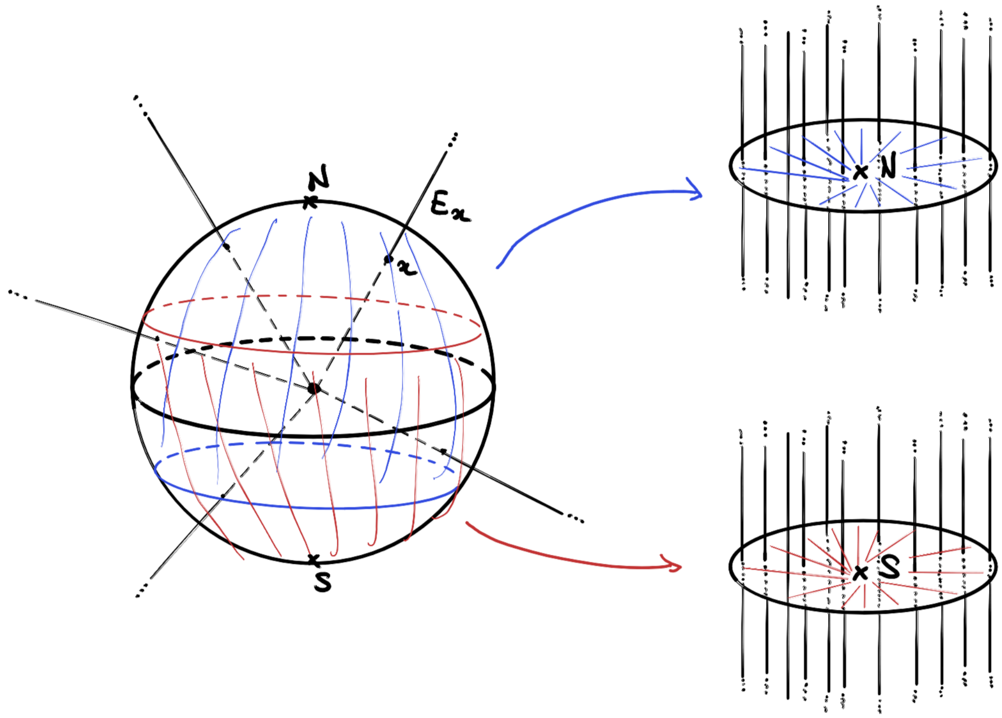
Remarque 1.3.1 (Définition équivalente)**.** *Soit $p : E \longrightarrow X$ application continue entre espaces topologiques. Alors (E, X, p) est un fibré vectoriel si et seulement si la propriété suivante est vérifiée : il existe $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie et $(\phi_i)_{i \in I}$ une famille d'homéomorphismes tels que pour tout $i \in I$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\phi_i"] \arrow[dr, "p"'] & & U_i \times F_i \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

et vérifiant pour tout $i, j \in I$,

$$\Phi_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(p^{-1}(U_i \cap U_j)) \longrightarrow \phi_j(p^{-1}(U_i \cap U_j))$$

est de la forme $(\mathrm{pr}_1, \Psi_{i,j})$ où pour tout $x \in U_i \cap U_j$, $\Psi_{i,j}(x, \cdot) \in \mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}(F_i, F_j)$.



Montrons que ces deux définitions sont équivalentes. Si $\xi = (E, X, p)$ est un fibré au sens de la définition 1.3.1, il suffit de considérer un recouvrement de X par des ouverts trivialisants, et les trivialisations locales associées sont des homéomorphismes qui vérifient les propriétés de la remarque 1.3.1.

Soit maintenant E, X et $p : E \longrightarrow X$ vérifiant les propriétés de la remarque 1.3.1. Si on pose $E_x \overset{\text{def}}{=} p^{-1}(\{x\})$ pour tout $x \in X$, alors $E = \bigsqcup_{x\in X} E_x$ et on munit E_x d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie en stipulant que pour tout $x \in X$, si $x \in U_i$, alors $\phi_i\big|_{E_x} : E_x \longrightarrow \{x\}\times F_i$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. La cohérence entre les ϕ_i permet d'assurer la bonne définition de cette structure et les ϕ_i étant des homéomorphismes, la topologie induite sur E_x coïncide avec la topologie canonique de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Ainsi, (E, X, p) est une FEV et $(\phi_i)_{i\in I}$ est une famille de trivialisations locales, donc (E, X, p) est un fibré vectoriel.

Exemple 1.3.1 (Les espaces projectifs)**.** *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n+1$ où $n \in \mathbb{N}$ et soit $X = \mathbb{P}(V)$ l'espace projectif associé. Posons*

$$E = \{(x, v) \in X \times V \mid v \in x\} \subset X \times V$$

et $p : E \longrightarrow X$ la projection sur le premier facteur. Montrons que (E, X, p) est un fibré vectoriel. Le choix (non-canonique) d'une $\mathbb{C}$-base de V permettant d'identifier V à $\mathbb{C}^{n+1}$, il suffit de montrer le résultat pour $V = \mathbb{C}^{n+1}$.
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, posons $U_i = \{[x_0 : \cdots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$ et

$$\begin{aligned} \phi_i : p^{-1}(U_i) &\longrightarrow U_i \times \mathbb{C} \\ (x = [x_0 : \cdots : x_n], v) &\longmapsto \left(x, \left(\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}\right)^* (v)\right) \end{aligned}$$

qui est un homéomorphisme, d'inverse

$$\begin{aligned}\phi_i^{-1} : U_i \times \mathbb{C} &\longrightarrow p^{-1}(U_i) \\ (x, \lambda) &\longmapsto \left(x, \lambda \cdot \left(\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}\right)\right)\end{aligned}$$

vérifiant la commutation du diagramme suivant

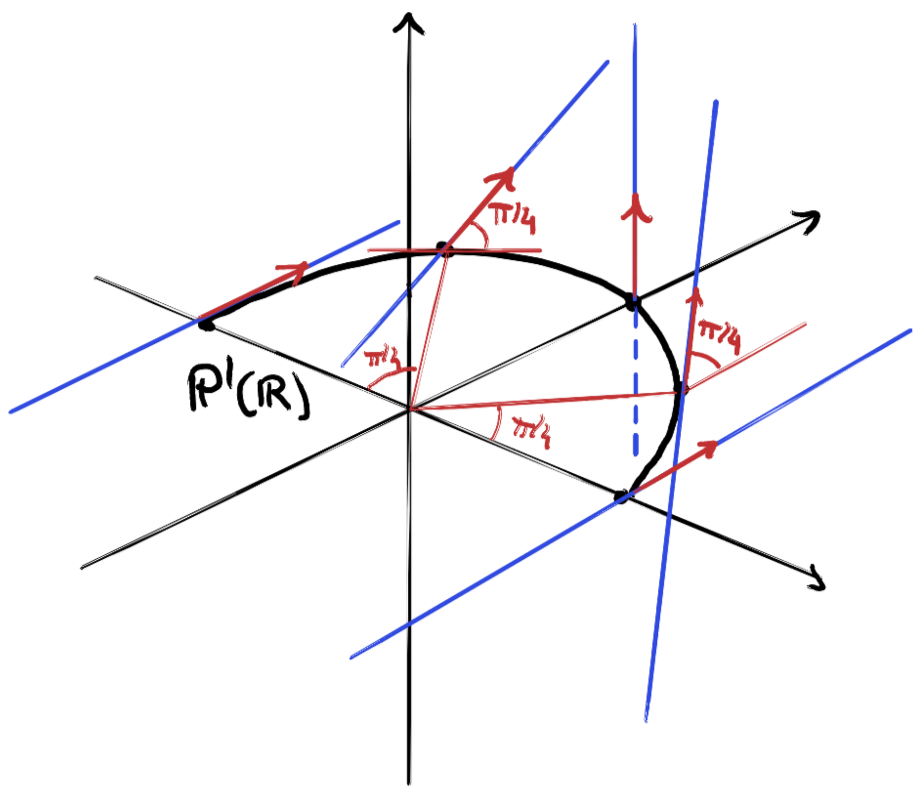
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\phi_i"] \arrow[dr, "p"'] & & U_i \times \mathbb{C} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

Soit $i, j \in [\![0, n]\!]$*, on a*

$$\begin{aligned}\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(p^{-1}(U_i \cap U_j)) &\longrightarrow \phi_j(p^{-1}(U_i \cap U_j)) \\ (x, \lambda) &\longmapsto (x, \Psi_{i,j}(x, \lambda) \overset{\text{def}}{=} \lambda)\end{aligned}$$

de sorte que pour tout $x \in U_i \cap U_j$, $\Psi_{i,j}(x, \cdot) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels.*
La famille $(U_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ *étant un recouvrement ouvert de* X*, il vient le résultat escompté.*

Pour $V = \mathbb{R}^2$, on définit un fibré sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ de la même manière, illustré par la figure suivante :



Exemple 1.3.2 (Fibré tangent)**.** *Soit* $(M, \mathscr{A})$ *une variété de classe* $\mathscr{C}^1$ *et de dimension* n*. Alors en notant*

$$TM \overset{\text{def}}{=} \bigsqcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M$$

le fibré tangent sur M *et* $p : TM \longrightarrow M$ *la projection évidente,* (TM, M, p) *est un fibré vectoriel de rang* n *sur* M*. En effet, soit* $y \in M$*,* (U, φ) *une carte locale de* M *en* y*. Alors*

$$\begin{aligned} \phi : p^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\longmapsto (x, T_x\varphi\,(v)) \end{aligned}$$

est une trivialisation locale de TM *au-dessus de* U*.*
Un champ de vecteurs sur M *est, par définition, une section de* TM*.*

Remarque 1.3.2. *L'application* $x \longmapsto \dim_{\mathbb{C}}(E_x)$ *est localement constante, donc est constante sur chaque composante connexe de* X*. Si cette application est constante égale à* $n \in \mathbb{N}$ *sur* X*, nous dirons que* E *est de* ***rang*** n*.*

Proposition 1.3.1 (Tiré en arrière d'un fibré vectoriel)**.** *Soit* $f : Y \longrightarrow X$ *une application continue. Alors* $f^*(E)$ *est un fibré vectoriel sur* Y*.*

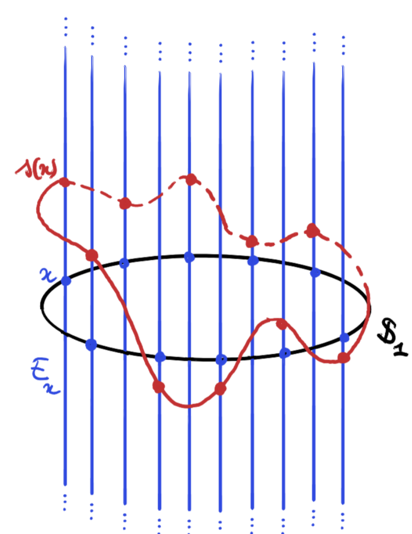
Démonstration. Soit $y \in Y$. Fixons U un voisinage ouvert trivialisant de $f(y)$ dans X, V un espace vectoriel et $\alpha : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times V$ un isomorphisme de FEVs sur X. Alors

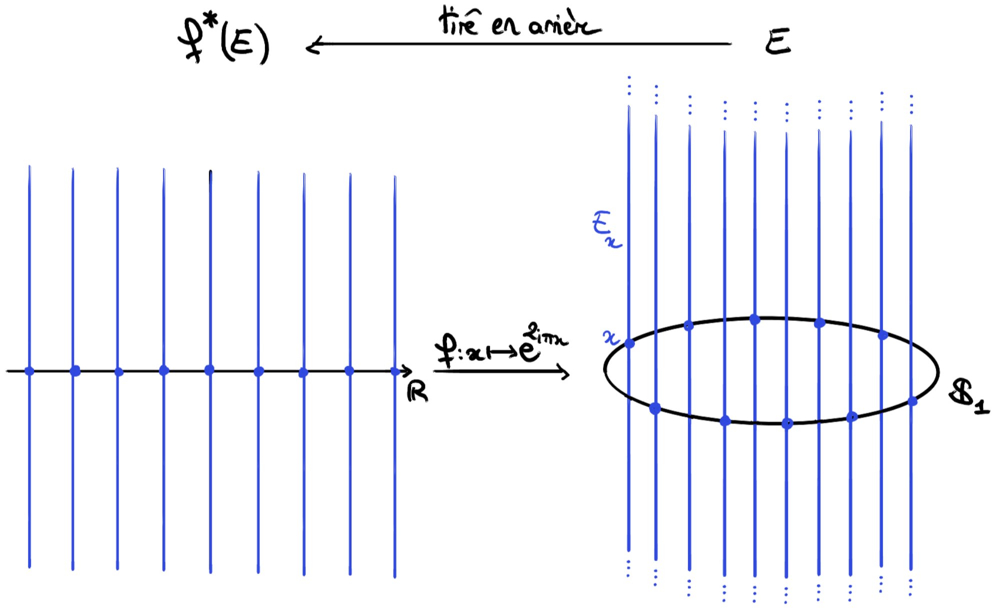
$$\begin{aligned} \beta : f^*(p)^{-1}(f^{-1}(U)) &\xrightarrow{\sim} f^{-1}(U) \times V \\ (\hat{y}, e) &\longmapsto (\hat{y},\, \mathrm{pr}_2 \circ \alpha(e)) \\ (\hat{y},\, \alpha^{-1}((f(\hat{y}), v))) &\longleftarrow (\hat{y}, v) \end{aligned}$$

est une trivialisation de $f^*(E)$ au-dessus de $f^{-1}(U)$. $\square$

Remarque 1.3.3 (Sections d'un fibré)**.** *Puisqu'un fibré vectoriel est localement trivial, toute section* $s : X \longrightarrow E$ *peut être vue localement comme une fonction à valeurs vectorielles. L'ensemble des sections de ce fibré, noté* $\Gamma(E)$*, est donc muni d'une structure de* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel pour les lois évidentes.*

Proposition 1.3.2 (Sections locales)**.** *Soit* $\xi = (E, X, p)$ *une FEV sur* X*. Alors* ξ *est un fibré vectoriel sur* X *si et seulement si pour tout* $y \in X$*, il existe un voisinage ouvert* U *de* y *dans* X*,* $n \in \mathbb{N}$ *et* $(s_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \Gamma\left(E\big|_U\right)^n$ *tels que pour tout* $x \in U$*,* $(s_i(x))_{i \in [\![1,n]\!]}$ *est une base de* E_x*.*





Démonstration. Soit U un voisinage ouvert trivialisant de $y \in X$, V un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times V$ un isomorphisme de fibrés vectoriels sur X. Soit $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de V. Alors la famille $(\alpha^{-1}(\,\cdot\,, e_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille de sections de $E\big|_U$ qui vérifie la propriété souhaitée.

Réciproquement, supposons que tout $y \in X$ admette un voisinage ouvert U_y comme dans l'énoncé. Soit $y \in X$, et $(s_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de sections de $E\big|_{U_y}$ telles que pour tout $x \in U_y$, $(s_i(x))_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de E_x. Alors

$$\begin{aligned} \alpha : p^{-1}(U_y) &\longrightarrow U_y \times \mathbb{C}^n \\ v \in E_x &\longmapsto \left(x, \sum_{i=1}^{n} s_i(x)^*(v) e_i\right) \end{aligned}$$

où $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est une trivialisation de $E\big|_{U_y}$ au-dessus de U_y. □

Proposition 1.3.3. *Soient (E, X, p), (F, X, q) deux fibrés vectoriels et $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FEV}}(E, F)$. Alors φ est un isomorphisme si et seulement si pour tout $x \in X$, $\varphi_x : E_x \longrightarrow F_x$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.*

Démonstration. On traite tout d'abord le cas de fibrés produits. Soient V, W des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, de sorte que $E = X \times V$, $F = X \times W$ et p et q sont les projections correspondantes sur X. D'une part, si φ est un isomorphisme de E vers F, alors pour tout $x \in X, \varphi_x$ est une bijection linéaire. D'autre part, on considère l'application

$$\begin{aligned} \Psi_{(V,W)} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{FEV}}(E, F) &\xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^0(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)) \\ \varphi &\longmapsto (x \mapsto \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_x) \\ (\mathrm{pr}_1, \phi(\cdot_x)(\cdot_v)) &\longleftarrow \phi. \end{aligned}$$

Elle établit une correspondance bijective entre les morphismes de E dans F et $\mathscr{C}^0(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W))$ l'ensemble des applications continues de X dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ (muni de la topologie d'espace vectoriel normé).

Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FEV}}(E, F)$ tel que pour tout $x \in X$, $\varphi_x \in \mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}(V, W)$, où on a noté

$$\mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}(V, W) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$$

l'ouvert de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ des applications linéaires inversibles. Alors $\Psi_{(V,W)}(\varphi)(X) \subset \mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}(V, W)$ donc

$$\mathrm{Inv} \circ \Psi_{(V,W)}(\varphi) \in \mathscr{C}^0(X, \mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}(W, V))$$

est bien définie et continue car l'inversion $\mathrm{Inv} : \mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}(W, V)$ l'est également. Alors $\Psi_{(W,V)}^{-1} \circ \mathrm{Inv} \circ \Psi_{(V,W)}(\varphi) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FEV}}(F, E)$ est un inverse à gauche et à droite de φ, donc φ est un isomorphisme de E vers F. Cette équivalence reste vraie pour des familles triviales et donc pour les fibrés vectoriels car ces derniers sont localement triviaux. $\square$

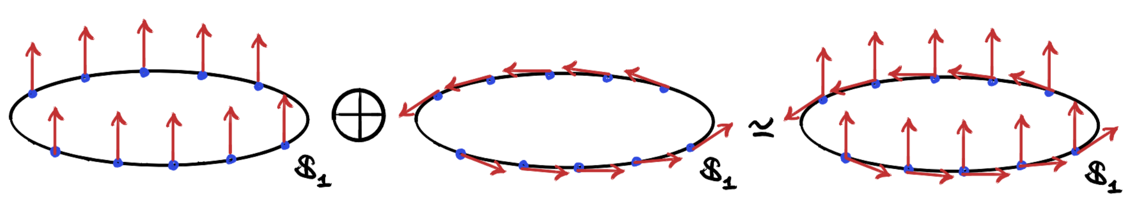
Remarque 1.3.4. *On a montré dans la preuve ci-dessus que $\{x \in X : \varphi_x$ est bijective$\}$ est ouvert dans X.*

1.4 Opérations sur les fibrés vectoriels

On aimerait promouvoir les opérations usuelles sur les espaces vectoriels en des opérations sur les fibrés vectoriels. Par exemple, si (E, X, p) et (F, X, q) sont des fibrés vectoriels sur X, on voudrait définir $E \oplus F$ un fibré vectoriel sur X de telle sorte que pour tout $x \in X$, $(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x$. On pose alors

$$E \oplus F \overset{\text{def}}{=} \{(e, f) \mid p(e) = q(f)\} \subset E \times F$$

où $E \times F$ est muni de la topologie produit et $E \oplus F$ de la topologie induite. On munit $E \oplus F$ de l'application continue de projection $p \circ \mathrm{pr}_1 = q \circ \mathrm{pr}_2 : E \oplus F \longrightarrow X$. On a alors pour tout $x \in X$, $(p \circ \mathrm{pr}_1)^{-1}(\{x\}) = E_x \oplus F_x$ et $(E \oplus F, X, p \circ \mathrm{pr}_1)$ est un fibré vectoriel sur X.



On aimerait procéder de même pour définir $E \otimes F$, E^*, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, F)$, etc. La difficulté est de munir

$$\bigsqcup_{x \in X} E_x \otimes F_x, \quad \bigsqcup_{x \in X} E_x^*, \quad \bigsqcup_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_x, F_x), \quad \text{etc.}$$

d'une topologie adéquate. Dans cette section, nous présentons une façon systématique de mettre une topologie sur ces espaces.

Notons $\mathbb{C}-\mathbf{FinVect}$ la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et donnons-nous un foncteur covariant $T : \mathbb{C}-\mathbf{FinVect} \longrightarrow \mathbb{C}-\mathbf{FinVect}$ qui vérifie que pour tout $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C}-\mathbf{FinVect})$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T(V),T(W)) \\ \varphi &\longmapsto T(\varphi) \end{aligned}$$

est continue (un tel foncteur sera dit **continu**). On définit

$$T(E) \overset{\text{def}}{=} \bigsqcup_{x\in X} T(E_x)$$

et si $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FEV}}(E,F)$, posons $T(\varphi) : T(E) \longrightarrow T(F)$ caractérisé par $T(\varphi)\big|_{T(E_x)} = T(\varphi_x)$. Définissons alors une topologie sur $T(E)$ et montrons que $T(\varphi)$ est un morphisme de FEVs (seule la continuité reste à montrer par définition de $T(\varphi)$).

Étape 1 : le cas d'un fibré produit Soit $E = X \times V$ où $V \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C}-\mathbf{FinVect})$ muni de la projection p selon le premier facteur. On munit $T(E) = X \times T(V)$ de la topologie produit et de la projection selon le premier facteur. Si $F = X \times W$ où $W \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C}-\mathbf{FinVect})$ muni de la projection q selon le premier facteur et $\varphi \in \mathrm{Hom}(E,F)$, on note $\Phi \in \mathscr{C}^0(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W))$ l'application continue associée à φ (cf. preuve de la proposition 1.3.3). On a par hypothèse de continuité sur T que

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T(V),T(W)) \\ x &\longmapsto T(\Phi(x)) \end{aligned}$$

est un élément de $\mathscr{C}^0(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T(V),T(W)))$, donc est associé à un morphisme qui n'est autre que $T(\varphi)$. On a donc défini le fibré $(T(E),X,p)$ ainsi que $T(\varphi)$ dans le cas de fibrés produit. Remarquons que si φ isomorphisme de E vers F, alors pour tout $x \in X$, $T(\varphi_x)$ est bijective et donc la proposition 1.3.3 donne que $T(\varphi)$ est un isomorphisme de $T(E)$ vers $T(F)$.

Étape 2 : le cas d'un fibré trivial Soit (E,X,p) un fibré trivial. Fixons $V \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C}-\mathbf{FinVect})$ et $f : E \longrightarrow X \times V$ un isomorphisme. Alors $T(f) : T(E) \longrightarrow X \times T(V)$ est une bijection, on munit $X \times T(V)$ de la topologie produit comme dans l'étape 1 et on munit $T(E)$ de la topologie

$$\{T(f)^{-1}(\mathcal{O}) : \mathcal{O} \hookrightarrow\!\!\!\!\!\circ\;\, X \times T(V)\}$$

i.e. de la topologie faisant de $T(f)$ un homéomorphisme. Cela ne dépend pas du choix de l'isomorphisme f. En effet, soit $g : E \longrightarrow X \times W$ un isomorphisme. Nous aurons alors que $g \circ f^{-1}$ est un isomorphisme de $X \times V$ dans $X \times W$ donc par l'étape 1, $T(g \circ f^{-1})$ est un isomorphisme de $X \times T(V)$ dans $X \times T(W)$, a fortiori $T(g \circ f^{-1})$ est un homéomorphisme.

Soit (F,X,q) un fibré trivial et soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FEV}}(E,F)$. Fixons $h : F \longrightarrow X \times W$ un isomorphisme et posons $\gamma = h \circ \varphi \circ f^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FEV}}(X \times V, X \times W)$ le morphisme qui complète le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[d, "h"] \\ X \times V \arrow[r, dashed, "\gamma"'] & X \times W \end{tikzcd}$$

Alors $T(\gamma)$ est continu d'après l'étape 1, $T(f)$ et $T(h)$ sont continues par définition des topologies sur $T(E)$ et $T(F)$ donc $T(\varphi) = T(h)^{-1} \circ T(\gamma) \circ T(f)$ est également continue. On a donc $T(\varphi)$ est un morphisme de $T(E)$ vers $T(F)$.

Remarquons enfin que pour tout $Y \subset X$, $T\left(E\big|_Y\right)$ et $T(E)\big|_Y$ ont la même topologie. En effet, $f : E \longrightarrow X \times V$ homéomorphisme induit $\tilde{f} : E\big|_Y \longrightarrow Y \times V$ homéomorphisme. De même, $T(f) : T(E) \longrightarrow X \times T(V)$ homéomorphisme induit $\widetilde{T(f)} : T(E)\big|_Y \longrightarrow Y \times T(V)$ homéomorphisme donc $T(\tilde{f})^{-1} \circ \widetilde{T(f)}$ est un homéomorphisme :

$$\begin{tikzcd}
T(E)\big|_Y \arrow[r, "\widetilde{T(f)}"] \arrow[d, dashed, "T(\tilde{f})^{-1}\circ\widetilde{T(f)}"'] & Y \times T(V) \arrow[d, "\mathrm{id}_{Y\times T(V)}"] \\
T\left(E\big|_Y\right) \arrow[r, "T(\tilde{f})"'] & Y \times T(V)
\end{tikzcd}$$

Étape 3 : le cas d'un fibré vectoriel Soit (E, X, p) un fibré vectoriel. L'idée est de se ramener à l'étape 2 en prenant des ouverts trivialisants. Soit alors U ouvert trivialisant, on munit $T\left(E\big|_U\right)$ d'une topologie grâce à l'étape 2. Si $\Omega \overset{\text{def}}{=} \{U \hookrightarrow X : U \text{ trivialisant}\}$, on a

$$T(E) = \bigcup_{U \in \Omega} T\left(E\big|_U\right).$$

On munit alors $T(E)$ de la topologie faible associée à la famille $\left\{T\left(E\big|_U\right) : U \in \Omega\right\}$, i.e. si $V \subset T(E)$, alors V est un ouvert de $T(E)$ si et seulement si pour tout $U \in \Omega$, $V \cap T\left(E\big|_U\right)$ est un ouvert de $T\left(E\big|_U\right)$.

La continuité étant une propriété locale, il vient par l'étape 2 et par définition de la topologie faible que $T(\varphi)$ est un morphisme de fibrés vectoriels et que $T\left(E\big|_Y\right) \cong T(E)\big|_Y$ pour tout $Y \subset X$.

Remarque 1.4.1. *Cette construction faite pour un foncteur covariant T continu se fait de façon analogue pour un foncteur contravariant T continu. Par récurrence, on peut effectuer les constructions ci-dessus avec des foncteurs continus à plusieurs variables et ainsi définir :*

- $E \oplus F$ *le fibré vectoriel somme directe de E et F,*
- $E \otimes F$ *le fibré vectoriel produit tensoriel de E et F,*
- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, F)$ *le fibré vectoriel des applications linéaires de E dans F,*
- $\Lambda^k(E)$ *le fibré vectoriel k-ième puissance extérieure de E,*

etc.

Les isomorphismes naturels entre espaces vectoriels de dimension finie s'héritent pour les fibrés vectoriels :

- $E \oplus F \cong F \oplus E$,
- $E \otimes F \cong F \otimes E$,

- $E \otimes (F \oplus G) \cong (E \otimes F) \oplus (E \otimes G)$,
- $\Lambda^n(E \oplus F) \cong \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(E) \otimes \Lambda^{n-k}(F)$,

etc.

1.5 Sous-fibrés vectoriels et fibrés vectoriels quotient

Définition 1.5.1 (Sous-fibré vectoriel)**.** *Soit (E, X, p) un fibré vectoriel et $E' \subset E$. Nous dirons par abus de langage que E' est un* ***sous-fibré vectoriel*** *de E lorsque $\left(E', X, p\big|_{E'}\right)$ est un fibré vectoriel.*

Définition 1.5.2 (Monomorphisme, épimorphisme)**.** *Soit $\varphi : E \longrightarrow F$ un morphisme de fibrés vectoriels. On dit que φ est un* ***monomorphisme*** *(resp. un* ***épimorphisme****) si pour tout $x \in X$, $\varphi_x : E_x \longrightarrow F_x$ est injective (resp. surjective).*

Proposition 1.5.1. *Si $\varphi : F \longrightarrow E$ est un monomorphisme, alors $\varphi(F)$ est un sous-fibré vectoriel de E et $\varphi : F \longrightarrow \varphi(F)$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\varphi(F)$ est un sous-fibré vectoriel de E. Le problème étant local, quitte à composer par un isomorphisme, on peut supposer que $E = X \times V$. Fixons $x \in X$ et considérons W_x un supplémentaire de $\varphi(F_x)$ dans V. Notons $G = X \times W_x$ qui est un sous-fibré de E. On définit alors

$$\begin{aligned} \theta : F \oplus G &\longrightarrow E \\ (f, g) &\longmapsto \varphi(f) + i(g) \end{aligned}$$

où i est l'inclusion de G dans E. Comme θ_x est un isomorphisme et en vertu de la remarque 1.3.4, il existe U un voisinage ouvert de x tel que $\theta\big|_U$ soit un isomorphisme. Mais alors, comme F est un sous-fibré de $F \oplus G$, $\theta(F) = \varphi(F)$ est un sous-fibré de E. Pour finir, puisque $\varphi : F \longrightarrow \varphi(F)$ est une bijection et que $\varphi(F)$ est un sous-fibré de E, φ est un isomorphisme. □

Remarque 1.5.1. *La démonstration précédente permet d'affirmer que, pour $\varphi : F \longrightarrow E$ un morphisme quelconque, $\{x \in X : \varphi_x \text{ est injective}\}$ est ouvert dans X.*

Définition 1.5.3 (Fibré vectoriel quotient)**.** *Soit F un sous-fibré de E. On définit le* ***fibré vectoriel quotient*** *E/F comme l'union des E_x/F_x, muni de la topologie quotient. Autrement dit, en posant*

$$\mathcal{R} = \bigsqcup_{x \in X} \left\{(e, f) \in E_x^2 : e - f \in F_x\right\}$$

le fibré vectoriel quotient est l'espace $E/F = E/\mathcal{R}$ muni de la topologie quotient et de la projection $\tilde{p} : E/F \longrightarrow X$ induite par la projection p par passage au quotient.

Un fibré vectoriel quotient est bien un fibré vectoriel sur X car pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $E\big|_U \cong F\big|_U \oplus G$ où G est comme dans la preuve de la proposition 1.5.1 et donc $(E/F)\big|_U \cong G$, ce qui assure que E/F est localement trivial.

Remarque 1.5.2. *La dimension du noyau d'un morphisme entre deux fibrés vectoriels n'est pas localement constante en général. On peut par exemple considérer*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x, xy). \end{aligned}$$

On a $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_x)) = 0$ *pour* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *mais* $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_0)) = 1$. *Par contraposée de la remarque 1.3.2, on en déduit que* $\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(\varphi_x)$ *n'est pas un sous-fibré vectoriel de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *On peut se demander s'il est suffisant de supposer que l'application* $x \longmapsto \dim(\mathrm{Ker}(\varphi_x))$ *est localement constante pour que* $\bigcup_{x\in X} \mathrm{Ker}(\varphi_x)$ *soit un sous-fibré vectoriel de* E. *Ceci motive la définition suivante et la proposition qui suit.*

Définition 1.5.4 (Morphisme strict)**.** *Un morphisme* $\varphi : E \longrightarrow F$ *est dit* ***strict*** *si l'application* $x \longmapsto \dim(\mathrm{Ker}(\varphi_x))$ *est localement constante.*

Proposition 1.5.2. *Soit* $\varphi : E \longrightarrow F$ *un morphisme strict. Alors :*

1. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \bigcup\limits_{x\in X} \mathrm{Ker}(\varphi_x)$ *est un sous-fibré de* E,
2. $\mathrm{Im}(\varphi) = \bigcup\limits_{x\in X} \mathrm{Im}(\varphi_x)$ *est un sous-fibré de* F,
3. $\mathrm{Coker}(\varphi) = \bigcup\limits_{x\in X} \mathrm{Coker}(\varphi_x)$ *a une structure de fibré vectoriel.*

Démonstration. Par définition des fibrés quotient, on a *2.* implique *3.* Montrons *2.* On a que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est une FEV sur X, il suffit de montrer la trivialité locale. Soit $x \in X$ et U un voisinage ouvert trivialisant de x dans X relativement au fibré E. Soit $(s_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de sections de $E\big|_U$ telle que pour tout $y \in U$, $(s_i(y))_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de E_y. Quitte à réduire U, on peut supposer que $y \longmapsto \dim(\mathrm{Im}(\varphi_y))$ est constante égale à $k \in [\![0, n]\!]$ sur U. Alors $(\varphi \circ s_i(x))_{i\in[\![1,n]\!]}$ engendre $\mathrm{Im}(\varphi_x)$ et on peut supposer quitte à renuméroter que $(\varphi \circ s_i(x))_{i\in[\![1,k]\!]}$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi_x)$. Soit

$$V = \{y \in U : (\varphi \circ s_i(y))_{i\in[\![1,k]\!]} \text{ est une famille libre}\}.$$

Par semi-continuité inférieure du rang, V est un voisinage ouvert de x dans U et pour tout $y \in V$, $(\varphi \circ s_i(y))_{i\in[\![1,k]\!]}$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi_y)$. Or φ étant un morphisme, $(\varphi \circ s_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ est une famille de sections de $\mathrm{Im}(\varphi)$ sur V. On conclut en utilisant la proposition 1.3.2.

Enfin, démontrons que la FEV $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est localement triviale. Par *2.*, soit $x \in X$, $k \in [\![0, n]\!]$ et U un voisinage ouvert de x dans X tel qu'il existe une famille de sections $(s_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de $E\big|_U$ telle que pour tout $y \in U$, $(s_i(y))_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de E_y et $(\varphi \circ s_i(y))_{i\in[\![1,k]\!]}$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi_y)$. Alors pour tout $i_0 \in [\![k + 1, n]\!]$, il existe $(f_{(i_0,j)})_{j\in[\![1,k]\!]} \in \mathscr{C}^0(U, \mathbb{C})^k$ tel que sur U,

$$\varphi \circ s_{i_0} = \sum_{i=1}^{k} f_{(i_0,j)} \varphi \circ s_j.$$

Donc

$$\left(s_{i_0} - \sum_{j=1}^{k} f_{(i_0,j)} s_j\right)_{i_0 \in [\![k+1,n]\!]}$$

est une famille de sections de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sur U et pour tout $y \in U$,

$$\left(s_{i_0}(y) - \sum_{j=1}^{k} f_{(i_0,j)}(y) s_j(y)\right)_{i_0 \in [\![k+1,n]\!]}$$

est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi_y)$. □

Définition 1.5.5 (Projecteur)**.** *Un* ***projecteur*** $P : E \longrightarrow E$ *est un morphisme tel que* $P^2 = P$.

Lemme 1.5.1 (Décomposition en somme directe)**.** *Soit* $P : E \longrightarrow E$ *un projecteur. Le fibré vectoriel* E *se décompose comme*

$$E = P(E) \oplus (1 - P)(E).$$

Démonstration. Rappellons le fait suivant (croissance locale du rang) :

$$\forall f \in \mathrm{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n), \exists r > 0, \forall g \in B(f, r), \quad \mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$$

On a, pour tout $x \in X$, $\mathrm{rg}(P_x) + \mathrm{rg}(1 - P_x) = \dim(E_x)$. Par continuité de $x \mapsto P_x$, sur un voisinage de U de x, en utilisant cette croissance locale du rang, on obtient que les fonctions $x \mapsto \mathrm{rg}(P_x), x \mapsto \mathrm{rg}(1 - P_x) = \dim \mathrm{Ker}(P_x)$ sont constantes sur U, donc P est strict. Ainsi, $P(E)$ et $\mathrm{Ker}(P) = (1 - P)(E)$ sont des sous-fibrés de E et on a $E = P(E) \oplus (1 - P)(E)$. □

Considérons le foncteur continu Herm qui à un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V associe le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes hermitiennes sur V et à un morphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\varphi : V \longrightarrow W$, associe le morphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \mathrm{Herm}(\varphi) : \mathrm{Herm}(W) &\longrightarrow \mathrm{Herm}(V) \\ h &\longmapsto h \circ (\varphi, \varphi). \end{aligned}$$

La section 1.4 permet de définir pour tout fibré vectoriel E sur X, un fibré vectoriel $\mathrm{Herm}(E)$ sur X.

Définition 1.5.6 (Métrique hermitienne sur un fibré vectoriel)**.** *Soit* (E, X, p) *un fibré vectoriel. On appelle* ***métrique hermitienne sur*** E *toute section* $h : X \longrightarrow \mathrm{Herm}(E)$ *telle que pour tout* $x \in X$, $h(x)$ *est définie positive.*

Remarque 1.5.3. *En reprenant les notations de la remarque 1.3.2 et étant donnée une métrique hermitienne* h *sur* $E\big|_U$, *on peut modifier la famille* $(s_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ *de sorte que pour tout* $x \in U$, *pour tout* $i, j \in [\![1, n]\!]$, $h_x(s_i(x), s_j(x)) = \delta_{i,j}$.

En effet, on applique l'algorithme de Gram-Schmidt paramétrisé par $x \in U$, *i.e. on définit* *des sections $\tilde{s}_i$ de $E\Big|_U$ par récurrence finie de la façon suivante :*

$$\tilde{s}_1(x) = \frac{s_1(x)}{\sqrt{h_x(s_1(x), s_1(x))}}$$

$$\tilde{s}_i(x) = \frac{s_i(x) - \sum_{j=1}^{i-1} h_x(s_i(x), \tilde{s}_j(x))\tilde{s}_j(x)}{\sqrt{h_x(s_i(x), s_i(x)) - \sum_{j=1}^{i-1} h_x(s_i(x), \tilde{s}_j(x))^2}} \quad \textit{pour } i \in [\![2, n]\!].$$

Définition 1.5.7 (Projecteur orthogonal associé à une métrique hermitienne)**.** *Soit (E, X, p) un fibré vectoriel, F un sous-fibré et h une métrique hermitienne sur E. On définit le projecteur orthogonal associée à h sur F par la projection orthogonale classique sur chacune des fibres.*

Montrons qu'un projecteur orthogonal $P : E \longrightarrow F$ est un projecteur. Il vérifie immédiatement $P^2 = P$ et envoie chaque fibre E_x sur la fibre F_x pour tout $x \in X$. Il reste à montrer que P est continu. Soit $x \in X$ et U un voisinage ouvert de x tel qu'il existe une famille de sections $(s_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ de $E\Big|_U$ telle que pour tout $y \in U$, $(s_i(y))_{i \in [\![1,m]\!]}$ est une base orthonormée de F_y pour h_y (licite d'après la remarque 1.5.3). Alors

$$P\Big|_U = \sum_{i=1}^{m} h_{p(\cdot)}(\cdot, s_i \circ p(\cdot)) s_i \circ p(\cdot)$$

est continue.

Chapitre 2

Fibrés vectoriels sur un espace compact

2.1 Prolongement de sections et existence d'une métrique hermitienne

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la structure de fibré vectoriel sur un espace compact [1]. Les espaces compacts sont agréables à manier, entre autres en raison de l'existence de partition de l'unité subordonnée à tout recouvrement ouvert.

Définition 2.1.1 (Partition de l'unité)**.** *Une* ***partition de l'unité*** *de X espace topologique est une famille $(\phi_i)_{i\in I}$ de fonctions continues de X dans $[0,1]$, dont la famille des supports est localement finie, et qui vérifie $\sum_{i\in I}\phi_i = 1$. Soit $U = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Une* ***partition de l'unité subordonnée à*** *U est une partition de l'unité $(\phi_i)_{i\in I}$ de X telle que, pour tout $i \in I$, le support de ϕ_i est contenu dans U_i.*

Si X est compact, alors tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini et une partition de l'unité finie qui est subordonnée à ce sous-recouvrement. Une autre propriété intéressante des espaces compacts est que ce sont des espaces normaux [2].

Définition 2.1.2 (Espace normal)**.** *Un espace topologique X est dit* ***normal*** *s'il est séparé et si deux fermés disjoints de X admettent des voisinages disjoints.*

Remarque 2.1.1 (Prolongement de Tietze)**.** *Un espace normal X vérifie le théorème de prolongement de Tietze : soit X un espace normal, F un fermé de X et $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g\big|_F = f$. On en déduit immédiatement que toute fonction $f : F \longrightarrow V$ continue à valeurs dans un espace vectoriel V réel ou complexe de dimension finie se prolonge en une fonction continue $g : X \longrightarrow V$.*

Une première application de ces propriétés est le prolongement de sections.

1. Nous prenons la définition d'espace compact comme étant un espace séparé en plus d'être quasi-compact.
2. De nombreux résultats de ce chapitre restent vrais en considérant X comme étant seulement **paracompact**, i.e. séparé et vérifiant que tout recouvrement ouvert admet un raffinement localement fini. Un tel espace admet alors une partition de l'unité subordonnée à tout recouvrement ouvert et est normal.

Lemme 2.1.1 (Prolongement de sections)**.** *Soit (E, X, p) un fibré vectoriel sur un espace topologique X compact et Y un fermé de X. Soit $s : Y \longrightarrow E\big|_Y$ une section, alors il existe une section $\tilde{s} : X \longrightarrow E$ telle que $\tilde{s}\big|_Y = s$.*

Démonstration. Soit $s \in \Gamma\left(E\big|_Y\right)$ une section, on peut considérer localement s comme une fonction à valeurs vectorielles. Par prolongement de Tietze, tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U_x tel qu'il existe $s_x \in \Gamma\left(E\big|_{U_x}\right)$ une section telle que $s_x\big|_{Y\cap U_x} = s\big|_{Y\cap U_x}$ [3]. Par compacité de X, on peut extraire un sous-recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de X où $I \subset X$ est fini. On fixe $(\phi_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité subordonnée à $(U_i)_{i\in I}$. Soit pour tout $i \in I$, $s_i \in \Gamma(E)$ la section définie par

$$s_i(x) = \begin{cases} \phi_i(x)s(x) & \text{si } x \in U_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors $\tilde{s} : X \longrightarrow E$ par :

$$\tilde{s} = \sum_{i\in I} s_i$$

qui est bien définie et prolonge s : pour tout $x \in Y$,

$$\tilde{s}(x) = \sum_{i\in I} \phi_i(x)\sigma_i(x) = \sum_{i\in I} \phi_i(x)s(x) = s(x).$$

Enfin, $\tilde{s} \in \Gamma(E)$ comme somme finie d'éléments de $\Gamma(E)$. ☐

De façon analogue, on a le lemme suivant :

Lemme 2.1.2 (Existence d'une métrique hermitienne)**.** *Soit (E, X, p) un fibré vectoriel sur un espace topologique X compact. Alors il existe une métrique hermitienne sur E.*

Démonstration. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini d'ouverts trivialisants de X et $(\phi_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité subordonnée à $(U_i)_{i\in I}$. Soit pour tout $i \in I$, h_i une métrique hermitienne sur $E\big|_{U_i}$. Soit pour tout $i \in I$, k_i la section de $\mathrm{Herm}(E)$ définie par

$$k_i(x) = \begin{cases} \phi_i(x)h_i(x) & \text{si } x \in U_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, on définit $h \in \Gamma(\mathrm{Herm}(E))$ par

$$h = \sum_{i\in I} k_i.$$

Alors h est positive, il reste à montrer le caractère définie de h. Soit $x \in X$ et $v \in E_x$ tel que $h(x)(v, v) = 0$. Fixons $i_0 \in I$ tel que $\phi_{i_0}(x) \neq 0$. Alors $k_{i_0}(x)(v, v) = \phi_{i_0}(x)h_{i_0}(x)(v, v) = 0$, donc $h_{i_0}(x)(v, v) = 0$ et par caractère définie de $h_{i_0}(x)$, $v = 0$. Donc h est bien définie positive. ☐

3. Cette dernière condition étant tautologique si $U_x \cap Y = \varnothing$.

Lemme 2.1.3 (Prolongement des isomorphismes)**.** *Soit (E, X, p), (F, X, q) deux fibrés vectoriels sur un espace topologique X et Y un fermé de X. Soit $\varphi : E\big|_Y \longrightarrow F\big|_Y$ un isomorphisme de fibrés vectoriels. Alors il existe U un ouvert de X tel que $Y \subset U$ et $\tilde{\varphi} : E\big|_U \longrightarrow F\big|_U$ un isomorphisme de fibrés vectoriels prolongeant φ.*

Démonstration. L'application φ est un morphisme de fibrés, donc peut-être vu comme section du fibré $\mathrm{Hom}(E, F)\big|_Y$ sur Y. Par le lemme 2.1.1, φ se prolonge en un élément $\tilde{\varphi}$ de $\Gamma(\mathrm{Hom}(E, F))$. Il suffit de prendre U l'ouvert de X des points tels que $\tilde{\varphi}_x$ est un isomorphisme (on utilise la remarque 1.3.4), qui est un voisinage ouvert de Y. $\square$

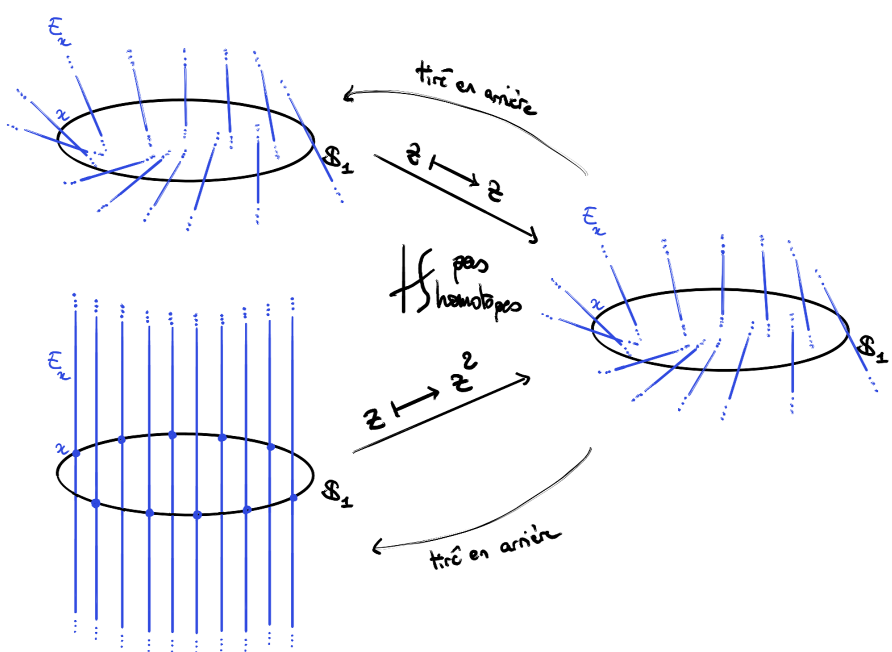
Lemme 2.1.4 (Invariance du tiré en arrière par homotopie)**.** *Soit (E, X, p) un fibré vectoriel sur un espace topologique X et Y un espace topologique compact. Soit $f_0, f_1 : Y \longrightarrow X$ deux applications continues et $f : Y \times [0,1] \longrightarrow X$ une homotopie entre f_0 et f_1. Alors $f_0^*(E)$ et $f_1^*(E)$ sont isomorphes.*

Démonstration. Pour tout $t \in [0,1]$, on note $f_t \overset{\text{def}}{=} f(\cdot, t)$ et $\mathrm{pr}_1 : Y \times [0,1] \longrightarrow Y$ la projection sur le premier facteur. Soit $t \in [0,1]$. Alors

$$f^*(E)\Big|_{Y\times\{t\}} \cong (f_t \circ \mathrm{pr}_1)^*(E)\Big|_{Y\times\{t\}} \cong \mathrm{pr}_1^* \circ f_t^*(E)\Big|_{Y\times\{t\}}.$$

Par le lemme 2.1.3, il existe un ouvert U voisinage ouvert de $Y \times \{t\}$ de la forme $Y \times I$ où I est un intervalle de $[0,1]$ contenant t (car $Y \times \{t\}$ est compact) tel que pour tout $s \in I$, $f_s^*(E)$ est isomorphe à $f_t^*(E)$. On conclut par connexité de $[0,1]$. $\square$

En particulier, les applications $z \mapsto z$ et $z \mapsto z^2$ ne sont pas homotopes.



On note $(\mathrm{Vect}(X), \oplus)$ le monoïde des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels sur X et $\mathrm{Vect}_n(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang n sur X. Avec ces notations, le lemme 2.1.4 donne que toute équivalence d'homotopie $f : X \longrightarrow Y$ entre deux espaces compacts X et Y induit des isomorphismes de monoïdes

$$f^* : \mathrm{Vect}(Y) \longrightarrow \mathrm{Vect}(X) \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ f^* : \mathrm{Vect}_n(Y) \longrightarrow \mathrm{Vect}_n(X).$$

Toujours par ce dernier lemme, si X espace topologique compact contractile, alors X n'admet que des fibrés vectoriels triviaux et $(\mathrm{Vect}(X), \oplus) \cong (\mathbb{N}, +)$.

2.2 Deux constructions de fibrés vectoriels : écrasement et recollement

Écrasement : Soit (E, X, p) fibré vectoriel sur X compact. Soit Y fermé dans X et supposons que $E\big|_Y$ est trivial. On note X/Y l'espace topologique quotient de X par la relation d'équivalence engendrée par $Y \times Y$ [4] et on souhaite munir X/Y d'une structure de fibré vectoriel. Fixons $\alpha : E\big|_Y \longrightarrow Y \times V$ un isomorphisme de fibrés vectoriels et on note $\sim$ la relation d'équivalence sur E engendrée par

$$\{(e, \varepsilon) \in E\big|_Y \times E\big|_Y : \mathrm{pr}_2 \circ \alpha(e) = \mathrm{pr}_2 \circ \alpha(\varepsilon)\}$$

i.e. la relation d'équivalence qui identifie les fibres de E au-dessus de Y. On note [5] E/α l'espace topologique quotient de E par la relation d'équivalence $\sim$. Alors p passe au quotient en une application continue $p_\alpha : E/\alpha \longrightarrow X/Y$ et $(E/\alpha, X/Y, p_\alpha)$ est une famille d'espaces vectoriels sur X/Y.

Définition 2.2.1 (Homotopie d'isomorphismes)**.** *Soit E_1 et E_2 deux fibrés vectoriels sur un espace topologique X. On appelle **homotopie d'isomorphismes** entre E_1 et E_2 tout isomorphisme $\Phi : \mathrm{pr}_1^*(E_1) \longrightarrow \mathrm{pr}_1^*(E_2)$, où $\mathrm{pr}_1 : X \times [0,1] \longrightarrow X$. Autrement dit, il s'agit d'une famille $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ d'isomorphismes entre E_1 et E_2 paramétrée de façon continue par $[0,1]$. On dit alors que φ_0 et φ_1 sont **homotopes** et ceci définit une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont appelées **classes d'homotopie d'isomorphismes**.*

Proposition 2.2.1. *Le triplet $(E/\alpha, p_\alpha, X/Y)$ est un fibré vectoriel sur X/Y. De plus, la classe d'isomorphisme de E/α ne dépend que de la classe d'homotopie d'isomorphismes de α. Supposons de plus que Y est contractile, et notons $\pi : X \longrightarrow X/Y$ la projection canonique. Alors $\pi^* : \mathrm{Vect}(X/Y) \longrightarrow \mathrm{Vect}(X)$ est un isomorphisme de monoïdes.*

Démonstration. Pour montrer que E/α est un fibré vectoriel sur X/Y, il suffit de vérifier la condition de trivialité locale en le point image de Y dans X/Y, car $X - Y$ est un ouvert de X saturé pour la relation d'équivalence (sur X) donc la trivialité locale s'hérite du celle de (E, p, X).

Par le lemme 2.1.3, il existe un ouvert U de X tel que $Y \subset U$ et $\tilde{\alpha} : E\big|_U \longrightarrow U \times V$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels prolongeant α. Alors $\tilde{\alpha}$ passe au quotient en un isomorphisme

4. Autrement dit, on identifie les points de Y entre eux et on laisse les points de $X - Y$ distincts.

5. Nous verrons ultérieurement la dépendance de la classe d'isomorphisme de E/α par rapport au choix de l'isomorphisme α.

de $\left(E\big|_U\right)/\alpha \cong (E/\alpha)\big|_{U/Y}$ sur $U/Y \times V$. Il reste à montrer que la classe d'isomorphisme de E/α ne dépend que de la classe d'homotopie d'isomorphismes de α. Soit α_0, α_1 deux trivialisations de $E\big|_Y$ homotopes. Ceci fournit une trivialisation β de $E \times [0,1]$ au-dessus de $Y \times [0,1]$ telle que $\beta\big|_{Y\times\{0\}} = \alpha_0$ et $\beta\big|_{Y\times\{1\}} = \alpha_1$. Soit

$$\begin{aligned} \phi \quad : \qquad X/Y \times [0,1] &\longrightarrow (X \times [0,1])/(Y \times [0,1]) \\ (x \bmod \sim_Y, t) &\longmapsto (x,t) \bmod \sim_{Y\times[0,1]}. \end{aligned}$$

Alors $\phi^*(E\times[0,1]/\beta)$ est un fibré vectoriel sur $X/Y\times[0,1]$ et $\phi^*(E\times[0,1]/\beta)\big|_{X\times\{t\}}$ est isomorphe à E/α_t pour tout $t \in [0,1]$. Par le lemme 2.1.4, $E/\alpha_0 \cong E/\alpha_1$.

Supposons désormais que Y est contractile. Si $\gamma : E\big|_Y \longrightarrow Y \times V$ est une autre trivialisation de $E\big|_Y$, alors $\alpha \circ \gamma^{-1}$ est un isomorphisme de fibrés triviaux, i.e. correspond à une application continue $\Phi : Y \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$. La contractibilité de Y implique que Φ est homotope à une application constante, et la connexité par arcs de $\mathrm{GL}(V)$ donne que Φ est homotope à l'application constante égale à l'identité. Donc α et γ sont homotopes.
D'après ce qui précède, l'application $g : \mathrm{Vect}(X) \longrightarrow \mathrm{Vect}(X/Y)$ qui à $[E]$ associe $[E/\alpha]$ est bien définie. On a clairement $g \circ \pi^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Vect}(X/Y)}$ et $\pi^* \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{Vect}(X)}$. □

Recollement : Soit $X = X_1 \cup X_2$ et $A = X_1 \cap X_2$ où X_1, X_2 sont compacts. Soit (E_1, p_1, X_1) et (E_2, p_2, X_2) deux fibrés vectoriels sur X_1 et X_2 respectivement. On suppose que $E_1\big|_A$ et $E_2\big|_A$ sont isomorphes. On note $\varphi : E_1\big|_A \longrightarrow E_2\big|_A$ un isomorphisme de fibrés vectoriels.

On veut alors construire un fibré vectoriel sur X. Soit $E_1 \cup_\varphi E_2$ l'espace topologique quotient de $E_1 \sqcup E_2$ par la relation d'équivalence engendrée par

$$\{(e_1, e_2) \in E_1\big|_A \times E_2\big|_A : \varphi(e_1) = e_2\}.$$

Alors $p_1 \sqcup p_2$ passe au quotient en une application continue $p : E_1 \cup_\varphi E_2 \longrightarrow X$ qui fait de $E_1 \cup_\varphi E_2$ une famille d'espaces vectoriels sur X.

Proposition 2.2.2. $(E_1 \cup_\varphi E_2, p, X)$ *est un fibré vectoriel sur* X. *De plus, la classe d'isomorphisme de* $E_1 \cup_\varphi E_2$ *ne dépend que de la classe d'homotopie d'isomorphismes de* φ.

Démonstration. La relation d'équivalence étant triviale sur $E_1\big|_{X-A}$ et $E_2\big|_{X-A}$, il suffit de vérifier la condition de trivialité locale en les points de A. Soit $a \in A$, fixons U_1 un voisinage fermé de a dans X et $\theta_1 : E_1\big|_{U_1} \longrightarrow U_1 \times \mathbb{C}^n$ un isomorphisme de fibrés vectoriels, qui se restreint en un isomorphisme $\theta_1^A : E_1\big|_{U_1\cap A} \longrightarrow U_1 \cap A \times \mathbb{C}^n$. On pose

$$\theta_2^A \overset{\text{def}}{=} \theta_1^A \circ \left(\varphi\Big|_{E_1\big|_{U_1\cap A}}\right)^{-1} : \; E_2\big|_{U_1\cap A} \longrightarrow U_1 \cap A \times \mathbb{C}^n$$

qui se prolonge d'après le lemme 2.1.3 en un isomorphisme $E_2\big|_{U_2} \longrightarrow U_2 \times \mathbb{C}^n$ encore noté θ_2, où U_2 désigne un voisinage ouvert de a dans X. Alors par construction, $\theta_1 \sqcup \theta_2$ passe au quotient en un isomorphisme de $E_1 \cup_\varphi E_2$ sur $(U_1 \cup U_2) \times \mathbb{C}^n$, donc $E_1 \cup_\varphi E_2$ est un fibré vectoriel sur X.

Soit $\Phi : \mathrm{pr}_1^*(E_1\big|_A) \longrightarrow \mathrm{pr}_1^*(E_2\big|_A)$ une homotopie d'isomorphismes entre $E_1\big|_A$ et $E_2\big|_A$. Pour tout $t \in [0,1]$, on note

$$\phi_t : E_1\big|_A \longrightarrow E_2\big|_A$$

l'isomorphisme qui envoie $e \in E_1\big|_A$ sur $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi(e,t)$ et

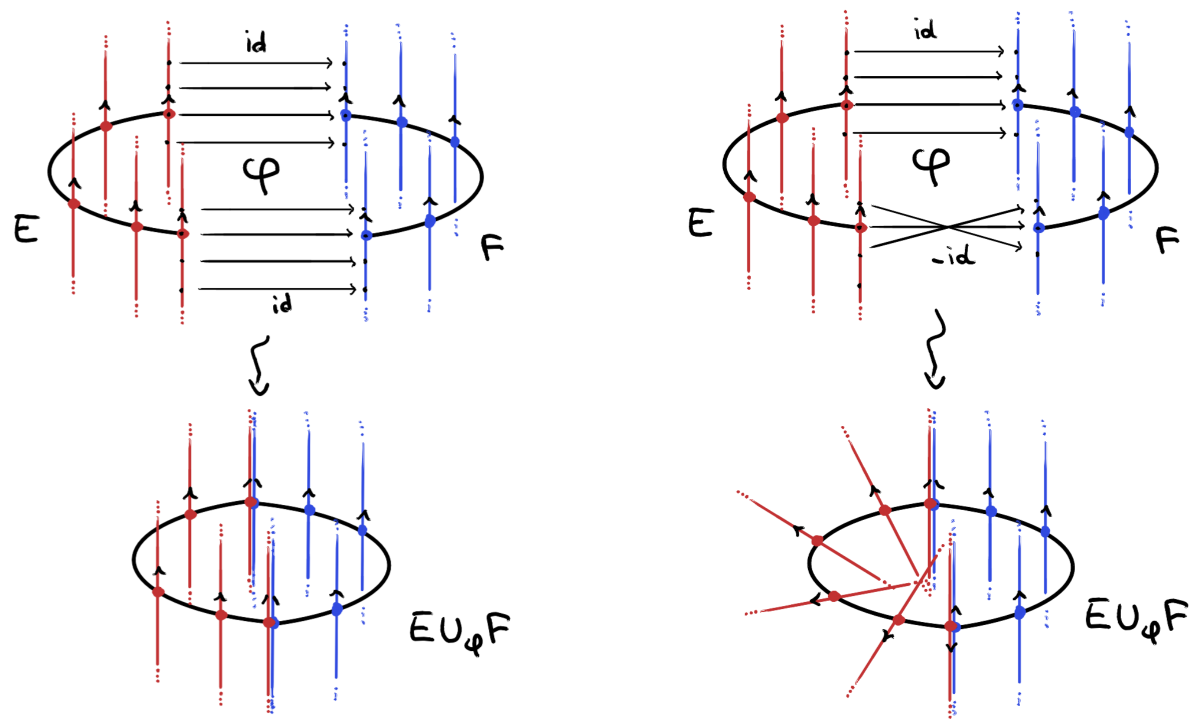
$$\iota_t : X \hookrightarrow X \times \{t\}$$

l'inclusion canonique. Alors pour tout $t \in [0,1]$,

$$\iota_t^*((\mathrm{pr}_1^*(E_1) \cup_\Phi \mathrm{pr}_1^*(E_2))) \cong E_1 \cup_{\phi_t} E_2$$

donc $E_1 \cup_{\phi_0} E_2$ et $E_1 \cup_{\phi_1} E_2$ sont isomorphes par le lemme 2.1.4. $\square$

Voici un exemple simple de recollements de fibrés triviaux sur des segments.



2.3 Classification des fibrés vectoriels sur la suspension d'un espace topologique

Cette sous-section sert d'application à la section précédente. Le but est de démontrer le résultat suivant :

Proposition 2.3.1. *Soit X un espace topologique compact. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les ensembles* $\mathrm{Vect}_n(SX)$ *et* $[X \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})]$ *sont en bijection où* $[X \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})]$ *désigne l'ensemble des classes d'homotopie des fonctions de X dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Soit les deux cônes de la suspension $C^+X = X \times [0,1]/X \times \{1\}$ et $C^-X = X \times [-1,0]/X \times \{-1\}$. Ces deux cônes sont contractiles donc la restriction d'un fibré vectoriel sur SX à un des deux cônes est un fibré trivial. De plus, toute application continue

$$f : X \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

est un isomorphisme de fibrés vectoriels sur $C^+X \cap C^-X \simeq X$. Cela nous invite à considérer la construction suivante :

Définition 2.3.1 (ε_f)**.** *Soit $f : X \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ une application continue. On note ε_f le fibré vectoriel sur SX défini par le recollement des fibrés triviaux sur les cônes par la fonction f.*

Remarque 2.3.1. *Au vu de la proposition 2.2.2, la classe d'isomorphisme du fibré vectoriel ε_f ne dépend que de la classe d'homotopie de f.*

On va maintenant démontrer que l'application

$$\begin{aligned} \varepsilon : [X \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})] &\longrightarrow \mathrm{Vect}_n(SX) \\ f &\longmapsto \varepsilon_f \end{aligned}$$

nous donne la bijection souhaitée.

La remarque 2.3.1 assure que cette application est bien définie. Montrons qu'on peut lui trouver un inverse. Soit E un fibré vectoriel sur SX de rang $n \in \mathbb{N}$. On note E_+ et E_- les restrictions de E aux cônes C^+X et C^-X respectivement. En écrivant $\alpha_+ : E_+ \longrightarrow C^+X \times \mathbb{C}^n$ et $\alpha_- : E_- \longrightarrow C^-X \times \mathbb{C}^n$ des trivialisations de E_+ et E_-, on peut considérer l'application

$$f_E = \alpha_-\Big|_X \circ \alpha_+^{-1}\Big|_X : \; X \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Afin de vérifier que cela permet de définir une application depuis $\mathrm{Vect}_n(SX)$ vers $[X \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})]$, il reste à vérifier que la classe d'homotopie de f_E ne dépend pas du choix de α_+ et α_-.

Pour ce faire, on rappelle l'argument suivant : pour Y un espace contracile, deux trivialisations d'un fibré $\widetilde{E}$ sur Y sont homotopes (cf. la preuve de la proposition 2.2.1).

Ainsi, on a construit une application inverse

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}_n(SX) &\longrightarrow [X \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})] \\ E &\longmapsto f_E. \end{aligned}$$

Remarque 2.3.2. *Cela permet d'obtenir une classification des fibrés vectoriels de rang n sur la sphère $\mathbb{S}_m$. En effet, $\mathbb{S}_m$ est homéomorphe à $S\mathbb{S}_{m-1}$ donc $\mathrm{Vect}_n(\mathbb{S}_m) \simeq [\mathbb{S}_{m-1} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})]$.*

2.4 Interprétation homotopique des fibrés vectoriels

Définition 2.4.1 (Suite exacte de fibrés vectoriels)**.** *Soit* $((E_n, p_n, X))_{n\in\mathbb{Z}}$ *une famille de fibrés vectoriels sur* X *et* $(\varphi_n : E_n \longrightarrow E_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ *une famille de morphismes de fibrés vectoriels. On dit que la suite*

$$\cdots \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} E_n \xrightarrow{\varphi_n} E_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

est ***exacte*** *si pour tout* $x \in X$*, la suite d'espaces vectoriels*

$$\cdots \longrightarrow (E_{n-1})_x \xrightarrow{(\varphi_{n-1})_x} (E_n)_x \xrightarrow{(\varphi_n)_x} (E_{n+1})_x \longrightarrow \cdots$$

est exacte. On définit de façon analogue la notion de ***suite exacte courte*** *de fibrés vectoriels.*

Lemme 2.4.1 (Suite exacte courte de fibrés vectoriels)**.** *Soit une suite exacte courte de fibrés vectoriels*

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} E'' \longrightarrow 0$$

sur un espace topologique X *compact. Alors* $E \cong E' \oplus E''$.

Démonstration. En fixant une métrique hermitienne sur E (licite par le lemme 2.1.2), on obtient $E \cong E' \oplus (E)'^{\perp}$; $E'' \cong (E)'^{\perp}$ conclut la démonstration. □

Définition 2.4.2 (Sous-espace ample)**.** *Soit* (E, X, p) *un fibré vectoriel sur un espace topologique* X*. Un sous-espace vectoriel* $S \subset \Gamma(E)$ *est dit* ***ample*** *si l'application*

$$\begin{aligned} \varphi : X \times S &\longrightarrow E \\ (x, s) &\longmapsto s(x) \end{aligned}$$

est surjective.

Lemme 2.4.2 (Existence d'un sous-espace ample de dimension finie)**.** *Soit* (E, X, p) *un fibré vectoriel sur un espace topologique* X *compact. Alors* $\Gamma(E)$ *admet un sous-espace ample de dimension finie. Il existe donc* $m \in \mathbb{N}$ *et* $\psi : X \times \mathbb{C}^m \twoheadrightarrow E$ *un épimorphisme.*

Démonstration. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de X par des ouverts trivialisants et $(\phi_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité subordonnée à $(U_i)_{i\in I}$. Soit pour tout $i \in I$, $S_i \subset \Gamma\left(E\big|_{U_i}\right)$ un sous-espace ample de dimension finie (licite par le lemme 1.3.2) et posons $\theta_i : S_i \longrightarrow \Gamma(E)$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels qui envoie $s \in S_i$ sur la section de E définie par

$$\theta_i(s)(x) = \begin{cases} \phi_i(x)s(x) & \text{si } x \in U_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{aligned}\Theta : \bigoplus_{i\in I} S_i &\longrightarrow \Gamma(E)\\ (s_i)_{i\in I} &\longmapsto \sum_{i\in I} \theta_i(s_i).\end{aligned}$$

Alors Θ est un morphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels d'image S de dimension finie, dont on veut montrer que l'image est ample. Soit $x \in X$, fixons $i_0 \in I$ tel que $\phi_{i_0}(x) \neq 0$. Alors l'application

$$\begin{aligned}\theta_{i_0}(S_{i_0}) &\longrightarrow E_x\\ s &\longmapsto s(x)\end{aligned}$$

est surjective, donc S est ample. En prenant $m = \dim(S)$, on obtient le deuxième résultat escompté. □

Remarque 2.4.1. *Soit E un fibré vectoriel sur un espace topologique X compact. Alors il existe un fibré E' sur X tel que $E \oplus E'$ est trivial. En effet, d'après le lemme 2.4.2, il existe un épimorphisme $\psi : X \times \mathbb{C}^m \longrightarrow E$; on conclut par le lemme 2.4.1.*

Définition 2.4.3 (Variété grassmannienne)**.** *Soit V un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$. On appelle **variété grassmannienne** de codimension k de V, notée $\mathcal{G}(k, V)$, l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension $n - k$ de V. On a que $\mathrm{GL}(V)$ agit transitivement sur $\mathcal{G}(k, V)$, donc si on fixe $g_0 \in \mathcal{G}(k, V)$ dont on note H le stabilisateur, alors $\mathcal{G}(k, V)$ est en bijection avec $\mathrm{GL}(V)/H$. On munit $\mathcal{G}(k, V)$ de la toplogie faisant de cette bijection un homéomorphisme, où $\mathrm{GL}(V)/H$ est muni de la toplogie quotient.*

Si $n \in \mathbb{N}$ et $V = \mathbb{C}^n$, on note $\mathcal{G}(k, n)$ la variété grassmannienne de codimension k de $\mathbb{C}^n$.

Définition 2.4.4 (Application induite par un épimorphisme)**.** *Soit E un fibré vectoriel sur X, V un espace vectoriel et $\varphi : X \times V \longrightarrow E$ un épimorphisme. L'**application induite** par φ est l'application continue $f : X \longrightarrow \mathcal{G}(k, V)$ (avec $k = \dim(E)$) qui à $x \in X$ associe le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\varphi_x)$ de V.*

Définition 2.4.5 (Fibré classifiant)**.** *Soit V un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$. On note $\gamma^k = \{(g, v) \in \mathcal{G}(k, V) \times V,\ v \in g\}$. Le **fibré classifiant** de $\mathcal{G}(k, V)$ est le fibré quotient $(\mathcal{G}(k, V) \times V)/\gamma^k$. Le fibré trivial $\mathcal{G}(k, V) \times V$ est parfois appelé **fibré canonique** ou **fibré tautologique**.*

Proposition 2.4.1. *Soit E' un fibré vectoriel sur X et $\varphi : X \times V \longrightarrow E'$ un épimorphisme. Si $f : X \longrightarrow \mathcal{G}(k, V)$ est l'application induite par φ, alors E' est isomorphe au tiré en arrière du fibré classifiant par f.*

Démonstration. Soit E le fibré classifiant sur $\mathcal{G}(k, V)$. On a $f^*(E) = \{(x, V/\mathrm{Ker}(\varphi_x)),\ x \in X\}$ et donc φ passe au quotient en un isomorphisme de fibrés vectoriels $\varphi' : f^*(E) \longrightarrow E'$. □

On considère la projection naturelle $\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^{m-1}$ définie par $(z_1, \dots, z_m) \longmapsto (z_1, \dots, z_{m-1})$. Celle-ci induit une application continue $\iota_{m-1} : \mathcal{G}(k, \mathbb{C}^{m-1}) \longrightarrow \mathcal{G}(k, \mathbb{C}^m)$. On peut alors considérer la limite inductive $\varinjlim_{m\in\mathbb{N}} [X, \mathcal{G}(k, \mathbb{C}^m)]$.

Remarque 2.4.2. *En notant E_m l'espace classifiant de $\mathcal{G}(k, \mathbb{C}^m)$, on remarque que $\iota_{m-1}^*(E_m)$ est isomorphe à E_{m-1}.*

Théorème 2.4.1. *Soit X un espace topologique compact. L'application*

$$\varinjlim_{m\in\mathbb{N}} [X \to \mathcal{G}(k, \mathbb{C}^m)] \longrightarrow \mathrm{Vect}_n(X)$$

qui à f associe la classe d'isomorphisme de $f^*(E_m)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Commençons par remarquer que l'application est bien définie : la classe d'isomorphisme de $f^*(E_m)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de f par le lemme 2.1.4.

On souhaite maintenant définir un inverse explicite à cette application. La proposition 2.4.1 pousse à considérer la fonction qui à un épimorphisme $\varphi : X \times \mathbb{C}^m \longrightarrow E$ associe $f : X \longrightarrow \mathcal{G}(k, \mathbb{C}^m)$ l'application induite par φ. Il faut alors s'assurer que la classe d'homotopie de f (vu comme application dans $\mathcal{G}(k, \mathbb{C}^{m'})$ pour m' grand) ne dépend pas du choix de φ.

Soit $\varphi_0 : X \times \mathbb{C}^{m_0} \longrightarrow E$, $\varphi_1 : X \times \mathbb{C}^{m_1} \longrightarrow E$ deux épimorphismes et g_0, g_1 les applications induites par φ_0 et φ_1. On considère pour $t \in [0,1]$ les applications

$$\begin{aligned} \Phi_t : X \times \mathbb{C}^{m_0} \times \mathbb{C}^{m_1} &\longrightarrow E \\ (x, v_0, v_1) &\longmapsto (1-t)\varphi_0(x, v_0) + t\varphi_1(x, v_1). \end{aligned}$$

L'application Φ_t est un épimorphisme pour tout $t \in [0,1]$. Soit $f_t : X \longrightarrow \mathcal{G}(k, \mathbb{C}^{m_0+m_1})$ l'application induite par Φ_t (où l'on a identifié $\mathbb{C}^{m_0+m_1}$ et $\mathbb{C}^{m_0} \oplus \mathbb{C}^{m_1}$).

Soit $j_0 : \mathcal{G}(k, \mathbb{C}^{m_0}) \longrightarrow \mathcal{G}(k, \mathbb{C}^{m_0+m_1})$, $j_1 : \mathcal{G}(k, \mathbb{C}^{m_1}) \longrightarrow \mathcal{G}(k, \mathbb{C}^{m_0+m_1})$ les inclusions naturelles. On considère également $T : \mathcal{G}(k, \mathbb{C}^{m_0+m_1}) \longrightarrow \mathcal{G}(k, \mathbb{C}^{m_0+m_1})$ induite par la permutation des m_0 premières coordonnées de $\mathbb{C}^{m_0+m_1}$ avec les m_1 dernières. On a alors $f_0 = j_0 \circ g_0$ et $f_1 = T \circ j_1 \circ g_1$. Comme T est homotope à l'identité et que f_0 et f_1 sont homotopes, on obtient que $j_0 \circ g_0$ et $j_1 \circ g_1$ sont homotopes. □

Remarque 2.4.3 (Le cas des espaces localement contractiles)**.** *Si X est localement contractile, alors $[X \to \mathcal{G}(k, \mathbb{C}^{2m})] \simeq \mathrm{Vect}_n(X)$ où m est donné dans le lemme 2.4.2.*

Chapitre 3

K−théorie topologique

3.1 Groupe de Grothendieck

Soit $(A, \oplus)$ un monoïde commutatif. Il est possible de lui associer un couple $(\mathrm{K}(A), \alpha)$ où $\mathrm{K}(A)$ est un groupe abélien et $\alpha : A \longrightarrow \mathrm{K}(A)$ est un morphisme de monoïdes commutatifs, vérifiant la propriété universelle suivante :

pour tout (G, f) où G est un groupe abélien et $f : A \longrightarrow G$ un morphisme de monoïdes commutatifs, il existe un unique morphisme de groupes abéliens $\overline{f} : \mathrm{K}(A) \longrightarrow G$ tel que $f = \overline{f} \circ \alpha$, i.e. tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{K}(A) \arrow[d, dashed, "\exists!\, \overline{f}"] \\ & G. \end{tikzcd}$$

Par définition, il s'agit d'un objet initial dans la catégorie dont les objets sont les couples (G, f) où G est un groupe abélien et $f : A \longrightarrow G$ un morphisme de monoïdes commutatifs et les morphismes sont les morphismes de groupes abéliens faisant commuter le diagramme ci-dessus. Un tel couple $(\mathrm{K}(A), \alpha)$ est donc unique à (unique) isomorphisme près de cette catégorie. Montrons qu'un tel couple existe.

On considère $(L_{\mathrm{ab}}(A), +)$ le groupe abélien libre sur A, muni de $\iota_A : A \hookrightarrow L_{\mathrm{ab}}(A)$ et

$$E(A) = \{a + b - (a \oplus b) \mid a, b \in A\}.$$

Proposition 3.1.1 (Définition de $\mathrm{K}(A)$)**.** *Posons* $\mathrm{K}(A) \overset{\mathrm{def}}{=} L_{\mathrm{ab}}(A)/E(A)$*. C'est un groupe abélien appelé* ***le groupe de Grothendieck*** *de* A*. Alors* $(\mathrm{K}(A), \alpha)$ *où*

$$\begin{aligned} \alpha : A &\longrightarrow \mathrm{K}(A) \\ a &\longmapsto [a] \overset{\mathrm{def}}{=} a \bmod E(A) \end{aligned}$$

vérifie la propriété universelle ci-dessus.

Démonstration. En effet, α est un morphisme de monoïdes commutatifs par construction du monoïde quotient $L_{\mathrm{ab}}(A)/E(A)$.

Soit G un groupe abélien et $f : A \longrightarrow G$ un morphisme de monoïdes et notons $\pi : L_{\mathrm{ab}}(A) \longrightarrow \mathrm{K}(A)$ le morphisme canonique. La propriété universelle de $(L_{\mathrm{ab}}(A), \iota_A)$ nous permet d'étendre f de façon unique en un morphisme de groupes $\widehat{f} : L_{\mathrm{ab}}(A) \longrightarrow G$ tel que $\widehat{f} \circ \iota_A = f$, i.e. tel qu'on ait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota_A"] \arrow[dr, "f"'] & L_{\mathrm{ab}}(A) \arrow[d, dashed, "\widehat{f}"] \\ & G. \end{tikzcd}$$

Il reste à démontrer que $\widehat{f}$ passe au quotient par $E(A)$. Si $a + b - (a \oplus b) \in E(A)$, alors on a

$$\widehat{f}(a + b - (a \oplus b)) = \widehat{f}(a)\widehat{f}(b)(\widehat{f}(a)\widehat{f}(b))^{-1} = 1_G$$

car $\widehat{f}$ est à la fois un morphisme de monoïdes de source A et un morphisme de groupes de source $L_{\mathrm{ab}}(A)$.

Donc $\widehat{f}$ induit un morphisme de groupes abéliens $\overline{f} : \mathrm{K}(A) \longrightarrow G$ par la propriété universelle de $(\mathrm{K}(A), \pi)$. On a $\overline{f} \circ \pi = \widehat{f}$ donc $\overline{f} \circ \pi \circ \iota_A = \overline{f} \circ \alpha = f$.

Montrons l'unicité de g faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{K}(A) \arrow[d, "g"] \\ & G. \end{tikzcd}$$

Soit alors $g : \mathrm{K}(A) \longrightarrow G$ un morphisme de groupes abéliens tel que le diagramme ci-dessus commute. On a $\alpha = \pi \circ \iota_A$ et $g \circ \alpha = f$ d'où on tire que

$$g \circ \pi \circ \iota_A = \widehat{f} \circ \iota_A.$$

D'où par propriété universelle de $(L_{\mathrm{ab}}(A), \iota_A)$, on tire que $g \circ \pi = \widehat{f}$, i.e. que g est l'unique morphisme de groupes abéliens associé à $\widehat{f}$ donné par la propriété universelle de $(\mathrm{K}(A), \pi)$. Donc $g = \overline{f}$, ce qui prouve l'unicité de g. □

Remarque 3.1.1 (Une autre construction du groupe de Grothendieck)**.** *On propose une autre construction du groupe de Grothendieck.*

On munit $A \times A$ de la relation d'équivalence suivante :

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) \iff \exists c \in A,\ a_1 \oplus b_2 \oplus c = b_1 \oplus a_2 \oplus c.$$

On pose $\mathrm{K}(A) \overset{\mathrm{def}}{=} (A \times A)/\sim$ le monoïde quotient de $A \times A$ par cette relation d'équivalence, dont on note $+$ la loi. Notons $[(a, b)]$ la classe d'équivalence de (a, b) dans $\mathrm{K}(A)$ et α le morphisme

$$\begin{aligned} \alpha : A &\longrightarrow \mathrm{K}(A) \\ a &\longmapsto [(a, 0)]. \end{aligned}$$

Si $(x, y) \in A \times A$, on a

$$[(x, y)] + [(y, x)] = [(x \oplus y, x \oplus y)] = [(0, 0)]$$

ce qui montre que $[(y,x)]$ *est un inverse de* $[(x,y)]$ *dans* $\mathrm{K}(A)$*, i.e. que* $(\mathrm{K}(A),+,[(0,0)])$ *est un groupe abélien.*

Montrons que $(\mathrm{K}(A),\alpha)$ *vérifie la propriété universelle de définition du groupe de Grothendieck. Soit* (G,f) *un groupe abélien et* $f : A \longrightarrow G$ *un morphisme de monoïdes commutatifs. Si* $\overline{f} : \mathrm{K}(A) \longrightarrow G$ *est un morphisme de groupes abéliens tel que* $f = \overline{f} \circ \alpha$*, alors pour tout* $(a_1,a_2) \in A \times A$*, on a*

$$\overline{f}([(a_1,a_2)]) = \overline{f}([(a_1,0)] - [(a_2,0)]) = \overline{f}([(a_1,0)]) - \overline{f}([(a_2,0)]) = f(a_1) - f(a_2).$$

Donc si $\overline{f}$ *convient, alors nécessairement* $\overline{f}$ *est donnée par la formule ci-dessus.*

Réciproquement, montrons que $\overline{f}$ *ainsi définie convient. La commutativité de* G *donne que* $\overline{f}$ *est bien un morphisme de groupes abéliens et la commutativité du diagramme est immédiate. Il reste à vérifier que* $\overline{f}$ *est bien définie.*

Soit $(a_1,a_2) \sim (b_1,b_2)$*. Fixons* $c \in A$ *tel que* $a_1 \oplus b_2 \oplus c = b_1 \oplus a_2 \oplus c$*. On a alors*

$$f(a_1) + f(b_2) + f(c) = f(b_1) + f(a_2) + f(c).$$

d'où on tire que

$$f(a_1) - f(a_2) = f(b_1) - f(b_2).$$

et donc que $\overline{f}$ *est bien définie.*

Donc $(\mathrm{K}(A),\alpha)$ *vérifie la propriété universelle ci-dessus.*

Remarque 3.1.2. *On définit ainsi un foncteur* $\mathrm{K} : \mathbf{MonC} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ *qui est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli* $|\cdot| : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{MonC}$*.*

Remarque 3.1.3 (Structure d'anneau sur le groupe de Grothendieck d'un semi-anneau)**.** *Si* $(A,\oplus,\otimes)$ *est un semi-anneau, on note* $\mathrm{K}(A)$ *le groupe de Grothendieck du monoïde commutatif* $(A,\oplus,0)$*.*

On munit $\mathrm{K}(A)$ *d'une structure d'anneau en posant*

$$[(a_1,b_1)] \times [(a_2,b_2)] = [(a_1 \otimes a_2 \oplus b_1 \otimes b_2,\ a_1 \otimes b_2 \oplus a_2 \otimes b_1)].$$

Montrons que cette loi est bien définie. Soit $(a,b) \sim (a',b')$ *et* (c,d) *dans* $A \times A$*. On fixe alors* $e \in A$ *tel que* $a \oplus b' \oplus e = a' \oplus b \oplus e$*.*

$$\begin{aligned}
&a \otimes c \oplus b \otimes d \oplus a' \otimes d \oplus b' \otimes c \oplus e \otimes (c \oplus d)\\
&= (a \oplus b' \oplus e) \otimes c \oplus (a' \oplus b \oplus e) \otimes d\\
&= (a' \oplus b \oplus e) \otimes c \oplus (a \oplus b' \oplus e) \otimes d\\
&= a' \otimes c \oplus b' \otimes d \oplus a \otimes d \oplus b \otimes c \oplus e \otimes (c \oplus d)
\end{aligned}$$

et donc

$$[(a' \otimes c \oplus b' \otimes d,\ a' \otimes d \oplus b \otimes c)] = [(a \otimes c \oplus b \otimes d,\ a \otimes d \oplus b \otimes c)].$$

Ainsi, $(\mathrm{K}(A), +, \times)$ *est un anneau, commutatif si* $(A, \otimes)$ *l'est, et* $A \longrightarrow \mathrm{K}(A)$ *est un morphisme de semi-anneaux.*

De plus, on a la propriété universelle suivante :

Soit R *un anneau et* $f : A \longrightarrow R$ *un morphisme de semi-anneaux. Alors il existe un unique morphisme d'anneaux* $\overline{f} : \mathrm{K}(A) \longrightarrow R$ *tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{K}(A) \arrow[d, dashed, "\exists!\,\overline{f}"] \\ & R \end{tikzcd}$$

3.2 Définition de la K-théorie

Définition 3.2.1 (Groupe de degré 0 de K-théorie)**.** *Soit* X *un espace topologique. On définit le* ***groupe de degré*** 0 $\mathrm{K}-$***théorie topologique*** *de* X*, noté* $\mathrm{K}^0(X)$*, comme le groupe de Grothendieck du semi-anneau*[a] $(\mathrm{Vect}(X), \oplus, \otimes)$ *des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels sur* X*.*

[a] Il s'agit d'un semi-anneau en vertu de la remarque 1.4.1.

D'après la remarque 2.4.1, en posant $[n] \overset{\text{def}}{=} [X \times \mathbb{C}^n]$, tout élément de $\mathrm{K}^0(X)$ est de la forme $[E] - [n]$ pour un fibré vectoriel E sur X et un entier naturel n.

Remarque 3.2.1. *Une application continue* $f : X \longrightarrow Y$ *entre espaces topologiques induit un morphisme de semi-anneaux* $f^* : \mathrm{Vect}(Y) \longrightarrow \mathrm{Vect}(X)$ *qui envoie la classe d'isomorphisme de* E *sur la classe d'isomorphisme de* f^*E*.*

On en tire un morphisme d'anneaux $\mathrm{K}^0(f) : \mathrm{K}^0(Y) \longrightarrow \mathrm{K}^0(X)$*.*

K^0 *est donc un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des anneaux. En particulier,* $\mathrm{K}^0(\,\cdot\,)$ *est un invariant topologique.*

Définition 3.2.2 (Produit externe)**.** *Soit* X *et* Y *deux espaces topologiques. Notons* $p_X : X \times Y \longrightarrow X$ *et* $p_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ *les projections respectives sur* X *et* Y*. L'application*

$$\begin{aligned} \mathrm{K}^0(X) \times \mathrm{K}^0(Y) &\longrightarrow \mathrm{K}^0(X \times Y) \\ (x, y) &\longmapsto \mathrm{K}^0(p_X)(x)\mathrm{K}^0(p_Y)(y) \end{aligned}$$

est $\mathbb{Z}$*-bilinéaire, donc il existe un unique morphisme de groupes*

$$\mu : \mathrm{K}^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{K}^0(Y) \longrightarrow \mathrm{K}^0(X \times Y)$$

tel que

$$\forall x \in \mathrm{K}^0(X), \forall y \in \mathrm{K}^0(Y),\ \mu(x \otimes y) = \mathrm{K}^0(p_X)(x)\mathrm{K}^0(p_Y)(y).$$

On vérifie que μ est un morphisme d'anneaux, qu'on appelle ***produit externe*** *de* $\mathrm{K}^0(X)$ *et de* $\mathrm{K}^0(Y)$*. Pour tout* $x \in \mathrm{K}^0(X)$ *et* $y \in \mathrm{K}^0(Y)$*, on notera* $x * y \stackrel{\text{def}}{=} \mu(x \otimes y)$.

Définition 3.2.3 (Groupe de degré 1 de K-théorie)**.** *Soit X un espace topologique. On définit le* ***groupe de degré*** 1 ***de*** K***-théorie topologique*** *de X, noté* $\mathrm{K}^1(X)$*, comme le quotient de l'ensemble*

$$\{(E, \alpha) \mid E \in \mathrm{Ob}(\mathbf{VectBund_X}),\ \alpha \in \mathrm{Aut}(E)\}$$

par la relation d'équivalence engendrée par les relations suivantes :

- $(E, \alpha_1) \sim (E, \alpha_2)$*, où E est un fibré sur X et α_1, α_2 des automorphismes de E homotopes.*
- $(E, \alpha) \sim (E \oplus F, \alpha \oplus \mathrm{id}_F)$ *où E et F sont des fibrés vectoriels sur X et α un automorphisme de E.*
- $(E, \alpha) \sim (F, \beta \circ \alpha \circ \beta^{-1})$ *où E et F sont des fibrés vectoriels sur X, α un automorphisme de E et $\beta : E \longrightarrow F$ un isomorphisme.*

On munit $\mathrm{K}^1(X)$ d'une structure de groupe abélien en posant

$$[(E, \alpha)] + [(F, \beta)] = [(E \oplus F, \alpha \oplus \beta)]$$

où E et F sont des fibrés vectoriels sur X et α, β des automorphismes respectifs. L'élément neutre est la classe $[(E, \mathrm{id}_E)]$ pour n'importe quel fibré E, et l'inverse de $[(E, \alpha)]$ est $[(E, \alpha^{-1})]$. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques. On définit

$$\begin{aligned} \mathrm{K}^1(f) : \mathrm{K}^1(Y) &\longrightarrow \mathrm{K}^1(X) \\ [(F, \alpha)] &\longmapsto [(f^*F, f^*\alpha)] \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} f^*\alpha : f^*F &\longrightarrow f^*F \\ (x, v) &\longmapsto (x, \alpha(f(x))(v)). \end{aligned}$$

Alors $\mathrm{K}^1(f)$ est bien défini et est un morphisme de groupes abéliens. On vérifie que

- $\mathrm{K}^1(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathrm{K}^1(X)}$ pour tout espace topologique X.
- $\mathrm{K}^1(f \circ g) = \mathrm{K}^1(g) \circ \mathrm{K}^1(f)$ pour toute paire d'applications continues $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ entre espaces topologiques X, Y et Z.

Donc K^1 est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des groupes abéliens. En particulier, $\mathrm{K}^1(\,\cdot\,)$ est un invariant topologique.

Lemme 3.2.1. *Soit X un espace topologique et $n \in \mathbb{N}$. Pour α et β des automorphisme de $X \times \mathbb{C}^n$, on a* $(X \times \mathbb{C}^n, \alpha \circ \beta) = (X \times \mathbb{C}^n, \alpha) + (X \times \mathbb{C}^n, \beta)$ *dans* $\mathrm{K}^1(X)$.

Démonstration. On va utiliser le lemme suivant :

Lemme 3.2.2. *Soit A et $B : X \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ continues. Les applications* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ *sont homotopes dans* $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$.

Démonstration. Vu que, $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, il existe α un chemin qui vaut l'indentité en 0 et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ en 1. On considère alors l'homotopie :

$$\begin{aligned} X \times [0,1] &\longrightarrow \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \\ (z,t) &\longmapsto \begin{pmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \alpha(t) \begin{pmatrix} B(x) & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \alpha(t) \end{aligned}$$

qui donne $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ en 0 et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ en 1. □

Il suffit alors de rappeler que $(X \times \mathbb{C}^n, \alpha \circ \beta) = (X \times \mathbb{C}^{2n}, \alpha \circ \beta \oplus \mathrm{id}_n)$ puis d'appliquer le lemme en regardant ces automorphismes comme des matrices. □

Exemple 3.2.1 ($\mathrm{K}^0(X)$ et $\mathrm{K}^1(X)$ d'un point)**.** *Si X est un point, alors $\mathrm{K}^0(X) \cong \mathbb{Z}$ et $\mathrm{K}^1(X) \cong \{0\}$. En effet, sur un point, tout fibré est trivial, $\mathrm{K}^0(X)$ est alors isomorphe à $\mathbb{Z}$, chaque entier positif étant associé à la dimension du fibré. Le groupe $\mathrm{K}^1(X)$ est composé d'automorphismes de $\mathbb{C}^n$ qui sont tous homotopes à l'indentité. Ainsi, $\mathrm{K}^1(X) = \{0\}$.*

Autrement dit, les fibrés vectoriels au-dessus d'un point correspondent exactement aux espaces vectoriels de dimension finie, et leurs automorphismes sont exactement les éléments des groupes linéaires $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$: on retrouve la bien connue algèbre linéaire sur les espaces vectoriels de dimension finie. Le fait que $\mathrm{K}^0(\{*\}) \cong \mathbb{Z}$ correspond à l'invariant qu'est la dimension, et la trivialité de $\mathrm{K}^1(\{*\})$ traduit la connexité par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. La K−théorie topologique repose sur la question suivante : que se passe-t-il si, au lieu de considérer un espace vectoriel de dimension finie, on considère une famille de tels espaces vectoriels paramétrée par un espace topologique X plus général qu'un point, vérifiant de plus une propriété de trivialité locale ?

Définition 3.2.4 (Groupe de degré 0 de K-théorie réduite)**.** *Soit X un espace topologique compact. On définit une relation d'équivalence sur les fibrés vectoriels sur X par*

$$E \sim F \iff \exists n, m \in \mathbb{N},\ E \oplus \mathbb{C}^n \cong F \oplus \mathbb{C}^m.$$

*Le **groupe de degré de** K**-théorie réduite** de X, noté $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X)$, est l'ensemble des classes d'équivalence de fibrés vectoriels sur X au sens de la relation $\sim$ ci-dessus, muni de la loi*

$$[E] + [F] = [E \oplus F]$$

X étant compact, il s'agit bien d'un groupe abélien, d'élément neutre $[\mathbb{C}^0]$.

En un sens, considérer $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X)$ revient à s'affranchir du rang des fibrés vectoriels sur X. La proposition 3.2.1 ci-dessous établit un lien entre $\mathrm{K}^0(X)$ et $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X)$.

Proposition 3.2.1 (Lien entre $\mathrm{K}^0(X)$ et $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X)$)**.** *Soit X un espace topologique compact et $x_0 \in X$. Soit*

$$\begin{aligned} s : \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) &\longrightarrow \mathrm{K}^0(X) \\ [E] &\longmapsto [E] - \mathrm{rg}_{x_0}(E) \cdot [\mathbb{C}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r : \mathrm{K}^0(X) &\longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \\ [E] - [\mathbb{C}^n] &\longmapsto [E] \end{aligned}$$

$$\iota : \{x_0\} \longrightarrow X$$

l'injection canonique et

$$p : X \longrightarrow \{x_0\}.$$

Alors on a une suite exacte courte de groupes abéliens :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \arrow[r, shift left, "s"] & \mathrm{K}^0(X) \arrow[l, dashed, shift left, "r"] \arrow[r, shift left, "\mathrm{K}^0(\iota)"] & \mathrm{K}(x_0) \arrow[l, dashed, shift left, "\mathrm{K}^0(p)"] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

En particulier, $\mathrm{K}^0(X)$ *est isomorphe à* $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \oplus K(x_0) \cong \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \oplus \mathbb{Z}$ *en tant que groupe abélien.*

Démonstration. **Le morphisme s est bien défini :** Soit E, F deux fibrés vectoriels sur X tels que $[E] = [F]$ dans $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X)$. Fixons $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $E \oplus \mathbb{C}^n \cong F \oplus \mathbb{C}^m$. Alors $n + \mathrm{rg}_{x_0}(E) = m + \mathrm{rg}_{x_0}(F)$, et

$$\begin{aligned} E \oplus \mathbb{C}^{\mathrm{rg}_{x_0}(F)} \oplus \mathbb{C}^{n+m} &\cong E \oplus \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^{\mathrm{rg}_{x_0}(F)+n} \\ &\cong F \oplus \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{\mathrm{rg}_{x_0}(E)+m} \\ &\cong F \oplus \mathbb{C}^{\mathrm{rg}_{x_0}(E)} \oplus \mathbb{C}^{n+m}. \end{aligned}$$

Donc s est bien défini, et on vérifie facilement que s est un morphisme de groupes abéliens.

Le morphisme r est bien défini : Soit E, F deux fibrés vectoriels sur X et $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $[E] - [\mathbb{C}^n] = [F] - [\mathbb{C}^m]$ dans $\mathrm{K}^0(X)$.
Fixons $s \in \mathbb{N}$ tel que $E \oplus \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^s \cong F \oplus \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^s$, i.e. $E \oplus \mathbb{C}^{s+m} \cong F \oplus \mathbb{C}^{n+s}$. Alors E et F sont équivalents au sens de la relation $\sim$ définie dans la définition 3.2.4, i.e. r est bien défini.
De plus, on vérifie facilement que r est un morphisme de groupes abéliens.

$r \circ s = \mathrm{id}_{\widetilde{\mathrm{K}}^0(X)}$ **:** C'est évident par définition de s et de r. En particulier, s est injectif et r est une rétraction de s.

$\mathrm{Ker}(\mathrm{K}^0(\iota)) = \mathrm{Im}(s)$ **:** On a clairement $\mathrm{K}^0(\iota) \circ s = 0$, donc $\mathrm{Im}(s) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{K}^0(\iota))$. Soit maintenant $[E] - [\mathbb{C}^n] \in \mathrm{Ker}(\mathrm{K}^0(\iota))$. Alors $\mathrm{K}^0(\iota)([E] - [\mathbb{C}^n]) = [E_{x_0}] - [\mathbb{C}^n] = 0$, donc $n = \mathrm{rg}_{x_0}(E)$, ce qui donne l'inclusion $\mathrm{Ker}(\mathrm{K}^0(\iota)) \subset \mathrm{Im}(s)$.

$\mathrm{K}^0(\iota) \circ \mathrm{K}^0(p) = \mathrm{id}_{\mathrm{K}^0(x_0)}$ **:** Ceci provient du fait que $p \circ \iota = Id_{\{x_0\}}$ et de la fonctorialité de K^0. En particulier, $\mathrm{K}^0(\iota)$ est surjectif et $\mathrm{K}^0(p)$ est une section de $\mathrm{K}^0(\iota)$.

La suite ci-dessus de groupes abéliens est donc exacte et scindée. L'assertion finale est alors une conséquence du fait que $\mathrm{K}^0(x_0) \cong \mathbb{Z}$. □

Soit X un espace topologique compact et $x_0 \in X$. En notant ι l'injection canonique de $\{x_0\}$ dans X, la proposition 3.2.1 permet d'identifier $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X)$ au noyau du morphisme d'anneaux $\mathrm{K}^0(\iota)$. $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X)$ peut être vu comme un idéal de $\mathrm{K}^0(X)$, ce qui munit $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X)$ d'une multiplication qui confère à $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X)$ une structure de pseudo-anneau [1]. $\widetilde{\mathrm{K}}^0$ est également un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques compacts pointés vers la catégorie des pseudo-anneaux. En effet, si $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ est une application continue entre espaces topologiques compacts pointés, alors on a un morphisme d'anneaux sans unité $\widetilde{\mathrm{K}}^0(f) : \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(X)$ défini par

$$\forall [E] \in \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y),\ \widetilde{\mathrm{K}}^0(f)([E]) = [f^*E]$$

et cette construction est fonctorielle.

Proposition 3.2.2 (Lien entre $\mathrm{K}^1(X)$ et $\widetilde{\mathrm{K}}^0(SX)$)**.** *On a* $\mathrm{K}^1(X) \cong \widetilde{\mathrm{K}}^0(SX)$ *pour tout espace topologique compact X.*

Démonstration. Montrons que les applications $\varepsilon : f \mapsto \varepsilon_f$ et $\phi : E \mapsto f_E$ définies dans la partie 2.3 de classification des fibrés vectoriels sur la suspension passent au quotient.

Pour cela, on définit ε sur $\mathrm{K}^1(X)$ en envoyant $[(X \times \mathbb{C}^n, \alpha)]$ sur $[\varepsilon_\alpha]$. Cette définition ne dépend que de la classe d'homotopie de α. Il suffit donc de remarquer que $[\varepsilon_\alpha] + [S(X) \times \mathbb{C}^n] = [\varepsilon_{\alpha \oplus \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}}]$ dans $\widetilde{\mathrm{K}}^0(S(X))$. Ainsi, ε peut passe peut être vue comme une application de $\mathrm{K}^1(X)$ dans $\widetilde{\mathrm{K}}^0(S(X))$.

On définit maintenant ϕ sur $\widetilde{\mathrm{K}}^0(S(X))$ en envoyant $[E]$ sur $[(X \times \mathbb{C}^n, f(E))]$ où n est le rang de E. Soit E et F des fibrés vectoriels sur $S(X)$ égaux dans $\widetilde{\mathrm{K}}^0(S(X))$. Il existe k et $m \in \mathbb{N}$ tels que $E \oplus S(X) \times \mathbb{C}^k \cong F \oplus S(X) \times \mathbb{C}^m$. Cela assure que $f_E \oplus \mathrm{id}_k$ et $f_F \oplus \mathrm{id}_m$ sont homotopes et alors,

$$\begin{aligned}
[(X \times \mathbb{C}^n, f_E)] &= [(X \times \mathbb{C}^n \oplus X \times \mathbb{C}^k, f_E \oplus \mathrm{id}_k)] \\
&= [(X \times \mathbb{C}^n \oplus X \times \mathbb{C}^m, f_F \oplus \mathrm{id}_m)] \\
&= [(X \times \mathbb{C}^n, f_F)].
\end{aligned}$$

Donc ϕ passe au quotient.

On a ainsi défini deux morphismes de groupes abéliens inverses l'un de l'autre ce qui conclut la preuve. □

1. $(\mathbb{A}, +, \times)$ est un **pseudo-anneau** s'il vérifie les axiomes définissant la structure d'anneau, à l'exception de l'existence d'un élément neutre pour la multiplication.

3.3 La périodicité de Bott

3.3.1 Morphismes de groupes

Définition 3.3.1 (Ruban de Möbius d'un automorphisme)**.** *Soit X un espace topologique, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit $\alpha : X \times \mathbb{K}^n \longrightarrow X \times \mathbb{K}^n$ un automorphisme de fibré vectoriel trivial sur X. On appelle **ruban de Möbius** de α le fibré vectoriel sur $X \times \mathbb{S}_1$ défini par*

$$\mathcal{M}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} (X \times \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n) / \sim$$

muni de la projection évidente, où la relation d'équivalence est engendrée par $(v, x, t) \sim (\alpha(x)(v), x, t+1)$ pour tout $v \in \mathbb{K}^n$, $x \in X$ et $t \in \mathbb{R}$.

Par exemple pour $X = \{*\}$ un point, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n = 1$, le ruban de Möbius de l'automorphisme $\alpha = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à une bande de Möbius ouverte [2].

Remarque 3.3.1. *Autrement dit, le ruban de Möbius de α est le recollement du fibré vectoriel trivial $\mathbb{K}^n \times X \times [0,1]$ le long de l'isomorphisme $\alpha : \mathbb{K}^n \times X \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{K}^n \times X \times \{1\}$, i.e. on identifie les points $(v, x, 0)$ et $(\alpha(x)(v), x, 1)$ pour tout $v \in \mathbb{K}^n$ et $x \in X$.*

Proposition 3.3.1. *Soit X un espace topologique compact. Soit*

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X \times \mathbb{S}_1 \\ x &\longmapsto (x, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : \mathrm{K}^1(X) &\longrightarrow \mathrm{K}^0(X \times \mathbb{S}_1) \\ [(X \times \mathbb{C}^n, \alpha)] &\longmapsto [\mathcal{M}(\alpha)] - [X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^n] \end{aligned}$$

et $\mathrm{pr}_1 : X \times \mathbb{S}_1 \longrightarrow X$ la projection sur le premier facteur.

Alors on a une suite exacte courte scindée :

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}^1(X) \xrightarrow{f} \mathrm{K}^0(X \times \mathbb{S}_1) \underset{\mathrm{K}^0(\mathrm{pr}_1)}{\overset{\mathrm{K}^0(\pi)}{\rightleftarrows}} \mathrm{K}^0(X) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. **Le morphisme f est bien défini :** Il s'agit de vérifier que f est compatible avec la relation d'équivalence qui définit K^1. Tout élément de $\mathrm{K}^1(X)$ étant de la forme $[(\mathbb{C}^n, \alpha)]$ pour un automorphisme $\alpha : \mathbb{C}^n \times X \longrightarrow \mathbb{C}^n \times X$, il suffit de vérifier les points suivants,

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha, \beta : X \times \mathbb{C}^n \longrightarrow X \times \mathbb{C}^n$ deux automorphismes de fibré vectoriel homotopes. On a par construction que $\mathcal{M}(\alpha)$ peut être vu comme un recollement selon l'automorphisme α, ce qui ne dépend pas de la classe d'homotopie de α. Donc $M(\alpha) \cong M(\beta)$ et donc $f([(\mathbb{C}^n, \alpha)]) = f([(\mathbb{C}^n, \beta)])$.

2. i.e. le quotient de $[0,1] \times]-1,1[$ par la relation d'équivalence engendrée par $(0,t) \sim (1,-t)$ pour tout $t \in]-1,1[$.

- Si de plus on fixe $m \in \mathbb{N}$, il vient

$$\begin{aligned} f([(X \times (\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m), \alpha \oplus \mathrm{id}_{\mathbb{C}^m})]) &= [\mathcal{M}(\alpha \oplus \mathrm{id}_{\mathbb{C}^m})] - [X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^{n+m}] \\ &= [\mathcal{M}(\alpha) \oplus X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^m] - [X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^n] - [X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^m] \\ &= f([(X \times \mathbb{C}^n, \alpha)]). \end{aligned}$$

- Enfin, soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha, \beta : X \times \mathbb{C}^n \longrightarrow X \times \mathbb{C}^n$ deux automorphismes de fibré vectoriel. Alors α et $\beta \circ \alpha \circ \beta^{-1}$ définissent la même relation d'équivalence sur $X \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, d'où $\mathcal{M}(\beta \circ \alpha \circ \beta^{-1}) \simeq \mathcal{M}(\alpha)$ puis $f([(X \times \mathbb{C}^n, \alpha)]) = f([(X \times \mathbb{C}^n, \beta \circ \alpha \circ \beta^{-1})])$.

Le morphisme $\mathrm{K}^0(\pi)$ est surjectif : On a $\mathrm{pr}_1 \circ \pi = \mathrm{id}_X$ donc $\mathrm{K}^0(\pi) \circ \mathrm{K}^0(\mathrm{pr}_1) = \mathrm{id}_{\mathrm{K}^0(X)}$, i.e. $\mathrm{K}^0(\pi)$ est surjectif et scindé par $\mathrm{K}^0(\mathrm{pr}_1)$.

Le morphisme f est injectif : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha : X \times \mathbb{C}^n \longrightarrow X \times \mathbb{C}^n$ un automorphisme de fibré vectoriel tels que $f([(X \times \mathbb{C}^n, \alpha)]) = 0$. Fixons $r \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{M}(\alpha) \oplus X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^r \cong \mathcal{M}(\alpha \oplus \mathrm{id}_{X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^r}) \cong X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^{n+r}$. Quitte à considérer $(X \times \mathbb{C}^{n+r}, \alpha \oplus \mathrm{id}_{X \times \mathbb{C}^r})$ au lieu de $(X \times \mathbb{C}^n, \alpha)$, on peut supposer que $r = 0$, i.e. que $\mathcal{M}(\alpha) \cong X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^n$. On pose

$$\Psi : X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathcal{M}(\alpha)$$

un isomorphisme de fibrés vectoriels. Il est associé à une application continue $\psi : X \times \mathbb{S}_1 \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui fournit une application continue $\widetilde{\psi} : X \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour laquelle on peut supposer (quitte à composer par une fonction constante) $\widetilde{\psi}\Big|_{X \times \{1\}} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ et $\widetilde{\psi}\Big|_{X \times \{0\}} = \alpha$. Donc $[(X \times \mathbb{C}^n, \alpha)] = 0$ dans $\mathrm{K}^1(X)$.

L'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{K}^0(\pi))$: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathrm{Aut}(X \times \mathbb{C}^n)$. On a $\mathrm{K}^0(\pi)(f([(X \times \mathbb{C}^n, \alpha)])) = \mathrm{K}^0(\pi)([\mathcal{M}(\alpha)] - [X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^n]) = [X \times \mathbb{C}^n] - [X \times \mathbb{C}^n] = 0$, donc $\mathrm{K}^0(\pi) \circ f = 0$.

L'inclusion $\mathrm{Ker}(\mathrm{K}^0(\pi)) \subset \mathrm{Im}(f)$: Enfin, si x est un élément de $\mathrm{K}^0(X)$ tel que $\mathrm{K}^0(\pi)(x) = 0$, alors x peut s'écrire comme $[E] - [X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^n]$, avec E un fibré vectoriel sur $X \times \mathbb{S}_1$ et $n \in \mathbb{N}$. On a donc $\mathrm{K}^0(\pi)(E) = \mathrm{K}^0(\pi)(X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^n)$, fixons $r \in \mathbb{N}$ tel que $\pi^*E \oplus X \times \mathbb{C}^r \cong X \times \mathbb{C}^{n+r}$, i.e. tel que $\pi^*(E \oplus X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^r) \cong X \times \mathbb{C}^{n+r}$. Quitte à considérer le fibré vectoriel $E \oplus X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^r$ au lieu de E, on peut supposer que $r = 0$, i.e. que $E\Big|_{X \times \{1\}} \cong X \times \mathbb{C}^n$.

De plus, $\pi_z : X \longrightarrow X \times \mathbb{S}_1$ défini par $\pi_z(x) = (x, z)$ est homotope à π_1 pour tout $z \in \mathbb{S}_1$, donc $E\Big|_{X \times \{z\}}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^n \times X$ pour tout $z \in \mathbb{S}_1$.

Il existe d'après 2.1.3 un voisinage U de $\{1\}$ dans $\mathbb{S}_1$, qu'on peut supposer fermé, contractile, vérifiant $\mathbb{S}_1 - \mathring{U}$ est contractile de bord $\partial U = \{*_\pm\}$, tel qu'il existe $\alpha_1 : E|_{X \times U} \longrightarrow X \times U \times \mathbb{C}^n$ une trivialisation. Comme $\mathbb{S}_1 - \mathring{U}$ est contractile, il existe $\alpha_2 : E\Big|_{X \times (\mathbb{S}_1 - \mathring{U})} \longrightarrow X \times (\mathbb{S}_1 - \mathring{U}) \times \mathbb{C}^n$ une trivialisation. On pose alors $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X \times \{*_\pm\} \times \mathbb{C}^n)$, il vient par construction que E est isomorphe au recollement des fibrés triviaux $X \times U \times \mathbb{C}^n$ et $X \times (\mathbb{S}_1 - \mathring{U}) \times \mathbb{C}^n$ le long de α. Quitte à composer α_1 par $\alpha_1\Big|_{X \times \{*_-\}}$ et α_2 par $\alpha_2\Big|_{X \times \{*_-\}}$ (ce qui ne change pas la classe d'homotopie de α), on peut supposer que $\alpha\Big|_{X \times \{*_-\}} = \mathrm{id}_{X \times \{*_-\} \times \mathbb{C}^n}$ et donc que $f([(X \times \mathbb{C}^n, \alpha)]) = x$. □

Proposition 3.3.2. *Soit X un espace topologique compact. Soit $\pi : X \longrightarrow X \times \mathbb{S}_1$ et $\mathrm{pr}_1 : X \times \mathbb{S}_1 \longrightarrow X$ définis comme dans la proposition 3.3.1. Alors on a une suite exacte* *courte scindée :*

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}^0(X) \xrightarrow{\beta} \mathrm{K}^1(X \times \mathbb{S}_1) \underset{\mathrm{K}^1(\mathrm{pr}_1)}{\overset{\mathrm{K}^1(\pi)}{\rightleftarrows}} \mathrm{K}^1(X) \longrightarrow 0$$

Démonstration. **Exactitude à droite :** Le fait que la suite est exacte à droite et que $\mathrm{K}^1(\mathrm{pr}_1)$ est une section de $\mathrm{K}^1(\pi)$ provient de la fonctorialité de K^1.

Construction de β : Soit E un fibré vectoriel sur X. La compacité de X donne l'existence de $n \in \mathbb{N}$ et d'un projecteur $p : X \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ tels que $E = p(X \times \mathbb{C}^n)$. Pour tout $(x, z) \in X \times \mathbb{S}_1$, $zp(x) + \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n} - p(x)$ est inversible, d'inverse $z^{-1}p(x) + \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n} - p(x)$ donc

$$\begin{aligned} \varphi_p : X \times \mathbb{S}_1 &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ (x, z) &\longmapsto zp(x) + \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n} - p(x) \end{aligned}$$

est un automorphisme du fibré vectoriel trivial de rang n sur $X \times \mathbb{S}_1$. Posons alors

$$\beta([E]) = [(X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^n, \varphi_p)]$$

β est bien définie car son expression ne dépend pas du projecteur p choisi.

L'inclusion $\mathrm{Im}(\beta) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{K}^1(\pi))$ **:** On a $\beta([E])\Big|_{X \times \{1\}} = [(X \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})] = 0$ donc $\mathrm{K}^1(\pi) \circ \beta = 0$.

L'inclusion $\mathrm{Ker}(\mathrm{K}^1(\pi)) \subset \mathrm{Im}(\beta)$ **:** On veut montrer que pour $f : X \times \mathbb{S}_1 \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, si $f(x, 1) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ pour tout $x \in X$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ et un projecteur p tel que $f(x, z) \oplus \mathrm{id}_{\mathbb{C}^m} \simeq \varphi_p(x, z)$ pour tout $(x, z) \in X \times \mathbb{S}_1$. Pour cela, on va procéder par simplifications successives de f.

Par théorème de Stone-Weierstraß[3] et en identifiant $\mathscr{C}^0(X \times \mathbb{S}_1, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ à $\mathscr{C}^0(X \times \mathbb{S}_1, \mathbb{C})^{n^2}$, on obtient que l'ensemble

$$\left\{ \sum_{j \in J} z^j g_j(x) \;\middle|\; J \subset \mathbb{Z} \text{ finie}, \ g_j \in \mathscr{C}^0(X, \mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \right\}$$

est dense dans $(\mathscr{C}^0(X \times \mathbb{S}_1, \mathcal{M}_n(\mathbb{C})), \|\cdot\|_\infty)$ (où $\sum_{j \in J} z^j g_j(x)$ est un abus de langage pour désigner la fonction $(x, z) \mapsto \sum_{j \in J} z^j g_j(x)$). Donc il existe Σ dans cet ensemble proche de f dans $\mathscr{C}^0(X \times \mathbb{S}_1, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ pour $\|\cdot\|_\infty$. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est ouvert et localement connexe par arcs, on peut supposer Σ suffisamment proche de f pour que pour tout $(x, z) \in X \times \mathbb{S}_1$, on ait $t\Sigma(x, z) + (1 - t)f(x, z) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour tout $t \in [0, 1]$. Ainsi, Σ a la même classe d'homotopie que f.
On est donc ramené au cas où $f = \Sigma$.

On fixe $m \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$ tels que

$$\Sigma = z^{-m} \sum_{k=0}^{l} z^k g_k(x).$$

Alors on a

$$\left[z^{-m} \sum_{k=0}^{l} z^k g_k(x) \right] = [z^{-m}] + \left[\sum_{k=0}^{l} z^k g_k(x) \right] = \beta(-[\mathbb{C}^m \times X]) + \left[\sum_{k=0}^{l} z^k g_k(x) \right]$$

3. Dont un énoncé est donné dans l'annexe A.1.1.

On est ramené au cas où f est de la forme $\sum_{k=0}^{l} z^k g_k(x)$.

Afin de continuer notre progression, on va augmenter les dimensions. On a alors, $f \overset{\text{dans K}^1}{=} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{n\times l} \end{pmatrix}$ qui est homotope à :

$$\begin{pmatrix} g_0(x) & g_1(x) & \cdots & g_l(x) \\ -z & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -z & 1 \end{pmatrix}$$

où 1 désigne I_n la matrice identité de taille n et z désigne zI_n. En effet, les matrices des opérations élémentaires[4] étant homotopes à l'identité on peut se ramener à la matrice

$$\begin{pmatrix} \Sigma & & * & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en ajoutant la dernière colonne multipliée par z à l'avant-dernière, puis en ajoutant l'avant-dernière colonne multipliée par z à l'antépénultième, etc. Pour finir, on peut écrire une homotopie en multipliant les termes dans l'étoile par t pour se ramener à f. Ainsi, on est réduit au cas où $f = zA(x) + B(x)$ avec

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B(x) = \begin{pmatrix} g_0(x) & g_1(x) & \cdots & g_l(x) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il reste à voir A comme un projecteur et B comme l'identité moins ce projecteur. On pose $C(x) = A(x) + B(x)$ (on a pris $z = 1$), $C(x)$ est homotope à id car $f(x,1)$ l'est. Donc on peut multiplier par $C^{-1}(x)$ sans changer la classe d'homotopie :

$$C^{-1}(x)(zA(x) + B(x)) = zC^{-1}(x)A(x) + C^{-1}(x)B(x)$$

On prend alors $A'(x) := C^{-1}(x)A(x)$ et $B'(x) := C^{-1}(x)B(x)$, et donc $B'(x) = \mathrm{id} - A'(x)$. Ainsi, $zA'(x) + \mathrm{id} - A'(x) = A'(x) + B'(x)$ est inversible pour tout $z \in \mathbb{S}_1$.

Lemme 3.3.1. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. Alors*

$$\mathrm{Sp}(M) \cap \left(\frac{1}{2} + i\mathbb{R}\right) = \varnothing \iff \forall z \in \mathbb{S}_1,\ zM + \mathrm{id} - M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Démonstration. Soit λ une valeur propre de M et supposons par l'absurde que $\Re(\lambda) = \frac{1}{2}$. Il viendrait $\bar{\lambda} = 1 - \lambda$ et en posant $z = -\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \in \mathbb{S}_1$, il viendrait $\lambda z + 1 - \lambda = 0$, donc $0 \in \mathrm{Sp}(zM + \mathrm{id} - M)$.

4. Il ne s'agit pas à proprement parler d'opérations élémentaires, mais quitte à développer les différents blocs, on se ramène à appliquer plusieurs opérations élémentaires au sens ususel.

Réciproquement, on suppose qu'il existe $z \in \mathbb{S}_1$ tel que $zM + \mathrm{id} - M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On a $\mathrm{Sp}(zM + \mathrm{id} - M) = \{z\lambda + 1 - \lambda : \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}$ (cf. par exemple le théorème A.4.1), d'où fixons $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ tel que $z\lambda + 1 - \lambda = 0$. Il vient $|\lambda| = |1 - \lambda|$, d'où $\Re(\lambda)^2 + \Im(\lambda)^2 = (1 - \Re(\lambda))^2 + \Im(\lambda)^2$ puis $\Re(\lambda) = \frac{1}{2}$. □

Le lemme 3.3.1 donne donc $\mathrm{Sp}(A'(x)) \cap (\frac{1}{2} + i\mathbb{R}) = \varnothing$.
Soit U_+ et U_- deux ouverts tels que $\mathrm{Sp}(A') \cap \left\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \frac{1}{2}\right\} \subset U_+ \subset \bar{U}_+ \subset \left\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \frac{1}{2}\right\}$, $\mathrm{Sp}(A') \cap \left\{s \in \mathbb{C} : Re(s) < \frac{1}{2}\right\} \subset U_- \subset \bar{U}_- \subset \left\{s \in \mathbb{C} : Re(s) < \frac{1}{2}\right\}$. On pose une application

$$\begin{aligned} f : U_- \cup U_+ &\longrightarrow \mathbb{C} \\ s &\longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in U_- \\ 1 \text{ si } x \in U_+ \end{cases} \end{aligned}$$

qui est holomorphe. Soit $\lambda \in Sp(A')$, $\lambda \in U_\pm$. B_λ une boule ouverte centrée en λ telle que $\bar{B}_\lambda \subset U_\pm$. Soit γ_λ lacet de Jordan rectifiable orienté positivement qui paramétrise ∂B_λ. Quitte à rétrécir les boules (qui sont en nombre fini), on peut supposer qu'elles sont deux à deux disjointes. On note $V = \bigcup_{\lambda \in Sp(A')} B_\lambda$, on a $\bar{V} \subset U_- \cup U_+$ et ∂V est une union finie de lacets de Jordan rectifiables, orientés positivement. Donc

$$f(A') = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial V} f(s)(sI - A')^{-1} ds$$

est bien définie (cf. A.4.2). On a de plus $f^2 = f$, donc la proposition A.4.1 donne que $f(A')$ est un projecteur, qu'on note P. Alors pour tout $t \in [0,1]$, on a $A'_t \overset{\text{def}}{=} A' + t(P - A')$ n'a pas de valeur propre dans $\left(\frac{1}{2} + i\mathbb{R}\right)$, donc d'après le lemme 3.3.1, pour tout $z \in \mathbb{S}_1$, $zA'_t + \mathrm{id} - A'_t$ est inversible. On a donc $zA' + \mathrm{id} - A'$ et $zP + \mathrm{id} - P$ homotopes, et la classe de ce dernier est dans l'image de β.

Le morphisme β est injectif : Deux éléments égaux dans l'image de β peuvent s'écrire comme $(X \times \mathbb{C}^n, \varphi_p)$ et $(X \times \mathbb{C}^n, \varphi_{p'})$ avec φ_p et $\varphi_{p'}$ homotopes. On souhaite montrer que p et p' sont homotopes. Pour cela, on note Φ l'homotopie qui en 0 vaut p et en 1 vaut p'.

On vérifie alors que l'on peut réécrire la preuve de $\mathrm{Ker}(\mathrm{K}^1(\pi)) \subset \mathrm{Im}(\beta)$ avec l'espace $X \times [0,1]$ pour montrer que Φ admet un antécédent g dans $\mathrm{K}^0(X \times [0,1])$ tel que $g(\cdot, 0) = p$ et $g(\cdot, 1) = p'$. □

Exemple 3.3.1 (K^0 et K^1 de $\mathbb{S}_1$)**.** *On a $\mathrm{K}^0(\mathbb{S}_1) \cong \mathbb{Z}$ et $\mathrm{K}^1(\mathbb{S}_1) \cong \mathbb{Z}$. Cela découle des suites exactes et des K-groupes du point calculés dans l'exemple 3.2.1.*

3.3.2 Théorème du produit

Dans toute cette partie, on note H le fibré vectoriel canonique sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Lemme 3.3.2. *Le fibré H est isomorphe au fibré obtenu par le recollement de deux fibrés triviaux de rang 1 sur le disque $\mathbb{B}_2$ selon l'application $f : z \in \mathbb{S}_1 \mapsto z \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Notons $\mathbb{B}_2^+$ et $\mathbb{B}_2^-$ le disque unité correspondant à l'hémisphère nord et sud respectivement pour $\mathbb{S}_2$. Plus précisément, on définit

$$\begin{aligned}\iota^+ : \mathbb{B}_2^+ &\longrightarrow \mathbb{S}_2^+ \overset{\text{def}}{=} \iota^+(\mathbb{B}_2^+) \subset \mathbb{S}_2 \\ re^{i\theta} &\longmapsto \left(\sin\left(\frac{\pi r}{2}\right)\cos\theta, \sin\left(\frac{\pi r}{2}\right)\sin\theta, \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iota^- : \mathbb{B}_2^- &\longrightarrow \mathbb{S}_2^- \overset{\text{def}}{=} \iota^-(\mathbb{B}_2^-) \subset \mathbb{S}_2 \\ re^{i\theta} &\longmapsto \left(\sin\left(\frac{\pi r}{2}\right)\cos\theta, \sin\left(\frac{\pi r}{2}\right)\sin\theta, -\cos\left(\frac{\pi r}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Définissons

$$\begin{aligned}\varphi^+ \ : \qquad \mathbb{S}_2^+ &\longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \\ (x,y,z) &\longmapsto [1+z : x-iy]\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned}\varphi^- \ : \qquad \mathbb{S}_2^- &\longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \\ (x,y,z) &\longmapsto [x+iy : 1-z].\end{aligned}$$

Ces applications sont des homéomorphismes sur leurs images, et coïncident sur $\mathbb{S}_1 \times \{0\} = \mathbb{S}_2^+ \cap \mathbb{S}_2^-$. Notons de plus $z^\pm = r^\pm e^{i\theta^\pm} \in \mathbb{B}_2^\pm$, et

$$\varphi^+ \circ \iota^+\left(z^+\right) = \left[1+\cos\left(\frac{\pi r^+}{2}\right), \left(\cos\theta^+ - i\sin\theta^+\right)\sin\left(\frac{\pi r^+}{2}\right)\right] \overset{\text{def}}{=} \left[A\left(r^+,\theta^+\right), B\left(r^+,\theta^+\right)\right].$$

Les notations $A\left(r^+,\theta^+\right)$ et $B\left(r^+,\theta^+\right)$ ne sont là que pour alléger les notations, elles donnent l'illusion qu'il y a de potentiels problèmes de continuités, mais il n'en est rien. On remarque (après calculs) que

$$\varphi^- \circ \iota^-\left(z^-\right) = \left[\overline{B\left(r^-,\theta^-\right)}, A(r^-,\theta^-)\right]$$

et on notera $\overline{B}(r^-,\theta^-) \overset{\text{def}}{=} \overline{B(r^-,\theta^-)}$. Soit les applications

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_2^+ \times \mathbb{C} &\longrightarrow H = \{(v,x) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2 \mid x \in v\} \\ \left(z^+,\lambda\right) &\longmapsto \Bigg(\underbrace{\left[A\left(r^+,\theta^+\right) : B\left(r^+,\theta^+\right)\right]}_{\in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})}, \underbrace{\left(\lambda A\left(r^+,\theta^+\right), \lambda B\left(r^+,\theta^+\right)\right)}_{\in \mathbb{C}^2}\Bigg)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_2^- \times \mathbb{C} &\longrightarrow H \\ \left(z^-,\lambda\right) &\longmapsto \Bigg(\left[\overline{B}\left(r^-,\theta^-\right) : A\left(r^-,\theta^-\right)\right], \left(\lambda\overline{B}\left(r^-,\theta^-\right), \lambda A\left(r^-,\theta^-\right)\right)\Bigg).\end{aligned}$$

Ces applications sont construites de telle sorte qu'elles soient des morphismes de fibrés. Par propriété universelle du coproduit, on dispose d'une application $\phi : (\mathbb{B}_2^+ \times \mathbb{C}) \sqcup (\mathbb{B}_2^- \times \mathbb{C}) \longrightarrow H$. Cette application est elle aussi un morphisme de fibrés. Montrons qu'elle passe au quotient pour le recollement via l'application f. Pour ce faire, écrivons f comme un isomorphisme entre les restrictions à $\mathbb{S}_1$ des deux fibrés triviaux :

$$\begin{aligned}f : \left(\mathbb{B}_2^- \times \mathbb{C}\right)\Big|_{\mathbb{S}_1} &\longrightarrow \left(\mathbb{B}_2^+ \times \mathbb{C}\right)\Big|_{\mathbb{S}_1} \\ (z,\lambda) &\longmapsto (z, z\lambda).\end{aligned}$$

On doit donc démontrer que pour tout $z = e^{i\theta^-} \in \mathbb{B}_2^-$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\phi\left(e^{i\theta^-}, \lambda\right) = \phi\left(f\left(e^{i\theta^-}, \lambda\right)\right) = \phi\Big(\underbrace{e^{i\theta^-}}_{\in \mathbb{B}_2^+ !}, e^{i\theta^-}\lambda\Big)$$

où le dernier $e^{i\theta^-}$ est vu comme étant élément de $\mathbb{B}_2^+$. Il suffit ensuite de vérifier les conditions en effectuant les calculs nécessaires, puisque toutes les applications en jeu ont des expressions explicites. On vérifie donc aisément que ϕ passe au quotient en

$$\overline{\phi} : \left(\mathbb{B}_2^+ \times \mathbb{C}\right) \cup_f \left(\mathbb{B}_2^- \times \mathbb{C}\right) \longrightarrow H.$$

On vérifie aisément que $\overline{\phi}$ reste un morphisme de fibrés, et qu'elle est un isomorphisme en restriction sur chaque fibre (qui est de dimension 1) car elle y non nulle. Ainsi, $\overline{\phi}$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels. $\square$

Une application de la proposition 3.3.2 donne que $\mathrm{K}^0(\mathbb{S}_2)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[H]/([H-1]^2)$ en tant que groupe abélien.

Proposition 3.3.3. *Le groupe* $\mathrm{K}^0(\mathbb{S}_2)$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathbb{Z} \cdot [H]$.

Démonstration. En effet, $\mathbb{S}_2 = S\mathbb{S}_1$ donc $\mathrm{K}^0(\mathbb{S}_2) \cong \mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_2) \cong \mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathrm{K}^1(\mathbb{S}_1)$. Il reste à montrer que $[H]$ engendre $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_2)$. Pour cela, on utilise la suite exacte 3.3.2.

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}^0(\{*\}) \xrightarrow{\beta} \mathrm{K}^1(\mathbb{S}_1) \xrightarrow{\mathrm{K}^1(\pi)} \mathrm{K}^1(\{*\}) \cong 0 \longrightarrow 0$$

Un générateur de $\mathrm{K}^0(\{*\})$ s'envoie donc sur un générateur de $\mathrm{K}^1(\mathbb{S}_1)$. Or, $\beta(\{*\} \times \mathbb{C}) = \varphi_{\mathrm{id}_1} : z \in S_1 \mapsto z \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$.
L'image de ce générateur dans $\widetilde{\mathrm{K}}(\mathbb{S}_2)$ est $[H]$ d'après le lemme 3.3.2.
Ainsi, $\mathrm{K}(\mathbb{S}_2) = \mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathbb{Z} \cdot [H]$.

$\square$

On rappelle que si X est un espace topologique compact et $f : X \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est continue, alors on note ε_f le recollement des fibrés triviaux de rang n sur C^+X et C^-X le long de f. C'est donc un fibré sur SX. Soit alors $f, g : X \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On a :

- $\varepsilon_f \oplus \varepsilon_g$ est le recollement des fibrés triviaux de rang $2n$ sur C^+X et C^-X le long de $f \oplus g$.
- $\varepsilon_f \otimes \varepsilon_g$ est le recollement des fibrés triviaux de rang n^2 sur C^+X et C^-X le long de $f \otimes g$.

Autrement dit, $\varepsilon_f \oplus \varepsilon_g \cong \varepsilon_{f \oplus g}$ et $\varepsilon_f \otimes \varepsilon_g \cong \varepsilon_{f \otimes g}$.

Lemme 3.3.3. *On note* 1 *le fibré trivial de rang 1 sur* $\mathbb{S}_2$. *On a* $(H-1)^2 = 0$.

Démonstration. On pose

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{S}_1 &\longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ z &\longmapsto \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \mathbb{S}_1 &\longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ z &\longmapsto z \cdot I_2 \end{aligned}$$

de façon à avoir, en reprennant les notations de la partie 2.3 de classification des fibrés sur la suspension d'un espace, $\varepsilon_{\varphi_1} = (H \otimes H) \oplus 1$ et $\varepsilon_{\varphi_2} = H \oplus H$.
De plus, les applications φ_1 et φ_2 sont homotopes par le lemme 3.2.2.
La proposition 2.2.2 donne $(H \otimes H) \oplus 1 \cong H \oplus H$ donc $[H-1]^2 = 0$ dans $\mathrm{K}^0(\mathbb{S}_2)$. □

Le lemme 3.3.3 donne une injection naturelle

$$\mathbb{Z}[H]/([H-1]^2) \longrightarrow \mathrm{K}^0(\mathbb{S}_2)$$

puis un morphisme d'anneaux après composition avec le produit externe (cf. 3.2.2)

$$\Psi : \mathbb{Z}[H]/([H-1]^2) \otimes \mathrm{K}^0(X) \longrightarrow \mathrm{K}^0(X \times \mathbb{S}_2)$$

Une adaptation des arguments utilisés dans la preuve de la proposition 3.3.2 donne que cette application est un isomorphisme d'anneaux (cf. [4]) :

Théorème 3.3.1 (Théorème du produit). *Soit X un espace topologique compact. Alors Ψ défini ci-dessus est un isomorphisme d'anneaux.*

Le produit externe $\mu : \mathrm{K}^0(\mathbb{S}_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{K}^0(X) \longrightarrow \mathrm{K}^0(X \times \mathbb{S}_2)$ est donc un isomorphisme d'anneaux.

3.3.3 Deux suites exactes en K-théorie réduite

Lemme 3.3.4. *Soit X un espace topologique compact et $A \subset X$ un sous-ensemble fermé. On note $\iota : A \longrightarrow X$ l'injection canonique et $\pi : X \longrightarrow X/A$ la surjection canonique. Alors on a une suite exacte*

$$\widetilde{\mathrm{K}}^0(X/A) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{K}}^0(\pi)} \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{K}}^0(\iota)} \widetilde{\mathrm{K}}^0(A).$$

Démonstration. On note A/A le point image de A dans X/A par π. On a $\pi \circ \iota$ est l'application constante égale à A/A, d'où $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\pi \circ \iota) = \widetilde{\mathrm{K}}^0(\iota) \circ \widetilde{\mathrm{K}}^0(\pi) = 0$. Puis soit E un fibré vectoriel sur X tel que $[E] \in \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathrm{K}}^0(\iota))$. Fixons alors $m \in \mathbb{N}$ tel que $E\Big|_A \oplus A \times \mathbb{C}^m$ est trivial. Quitte à considérer $E \oplus X \times \mathbb{C}^m$, on peut supposer que E est trivial sur A de rang $r \in \mathbb{N}$. Fixons $\alpha : E\Big|_A \longrightarrow A \times \mathbb{C}^r$ un isomorphisme, avec les notations de 2.2 on a E/α est un fibré vectoriel sur X/A et $[E] = \widetilde{\mathrm{K}}^0(\pi)([E/\alpha])$. □

Exemple 3.3.2 ($\widetilde{\mathrm{K}}^0$ d'un bouquet de deux espaces topologiques). *Soient (A, a) et (B, b) deux espaces topologiques compacts pointés et $X = A \vee B$ leur bouquet, de sorte que $X/A \simeq B$ et $X/B \simeq A$. On note $\iota_A : A \longrightarrow X$, $\iota_B : B \longrightarrow X$ les injections canoniques et $\pi_A : X \longrightarrow B$, $\pi_B : X \longrightarrow A$ les surjections canoniques. On a alors une suite exacte donnée par le lemme*

3.3.4 :

$$\widetilde{\mathrm{K}}^0(B) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{K}}^0(\pi_A)} \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{K}}^0(\iota_A)} \widetilde{\mathrm{K}}^0(A)$$

On vérifie que $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\pi_B)$ *est une section de* $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\iota_A)$ *et que* $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\iota_B)$ *est une rétraction de* $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\pi_A)$*, de sorte qu'on obtient une suite exacte courte scindée*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{K}}^0(B) \arrow[r, shift left, "\widetilde{\mathrm{K}}^0(\pi_A)"] & \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \arrow[l, dashed, shift left, "\widetilde{\mathrm{K}}^0(\iota_B)"] \arrow[r, shift left, "\widetilde{\mathrm{K}}^0(\iota_A)"] & \widetilde{\mathrm{K}}^0(A) \arrow[l, dashed, shift left, "\widetilde{\mathrm{K}}^0(\pi_B)"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Il vient alors que $\widetilde{\mathrm{K}}^0(A \vee B) \cong \widetilde{\mathrm{K}}^0(A) \oplus \widetilde{\mathrm{K}}^0(B)$.

En utilisant le lemme 3.3.4 à plusieurs reprises, on obtient la suite exacte longue suivante.

Lemme 3.3.5. *Soit X un espace topologique compact et $A \subset X$ un sous-ensemble fermé. On a une suite exacte longue :*

$$\ldots \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(S^2A) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(S(X/A)) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(SX) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(SA) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(X/A)$$
$$\longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(A)$$

Démonstration. Soit X un espace topologique compact et $A \subset X$ un sous-ensemble fermé. On construit par récurrence une suite d'espaces topologiques $(Y_N)_{N\in\mathbb{N}}$ compacts par $Y_0 = A$, $Y_1 = X$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, $Y_{N+2} = Y_{N+1} \cup CY_N$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $Z_{N+2} = Y_{N+2}/CY_N$. On obtient la suite d'espaces topologiques :

$$\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[r, hook] & Y_1 \arrow[r, hook] & Y_2 \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y_3 \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y_4 \cdots \arrow[d] \\ & & Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les surjections canoniques $Y_{N+2} \twoheadrightarrow Z_{N+2}$.
On se ramène à une famille de suites d'espaces topologiques de la forme $\widetilde{A} \hookrightarrow \widetilde{X} \twoheadrightarrow \widetilde{X}/\widetilde{A}$:

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & Y_N \arrow[r] & Y_{N+1} \arrow[r] \arrow[dr, two heads] & Y_{N+2} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \ldots \\ & \vdots \quad \ddots & \vdots & Z_N + 2 & \ddots \end{tikzcd}$$

où les flèches diagonales proviennent de l'homéomorphisme suivant

$$Z_{N+2} = Y_{N+2}/CY_N = (Y_{N+1} \cup CY_N)/CY_N \simeq Y_{N+1}/Y_N$$

qui fait commuter le triangle.
Le lemme 3.3.4 donne alors l'exactitude de la suite

$$\widetilde{\mathrm{K}}^0(Z_{N+2}) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y_{N+1}) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y_N).$$

Or on a $Z_{N+2} = Y_{N+2}/CY_N$ et puisque CY_N est contractile, la proposition 2.2.1 permet d'écrire $\widetilde{\mathrm{K}}^0(Z_{N+2}) \simeq \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y_{N+2})$. Il est alors possible "d'empiler" les suites exactes obtenues :

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{\mathrm{K}}^0(Z_{N+2}) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y_{N+1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y_N) \\
\widetilde{\mathrm{K}}^0(Z_{N+3}) \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y_{N+2}) \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y_{N+1}) &
\end{tikzcd}$$

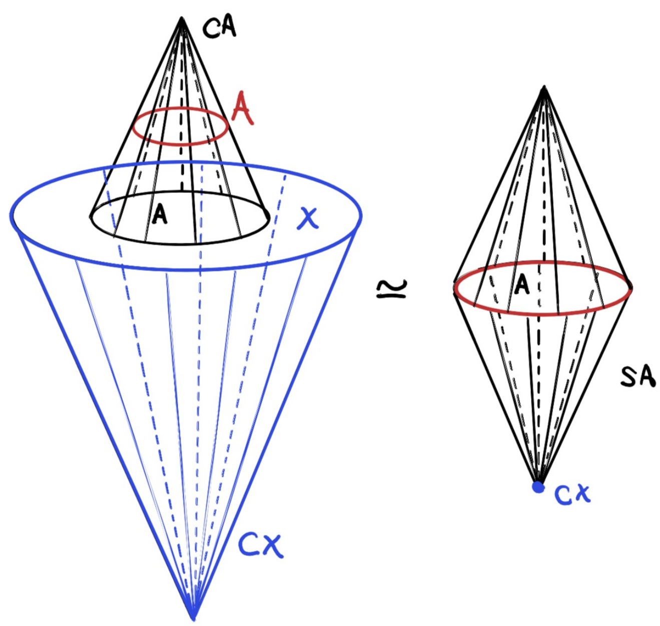
On en déduit une suite exacte longue :

$$\ldots \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(Z_{N+1}) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(Z_N) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(Z_{N-1}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(Z_2)$$

Plus explicitement, on obtient :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] & X \arrow[r, hook] & X \cup CA \arrow[r, hook] \arrow[d] & (X \cup CA) \cup CX \arrow[r, hook] \arrow[d] & ((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA) \cdots \arrow[d] \\
 & & X/A & SA & SX
\end{tikzcd}$$

Le dessin ci-dessous illustre l'identification entre Z_3 et SA :



Enfin, on obtient une suite exacte longue pour la paire (X, A) :

$$\ldots \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(S^2A) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(S(X-A)) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(SX) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(SA) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(X/A) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(A)$$

□

3.3.4 Produit externe réduit et périodicité de Bott

Soit $(X, x_0), (Y, y_0)$ deux espaces topologiques compacts pointés. On va construire un morphisme de pseudo-anneaux $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(X \wedge Y)$ appelé **produit externe réduit**, où $X \wedge Y$

est le smash produit de (X, x_0) et (Y, y_0) [5]. On note $\mu : \mathrm{K}^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{K}^0(Y) \longrightarrow \mathrm{K}^0(X \times Y)$ le produit externe (cf. 3.2.2). Le but est de définir $\tilde{\mu}$ comme la composante de μ qui se trouve dans $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X \wedge Y)$. Pour cela, on va d'abord démontrer :

Lemme 3.3.6. *Soient X et Y des espaces topologiques compacts. Les groupes $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X \times Y)$ et $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X \wedge Y) \oplus \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \oplus \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y)$ sont isomorphes.*

Démonstration. La suite exacte 3.3.3 pour la paire $(X \times Y, X \vee Y)$ donne :

$$\widetilde{\mathrm{K}}^0(S(X \times Y)) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(S(X \vee Y)) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(X \wedge Y) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(X \times Y) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(X \vee Y)$$

Or d'après l'exemple 3.3.2, on a $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X \vee Y) \simeq \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \oplus \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y)$. On a de plus la surjection canonique $S(X \vee Y) \longrightarrow \Sigma(X \vee Y)$ induit d'après le lemme 2.2 un isomorphisme de semi-anneau $\widetilde{\mathrm{K}}^0(S(X \vee Y)) \cong \widetilde{\mathrm{K}}^0(\Sigma(X \vee Y))$. Or d'après la remarque A.1.3, on a $\Sigma(X \vee Y) \cong \Sigma X \vee \Sigma Y$ et donc par l'exemple 3.3.2, on a

$$\widetilde{\mathrm{K}}^0(S(X \vee Y)) \simeq \widetilde{\mathrm{K}}^0(\Sigma(X \vee Y)) \simeq \widetilde{\mathrm{K}}^0(\Sigma X) \oplus \widetilde{\mathrm{K}}^0(\Sigma Y) \underbrace{\simeq}_{\text{lemme 2.2}} \widetilde{\mathrm{K}}^0(SX) \oplus \widetilde{\mathrm{K}}^0(SY)$$

La suite exacte précédente devient alors :

$$\widetilde{\mathrm{K}}^0(S(X \times Y)) \xrightarrow{f_1} \widetilde{\mathrm{K}}^0(SX) \oplus \widetilde{\mathrm{K}}^0(SY) \xrightarrow{f_2} \widetilde{\mathrm{K}}^0(X \wedge Y) \xrightarrow{f_3} \widetilde{\mathrm{K}}^0(X \times Y) \xrightarrow{f_4} \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \oplus \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y)$$

On pose $p_X : X \times Y \longrightarrow X$ et $p_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ les projections canoniques. On a que

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \oplus \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y) &\longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(X \times Y) \\ (a, b) &\longmapsto \widetilde{\mathrm{K}}^0(p_X)(a) + \widetilde{\mathrm{K}}^0(p_Y)(b) \end{aligned}$$

est une section de $f_4 : x \longmapsto \left(\widetilde{\mathrm{K}}^0(\iota_X)(a), \widetilde{\mathrm{K}}^0(\iota_Y)(a)\right)$ où $\iota_X, \iota_Y : X, Y \hookrightarrow X \times Y$ sont les inclusions canoniques, et de même

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{K}}^0(SX) \oplus \widetilde{\mathrm{K}}^0(SY) &\longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(S(X \times Y)) \\ (a, b) &\longmapsto \widetilde{\mathrm{K}}^0(Sp_X)(a) + \widetilde{\mathrm{K}}^0(Sp_Y)(b) \end{aligned}$$

est une section de $f_1 : a \longmapsto \left(\widetilde{\mathrm{K}}^0(S\iota_X)(a), \widetilde{\mathrm{K}}^0(S\iota_Y)(a)\right)$. Il vient que f_1 est surjective, et donc par exactitude en $\widetilde{\mathrm{K}}^0(SX) \oplus \widetilde{\mathrm{K}}^0(SY)$ on a que f_2 est l'application nulle, et donc f_3 est injective. On en déduit une suite exacte courte scindée :

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(X \wedge Y) \xrightarrow{f_3} \widetilde{\mathrm{K}}^0(X \times Y) \xrightarrow{f_4} \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \oplus \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y) \longrightarrow 0$$

On en déduit que $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X \times Y) \cong \widetilde{\mathrm{K}}^0(X \wedge Y) \oplus \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \oplus \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y)$. □

En identifiant $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X), \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y)$ aux noyaux de $\mathrm{K}(X) \longrightarrow \mathrm{K}(x_0)$ et $\mathrm{K}(Y) \longrightarrow \mathrm{K}(y_0)$ respectivement, on va montrer que

$$\mu\left(\widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y)\right) \subset \widetilde{\mathrm{K}}^0(X \times Y)$$

5. Voir A.1 pour une définition du smash produit et d'autres constructions topologiques utiles à la compréhension de ce qui suit.

ce qu'il suffit de vérifier pour les tenseurs élémentaires. Soit $(x, y) \in \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \times \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y)$, on a

$$\mu(x \otimes y) = \mathrm{K}^0(p_X)(x)\mathrm{K}^0(p_Y)(y) = 0$$

dans $\mathrm{K}^0(X \vee Y)$ car $\mathrm{K}^0(\iota_Y)(\widetilde{\mathrm{K}}^0(p_X)(x)) = 0$ dans $\mathrm{K}^0(Y)$ et $\mathrm{K}^0(\iota_X)(\widetilde{\mathrm{K}}^0(p_Y)(y)) = 0$ dans $\mathrm{K}^0(X)$. A fortiori,

$$\mu(x \otimes y) \in \mathrm{Ker}\left(\mathrm{K}^0(X \times Y) \longrightarrow \mathrm{K}^0((x_0, y_0))\right) \simeq \widetilde{\mathrm{K}}^0(X \times Y).$$

La suite exacte ci-dessus donne l'existence d'un unique élément $x \,\widetilde{*}\, y \in \widetilde{\mathrm{K}}^0(X \wedge Y)$ tel que

$$\mu(x \otimes y) \in f_3(x \,\widetilde{*}\, y) + \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \oplus \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y)$$

Définition 3.3.2 (Produit externe réduit)**.** *Soit (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques compacts pointés. En reprenant les notations précédentes, on définit le* ***produit externe réduit*** *de $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X)$ et $\widetilde{\mathrm{K}}^0(Y)$ comme étant l'unique morphisme de pseudo-anneaux*

$$\widetilde{\mu} : \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(X \wedge Y)$$

tel que pour tout $(x, y) \in \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \times \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y)$, on ait $\widetilde{\mu}(x \otimes y) = x \,\widetilde{*}\, y$.

On a désormais tous les outils pour énoncer et démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.3.2 (Périodicité de Bott)**.** *Soit (X, x_0) un espace topologique compact pointé. Alors l'application*

$$\begin{aligned} \beta : \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) &\longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(S^2X) \\ x &\longmapsto [H-1] \,\widetilde{*}\, x \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. Soit (X, x_0) un espace topologique compact pointé. Commençons par décrire le produit $\widetilde{*}$. Pour cela, il suffit de remarquer que $\mathbb{S}_n \wedge X \simeq \Sigma^n X$, et que $\Sigma^n X$ est homéomorphe à l'écrasement dans $S^n X$ d'une boule de dimension n, donc

$$\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_n \wedge X) \cong \widetilde{\mathrm{K}}^0(\Sigma^n X) \simeq \widetilde{\mathrm{K}}^0(S^n X)$$

On peut alors composer ces isomorphismes avec le produit externe réduit définit en 3.3.2.
On a donc $\widetilde{\mu} : \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(S^2X)$. Montrons qu'il s'agit d'un isomorphisme. Le théorème du produit 3.3.1 fournit un isomorphisme d'anneaux $\mathrm{K}^0(\mathbb{S}_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{K}^0(X) \longrightarrow \mathrm{K}^0(\mathbb{S}_2 \times X)$ qui induit un isomorphisme de groupes $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_2 \wedge X)$ qui n'est autre que $\widetilde{\mu}$.
Soit maitenant,

$$\begin{aligned} \phi : \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) &\longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \\ x &\longmapsto [H-1] \otimes x \end{aligned}$$

On a $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_2)$ est monogène engendré par $[H-1]$, donc ϕ est un isomorphisme de groupes. D'où $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\mu} \circ \phi : \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(S^2X)$ est un isomorphisme de groupes. $\square$

Un corollaire immédiat de ce théorème est

Corollaire 3.3.1 (Groupes de K-théorie réduite des sphères)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

- $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n}) \cong \mathbb{Z}$ *et un générateur de* $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n})$ *est donné par* $\underbrace{[H-1] \,\widetilde{*}\, \cdots \,\widetilde{*}\, [H-1]}_{n \text{ termes}}$.
- $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n+1}) \cong 0$.

Enfin, la périodicité de Bott 3.3.2 et la suite exacte 3.3.3 pour une paire (X, A) donnent la proposition suivante :

Proposition 3.3.4. *Soit X un espace topologique compact et $A \subset X$ un sous-ensemble fermé. Alors on a une suite exacte :*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathrm{K}}^0(X/A) \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{K}}^0(X) \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{K}}^0(A) \arrow[d] \\
\widetilde{\mathrm{K}}^0(SA) \arrow[u] & \widetilde{\mathrm{K}}^0(SX) \arrow[l] & \widetilde{\mathrm{K}}^0(S(X/A)) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

On énonce ici un dernier résultat de K-théorie qui ne sera pas démontré mais qui nous sera utile lors de la vérifications des propriétés des opérations d'Adams.

Proposition 3.3.5 (Splitting Principle)**.** *Soit X un espace topologique compact. On pose $K^*(X) := \mathrm{K}^0(X) \oplus \mathrm{K}^1(X)$. Alors pour tout fibré vectoriel E sur X, il existe un espace topologique compact $Flag(E)$ et une application continue $p : Flag(E) \longrightarrow X$ telle que :*

- *$p^*(E)$ se décompose en somme directe de fibrés en droites.*
- *$\mathrm{K}^*(p) : \mathrm{K}^*(X) \longrightarrow \mathrm{K}^*(Flag(E))$ est injective.*

Ce principe permet de tirer en arrière un fibré vectoriel E sur X pour le décomposer en somme directe de fibrés en droites, de vérifier une équation dans $K^*(Flag(E))$ (ce qui est a priori plus simple en considérant des sommes de fibrés en droites) et de conclure que l'équation reste valide dans $\mathrm{K}^*(X)$ par injectivité en K-théorie.

Chapitre 4

Théorème d'Adams

Le but de cette section est de mettre à profit les outils de la K-théorie topologique pour démontrer le théorème d'Adams, que nous énonçons après la définition suivante.

Définition 4.0.1 (Variété parallélisable)**.** *Une variété M de classe $\mathscr{C}^k$ (où $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) de dimension $n \in \mathbb{N}$ est dite* ***parallélisable*** *si son fibré tangent TM est trivial en tant que fibré vectoriel, i.e. isomorphe à $M \times \mathbb{R}^n$ en tant que fibré vectoriel. Autrement dit, il existe $X_1, \ldots, X_n$ des champs de vecteurs sur M tels que pour tout point $p \in M$, les vecteurs $X_1(p), \ldots, X_n(p)$ sont linéairement indépendants.*

Théorème 4.0.1 (Théorème d'Adams)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{S}_n$ est parallélisable si et seulement si $n \in \{0, 1, 3, 7\}$.*

Ces valeurs de n correspondent en fait aux entiers pour lesquels $\mathbb{R}^{n+1}$ peut-être muni d'une structure d'algèbre à division, ce qui sera montré en 4.2.1 comme corollaire du théorème d'Adams 4.0.1.

Définition 4.0.2 (Algèbre à division sur le corps des réels)**.** *Une algèbre à division sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$ muni d'une multiplication $\cdot$ telle que pour tout $x \in \mathcal{A}$,*

$$L_x : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \qquad\qquad R_x : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$\quad y \longmapsto x \cdot y \qquad\qquad\qquad y \longmapsto y \cdot x$$

sont des applications $\mathbb{R}$-linéaires, bijectives si de plus $x \neq 0$.

On remarquera en particulier qu'on ne requiert pas certaines propriétés "naturelles" telles que la commutativité (cf. l'exemple des quaternions 4.1.1), l'associativité (cf. l'exemple des octonions 4.1.2) ou l'existence d'un élément neutre. Pour ce dernier point cependant, si $\mathbb{R}^n$ admet une structure d'algèbre à division sur $\mathbb{R}$, alors il existe une stucture d'algèbre à division sur $\mathbb{R}^n$ pour laquelle il existe un élément neutre à gauche et à droite. Nous montrerons et utiliserons ce fait pour démontrer le corollaire 4.2.1.

4.1 Le sens réciproque du théorème d'Adams

Nous allons démontrer le sens réciproque du théorème d'Adams, qui constitue la partie facile de la démonstration.

Définition 4.1.1 (Quaternions)**.** *L'espace des* ***quaternions*** $\mathbb{H}$ *est le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cdot i \oplus \mathbb{R} \cdot j \oplus \mathbb{R} \cdot k$ *muni de l'unique opération* $\mathbb{R}$*-bilinéaire vérifiant les règles suivantes :*

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Si $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$*, on note* $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ *le* ***conjugué*** *de* q *et on définit la* ***norme*** *de* q *par*

$$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Si $q \in \mathbb{H}$ *est non nul, on a* $q \cdot \frac{\overline{q}}{\|q\|^2} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2} \cdot q = 1$*, donc* $\frac{\overline{q}}{\|q\|^2}$ *est un inverse de* q *pour la multiplication.*

On vérifie que $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 muni d'une structure d'algèbre à division.

Définition 4.1.2 (Octonions)**.** *L'espace des* ***octonions*** $\mathbb{O}$ *est le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cdot i \oplus \mathbb{R} \cdot j \oplus \mathbb{R} \cdot k \oplus \mathbb{R} \cdot l \oplus \mathbb{R} \cdot il \oplus \mathbb{R} \cdot jl \oplus \mathbb{R} \cdot kl$ *muni de l'unique opération* $\mathbb{R}$*-bilinéaire vérifiant les règles suivantes :*

	1	i	j	k	l	il	jl	kl
1	1	i	j	k	l	il	jl	kl
i	i	-1	k	$-j$	il	$-l$	kl	$-jl$
j	j	$-k$	-1	i	jl	$-kl$	$-l$	il
k	k	j	$-i$	-1	kl	jl	$-il$	$-l$
l	l	$-il$	$-jl$	$-kl$	-1	i	j	k
il	il	l	kl	$-jl$	$-i$	-1	$-k$	j
jl	jl	$-kl$	l	il	$-j$	k	-1	$-i$
kl	kl	jl	$-il$	l	$-k$	$-j$	i	-1

Si

$$o = a + bi + cj + dk + el + f(il) + g(jl) + h(kl) \in \mathbb{O},$$

on note

$$\overline{o} = a - bi - cj - dk - el - f(il) - g(jl) - h(kl)$$

le ***conjugué*** *de* o *et on définit la* ***norme*** *de* o *par*

$$\|o\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2}.$$

Si $o \in \mathbb{O}$ *est non nul, on a* $o \cdot \frac{\overline{o}}{\|o\|^2} = \frac{\overline{o}}{\|o\|^2} \cdot o = 1$*, donc* $\frac{\overline{o}}{\|o\|^2}$ *est un inverse de* o *pour la multiplication.*

On vérifie que $\mathbb{O}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 8 muni d'une structure d'algèbre à division.

Proposition 4.1.1 (Théorème d'Adams, sens réciproque)**.** *Si $n \in \{0, 1, 3, 7\}$, alors $\mathbb{S}_n$ est parallélisable.*

Démonstration. Le cas $n = 0$ est trivial, car $\mathbb{S}_0 = \{\pm 1\}$.

Cas $n = 1$: On identifie $\mathbb{S}_1$ aux nombres complexes de module 1. Alors on définit un champ de vecteurs X qui ne s'annule en aucun point sur $\mathbb{S}_1$ par $X(z) = i \cdot z$ pour tout $z \in \mathbb{S}_1$. Donc $\mathbb{S}_1$ est parallélisable.

Cas $n = 3$: On identifie $\mathbb{S}_3$ aux quaternions de norme 1. On pose

$$\begin{aligned} \Phi : T\mathbb{S}_3 &\longrightarrow \mathbb{S}_3 \times T_1\mathbb{S}_3 \\ (x, v) &\longmapsto \left(x, \ \frac{v}{x}\right) \end{aligned}$$

qui est bien définie car si $(x, v) \in T\mathbb{S}_3$, alors

$$\frac{v}{x} = \frac{v}{\|x\|^2} \cdot \overline{x} = v \cdot \overline{x}.$$

Or la composante réelle de $v \cdot \overline{x}$ est $\langle v, \overline{x} \rangle = \langle v, x \rangle = 0$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^4$. De plus, Φ admet un inverse à gauche et à droite

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{S}_3 \times T_1\mathbb{S}_3 &\longrightarrow T\mathbb{S}_3 \\ (x, v) &\mapsto (x, v \cdot x) \end{aligned}$$

et ces applications sont de classe $\mathscr{C}^1$ car l'inversion et la multiplication dans $\mathbb{H}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. Donc Φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme et $T\mathbb{S}_3$ est isomorphe à $\mathbb{S}_3 \times T_1\mathbb{S}_3$ en tant que fibré vectoriel, donc $\mathbb{S}_3$ est parallélisable.

Cas $n = 7$: On identifie $\mathbb{S}_7$ aux octonions de norme 1 et en procédant exactement de la même manière que pour le cas $n = 3$, on conclut que $\mathbb{S}_7$ est parallélisable. □

Remarque 4.1.1. *Les cas $n = 0, 1, 3$ sont des cas particuliers du fait suivant : tout groupe de Lie est parallélisable. On peut en effet facilement montrer que $\mathbb{S}_0$, $\mathbb{S}_1$ et $\mathbb{S}_3$ admettent une structure de groupe de Lie. La réciproque est également vraie : si $\mathbb{S}_n$ admet une structure de groupe de Lie, alors $n \in \{0, 1, 3\}$. On pourra trouver une démonstration de ce résultat dans [3], chapitre V, section* 12.

4.2 Le sens direct du théorème d'Adams

4.2.1 Cas pair

Proposition 4.2.1. *Si n est pair et $n \neq 0$, alors $\mathbb{S}_n$ n'est pas parallélisable.*

Démonstration. Soit $n > 0$ pair et supposons que $\mathbb{S}_n$ est parallélisable. Alors en particulier, comme $n \neq 0$, il existe un champ de vecteurs X qui ne s'annule pas sur $\mathbb{S}_n$. Montrons qu'un tel champ de vecteurs sur une sphère de dimension paire n'existe pas. Il s'agit du théorème de la boule cheveulue, dont on redonne ici une démonstration. Rappellons que, sur une sphère de dimension $d \in \mathbb{N}$ paire, l'identité est de degré 1 et l'antipodie $-\mathrm{id}$ est de degré [1] -1.
Quitte à renormaliser X, on peut supposer que X est à valeurs dans $\mathbb{S}_n$. On considère alors :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{S}_n \times [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{S}_n \\ (x, t) &\mapsto \sin(t)X(x) + \cos(t)x \end{aligned}$$

L'application γ est bien à valeurs dans $\mathbb{S}_n$ car x et $X(x)$ sont des vecteurs unitaires orthogonaux pour tout $x \in \mathbb{S}_n$. De plus, γ est continue et vérifie $\gamma(\cdot, 0) = \mathrm{id}_{\mathbb{S}_n}$ et $\gamma(\cdot, \pi) = -\mathrm{id}_{\mathbb{S}_n}$. Donc γ est une homotopie entre l'identité et l'antipodie, ce qui est absurde car elles seraient alors de même degré. □

4.2.2 Cas impair

En vertu de la proposition 4.2.1, nous allons désormais nous intéresser au cas plus difficile où n est impair. Nous allons tout d'abord établir certains outils dont nous aurons besoin dans la suite.

H-espace et invariant de Hopf

Définition 4.2.1 (H-espace)**.** *Un* ***H-espace*** *est un espace topologique X muni d'une multiplication continue $\mu : X \times X \longrightarrow X$ vérifiant l'existence d'un élément neutre à droite et à gauche $e \in X$.*

Remarque 4.2.1. *La notion de H-espace est une généralisation de la notion de groupe topologique. On ne demande pas que la multiplication soit associative, ni l'existence d'inverses.*

Lemme 4.2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\mathbb{S}_n$ est parallélisable, alors $\mathbb{S}_n$ peut-être munie d'une structure de H-espace.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\mathbb{S}_n$ est parallélisable. Alors le fibré tangent $T\mathbb{S}_n$ est trivial, donc d'après la remarque 1.5.3, il existe $s_1, \ldots, s_n$ sections de $T\mathbb{S}_n$ telle que pour tout $x \in \mathbb{S}_n$, $(s_1(x), \ldots, s_n(x))$ est une base orthonormée de l'espace tangent $T_x\mathbb{S}_n = x^\perp$, muni du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. D'où pour tout $x \in \mathbb{S}_n$, $(x, s_1(x), \ldots, s_n(x))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^{n+1}$, muni du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit $x \in \mathbb{S}_n$, l'automorphisme α_x de $\mathbb{R}^{n+1}$ caractérisé par $\alpha_x(e_1) = x$ et $\alpha_x(s_i(e_1)) = s_i(x)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ est donc un élément de $\mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R})$. On pose alors

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n &\longrightarrow \mathbb{S}_n \\ (x, y) &\longmapsto \alpha_x(y) \end{aligned}$$

1. Il s'agit de la composée des $d+1$ symétries par rapport aux hyperplans de coordonnées $H_i = \{(x_j)_{1 \le j \le d+1} \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_i = 0\}$ pour $i = 1, \ldots, d+1$, donc est de degré $(-1)^{d+1} = -1$ car d est pair.

On a que μ est bien définie et vérifie pour tout $x \in \mathbb{S}_n$, $\mu(e_1, x) = \alpha_{e_1}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}(x) = x$ et $\mu(x, e_1) = \alpha_x(e_1) = x$. Donc e_1 est un élément neutre à droite et à gauche pour μ. De plus, μ est la restriction à $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$ de la composée des deux applications continues

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longmapsto (e_1^*(\cdot)x + \sum_{i=1}^{n} s_i(e_1)^*(\cdot)s_i(x), y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (M, y) &\longmapsto M(y) \end{aligned}$$

donc μ est continue. Donc μ munit $\mathbb{S}_n$ d'une structure de H-espace. □

Il suffit alors de démontrer le théorème "réduit" suivant :

Théorème 4.2.1 (Théorème d'Adams "réduit")**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair. Si $\mathbb{S}_n$ peut-être munie d'une structure de H-espace, alors $n \in \{1, 3, 7\}$.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on veut désormais montrer que si $\mathbb{S}_{2n-1}$ est munie d'une structure de H-espace, alors $2n - 1 \in \{1, 3, 7\}$. Pour toute application $f : \mathbb{S}_{2n-1} \times \mathbb{S}_{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}_{2n-1}$ continue surjective, on va construire une application continue $\hat{f} : \mathbb{S}_{4n-1} \longrightarrow \mathbb{S}_{2n}$ prolongeant f, et attacher à toute application continue $\mathbb{S}_{4n-1} \longrightarrow \mathbb{S}_{2n}$ un invariant numérique, appelé **invariant de Hopf**[2]. Nous montrerons que dans le cas particulier d'une multiplication de H-espace, l'invariant de Hopf est égal à 1 modulo 2, ce qui donnera des conditions suffisamment restrictives pour conclure, en conjonction avec la notion d'opérations d'Adams (cf. 4.2.3).

On fait les identifications

$$\mathbb{S}_{4n-1} = \partial\mathbb{B}_{4n} \simeq \partial(\mathbb{B}_{2n} \times \mathbb{B}_{2n}) = (\partial\mathbb{B}_{2n} \times \mathbb{B}_{2n}) \cup (\mathbb{B}_{2n} \times \partial\mathbb{B}_{2n}) \quad \text{et} \quad \mathbb{S}_{2n} \simeq \mathbb{B}_{2n}^+ \cup_{\mathrm{id}_{\partial\mathbb{B}_{2n}}} \mathbb{B}_{2n}^+$$

où $\mathbb{B}_{2n}^+$ et $\mathbb{B}_{2n}^-$ sont deux boules de dimension $2n$. Soit $g : \mathbb{S}_{2n-1} \times \mathbb{S}_{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}_{2n-1}$ une application continue. On pose

$$\begin{aligned} \hat{g}^+ : \partial\mathbb{B}_{2n} \times \mathbb{B}_{2n} &\longrightarrow \mathbb{B}_{2n}^+ \\ (x, y) &\mapsto \|y\| g\left(x, \frac{y}{\|y\|}\right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \hat{g}^- : \mathbb{B}_{2n} \times \partial\mathbb{B}_{2n} &\longrightarrow \mathbb{B}_{2n}^- \\ (x, y) &\mapsto \|x\| g\left(\frac{x}{\|x\|}, y\right). \end{aligned}$$

Alors $\hat{g}^+$ et $\hat{g}^-$ sont bien définies, continues et $\hat{g}^+\big|_{\mathbb{S}_{2n-1} \times \mathbb{S}_{2n-1}} = \hat{g}^-\big|_{\mathbb{S}_{2n-1} \times \mathbb{S}_{2n-1}} = g$. Ces deux applications se recollent donc en une application continue $\hat{g} : \mathbb{S}_{4n-1} \longrightarrow \mathbb{S}_{2n}$.On s'intéresse alors aux applications continues de $\mathbb{S}_{4n-1}$ vers $\mathbb{S}_{2n}$. Soit $f : \mathbb{S}_{4n-1} \longrightarrow \mathbb{S}_{2n}$ une application continue surjective. On pose C_f l'espace topologique obtenu en attachant à $\mathbb{S}_{2n}$ une $4n$-cellule le long de f. f étant une surjection, il vient $C_f/\mathbb{S}_{2n} \simeq \mathbb{B}_{4n}/\partial\mathbb{B}_{4n} \simeq \mathbb{S}_{4n}$. On a $\widetilde{\mathrm{K}}^0(S\mathbb{S}_{4n}) = \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{4n+1}) = \widetilde{\mathrm{K}}^0(S\mathbb{S}_{2n}) = \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n+1}) = 0$ donc la suite exacte 3.3.4 pour la paire $(C_f, \mathbb{S}_{2n})$ donne une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{4n}) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(C_f) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n}) \longrightarrow 0$$

2. En réalité, seule la valeur de l'invariant de Hopf modulo 2 nous intéressera dans la suite.

Notons α l'image dans $\widetilde{\mathrm{K}}^0(C_f)$ du générateur $\underbrace{[H-1]\widetilde{*}\cdots\widetilde{*}[H-1]}_{2n \text{ termes}}$ de $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{4n})$ et β une préimage du générateur $\underbrace{[H-1]\widetilde{*}\cdots\widetilde{*}[H-1]}_{n \text{ termes}}$ de $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n})$. L'exactitude de la suite donne l'existence d'un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\beta^2 = k\alpha$. Les préimages de $\underbrace{[H-1]\widetilde{*}\cdots\widetilde{*}[H-1]}_{n \text{ termes}}$ dans $\widetilde{\mathrm{K}}^0(C_f)$ sont exactement les $\beta + l\alpha$ pour $l \in \mathbb{Z}$, et pour tout $l \in \mathbb{Z}$, on a $(\beta + l\alpha)^2 = \beta^2 + 2l\beta\alpha + l^2 \underbrace{\alpha^2}_{=0} = k\alpha \bmod 2$. Autrement dit, la classe de k modulo 2 ne dépend pas du choix de la préimage β.

Définition 4.2.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{S}_{4n-1} \longrightarrow \mathbb{S}_{2n}$ une application continue surjective. On définit l'**invariant de Hopf** de f comme étant l'entier $k \in \mathbb{Z}$ défini ci-dessus [a]. On appelle **invariant de Hopf modulo** 2 de f k mod 2.*

a. On peut montrer que k ne dépend pas de la préimage β choisie, ce qui justifie le terme d'invariant. Cependant, on ne s'intéressera qu'à la valeur de k modulo 2.

On s'intéresse désormais à l'invariant de Hopf modulo 2 des multiplications de H-espaces, qui sont effectivement des applications continues surjectives en raison de l'existence d'un élément neutre à droite et à gauche.

Proposition 4.2.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\nu : \mathbb{S}_{2n-1} \times \mathbb{S}_{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}_{2n-1}$ une multiplication de H-espace. Alors l'invariant de Hopf modulo 2 de $\hat{\nu}$ est égal à 1.*

Démonstration. Soit $e \in \mathbb{S}_{2n-1}$ l'élément neutre de ν et $\Phi : \mathbb{B}_{4n} \longrightarrow C_{\hat{\nu}}$ l'application d'attachement de la $4n$-cellule. On peut également voir Φ comme une application continue $\Phi : \mathbb{B}_{4n}/\partial\mathbb{B}_{4n} \longrightarrow C_{\hat{\nu}}/\mathbb{S}_{2n}$, et donc comme une application continue $\Phi : \mathbb{B}_{2n} \times \mathbb{B}_{2n}/\partial\mathbb{B}_{2n} \times \mathbb{B}_{2n} \longrightarrow C_{\hat{\nu}}/\mathbb{S}_{2n}$. En posant $\pi_+ : C_{\hat{\nu}} \longrightarrow C_{\hat{\nu}}/\mathbb{B}^+_{2n}$ et $\pi_- : C_{\hat{\nu}} \longrightarrow C_{\hat{\nu}}/\mathbb{B}^-_{2n}$ les surjections canoniques, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathrm{K}}^0(C_{\hat{\nu}}) \otimes \widetilde{\mathrm{K}}^0(C_{\hat{\nu}}) \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\mathrm{K}}^0(\pi_-)^{-1} \otimes \widetilde{\mathrm{K}}^0(\pi_+)^{-1}", "\simeq"'] & \widetilde{\mathrm{K}}^0(C_{\hat{\nu}}) \\
\widetilde{\mathrm{K}}^0(C_{\hat{\nu}}/\mathbb{B}^-_{2n}) \otimes \widetilde{\mathrm{K}}^0(C_{\hat{\nu}}/\mathbb{B}^+_{2n}) \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\mathrm{K}}^0(\Phi) \otimes \widetilde{\mathrm{K}}^0(\Phi)"] & \widetilde{\mathrm{K}}^0(C_{\hat{\nu}}/\mathbb{S}_{2n}) \arrow[u] \\
\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{B}_{2n} \times \mathbb{B}_{2n}/\partial\mathbb{B}_{2n} \times \mathbb{B}_{2n}) \otimes \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{B}_{2n} \times \mathbb{B}_{2n}/\mathbb{B}_{2n} \times \partial\mathbb{B}_{2n}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{B}_{2n} \times \mathbb{B}_{2n}/\partial(\mathbb{B}_{2n} \times \mathbb{B}_{2n})) \arrow[u, "\widetilde{\mathrm{K}}^0(\Phi)^{-1}"', "\simeq"] \\
\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{B}_{2n} \times \{e\}/\partial\mathbb{B}_{2n} \times \{e\}) \otimes \widetilde{\mathrm{K}}^0(\{e\} \times \mathbb{B}_{2n}/\{e\} \times \partial\mathbb{B}_{2n}) \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont les produits évidents et la flèche diagonale s'identifie au produit externe réduit $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n}) \otimes \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n}) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{4n})$, qui est un isomorphisme par Bott. Les flèches verticales sont définies de façon évidente, les deux isomorphsimes de la première colonne venant de la contractibilité de $\mathbb{B}_{2n}$.

On reprend β et α comme précédemment. En suivant le chemin bleu, on envoie $\beta \otimes \beta$ sur β^2. Par définition de β, $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\Phi) \circ \widetilde{\mathrm{K}}^0(\pi_-)^{-1}(\beta)$ est un générateur de $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{B}_{2n} \times \mathbb{B}_{2n}/\partial\mathbb{B}_{2n} \times \mathbb{B}_{2n})$ et $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\Phi) \circ \widetilde{\mathrm{K}}^0(\pi_-)^{-1}(\beta)$ est un générateur de $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{B}_{2n} \times \mathbb{B}_{2n}/\mathbb{B}_{2n} \times \partial\mathbb{B}_{2n})$, donc $(\widetilde{\mathrm{K}}^0(\Phi) \otimes \widetilde{\mathrm{K}}^0(\Phi)) \circ (\widetilde{\mathrm{K}}^0(\pi_-)^{-1} \otimes \widetilde{\mathrm{K}}^0(\pi_+)^{-1})(\beta \otimes \beta)$ est un générateur de $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{B}_{2n} \times \mathbb{B}_{2n}/\partial(\mathbb{B}_{2n} \times \mathbb{B}_{2n})) \otimes \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{B}_{2n} \times \mathbb{B}_{2n}/\mathbb{B}_{2n} \times \partial\mathbb{B}_{2n})$. En suivant le chemin rouge, on envoie donc $\beta \otimes \beta$ sur un générateur de $\widetilde{\mathrm{K}}^0(C_{\hat{\nu}}/\mathbb{S}_{2n})$. Par définition de α, il vient que ce générateur est envoyé par la flèche verte sur $\pm\alpha$ dans $\widetilde{\mathrm{K}}^0(C_{\hat{\nu}})$. La commutativité du diagramme donne donc que $\beta^2 = \pm\alpha$ donc l'invariant de Hopf [3] modulo 2 de $\hat{\nu}$ est égal à 1. □

Opérations d'Adams

Proposition 4.2.3 (Opérations d'Adams)**.** *Pour tout X espace topologique compact, on peut construire une famille $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'endomorphismes de l'anneau $\mathrm{K}^0(X)$ qui vérifie les propriétés suivantes. Soit X, Y deux espaces topologiques compacts.*

(1) Pour toute application continue $f : X \longrightarrow Y$, on a $\psi_k \circ \mathrm{K}^0(f) = \mathrm{K}^0(f) \circ \psi_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\psi_k([L]) = [L]^k$ pour tout fibré en droites L sur X.

(3) Pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, on a $\psi_k \circ \psi_l = \psi_{kl}$.

(4) Pour tout $p \in \mathbb{N}$ premier, pour tout $\alpha \in \mathrm{K}^0(X)$, il existe $\beta \in \mathrm{K}^0(X)$ tel que $\psi_p(\alpha) = \alpha^p + p\beta$ (ce qu'on notera $\psi_p(\alpha) = \alpha^p \mod p$).

(5) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, ψ_k se restreint en un endomorphisme du pseudo-anneau $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X)$, noté de même ψ_k.

(6) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et Y un espace topologique compact, on a une compatibilité avec le produit externe réduit, c'est-à-dire que pour tout $x \in \widetilde{\mathrm{K}}^0(X)$ et $y \in \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y)$, on a $\psi_k(x \tilde{*} y) = \psi_k(x) \tilde{*} \psi_k(y)$.

(7) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\psi_k : \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n}) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n})$ est la multiplication par k^n.

Pour vérifier les différents points de la proposition, nous allons avoir recours au Splitting Principle (cf. 3.3.5).

Démonstration. Analyse et motivation pour la construction :

On essaye de construire d'abord les opérations d'Adams comme applications additives prenant en argument des classes de fibrés vectoriels sur X et à valeurs dans $\mathrm{K}^0(X)$. Soit $k, n \in \mathbb{N}$ et ψ_k qui convient. Alors pour toute famille $(L_i)_{1\leq i\leq n}$ de fibrés en droites sur X, on veut

$$\psi_k(L_1 \oplus \cdots \oplus L_n) = [L_1]^k + \cdots + [L_n]^k = P([L_1], \ldots, [L_n])$$

par la propriété (2), où $P(T_1, \ldots, T_n) := T_1^k + \cdots + T_n^k \in \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$, qui est symétrique. En notant s_k la k-ème somme de Newton, il vient en posant $E := L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$,

$$\psi_k(E) = s_k(\Sigma_1([L_1], \ldots, [L_n]), \cdots, \Sigma_n([L_1], \ldots, [L_n]))$$

3. On a même montré ici que l'invariant de Hopf est égal à ±1, mais seule son imparité nous importe pour la suite.

où Σ_i est le i-ème polynôme symétrique élémentaire. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\Sigma_i([L_1], \dots, [L_n])$ est le coefficient de degré i du polynôme $\prod_{j=1}^n (1 + [L_j]T) \in \mathrm{K}^0(X)[T]$. Par les propriétés sur les puissances extérieures (cf. l'annexe A.5.3), il vient $\prod_{j=1}^n (1 + [L_j]T) = \prod_{j=1}^n \lambda_T(L_j)$, où

$$\lambda_T : Vect(X) \longrightarrow \mathrm{K}^0(X)[T]$$
$$a \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} [\lambda^i(a)] T^i$$

ce qui est bien défini car X compact donc pour tout $a \in Vect(X)$, $[\lambda^i(a)] = 0$ pour tout i plus grand que le maximum des dimensions des fibres de a. Les propriétés des puissances extérieures donnent que pour tout $F_1, F_2 \in Vect(X)$, on a $\lambda_T(F_1 \oplus F_2) = \lambda_T(F_1)\lambda_T(F_2)$, donc $\prod_{j=1}^n \lambda_T(L_j) = \lambda_T(E)$. Il vient que pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $\Sigma_i([L_1], \dots, [L_n]) = [\lambda(E)]^i$, donc

$$\psi_k(E) = s_k([\lambda^1(E)], \dots, [\lambda^i(E)], \dots, [\lambda^n(E)])$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, fort de cette analyse, on pose

$$\psi_k : Vect(X) \longrightarrow \mathrm{K}^0(X)$$
$$E \mapsto s_k([\lambda^1(E)], \dots, [\lambda^i(E)], \dots, [\lambda^n(E)]).$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques compacts, pour tout $E \in Vect(X)$, on a $\lambda^i(f^*E) = f^*\lambda^i(E)$, d'où ψ_k vérifie la propriété (1). La propriété (2) est vérifiée par construction de ψ_k. Montrons que ψ_k est un morphisme de pseudo-anneaux. Soit E_1, E_2 deux fibrés sur X. Quitte à d'abord tirer E_1 en arrière pour le décomposer en fibrés en droites, puis à tirer en arrière E_2 pour le décomposer également, on peut supposer que $E_1 = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ et $E_2 = M_1 \oplus \dots \oplus M_m$, où L_i, M_j sont des fibrés en droites sur X (on utilise ici la propriété (1) et l'injectivité en K-théorie dans le 3.3.5). Il vient par la propriété (2) que

$$\psi_k([E_1] \oplus [E_2]) = [L_1]^k + \dots + [L_n]^k + [M_1]^k + \dots + [M_m]^k = \psi_k([E_1]) + \psi_k([E_2])$$

et

$$\psi_k([E_1] \otimes [E_2]) = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} [L_i]^k [M_j]^k = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} [L_i]^k \right) \left(\sum_{1 \leq j \leq m} [M_j]^k \right) = \psi_k([E_1])\psi_k([E_2])$$

Enfin, en notant 1 est le fibré trivial de rang un sur X, on a $\psi_k([1]) = [1]^k = [1]$, donc ψ_k est un morphisme de pseudo-anneaux. D'où ψ_k induit un morphisme d'anneaux $K^0(X) \longrightarrow \mathrm{K}^0(X)$, qu'on note également ψ_k, et qui vérifie également les propriétés (1) et (2).

Pour montrer la propriété (3), on utilise le Splitting Principle et l'additivité de ψ_k se ramener au cas de la classe d'un fibré en droites, pour laquelle le résultat est immédiat.

Montrons la propriété (4) en se ramenant au cas des fibrés en droites grâce au Splitting Principle. Soit $p \in \mathbb{N}$ premier et $([L_i])_{1 \leq i \leq n}$ une famille de classes de fibrés en droites sur X. On a $\psi_p([L_1] \oplus \dots \oplus [L_n]) = [L_1]^p + \dots + [L_n]^p = (\sum_{i=1}^n [L_i])^p \bmod p$.

Soit $x_0 \in X$ un point base de X. On a $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X)$ peut-être vu comme le noyau de l'application $\mathrm{K}^0(X) \longrightarrow \mathrm{K}^0(x_0)$, d'où la propriété (1) donne que ψ_k stabilise le noyau de cette dernière application, donc induit un endomorphisme du pseudo-anneau $\widetilde{\mathrm{K}}^0(X)$, qu'on note également ψ_k, ce qui donne la propriété (5).

Montrons la propriété (6). Soit $x \in \widetilde{\mathrm{K}}^0(X)$ et $y \in \widetilde{\mathrm{K}}^0(Y)$. On a

$$\begin{aligned}
\psi_k(x \widetilde{*} y) &= \psi_k(\widetilde{\mathrm{K}}^0(p_X)(x)\widetilde{\mathrm{K}}^0(p_Y)(y)) \\
&= \psi_k(\widetilde{\mathrm{K}}^0(p_X)(x))\psi_k(\widetilde{\mathrm{K}}^0(p_Y)(y)) \\
&= \widetilde{\mathrm{K}}^0(p_X)(\psi_k(x))\widetilde{\mathrm{K}}^0(p_Y)(\psi_k(y)) \text{ par la propriété (1)} \\
&= \psi_k(x)\widetilde{*}\psi_k(y) \text{ par définition du produit externe réduit.}
\end{aligned}$$

Pour montrer la dernière assertion, on raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$, on a $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_2)$ est monogène engendré par $[H-1]$, et $\psi_k([H-1]) \underbrace{=}_{(2)} [H]^k - 1 = (1 + [H-1])^k - 1 \underbrace{=}_{[H-1]^2=0} k[H-1]$. Donc ψ_k est la multiplication par k sur $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_2)$. Soit $n \geq 2$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n-1$, le résultat est vrai. On a $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n}) \cong \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n-2})$ d'où si $\alpha \in \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_2)$ générateur et $\beta \in \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n-2})$ générateur, on a $\psi_k(\alpha \widetilde{*} \beta) \underbrace{=}_{(6)} \psi_k(\alpha)\widetilde{*}\psi_k(\beta) = (k\alpha)\widetilde{*}(k^{n-1}\beta) = k^n(\alpha \widetilde{*} \beta)$. Or $\alpha \widetilde{*} \beta$ étant un générateur de $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n})$, on en déduit que ψ_k est la multiplication par k^n sur $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n})$.

□

Fin de la preuve du théorème 4.0.1 et un corollaire sur les algèbres à division sur $\mathbb{R}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{S}_{2n-1}$ est parallélisable. D'après le lemme 4.2.1, $\mathbb{S}_{2n-1}$ admet une structure de H-espace dont on note la multiplication ν. Alors soit $\hat{\nu} : \mathbb{S}_{4n-1} \longrightarrow \mathbb{S}_{2n}$ l'application associée à la multiplication ν. On rappelle qu'on a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{4n}) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}^0(C_{\hat{\nu}}) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{K}}^0(\gamma)} \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n}) \longrightarrow 0$$

et on note α l'image du générateur $[H-1]\widetilde{*}\cdots\widetilde{*}[H-1]$ de $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{4n})$ dans $\widetilde{\mathrm{K}}^0(C_{\hat{\nu}})$ et β une préimage de $[H-1]\widetilde{*}\cdots\widetilde{*}[H-1] \in \widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{2n})$ dans $\widetilde{\mathrm{K}}^0(C_{\hat{\nu}})$. Soit $k \in \mathbb{N}$. La propriété (6) de la proposition 4.2.3 donne que $\psi_k(\alpha) = k^{2n}\alpha$ et on a

$$\widetilde{\mathrm{K}}^0(\gamma)(\psi_k(\beta)) \underbrace{=}_{(1)} \psi_k(\widetilde{\mathrm{K}}^0(\gamma)(\beta)) = k^n \widetilde{\mathrm{K}}^0(\gamma)(\beta)$$

d'où il existe $e_k \in \mathbb{Z}$ tel que $\psi_k(\beta) = k^n\beta + e_k\alpha$. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a $\psi_k \circ \psi_l(\beta) = \psi_l \circ \psi_k(\beta)$, i.e.

$$l^n(k^n\beta + e_k\alpha) + e_l k^{2n}\alpha = k^n(l^n\beta + e_l\alpha) + e_k l^{2n}\alpha,$$

i.e.

$$(l^n e_k + e_l k^{2n} - k^n e_l - l^{2n} e_k)\alpha = 0.$$

Or α est un générateur de l'image de $\widetilde{\mathrm{K}}^0(\mathbb{S}_{4n})$ dans $\widetilde{\mathrm{K}}^0(C_{\hat{\nu}})$, donc $l^n e_k + e_l k^{2n} - k^n e_l - l^{2n} e_k = 0$, i.e. $l^n(l^n - 1)e_k = k^n(k^n - 1)e_l$. Or par 4.2.2, l'invariant de Hopf modulo 2 de $\hat{\nu}$ est égal à 1, d'où $\beta^2 = \alpha \mod 2$. Or la propriété (4) de la proposition 4.2.3 donne que $\psi_2(\beta) = \beta^2 \mod 2$, donc $e_2\alpha = \alpha \mod 2$, donc $e_2 \equiv 1 \pmod 2$. En spécialisant en $(k, l) = (2, 3)$, il vient 2^n divise $3^n - 1$. On conclut par le lemme 4.2.2 suivant.

Lemme 4.2.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $2^n \mid 3^n - 1$, alors $n \in \{1, 2, 4\}$.*

Pour démontrer le lemme 4.2.2, nous allons utiliser un cas particulier d'un lemme d'aritmétique, le lemme LTE pour $p = 2$, dont nous rappelons l'énoncé [4] :

Lemme 4.2.3 (lemme LTE (lifting the exponent) cas $p = 2$)**.** *Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ impairs et $n \in \mathbb{N}^*$ pair. Alors*

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1$$

où v_2 est la valuation 2-adique.

Preuve du lemme 4.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^n \mid 3^n - 1$. Si n est impair, alors $v_2(3^n - 1) = 1$ par le lemme A.5.2, donc $n = 1$. Si n est pair, on écrit $n = 2^k \cdot m$ avec m impair et $k \in \mathbb{N}^*$. Par le lemme 4.2.3, on a $n \leqslant 2 + k$, i.e. $2^k \cdot m \leqslant 2 + k$. On a $2^k \leq 2^k \cdot m \leqslant 2 + k$ et $2 + l < 2^l$ pour tout $l > 3$, donc $k \in \{1, 2\}$ puis $m = 1$. $\square$

Corollaire 4.2.1 (Algèbres à division sur $\mathbb{R}$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{R}^{n+1}$ admette une structure d'algèbre à division. Alors $n \in \{0, 1, 3, 7\}$.*

Démonstration. Soit $n \geqslant 1$ tel que $\mathbb{R}^{n+1}$ admette une structure d'algèbre à division. Montrons que $n + 1$ est pair. Pour tout $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, on pose

$$\begin{aligned} L_a : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

qui est bien définie, linéaire et continue. On fixe $a \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ et on se donne une application continue $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ telle que $\gamma(0) = -a$ et $\gamma(1) = a$, qui existe car $n \geqslant 1$ donc $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ est connexe par arcs. Soit

$$\begin{aligned} \Gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \det(L_{\gamma(t)}) \end{aligned}$$

qui est une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^*$ car pour tout $t \in [0, 1]$, $L_{\gamma(t)}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ et

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ b &\longmapsto L_b \end{aligned}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire donc continue. Or $L_{-a} = -L_a$, donc $\Gamma(0) = (-1)^{n+1}\Gamma(1)$ et la connexité de $[0, 1]$ donne que $\Gamma(0)$ et $\Gamma(1)$ ont même signe, donc $n + 1$ est pair.

Construisons une struture d'algèbre à division sur $\mathbb{R}^{n+1}$ pour laquelle il existe un élément de $\mathbb{S}_n$ qui est neutre à droite et à gauche. Soit $e \in \mathbb{S}_n$. On a $e^2 \neq 0$ d'où il existe un $\phi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n+1})$ envoyant e^2 sur e. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x, y) &\longmapsto \phi(xy) \end{aligned}$$

4. Voir l'annexe A.5.1 pour une démonstration.

munit $\mathbb{R}^{n+1}$ d'une structure d'algèbre à division. On peut donc, quitte à considérer ce nouveau produit sur $\mathbb{R}^{n+1}$, supposer que $e^2 = e$. On pose

$$\begin{aligned} L_e : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\longmapsto e \cdot x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} R_e : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\longmapsto x \cdot e. \end{aligned}$$

Alors L_e et R_e sont des automorphismes $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{R}^{n+1}$, et

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x, y) &\longmapsto R_e^{-1}(x) L_e^{-1}(y) \end{aligned}$$

munit $\mathbb{R}^{n+1}$ d'une structure d'algèbre à division. En particulier, puisque $e^2 = 2$, on a $L_e^{-1}(e) = L_e^{-1}(e^2) = e$ et idem pour $R_e^{-1}(e) = 2$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, on a

$$\begin{cases} R_e^{-1}(x) L_e^{-1}(e) = R_e^{-1}(x) e = x \\ R_e^{-1}(e) L_e^{-1}(x) = e L_e^{-1}(x) = x. \end{cases}$$

Autrement dit, quitte à considérer ce nouveau produit sur $\mathbb{R}^{n+1}$, on peut supposer l'existence d'un élément neutre à droite et à gauche $e \in \mathbb{S}_n$. Soit alors $e \in \mathbb{S}_n$ un tel élément neutre. On a

$$\begin{aligned} \nu : \mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n &\longrightarrow \mathbb{S}_n \\ (x, y) &\longmapsto \frac{xy}{\|xy\|} \end{aligned}$$

est bien définie, continue car la multiplication dans $\mathbb{R}^{n+1}$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire, et e est un élément neutre à droite et à gauche pour ν. On a donc muni $\mathbb{S}_n$ d'une structure de H-espace. Or n est impair, donc si $n \neq 0$, le théorème 4.2.1 donne $n \in \{1, 3, 7\}$ ce qui assure $n \in \{0, 1, 3, 7\}$. $\square$

Réciproquement, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$ sont des algèbres à division sur $\mathbb{R}$ de dimension 1, 2, 4 et 8 respectivement.

Annexe

On donne dans cette sous-section quelques définitions et résultats qui ne figurent pas dans le corps du mémoire mais qui peuvent aider à la compréhension globale.

A.1 Quelques éléments de topologie générale

Définition A.1.1 (Cône d'un espace topologique)**.** *Soit X un espace topologique. On appelle **cône** de X l'espace topologique quotient $CX = C(X) = X \times [0,1]/\sim$ où la relation d'équivalence $\sim$ est engendrée par $(x,1) \sim (y,1)$ pour $x, y \in X$.*

Remarque A.1.1 (Contractibilité du cône d'un espace topologique)**.** *Soit X un espace topologique non-vide et $x_0 \in X$. On pose*

$$\begin{aligned} H : CX \times [0,1] &\longrightarrow CX \\ ((x,t),s) &\longmapsto (x, t + s(1-t)) \end{aligned}$$

qui est continue et vérifie $H(\cdot, 0) = \mathrm{id}_{CX}$ et $H(\cdot, 1)$ est l'application constante égale au point $[(x_0, 1)]$. Ainsi, CX est contractile.

Définition A.1.2 (Suspension d'un espace topologique)**.** *Soit X un espace topologique. On appelle **suspension** de X l'espace topologique quotient $SX = X \times [-1,1]/\sim$ où la relation d'équivalence $\sim$ est engendrée par $(x,-1) \sim (y,-1)$ et $(x,1) \sim (y,1)$ pour $x, y \in X$. De façon équivalente, on peut voir la suspension de X comme le quotient $CX/X \times \{0\}$ où on a identifié $X \times \{0\}$ à son image dans CX. On définit $S^n X$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en posant :*

$$\begin{cases} S^0 X \overset{\text{def}}{=} X \\ S^{n+1} X \overset{\text{def}}{=} S(S^n X) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarque A.1.2 (Fonctorialité de S)**.** *Soit X, Y espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Alors on peut définir une application continue*

$$\begin{aligned} S(f) : SX &\longrightarrow SY \\ [(x,t)] &\longmapsto [(f(x), t)] \end{aligned}$$

*On a alors $S(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{SX}$ et pour toute application continue $g : Z \longrightarrow X$ de domaine un espace topologique Z, on a $S(f \circ g) = S(f) \circ S(g)$. Ainsi, $S :$ **Top** $\longrightarrow$ **Top** est un foncteur.*

Définition A.1.3 (Suspension réduite d'un espace topologique)**.** *Soit* (X, x_0) *un espace topologique pointé. On définit la* ***suspension réduite*** *de* (X, x_0) *comme l'espace topologique quotient* $\Sigma(X, x_0) = S(X)/(\{x_0\} \times [-1, 1])$ *muni du point base l'image de* $x_0 \times [-1, 1]$ *dans* $\Sigma(X, x_0)$*. Autrement dit, on identifie les points de la suspension de* X *qui appartiennent au "méridien"* $x_0 \times [-1, 1]$*. De façon équivalente, on peut voir la suspension réduite de* (X, x_0) *comme le quotient* $X \times [-1, 1]/((\{x_0\} \times [-1, 1]) \cup (X \times \{-1, 1\}))$*.*
On définit $\Sigma^n(X, x_0)$ *par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}$ *en posant :*

$$\begin{cases} \Sigma^0(X, x_0) \overset{\text{def}}{=} (X, x_0) \\ \Sigma^{n+1}(X, x_0) \overset{\text{def}}{=} \Sigma(\Sigma^n(X, x_0)) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Définition A.1.4 (Bouquet d'espaces topologiques pointés)**.** *Soit* $(X_i, x_i)_{i \in I}$ *famille d'espaces topologiques pointés. On appelle* ***bouquet*** *de la famille* $(X_i, x_i)_{i \in I}$*, noté* $\bigvee_{i \in I}(X_i, x_i)$ *(ou plus simplement* $\bigvee_{i \in I} X_i$ *par abus de notation), l'espace toplogique quotient* $\bigsqcup_{i \in I} X_i / \sim$*, où* $\sim$ *est la relation d'équivalence engendrée par* $\left\{(x_i, x_j) \,\middle|\, i, j \in I\right\}$ *et* $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ *est muni de la topologie faible associée à la famille* $(X_i)_{i \in I}$ *(en identifiant pour tout* $i_0 \in I$*,* X_{i_0} *et son image dans* $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ *par l'injection canonique.)*

Remarque A.1.3 (Suspension réduite et bouquet)**.** *Soit* $(X, x_0), (Y, y_0)$ *deux espaces topologiques pointés. Alors* $\Sigma(X, x_0) \vee \Sigma(Y, y_0) \simeq \Sigma((X, x_0) \vee (Y, y_0))$*.*

En effet, notons $\bar{x}_0$ *l'image de* x_0 *dans* $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ *et* $\widetilde{x_0}$ *l'image de* $[(x_0, 0)]_{\Sigma(X, x_0)}$ *dans* $\Sigma(X, x_0) \vee \Sigma(Y, y_0)$*. Soit*

$$\begin{aligned} f_X : X \times [-1, 1] &\longrightarrow \Sigma((X, x_0) \vee (Y, y_0), \bar{x}_0) \\ (x, t) &\longmapsto [(x, t)]_{\Sigma((X, x_0) \vee (Y, y_0), \bar{x}_0)} \end{aligned}$$

f_X *est continue et vérifie* $f_X(x, -1) = f_X(x, 1) = f_X(x_0, s) = \widetilde{x_0}$ *pour tout* $s \in [-1, 1]$*,* $x \in X$*, donc* f_X *induit, par passage au quotient, une application continue*

$$\begin{aligned} \bar{f}_X : \Sigma(X, x_0) &\longrightarrow \Sigma((X, x_0) \vee (Y, y_0)) \\ [(x, t)]_{\Sigma(X, x_0)} &\longmapsto [(x, t)]_{\Sigma((X, x_0) \vee (Y, y_0), \bar{x}_0)} \end{aligned}$$

De même, on définit $\bar{f}_Y : \Sigma(Y, y_0) \longrightarrow \Sigma((X, x_0) \vee (Y, y_0), \bar{x}_0)$*. On a* $\bar{f}_X([(x_0, 0)]_{\Sigma(X, x_0)}) = \widetilde{x_0} = \bar{f}_Y([(y_0, 0)]_{\Sigma(Y, y_0)})$*, donc fournit une application continue*

$$f : \Sigma(X, x_0) \vee \Sigma(Y, y_0) \longrightarrow \Sigma((X, x_0) \vee (Y, y_0))$$

Soit

$$\begin{aligned} g : (X, x_0) \vee (Y, y_0) \times [-1, 1] &\longrightarrow \Sigma(X, x_0) \vee \Sigma(Y, y_0) \\ (x, t) &\longmapsto [(x, t)]_{\Sigma(X, x_0) \vee \Sigma(Y, y_0)} \end{aligned}$$

g *est bien définie, continue et vérifie* $g(x, -1) = g(x, 1) = g(\bar{x}_0, s) = [(\bar{x}_0, 0)]_{\Sigma((X, x_0) \vee (Y, y_0))}$ *pour tout* $s \in [-1, 1]$*,* $x \in (X, x_0) \vee (Y, y_0)$*, donc induit une application continue*

$$\begin{aligned} \widetilde{g} : \Sigma((X, x_0) \vee (Y, y_0)) &\longrightarrow \Sigma((X, x_0)) \vee \Sigma(Y, y_0) \\ [(x, t)]_{\Sigma((X, x_0) \vee (Y, y_0))} &\longmapsto [(x, t)]_{\Sigma(X, x_0) \vee \Sigma(Y, y_0)} \end{aligned}$$

qui est un inverse à gauche et à droite de f.

Définition A.1.5 (Smash produit)**.** *Soit $(X,x_0),(Y,y_0)$ deux espaces topologiques pointés. On appelle **smash produit** de (X,x_0) et (Y,y_0), noté $(X,x_0)\wedge(Y,y_0)$ (ou plus simplement $X\wedge Y$ par abus de notation), l'espace topologique quotient $X\times Y/((\{x_0\}\times Y)\cup(X\times\{y_0\}))$. L'intersection $(\{x_0\}\times Y)\cap(X\times\{y_0\})$ étant réduite à un point, on peut identifier $\{x_0\}\times Y\cup X\times\{y_0\}$ et $X\vee Y$; et donc identifier $X\wedge Y$ et $X\times Y/X\vee Y$.*

Remarque A.1.4 (Lien entre le smash produit et la suspension réduite)**.** *Soit (X,x_0) un espace topologique pointé. Alors on a un isomorphisme d'espaces topologiques pointés $\Sigma(X,x_0)\simeq(X,x_0)\wedge(\mathbb{S}_1,1)$. En itérant, on obtient que*

$$\Sigma^n(X,x_0)\simeq(X,x_0)\wedge(\mathbb{S}_n,(1,0,\ldots,0)).$$

Théorème A.1.1 (Théorème de Stone-Weierstraß)**.** *Soit X un espace topologique compact et $\mathscr{A}\subset\mathscr{C}(X,\mathbb{C})$ une sous-algèbre vérifiant les conditions suivantes :*

1. *$\mathscr{A}$ est stable par conjugaison complexe : pour tout $f\in\mathscr{A}$, on a $\overline{f}\in\mathscr{A}$.*
2. *$\mathscr{A}$ sépare les points de X : pour tout couple de points distincts $x,y\in X$, il existe $f\in\mathscr{A}$ tel que $f(x)\neq f(y)$.*

Alors $\mathscr{A}$ est dense dans $(\mathscr{C}(X,\mathbb{C}),\|\cdot\|_\infty)$.

A.2 Limites inductives

Définition A.2.1 (Ensemble ordonné filtrant)**.** *Soit I un ensemble ordonné. On dit que I est **filtrant à droite** si pour tout couple d'éléments $i,j\in I$, il existe un élément $k\in I$ tel que $i\leqslant k$ et $j\leqslant k$.*

I peut-être vu comme une catégorie dont les objets sont les éléments de I et pour tout $i,j\in I$, $\mathrm{Hom}_I(i,j)=\{\star\}$ si $i\leqslant j$ et $\varnothing$ sinon.

Définition A.2.2 (Système inductif, limite inductive)**.** *Soit I un ensemble ordonné filtrant à droite. On appelle **système inductif** $\mathcal{O}$ d'objets de $\mathcal{C}$ indexé par I tout foncteur $F:I\longrightarrow\mathcal{C}$. Autrement dit, un système inductif est une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ et une famille $(f_{ij}:X_i\longrightarrow X_j)_{i\leqslant j}$ de morphismes de $\mathcal{C}$ tels que :*

1. *pour tout $i\in I$, $f_{ii}=\mathrm{id}_{X_i}$*
2. *pour tout $i\leqslant j\leqslant k$ dans I, on a $f_{jk}\circ f_{ij}=f_{ik}$*

*Soit $((X_i)_{i\in I},(f_{ij})_{i\leqslant j})$ un système inductif d'objets de $\mathcal{C}$. On appelle **limite inductive** de ce système (si elle existe) un couple $(X,\varphi_i)_{i\in I}$ où X est un objet de $\mathcal{C}$ et pour tout $i\in I$, $\varphi_i:X_i\longrightarrow X$ un morphisme de $\mathcal{C}$ tels que pour tout $i\leqslant j$ dans I, on ait $\varphi_j\circ f_{ij}=\varphi_i$, et qui vérifie la propriété universelle suivante : pour tout objet Y de $\mathcal{C}$ et toute famille*

$(g_i : X_i \longrightarrow Y)_{i\in I}$ de morphismes de $\mathcal{C}$ tels que pour tout $i \leqslant j$ dans I, on ait $g_j \circ f_{ij} = g_i$, il existe un unique morphisme $g : X \longrightarrow Y$ tel que le diagramme suivant commute :

$$
\begin{tikzcd}
X_j \arrow[dr, "\varphi_j"'] \arrow[drr, bend left, "g_j"] & & \\
& X \arrow[r, dashed, "\exists ! g"] & Y \\
X_i \arrow[uu, "f_{ij}"] \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[urr, bend right, "g_i"'] & &
\end{tikzcd}
$$

pour tout $i \leqslant j$ dans I. Elle est alors unique à unique isomorphisme faisant commuter le diagramme ci-dessus près, on note alors $\varinjlim_{i\in I} X_i$ "la" limite inductive de $((X_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i\leqslant j})_{i,j\in I}$.

Limite inductive dans Set. Soit I un ensemble ordonné filtrant à droite et $((X_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i\leq j})$ un système inductif d'ensembles. On munit

$$\bigsqcup_{i\in I} X_i$$

de la relation d'équivalence $\sim$ qui identifie deux éléments (x, i) et (y, j) s'il existe $k \in I$ tel que $i \leqslant k$ et $j \leqslant k$ et $f_{ik}(x) = f_{jk}(y)$. On note X_∞ l'ensemble quotient

$$\bigsqcup_{i\in I} X_i / \sim$$

et on pose pour tout $i \in I$, $\varphi_i : X_i \longrightarrow X_\infty$ l'application qui envoie x_i sur la classe d'équivalence de (x_i, i) dans X_∞. Alors "la" limite inductive de $((X_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i\leqslant j})$ est $(X_\infty, (\varphi_i)_{i\in I})$, qu'on notera X_∞ par abus de language.

Limite inductive dans Top. On munit X_∞ de la topologie finale associée à la famille $(\varphi_i)_{i\in I}$. On obtient alors la limite inductive des $((X_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i\leqslant j})$ dans la catégorie **Top**.

Limite inductive dans GrpTop. Si les X_i sont des groupes topologiques, alors X_∞ peut être muni d'une structure de groupe topologique. En effet, la relation d'équivalence $\sim$ est compatible avec la multiplication et l'inversion dans les X_i.

A.3 Quelques rappels sur les monoïdes et groupes (abéliens) libres

Définition A.3.1 (Monoïde, morphisme de monoïdes)**.** *Un **monoïde** est un triplet $(M, *, e)$ où M est un ensemble, $*$ est une application $M \times M \longrightarrow M$ et $e \in M$ tel que :*

1. *pour tout $x, y, z \in M$, on a $(x * y) * z = x * (y * z)$, c'est-à-dire que $*$ est associative.*
2. *pour tout $x \in M$, on a $e * x = x * e = x$, c'est-à-dire que e est l'élément neutre de M*

pour l'opération $*$.

On notera M *ou* $(M, *)$ *un monoïde, en ommetant l'élément neutre. On dit que* M *est un* ***monoïde commutatif*** *si de plus pour tout* $x, y \in M$*, on a* $x * y = y * x$.

Un ***morphisme de monoïdes*** *entre deux monoïdes* $(M_1, *_1, e_1)$ *et* $(M_2, *_2, e_2)$ *est une application* $f : M_1 \longrightarrow M_2$ *telle que :*

1. *pour tout* $x, y \in M_1$*, on a* $f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y)$
2. $f(e_1) = e_2$

On note **Mon** *la catégorie dont les objets sont les monoïdes et les morphismes sont les morphismes de monoïdes. On note* **MonC** *la sous-catégorie pleine de* **Mon** *dont les objets sont les monoïdes commutatifs.*

Remarque A.3.1. *Un groupe n'est autre qu'un monoïde dont tout élément est inversible.*

Proposition A.3.1 (Monoïde quotient)**.** *Soit* $(M, *, e)$ *un monoïde et* $\mathcal{R} \subset M \times M$ *une relation d'équivalence sur* M *telle que pour tout* $a, b, c, d \in M$*, si* $(a, c) \in \mathcal{R}$ *et* $(b, d) \in \mathcal{R}$*, alors* $(a*b, c*d) \in \mathcal{R}$*. Alors il existe une unique structure de monoïde sur l'ensemble quotient* $M/\mathcal{R}$ *telle que la projection canonique* $\pi : M \longrightarrow M/\mathcal{R}$ *est un morphisme de monoïdes.*

Démonstration. On définit sur $M/\mathcal{R}$ l'application $* : M/\mathcal{R} \times M/\mathcal{R} \longrightarrow M/\mathcal{R}$ par

$$\pi(a) * \pi(b) = \pi(a * b)$$

et on pose $\pi(e)$ pour l'élément neutre de $M/\mathcal{R}$. Il est facile de vérifier que cette application est bien définie et que $(M/\mathcal{R}, *, \pi(e))$ est un monoïde et que π est un morphisme de monoïdes. De plus, cette dernière condition donne l'unicité d'une telle structure de monoïde sur $M/\mathcal{R}$. □

Remarque A.3.2 (Propriété universelle de $(\mathrm{M}/\mathcal{R}, *, \pi(e))$)**.** *Soit* $(M, *, e)$ *un monoïde et* $\mathcal{R} \subset M \times M$ *une relation d'équivalence sur* M *compatible avec* $*$*. Alors le monoïde quotient* $(M/\mathcal{R}, *, \pi(e))$ *vérifie la propriété universelle suivante : pour tout monoïde* $(N, \cdot, e_N)$ *et tout morphisme de monoïdes* $f : M \longrightarrow N$ *tel que pour tout* $a, b \in M$*, si* $(a, b) \in \mathcal{R}$*, alors* $f(a) = f(b)$*, il existe un unique morphisme de monoïdes* $\overline{f} : M/\mathcal{R} \longrightarrow N$ *tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & M/\mathcal{R} \arrow[d, dashed, "\exists! \overline{f}"] \\ & N \end{tikzcd}$$

$(M/\mathcal{R}, *, \pi(e))$ *est l'unique monoïde vérifiant ces propriétés à unique isomorphisme faisant commuter le diagramme ci-dessus près.*

Définition A.3.2 (Groupe libre sur un ensemble)**.** *Soit X un ensemble. On appelle* ***groupe libre sur*** *X tout couple (L, ι) où L est un groupe et $\iota : X \longrightarrow L$ une application vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout groupe G et toute application $f : X \longrightarrow G$, il existe un unique morphisme de groupes $\overline{f} : L \longrightarrow G$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & L \arrow[d, dashed, "\exists! \overline{f}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Il s'agit d'un objet initial dans la catégorie dont les objets sont les couples (G, f) où G est un groupe et $f : X \longrightarrow G$ une application et les morphismes sont les morphismes de groupes faisant commuter le diagramme ci-dessus. Un tel couple (L, ι) est donc unique à unique isomorphisme près de cette catégorie.

Construisons un tel couple (L, ι).

Soit X un ensemble. On considère $\mathscr{L}$ l'ensemble des mots sur l'alphabet $X \times \{\pm 1\}$, c'est-à-dire l'ensemble des mots de la forme $x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ où $x_i \in X$ et $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ pour tout i. On note e le mot vide.

Un mot $x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ est dit **réduit** si pour tout i, on a $x_i \neq x_{i+1}$ ou $\epsilon_i \neq -\epsilon_{i+1}$. On note $L \subset \mathscr{L}$ le sous-ensemble des mots réduits. On note $\iota : X \longrightarrow L$ l'application qui envoie x sur le mot réduit x^1.

On définit la concaténation-réduction de deux mots réduits $x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ et $y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \cdots y_m^{\delta_m}$ par récurrence :

— Si $n = 0$, alors on pose $e * y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \cdots y_m^{\delta_m} = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \cdots y_m^{\delta_m}$.

— Si $m = 0$, alors on pose $x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n} * e = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}$.

— Si $n > 0$ et $m > 0$:

  — Si $x_n \neq y_1$ ou $\epsilon_n \neq -\delta_1$, alors on pose

$$x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n} * y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \cdots y_m^{\delta_m} = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n} y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \cdots y_m^{\delta_m}.$$

  — Si $x_n = y_1$ et $\epsilon_n = -\delta_1$, alors on pose

$$x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n} * y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \cdots y_m^{\delta_m} = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} * y_2^{\delta_2} \cdots y_m^{\delta_m}.$$

On peut alors vérifier que $(L, *, e)$ est un groupe et que (L, ι) vérifie la propriété universelle de la définition A.3.2.

En prenant $(L^{ab}, \pi \circ \iota)$ où (L^{ab}, π) est l'abélianisé de L, on obtient le **groupe abélien libre sur** X qui vérifie la propriété universelle suivante : pour tout groupe abélien G et toute application $f : X \longrightarrow G$, il existe un unique morphisme de groupes abéliens $\overline{f} : L^{ab} \longrightarrow G$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi \circ \iota"] \arrow[dr, "f"'] & L^{ab} \arrow[d, dashed, "\exists! \overline{f}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Ceci se montre facilement en utilisant successivement les propriétés universelles de (L, ι) et de (L^{ab}, π).

Définition A.3.3 (Semi-anneau, morphisme de semi-anneaux)**.** *Un **semi-anneau** est un triplet $(R,+,\cdot)$ où R est un ensemble, $+$ et $\cdot$ sont des applications telles que :*

1. *$(R,+,0_R)$ est un monoïde commutatif.*
2. *$(R,\cdot,1_R)$ est un monoïde.*
3. *La multiplication est distributive par rapport à l'addition à gauche et à droite : pour tout $x,y,z \in R$, on a $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$ et $z\cdot(x+y) = z\cdot x + z\cdot y$.*

*Soit $(R,+,\cdot)$ et $(S,\oplus,\otimes)$ deux semi-anneaux. Un **morphisme de semi-anneaux** de R vers S est une application $f : R \longrightarrow S$ qui est un morphisme entre les monoïdes $(R,+,0_R)$ et $(S,\oplus,0_S)$ et entre les monoïdes $(R,\cdot,1_R)$ et $(S,\otimes,1_S)$.*

A.4 Un peu de théorie spectrale

Dans cette sous-section, on rappelle quelques notions de base de la théorie spectrale dont nous aurons besoin pour prouver la proposition 3.3.2. Les seuls opérateurs bornés que nous allons considérer sont des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, mais les résultats ci-dessous restent vrais pour des opérateurs bornés sur des espaces de Banach complexes. Pour une discussion plus générale, se référer à [8].

Définition A.4.1 (Lacet de Jordan et courbes rectifiables)**.** *Un **lacet de Jordan** $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une application continue telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$ et γ est injective sur $[0,1[$. Une courbe **rectifiable** est une application continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que*

$$l(\gamma) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{0=t_0<\ldots<t_n=1\\ n\in\mathbb{N}}} \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

est finie.

Définition A.4.2 (Image d'un opérateur)**.** *Soit $\mathscr{B}$ un espace de Banach complexe de dimension finie et T un opérateur linéaire de $\mathscr{B}$ dont on note $\sigma(T)$ le spectre. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ tel qu'il existe U un voisinage ouvert de $\sigma(T)$ tel que $\bar{U} \subset \Omega$. On suppose que ∂U est une union finie de lacets de Jordan rectifiables, orientés positivement. On pose alors*

$$f(T) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial U} f(z)(zI - T)^{-1} dz$$

Avec les notations de la définition, ∂U n'intersecte pas le spectre de T, donc en posant $n = \dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{B})$,

$$\begin{aligned} R_T : \mathbb{C} - \sigma(T) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ z &\longmapsto (zI_n - T) \end{aligned}$$

est bien définie et est analytique. De plus f est holomorphe, donc $f(T)$ est bien défini, et le théorème intégral de Cauchy donne l'indépendance de l'opérateur $f(T)$ par rapport au choix de l'ouvert U satisfaisant les hypothèses de la définition A.4.2.

On énonce certaines propriétés dont on pourra trouver une démonstration dans [8].

Proposition A.4.1. *Soit $\mathscr{B}$ un espace de Banach complexe de dimension finie, T un opérateur linéaire de $\mathscr{B}$ et $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes comme dans la définition A.4.2. Alors on a*

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \alpha f(T) + \beta g(T) = (\alpha f + \beta g)(T)$
- $f(T)g(T) = (fg)(T)$
- *Si f s'écrit comme une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ au voisinage de $\sigma(T)$, alors $f(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n$.*

Théorème A.4.1 (Théorème spectral)**.** *Soit $\mathscr{B}$ un espace de Banach complexe, T un opérateur linéaire de $\mathscr{B}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe comme dans la définition A.4.2. Alors on a*

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$$

Démonstration. cf. [8] □

A.5 Prérequis pour le théorème d'Adams

A.5.1 Algèbre tensorielle, algèbre extérieure et puissances extérieures d'un module

Le lecteur trouvera dans cette section les définitions et propriétés de base de l'algèbre tensorielle, de l'algèbre extérieure et des puissances extérieures d'un module sur un anneau commutatif R. On renvoie le lecteur à [2] pour une présentation plus détaillée de ces notions. On fixe R un anneau commutatif.

Définition A.5.1 (Algèbre tensorielle d'un module)**.** *Soit M un R-module. On appelle* ***algèbre tensorielle de*** *M tout couple $(\mathscr{T}, \theta)$ où $\mathscr{T}$ est une R-algèbre et $\theta : M \longrightarrow \mathscr{T}$ un morphisme de R-modules vérifiant la propriété universelle suivante :*

pour tout couple $(\mathscr{B}, \psi)$ où $\mathscr{B}$ est une R-algèbre et $\psi : M \longrightarrow \mathscr{B}$ un morphisme de R-modules, il existe un unique morphisme de R-algèbres $\overline{\psi} : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{B}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathscr{T} \arrow[d, dashed, "\exists ! \overline{\psi}"] \\ & \mathscr{B} \end{tikzcd}$$

Une algèbre tensorielle de M est donc unique à unique isomorphisme faisant commuter le diagramme ci-dessus près.

Construisons une algèbre tensorielle de M.
On note $T(M) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n\geqslant 0} M^{\otimes n}$, où $M^{\otimes 0} = R$ et $M^{\otimes n} = M \otimes_R M \otimes_R \cdots \otimes_R M$ (n fois) pour tout $n \geqslant 1$. Il s'agit d'un R-module. On note $\iota : M \longrightarrow T(M)$ le morphisme de R-modules donné par l'inclusion.
On va munir $T(M)$ d'une structure de R-algèbre.
Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique application R-bilinéaire $\mu_{m,n} : M^{\otimes m} \times M^{\otimes n} \longrightarrow M^{\otimes(m+n)}$ telle que pour tout $x_1, \ldots, x_m \in M$ et $y_1, \ldots, y_n \in M$, on ait

$$\mu_{m,n}(x_1 \otimes_R \cdots \otimes_R x_m, y_1 \otimes_R \cdots \otimes_R y_n) = x_1 \otimes_R \cdots \otimes_R x_m \otimes_R y_1 \otimes_R \cdots \otimes_R y_n.$$

Si $m = 0$ ou $n = 0$, on pose $\mu_{m,n}$ comme étant la loi de composition externe.
Alors cette famille d'applications $(\mu_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ définit une application R-bilinéaire $\mu : T(M) \times T(M) \longrightarrow T(M)$, qui munit $T(M)$ d'une structure de R-algèbre associative unitaire d'élément neutre 1_R. La R-algèbre engendrée par M est égale à $T(M)$ par construction, un morphisme de R-algèbres $\Phi : T(M) \longrightarrow \mathscr{B}$ est donc déterminé par sa restriction $\Phi|_M : M \longrightarrow \mathscr{B}$.

Proposition A.5.1. *Soit M un R-module. Alors $(T(M), \iota)$ est une algèbre tensorielle de M.*

Démonstration. Soit $\mathscr{B}$ une R-algèbre et $\psi : M \longrightarrow \mathscr{B}$ un morphisme de R-modules. Si $\Phi : T(M) \longrightarrow \mathscr{B}$ est un morphisme de R-algèbres tel que $\Phi \circ \iota = \psi$, alors Φ étant entièrement déterminé par sa restriction $\Phi|_M$, on obtient l'unicité de Φ.
Réciproquement, soit $\Phi : T(M) \longrightarrow \mathscr{B}$ caractérisé par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \ldots, x_n \in M, \Phi(x_1 \otimes_R \cdots \otimes_R x_n) = \psi(x_1) \cdots \psi(x_n).$$

Alors Φ ainsi définie est un morphisme de R-algèbres et vérifie $\Phi \circ \iota = \psi$ par construction. □

Définition A.5.2 (Algèbre extérieure d'un module)**.** *Soit M un R-module. On appelle* ***algèbre extérieure de*** *M tout couple $(\mathscr{A}, \phi)$, où $\mathscr{A}$ est une R-algèbre et $\phi : M \longrightarrow \mathscr{A}$ est un morphisme de R-modules tel que pour tout $x \in M$, on ait $\phi(x)^2 = 0$, qui vérifie la propriété universelle suivante :*

pour tout couple $(\mathscr{B}, \psi)$ où $\mathscr{B}$ est une R-algèbre et $\psi : M \longrightarrow \mathscr{B}$ un morphisme de R-modules tel que pour tout $x \in M$, on ait $\psi(x)^2 = 0$, il existe un unique morphisme de R-algèbres $\overline{\psi} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathscr{A} \arrow[d, dashed, "\exists!\overline{\psi}"] \\ & \mathscr{B} \end{tikzcd}$$

Une algèbre extérieure de M est donc unique à unique isomorphisme faisant commuter le diagramme ci-dessus près.

Construisons une algèbre extérieure de M.

On note $(T(M), \iota)$ l'algèbre tensorielle de M et $\mathcal{I}$ l'idéal[5] de $T(M)$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes_R x$ où $x \in M$.
On note $\Lambda(M) \overset{\text{def}}{=} T(M)/\mathcal{I}$ l'algèbre quotient, $\wedge : \Lambda(M) \times \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M)$ l'application induite par la multiplication de $T(M)$ et on note $\Pi : T(M) \longrightarrow \Lambda(M)$ la projection canonique. On pose $\pi \overset{\text{def}}{=} \Pi \circ \iota$ qui est un morphisme de R-modules. Tout morphisme de R-algèbres $\Phi : \Lambda(M) \longrightarrow \mathscr{B}$ est entièrement déterminé par sa restriction $\Phi|_{\pi(M)} : \pi(M) \longrightarrow \mathscr{B}$, car $T(M)$ est engendrée par M en tant que R-algèbre donc $\Lambda(M)$ est engendrée par $\pi(M)$ en tant que R-algèbre.

Proposition A.5.2. *Soit M un R-module. Alors $(\Lambda(M), \pi)$ est une algèbre extérieure de M.*

Démonstration. Soit $\mathscr{B}$ une R-algèbre et $\psi : M \longrightarrow \mathscr{B}$ un morphisme de R-modules tel que pour tout $x \in M$, on ait $\psi(x)^2 = 0$. Si $\Phi : \Lambda(M) \longrightarrow \mathscr{B}$ est un morphisme de R-algèbres tel que $\Phi \circ \pi = \psi$, alors Φ étant entièrement déterminé par sa restriction $\Phi|_{\pi(M)}$, on obtient l'unicité de Φ. Réciproquement, soit $\Psi : T(M) \longrightarrow \mathscr{B}$ morphisme de R-algèbres donné par la propriété universelle de l'algèbre tensorielle de M, i.e. $\Psi \circ \iota = \psi$. Alors pour tout $x \in M$, on a $\Psi(x \otimes_R x) = \psi(x)^2 = 0$, donc Ψ induit un morphisme de R-algèbres $\Phi : \Lambda(M) \longrightarrow \mathscr{B}$ tel que $\Phi \circ \Pi = \Psi$ et donc $\Phi \circ \pi = \psi$. $\square$

On montre facilement que $\mathcal{I}$ est un idéal homogène de $T(M)$[6] et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{I} \cap M^{\otimes n}$ est le sous-module de $M^{\otimes n}$ engendré par les éléments de la forme $x_1 \otimes_R \cdots \otimes_R x_n$ où $x_i \in M$ et $x_i = x_j$ pour au moins deux indices $i \neq j$.

Définition A.5.3 (Puissances extérieures d'un module)**.** *Soit M un R-module. Si $n \in \mathbb{N}$, la **n-ième puissance extérieure de** M est le R-module $\Lambda^n(M) \overset{\text{def}}{=} M^{\otimes n}/\mathcal{I} \cap M^{\otimes n}$ si $n \geqslant 1$, $\Lambda^0(M) \overset{\text{def}}{=} R$ sinon.*
Pour tout $x_1, \ldots, x_n \in M$, on note $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ l'image de $x_1 \otimes_R \cdots \otimes_R x_n$ dans $\Lambda^n(M)$.

On obtient alors que $\Lambda(M) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Lambda^n(M)$ est une R-algèbre associative unitaire d'élément neutre 1_R graduée par les puissances extérieures de M. De plus, on a $\mathcal{I} \cap M = \{0\}$ donc on peut identifier M à son image $\Lambda^1(M)$ par la projection canonique.

Remarque A.5.1 (Propriété universelle des puissances extérieures d'un module)**.** *Soit M un R-module. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le couple $(\Lambda^n(M), \alpha_n)$*

$$\begin{aligned} \alpha_n : M^n &\longrightarrow \Lambda^n(M) \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \end{aligned}$$

vérifie la propriété universelle suivante : pour tout R-module N et toute application f : $M^n \longrightarrow N$ n-linéaire alternée, il existe un unique morphisme de R-modules $\overline{f} : \Lambda^n(M) \longrightarrow N$

5. On appelle **idéal** $\mathcal{I}$ d'une R-algèbre $\mathscr{A}$ un sous-R-module de $\mathscr{A}$ tel que pour tout $x \in \mathscr{A}$ et $y \in \mathcal{I}$, on ait $x \cdot y \in \mathcal{I}$ et $y \cdot x \in \mathcal{I}$.
6. C'est-à-dire que $\mathcal{I}$ contient les composantes homogènes de chacun de ses éléments.

tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[dr, "f"'] & \Lambda^n(M) \arrow[d, dashed, "\exists ! \overline{f}"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Remarque A.5.2 (Fonctorialité de Λ et des puissances extérieures). *Les constructions précédentes sont fonctorielles en le R-module M.*
Plus précisément, soit M, N et P trois R-modules et $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow P$ deux morphismes de R-modules.
Alors on a un unique morphisme de R-algèbres $\Lambda(f) : \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(N)$ tel que

$$\forall x \in M, \Lambda(f)(x) = f(x)$$

De plus, $\Lambda(g \circ f) = \Lambda(g) \circ \Lambda(f)$ et $\Lambda(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\Lambda(M)}$.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a un unique morphisme de R-modules $\Lambda^n(f) : \Lambda^n(M) \longrightarrow \Lambda^n(N)$ tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in M^n, \Lambda^n(f)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_n)$$

et on a $\Lambda^n(g \circ f) = \Lambda^n(g) \circ \Lambda^n(f)$, $\Lambda^n(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\Lambda^n(M)}$.

Proposition A.5.3 (Puissance extérieure et somme directe de modules). *Soit M un R-module et N, P deux sous-R-modules de M tels que $M = N \oplus P$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique isomorphisme de R-modules $\Theta_n : \bigoplus_{i=0}^n \Lambda^i(N) \otimes_R \Lambda^{n-i}(P) \longrightarrow \Lambda^n(M)$ tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on ait*

$$\forall (x, y) \in \Lambda^i(N) \times \Lambda^{n-i}(P), \Theta_n(x \otimes_R y) = x \wedge y.$$

Par récurrence, on montre que si $M = \bigoplus_{i=1}^k N_i$ est une somme directe de R-modules, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique isomorphisme de R-modules $\Theta_n : \bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=n} \Lambda^{i_1}(N_1) \otimes_R \cdots \otimes_R \Lambda^{i_k}(N_k) \longrightarrow \Lambda^n(M)$ tel que pour tout $(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k$ tel que $i_1 + \cdots + i_k = n$, on ait

$$\forall (x_1, \dots, x_k) \in \Lambda^{i_1}(N_1) \times \cdots \times \Lambda^{i_k}(N_k), \Theta_n(x_1 \otimes_R \cdots \otimes_R x_k) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_k.$$

Démonstration. Soit $0 \leqslant i \leqslant n$. L'application

$$\begin{aligned} \varphi_i : \Lambda^i(N) \times \Lambda^{n-i}(P) &\longrightarrow \Lambda^n(M) \\ (x, y) &\longmapsto x \wedge y \end{aligned}$$

est R-bilinéaire, d'où il existe un unique morphisme de R-modules $\Theta_{n,i} : \Lambda^i(N) \otimes_R \Lambda^{n-i}(P) \longrightarrow \Lambda^n(M)$ tel que pour tout $(x, y) \in \Lambda^i(N) \times \Lambda^{n-i}(P)$, on ait $\Theta_{n,i}(x \otimes_R y) = x \wedge y$. On note alors $\Theta_n : \bigoplus_{i=0}^n \Lambda^i(N) \otimes_R \Lambda^{n-i}(P) \longrightarrow \Lambda^n(M)$ le morphisme de R-modules donné par la propriété universelle de la somme directe. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$, on écrit $x_1 = n_1 + p_1$, $x_2 = n_2 + p_2$, ..., $x_n = n_n + p_n$ avec $n_i \in N$ et $p_i \in P$ pour tout i. Alors (à finir). $\square$

Proposition A.5.4 (Puissance extérieure et modules libres)**.** *Soit M un R-module libre de rang $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de M. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en posant $\mathcal{P}_k(n) \overset{\text{def}}{=} \left\{(i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\right\}$ et en notant pour tout $J \in \mathcal{P}_k(n)$, $e_J \overset{\text{def}}{=} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, on a $(e_J)_{J \in \mathcal{P}_k(n)}$ est une base de $\Lambda^k(M)$.*
En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\Lambda^k(M)$ est libre de rang $\binom{n}{k}$ et si $k > n$, alors $\Lambda^k(M) = 0$.

Démonstration. Soit M un R-module libre de rang $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de M et $k \in \mathbb{N}^*$. Par la proposition A.5.3, on a un isomorphisme de R-modules

$$\Theta_k : \bigoplus_{i_1 + \cdots + i_n = k} \Lambda^{i_1}(R \cdot e_1) \otimes_R \cdots \otimes_R \Lambda^{i_n}(R \cdot e_n) \longrightarrow \Lambda^k(M)$$

tel que pour tout $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $i_1 + \cdots + i_n = k$, on ait

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \Lambda^{i_1}(R \cdot e_1) \times \cdots \times \Lambda^{i_n}(R \cdot e_n), \Theta_k(x_1 \otimes_R \cdots \otimes_R x_n) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n.$$

Or soit $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $R \cdot e_i$ est engendré par e_i donc pour tout $j \geqslant 2$, on a $\Lambda^j(R \cdot e_i) = 0$. De plus, $\Lambda^1(R \cdot e_i) \cong R \cdot e_i$ et $\Lambda^0(R \cdot e_i) = R$, donc la commutativité du produit tensoriel (à isomorphisme près) et le fait que pour tout N R-module, $N \otimes_R R \cong N$ nous donnent l'existence d'un isomorphisme de R-modules

$$\tilde{\Theta}_k : \bigoplus_{(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{P}_k(n)} R \cdot e_{i_1} \otimes_R \cdots \otimes_R R \cdot e_{i_k} \longrightarrow \Lambda^k(M)$$

tel que pour tout $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{P}_k(n)$, on ait $\tilde{\Theta}_k(e_{i_1} \otimes_R \cdots \otimes_R e_{i_k}) = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$.
D'où pour tout $J = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{P}_k(n)$, on a $\bigotimes_{j=1}^k R \cdot e_{i_j} \cong R \cdot e_J$.
Or les propriétés du produit tensoriel donnent que $(e_{i_1} \otimes_R \cdots \otimes_R e_{i_k})_{(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{P}_k(n)}$ est une base du R-module $\bigoplus_{(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{P}_k(n)} R \cdot e_{i_1} \otimes_R \cdots \otimes_R R \cdot e_{i_k}$, et $\tilde{\Theta}_k$ étant un isomorphisme de R-modules, on en déduit que $(e_J)_{J \in \mathcal{P}_k(n)}$ est une base de $\Lambda^k(M)$.
La dernière assertion est immédiate car $\mathcal{P}_k(n)$ est en bijection avec l'ensemble des parties de cardinal k de $[\![1, n]\!]$. $\square$

A.5.2 Polynômes symétriques et polynômes de Newton

Soit R un anneau commutatif et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $R[X_1, \ldots, X_n]$ la R-algèbre des polynômes à n indéterminées à coefficients dans R et on note $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique d'ordre n. Alors tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ donne par propriété universelle des anneaux de polynômes un automorphisme de R-algèbres

$$\begin{aligned} \phi_\sigma : R[X_1, \ldots, X_n] &\longrightarrow R[X_1, \ldots, X_n] \\ P(X_1, \ldots, X_n) &\longmapsto P(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

On appelle **polynôme symétrique** de $R[X_1, \ldots, X_n]$ tout élément de la R-algèbre

$$R[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} = \{P \in R[X_1, \ldots, X_n] \mid \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \phi_\sigma(P) = P\}$$

des points fixes de $R[X_1, \dots, X_n]$ sous l'action de $\mathfrak{S}_n$. Soit pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\Sigma_i \in R[X_1, \dots, X_n]$ le **i-ème polynôme symétrique élémentaire** défini par

$$\Sigma_i(X_1, \dots, X_n) = \sum_{1 \leqslant j_1 < \dots < j_i \leqslant n} X_{j_1} \cdots X_{j_i}$$

On a un théorème de structure, dont une démonstration est donnée dans [7] p.190-192.

Théorème A.5.1 (Théorème de structure des polynômes symétriques)**.** *Pour tout $P \in R[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$, il existe un unique polynôme $Q \in R[X_1, \dots, X_n]$ tel que*

$$P = Q(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$$

De façon équivalente, on a un isomorphisme de R-algèbres

$$R[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} \cong R[\Sigma_1, \dots, \Sigma_n]$$

Définition A.5.4 (Polynôme de Newton)**.** *Soit R un anneau commutatif et $k, n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **n-ème somme de Newton** l'unique polynôme $s_n \in R[X_1, \dots, X_k]$ tel que*

$$s_n(\Sigma_1, \dots, \Sigma_k) = X_1^n + \dots + X_k^n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a que s_n ne dépend pas de k par unicité dans le théorème A.5.1, donc s_n est bien défini.

A.5.3 Le lemme LTE

Dans cette sous-section, on énonce et démontre un lemme arithmétique : le lemme Lifting The Exponent (LTE). Plus précisément, on démontre le cas particulier où on prend $p = 2$ comme nombre premier, seul cas dont nous aurons besoin dans la section 4.

Lemme A.5.1 (LTE cas $p = 2$)**.** *Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ impairs et $n \in \mathbb{N}^*$ pair. Alors*

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1$$

où v_2 est la valuation 2-adique.

Lemme A.5.2. *Soit p premier et $x, y \in \mathbb{Z}$ tel que $p \nmid x, p \nmid y$ et $p \mid x - y$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ premier à p, on a*

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y)$$

Démonstration. On a $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$, d'où

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}).$$

Or $x \equiv y \pmod p$, donc

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1} \equiv n \cdot x^{n-1} \pmod p,$$

donc $v_p(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}) = 0$ car $p \nmid n, p \nmid x$. $\square$

Démonstration du théorème A.5.1. Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ impairs et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons tout d'abord que si $4 \mid x - y$, alors $v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(n)$. Le lemme A.5.2 nous montre qu'il suffit de traiter le cas où n est une puissance de 2. Soit alors $n = 2^k$ pour un $k \in \mathbb{N}$. On a

$$x^{2^k} - y^{2^k} = (x - y)(x^{2^{k-1}} + y^{2^{k-1}})(x^{2^{k-2}} + y^{2^{k-2}}) \cdots (x + y)$$

Or $4 \mid x - y$ et x et y impairs, donc $x + y \equiv 2 \pmod 4$. De plus, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, on a $x^{2^l} \equiv y^{2^l} \equiv 1 \pmod 4$, donc $x^{2^l} + y^{2^l} \equiv 2 \pmod 4$. Donc $v_2(x^{2^k} - y^{2^k}) = v_2(x - y) + k$.
Soit alors n pair, on écrit $n = 2^k \cdot m$ avec m impair et $k \in \mathbb{N}^*$. Par le lemme A.5.2, on a

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x^{2^k} - y^{2^k})$$

On applique le point précédent à $\tilde{x} = x^2$ et $\tilde{y} = y^2$. Il vient

$$v_2(x^{2^k} - y^{2^k}) = v_2(x^2 - y^2) + k - 1 = v_2(x - y) + v_2(x + y) + k - 1$$

$\square$

Bibliographie

[1] Atiyah, M. F. (1967). *K-theory*. W. A. Benjamin.

[2] Berhuy, G. (2012). *Modules : théorie, pratique... Et un peu d'arithmétique !*. Calvage et Mounet.

[3] Bredon, G. E. (1993). *Topology and geometry*. Springer-Verlag.

[4] Hatcher, A. (2003). *Vector bundles and K-theory*. Version 2.2, Novembre 2017 (disponible en ligne à l'adresse suivante https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VB.pdf).

[5] Higson, N., Guentner, E. (2004). *Group C*-Algebras and K-Theory* In : Doplicher, S., Longo, R. (eds) Noncommutative Geometry. Lecture Notes in Mathematics, vol 1831. Springer-Verlag.

[6] Husemöller, D. (1994). *Fibre bundles (3rd ed.)*. Springer-Verlag.

[7] Lang, S. (2002). *Algebra (3rd ed.)*. Springer-Verlag.

[8] Dunford, N., Schwartz, J. T. (1958). *Linear operators. Part I : General theory*. Interscience Publishers.

Index