

Jochen Balla

Integralrechnung leicht gemacht!



Springer Spektrum

Integralrechnung leicht gemacht!

Jochen Balla

Integralrechnung leicht gemacht!



Springer Spektrum

Jochen Balla
Fachbereich Geodäsie
Hochschule Bochum
Bochum, Deutschland

ISBN 978-3-662-63585-8

ISBN 978-3-662-63586-5 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-63586-5>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert durch Springer-Verlag GmbH, DE, ein Teil von Springer Nature 2021

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Lisa Edelhäuser

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Die Integralrechnung ist neben der Differenzialrechnung das zweite wichtige Grundgebiet der Analysis. Das Integral einer Funktion besitzt eine einfache geometrische Bedeutung: Es entspricht der Fläche, die ihr Graph mit der Rechtsachse einschließt. Daraus ergeben sich unmittelbar zahlreiche Anwendungen in praktisch allen angewandten Wissenschaften.

Die Integralrechnung ist – idealerweise – Gegenstand der Schulmathematik. Aber sie ist doch weniger geläufig als die Differenzialrechnung. Hinzu kommt, dass das Integrieren i. Allg. schwieriger ist als das Differenzieren, obwohl für das Auffinden einer Stammfunktion eigentlich nur die bekannten Differenziationsregeln umzukehren sind.

Zielsetzung dieses Buchs Dieses Buch bietet dir eine – wie ich hoffe – leicht lesbare Darstellung der Integralrechnung. Es ist gedacht für Studierende der Natur- und Ingenieurwissenschaften, aber auch der Wirtschaftswissenschaften und anderer Fachrichtungen, die Integralrechnung benötigen. Und natürlich sollte es auch Studierenden der Mathematik als Einführung gute Dienste leisten.

Die Darstellung erfolgt anwendungsorientiert und mit vielen, teilweise auch weiterführenden Beispielen, enthält aber ebenso die notwendigen theoretischen Grundlagen. Der Inhalt lässt sich wie folgt umreißen:

- Der **Begriff des Integrals** als unter dem Graphen eingeschlossene Fläche wird ausführlich erläutert. Er führt praktisch unmittelbar zur Idee der **numerischen Integration**, die du anhand von Beispielen kennenlernst.
- Das Vorgehen zur analytischen Integration ergibt sich aus dem **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung**. Die Integration erfordert dann das Auffinden einer **Stammfunktion** und es wird klar, in welchem Sinn die Integration die Umkehrung der Differenziation darstellt. Des Weiteren werden wir sehen, was **uneigentliche Integrale** sind und inwiefern sich damit „unbegrenzte“ Flächen berechnen lassen.
- Die **Integration zusammengesetzter Funktionen** ist das, was man gemeinhin mit „Integrieren“ meint. Wir lernen die wichtigen Regeln kennen und wenden sie

in zahlreichen Beispielen an. Und doch lassen sich nicht alle Funktionen elementar integrieren: Als ein wichtiges Beispiel sehen wir uns die **Normalverteilung** und ihre Anwendung auf Messprozesse an.

- Die Darstellung periodischer Funktionen durch **Fourier-Reihen** erfolgt durch Integrale. Wir sehen sie uns als ein in vielen Bereichen der Wissenschaft wichtiges Beispiel zur Anwendung von Integralen an.
- **Mehrfachintegrale** sind wesentlich komplizierter als Einfachintegrale. Wir wollen aber zumindest einen Einstieg in dieses Gebiet geben und uns in die Lage versetzen, „Volumenintegrale“ berechnen zu können. Als ein wesentliches Werkzeug dazu lernen wir die Transformationsformel kennen.
- Mehrfachintegrale beziehen sich auf Funktionen mehrerer Veränderlicher. Da **mehrdimensionale Funktionen** in der Schule nicht behandelt werden, kannst du dir bei Bedarf ihre Grundbegriffe zunächst in einem separaten Kapitel aneignen.

Lesehinweise Dieses Buch lässt sich in verschiedenen Umfängen lesen:

- (1) Kap. 1, 2 und 3 bieten eine fundierte Einführung in die Integration gewöhnlicher Funktionen einer Veränderlichen.
- (2) Kap. 4 stellt ein substanzielles Beispiel zur eindimensionalen Integration dar. Es kann auch separat als Einführung in die Theorie der Fourier-Reihen gelesen werden.
- (3) Kap. 5 behandelt mit Mehrfachintegralen ein weiterführendes Thema der Integralrechnung.
- (4) Kap. 6 bietet eine auch separat lesbare Einführung in die Grundbegriffe der mehrdimensionalen Analysis. Es sollte bei Bedarf vor Kap. 5 gelesen werden.

Hilfestellungen Integralrechnung „leicht gemacht“ ist natürlich leicht gesagt. Tatsächlich ist das Thema nicht immer einfach. Um den Zugang zu erleichtern, gibt dir das Buch eine Reihe zusätzlicher Hilfestellungen, die sich in grauen Boxen wie der folgenden finden:

- Zu Beginn eines jeden Kapitels wird noch einmal erläutert, in welchen Zusammenhängen die Inhalte bedeutsam sind.
- Der Text wird durch zahlreiche **Lesehilfen** ergänzt, die Begriffe, Schreibweisen, Hintergründe erläutern und dir über problematische Stellen hinweghelfen.
- Insbesondere gibt es in Kap. 2 und 3 **Lesehilfen zur Differenziation**, die hilfreich sind, wenn die ein oder andere Differenziationsregeln in Vergessenheit geraten sein sollte.
- Der Text enthält **Zwischenfragen** (und etwas verzögert auch die **Antworten**), die dich zum Hinterfragen des Gelesenen anregen und das Verständnis prüfen und vertiefen.

- Am Ende eines jeden Kapitels erlaubt „**Das Wichtigste in Kürze**“ eine Rekapitulation der Inhalte, ergänzt durch eine kleine **Formelsammlung**. Verstehst du genau, was hier steht, und kannst du jede Formel erklären, so hast du das Kapitel gut verinnerlicht.

Darüber hinaus ist jedes Kapitel mit **Übungsaufgaben** versehen. Sie zielen auf das Vertiefen des Verständnisses und auch auf das Training der Rechentechniken ab. Die ausführlichen **Lösungen** erlauben dir eine unmittelbare Selbstkontrolle und zeigen dir außerdem an einigen Beispielen, wie du numerische Fragestellungen mit MATLAB¹ bewältigen kannst.

Literatur Es gibt viele gute Bücher, die ein vertiefendes Studium der Integralrechnung erlauben. Ich möchte darauf verzichten, einzelne hervorzuheben. Stattdessen möchte ich an dieser Stelle auf den „Bronstein“ aufmerksam machen: Es gibt im Zusammenhang mit Integralen und den angrenzenden Themen oft den Bedarf, etwas nachzuschlagen. Das kann via Internet geschehen – einfach und schnell – und doch ist manchmal ein Buch angenehmer. Im Bronstein et al., *Taschenbuch der Mathematik*, findest du ein nützliches und allgemein gebräuchliches Nachschlagewerk, das insbesondere auch eine umfangreiche Integraltafel enthält.

Abschließend noch ein Hinweis in eigener Sache: Die hier vorliegende *Integralrechnung* ist das dritte Buch der kleinen „leicht gemacht“-Reihe bei Springer Spektrum. Zusammen mit der *Differenzialrechnung* und den *Gewöhnlichen Differenzialgleichungen* liegt nun so etwas wie ein vollständiger Grundkurs der Analysis vor.

Ich wünsche dir viel Erfolg im Studium und würde mich freuen, wenn dieses Buch einen Beitrag dazu leisten kann :-)

April 2021

Jochen Balla

¹ Mit GNU Octave steht alternativ eine kostenlose wissenschaftliche Programmiersprache zur Verfügung, deren Syntax weitgehend mit MATLAB kompatibel ist.

Inhaltsverzeichnis

1	Begriff des Integrals	1
1.1	Integral für Treppenfunktionen	2
1.2	Riemann-Integral	5
1.3	Numerische Integration	12
1.3.1	Äquidistante Unterteilung	13
1.3.2	Trapeznäherung	18
1.4	Grundlegende Eigenschaften des Integrals	23
	Übungsaufgaben	29
2	Stammfunktionen	31
2.1	Unbestimmtes Integral und Stammfunktion	32
2.2	Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	34
2.3	Uneigentliche Integrale	39
2.3.1	Integrationsgrenze Unendlich	39
2.3.2	Integrand an einer Integralgrenze nicht definiert	41
2.3.3	Integral an beiden Grenzen kritisch	43
2.4	Integration und Limesbildung	44
	Übungsaufgaben	51
3	Integration zusammengesetzter Funktionen	53
3.1	Linearität	54
3.2	Substitutionsregel	54
3.3	Beispiel: „Linearer Term durch quadratischer Term“	62
3.4	Partielle Integration	67
3.5	Spezielle Integrale mit Sinus und Cosinus	70
3.5.1	Rekursionsformeln für \sin^n und \cos^n	71
3.5.2	Orthogonalitätsrelationen	72
3.6	Nicht elementar lösbare Integrale	75
3.6.1	Elliptische Integrale	75
3.6.2	Normalverteilung und Verteilungsfunktion	76

3.7	Normalverteilung und Messprozess*	84
3.7.1	Streuung von Messwerten	84
3.7.2	Normalverteilung der Einzelmessung	87
3.7.3	Varianz des Mittelwerts	88
	Übungsaufgaben	93
4	Integrale der Fourier-Entwicklung	95
4.1	Periodische Funktionen	96
4.2	Trigonometrische Polynome	101
4.2.1	Berechnung der Koeffizienten	102
4.2.2	Komplexe trigonometrische Polynome*	104
4.3	Fourier-Reihen	109
4.3.1	Definition und Hauptsatz	109
4.3.2	Beispiel: Sägezahnkurve	113
4.3.3	Komplexe Rechnung*	118
4.3.4	Konvergenzverhalten	119
4.3.5	Symmetrien	122
4.4	Fourier-Integrale*	125
4.4.1	Fourier-Reihe für beliebige Periodenlänge	125
4.4.2	Übergang zum Fourier-Integral	127
4.4.3	Beispiel: Rechteckimpuls	128
	Übungsaufgaben	133
5	Mehrfachintegrale	135
5.1	Mehrfachintegrale stetiger Funktionen	136
5.1.1	Stetige Funktionen auf kompaktem Quader	136
5.1.2	Stetige Funktionen auf kompaktem Träger	141
5.2	Erweiterung des Integralbegriffs	145
5.2.1	Monotone Funktionenfolgen	146
5.2.2	Übergang zu nicht stetigen Funktionen	147
5.2.3	Halbstetigkeit	151
5.2.4	Lebesgue-Integral	154
5.3	Ansätze zur Berechnung von Mehrfachintegralen	158
5.3.1	Integralgrenzen	158
5.3.2	Nullmengen	160
5.3.3	Transformationsformel	162
5.3.4	Beispiele	166
	Übungsaufgaben	176
6	Grundbegriffe mehrdimensionaler Funktionen*	177
6.1	Abstände	178
6.1.1	Metrische Räume	178
6.1.2	Euklidische Metrik im \mathbb{R}^n	180
6.2	Offene und abgeschlossene Mengen	182
6.3	Grenzwerte	186

6.4	Kurven	190
6.4.1	Tangentenvektor	192
6.4.2	Schnittwinkel zwischen Kurven	196
6.4.3	Kurvenlänge	198
6.4.4	Krümmung einer ebenen Kurve	205
6.4.5	Beispiel: Klotoiden	207
6.5	Partielle Ableitungen	210
6.5.1	Gradient	215
6.5.2	Beispiel: Kraft im Zentralfeld	216
6.5.3	Höhere Ableitungen	217
6.5.4	Hesse-Matrix	218
6.6	Totale Differenzierbarkeit	220
6.6.1	Näherung einer Funktion	222
6.6.2	Beispiel: Fehlerrechnung	225
6.6.3	Richtungsableitung	226
6.7	Lokale Extrema	229
6.7.1	Stationäre Punkte	229
6.7.2	Definitheit symmetrischer Matrizen	231
6.7.3	Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema	234
	Übungsaufgaben	239
7	Lösungen der Übungsaufgaben	243
	Stichwortverzeichnis	279

Begriff des Integrals

1

Das Integral stellt neben der Ableitung wahrscheinlich die wichtigste Anwendung des Grenzwertbegriffs der Analysis dar. Wie die Ableitung besitzt es eine anschauliche geometrische Bedeutung: Es entspricht der Fläche, die der Graph einer Funktion mit der Rechtsachse¹ einschließt.

Es gibt unterschiedliche Integralbegriffe bzw. Möglichkeiten, das Integral zu definieren. Wir werden im Folgenden das *Riemann-Integral* verwenden, das einen anschaulichen Zugang erlaubt und sicher auch der meistverwendete Integralbegriff ist. Das Integral reeller Funktionen wird dabei durch Approximation mittels Treppenfunktionen definiert, deren Integrale sich aus Rechteckflächen ergeben.

Wozu dieses Kapitel im Einzelnen

- Das Riemann-Integral basiert auf der Annäherung einer Funktion durch Treppenfunktionen. Wir müssen uns daher zunächst ansehen, was „Treppenfunktionen“ sind.
- Das Integral für Treppenfunktionen geht ganz leicht. Bevor wir darüber nachgedacht haben, können wir bereits „integrieren“. Und elementare Rechenregeln für Integrale kennen wir dann auch schon.
- Um zum Riemann-Integral zu kommen, müssen wir von den Treppenfunktionen zu beliebigen Funktionen gelangen. Wir werden uns ansehen, wie das geht.
- Das Riemann-Integral erlaubt praktisch unmittelbar die „numerische“ Integration beliebiger Funktionen. Insbesondere lernen wir dabei die Trapezregel kennen.
- Auch die Integralrechnung besitzt einen „Mittelwertsatz“ und integrierbare Funktionen haben einen Mittelwert. Wir wollen uns ansehen, was damit gemeint ist.

¹ Wir schreiben hier „Rechtsachse“ statt „x-Achse“, weil die Variable nicht unbedingt x heißen muss. Ebenso verwenden wir den Begriff „Hochachse“, wenn wir uns nicht auf y festlegen wollen.

1.1 Integral für Treppenfunktionen

Eine *Treppenfunktion* sieht aus wie eine Treppe mit horizontalen Treppenstufen. Die Treppenstufen dürfen dabei unterschiedliche Breiten aufweisen und die Treppe darf „rauf und runter laufen“. Mathematisch präzise definieren wir:

Definition 1.1 Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, heißt eine Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, falls es eine endliche Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

des Intervalls $[a, b]$ gibt, sodass φ auf jedem offenen Teilintervall $]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, \dots, n$, konstant ist.

Bezeichnen wir die „Höhen“ der Treppenstufen, d.h. ihren jeweils auf einem Teilintervall konstanten Wert, mit $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, haben wir also

$$\varphi|_{]x_{k-1}, x_k[} = c_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

siehe Abb. 1.1. An den Grenzen der Unterteilungen, also an den einzelnen Punkten x_0, x_1, \dots, x_n , sind die Werte von φ übrigens nicht festgelegt. Sie können hier beliebig (geeignet) gewählt werden.

Lesehilfe

Die Unterteilung eines Intervalls $[a, b]$ besteht aus endlich vielen Zwischenwerten in dem Intervall. Ihr Startwert liegt mit $x_0 = a$ am Beginn des Intervalls und der Endwert mit $x_n = b$ am Ende. Das Intervall wird dadurch in n Teilintervalle $]x_0, x_1[$, $]x_1, x_2[$, \dots , $]x_{n-1}, x_n[$ aufgeteilt.

Die Einschränkung einer Funktion f auf eine Menge M schreibt man als $f|_M$ und sagt „ f eingeschränkt auf M “. Dazu muss die Menge M natürlich Teilmenge des Definitionsbereichs der Funktion f sein. Somit ist $\varphi|_{]x_{k-1}, x_k[}$ die Einschränkung der Funktion φ auf das Intervall $]x_{k-1}, x_k[$. Auf jedem dieser Teilintervalle ist die Treppenfunktion konstant und daher gleich einem Wert c_k .

Die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$ wollen wir mit $T[a, b]$ bezeichnen. Wir werden sehen, dass es diese Begriffsbildung erlaubt, die folgenden Aussagen einfacher zu formulieren.

Darüber hinaus bildet die Menge $T[a, b]$ aber auch einen Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, denn es gilt:

- (1) Die Nullfunktion ist eine Treppenfunktion, $0 \in T[a, b]$.
- (2) Die Summe zweier Treppenfunktionen ist wieder eine Treppenfunktion. Dabei ist zu beachten, dass zwei Treppenfunktionen verschiedene Unterteilungen

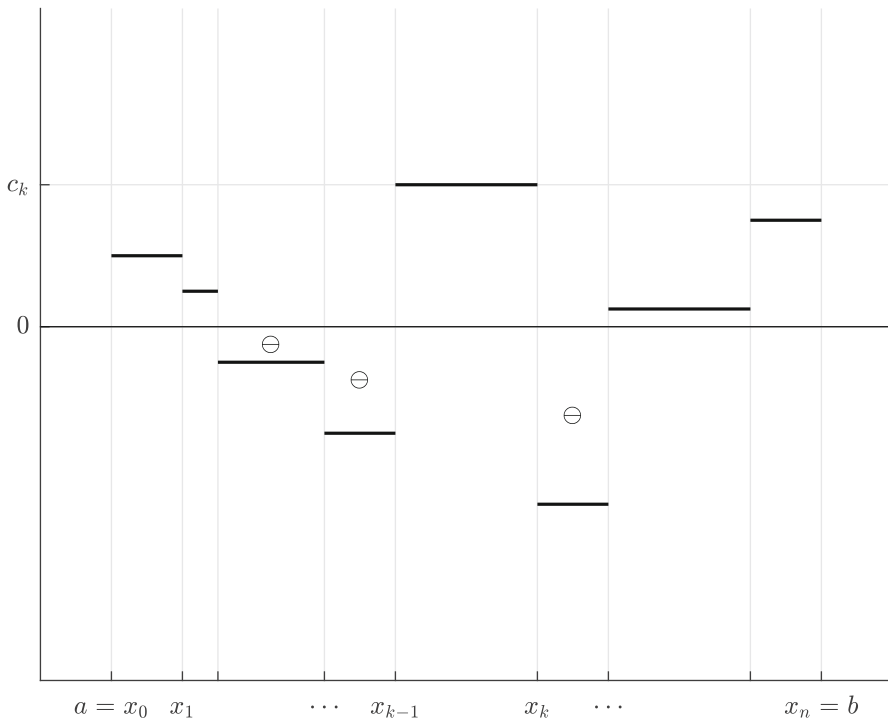


Abb. 1.1 Eine Treppenfunktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stückweise konstant. Auf einem offenen Teilintervall $]x_{k-1}, x_k[$ nimmt sie jeweils den konstanten Wert c_k an. Das Integral einer Treppenfunktion entspricht der Fläche, die ihr Graph mit der x -Achse einschließt. Negative Teilintervalle gehen als negativ gezählte Flächenstücke in das Gesamtintegral ein. Die Funktionswerte an den Rändern der Teilintervalle können beliebig festgelegt werden; sie spielen für das Integral keine Rolle

besitzen können. Die Summentreppenfunktion weist dann die „Vereinigung“ beider Unterteilungen auf.

(3) Das Vielfache einer Treppenfunktion ist wieder eine Treppenfunktion.

Der Vektorraum $T[a, b]$ ist also abgeschlossen bzgl. der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar.

► **Zwischenfrage (1)** Inwiefern weist die Summe zweier Treppenfunktionen die „Vereinigung“ beider Unterteilungen auf?

Für Treppenfunktionen definieren wir nun in folgender Weise den Integralbegriff:

Definition 1.2 Eine Treppenfunktion $\varphi \in T[a, b]$ besitze die Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ mit den Funktionswerten $\varphi|_{]x_{k-1}, x_k[} = c_k$ für $k = 1, \dots, n$. Dann

definiert man das Integral von φ als

$$\int_a^b \varphi(x) \, dx := \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1}).$$

Dieses Integral ist nichts anderes als die *Fläche, die der Graph der Funktion φ mit der x -Achse einschließt*. Da wir es mit einer Treppenfunktion zu tun haben, entspricht diese Fläche einfach einer Summe von Rechteckflächen: Auf dem Intervall von x_{k-1} bis x_k ist die Rechteckfläche gleich $x_k - x_{k-1}$ mal c_k , Breite mal Höhe. Falls φ auf einem Teilintervall negativ ist, also $c_k < 0$ gilt, geht auch die dort eingeschlossene Teilfläche negativ in das Gesamtintegral ein. Siehe Abb. 1.1.

Das Integral ist *linear* und *monoton*:

Satz 1.1 Es seien $\varphi, \psi \in T[a, b]$ zwei Treppenfunktionen und $c \in \mathbb{R}$ eine Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_a^b (\varphi + \psi)(x) \, dx = \int_a^b \varphi(x) \, dx + \int_a^b \psi(x) \, dx \\ (2) \quad & \int_a^b (c\varphi)(x) \, dx = c \int_a^b \varphi(x) \, dx \\ (3) \quad & \varphi \leq \psi \Rightarrow \int_a^b \varphi(x) \, dx \leq \int_a^b \psi(x) \, dx. \end{aligned}$$

Beweis Zunächst halten wir fest, dass mit $\varphi, \psi \in T[a, b]$ auch $\varphi + \psi, c\varphi \in T[a, b]$ gilt, weil $T[a, b]$ ein Vektorraum und damit abgeschlossen ist; somit sind sämtliche Integrale wohldefiniert.

Aussage (2) ergibt sich unmittelbar aus Definition 1.2.

Für Aussage (1) stellen wir fest, dass man die Unterteilung einer Treppenfunktion ohne Weiteres beliebig verfeinern kann, also weitere Zwischenwerte einfügen kann, indem dann benachbarte Intervalle denselben Funktionswert haben. Wir können daher die Unterteilungen von φ und ψ so verfeinern, dass beide dieselbe Unterteilung besitzen. Damit ergibt sich Aussage (1) auch unmittelbar aus Definition 1.2.

Ebenso folgt dann Aussage (3) sofort aus Definition 1.2. •

Wir werden sehen, dass sich diese Rechenregeln, die hier zunächst für die zugebenermaßen etwas künstlichen Treppenfunktionen formuliert sind, auf sämtliche Integrale übertragen werden.

- **Antwort auf Zwischenfrage (1)** Gefragt war nach der Summe zweier Treppenfunktionen und der „Vereinigung“ beider Unterteilungen.

Zwei beliebige Treppenfunktionen φ und ψ auf dem Intervall $[a, b]$ dürfen unterschiedliche Unterteilungen besitzen. Betrachten wir ein konkretes Beispiel: Es sei $a = 0$ und $b = 10$. Die Unterteilung von φ laute 0, 2, 4, 6, 8, 10 und die Unterteilung von ψ laute 0, 1, 3, 5, 7, 9, 10. Die Addition $\varphi + \psi$ besitzt dann die Unterteilung 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Die Stufen beider Funktionen addieren sich versetzt zueinander zu einem insgesamt komplizierteren Stufenmuster.

1.2 Riemann-Integral

Bei Integralen über Treppenfunktionen handelt es sich einfach um Summen von Rechteckflächen. Indem wir uns nun mit Treppenfunktionen unendlich dicht an normale Funktionen annähern, gelangen wir zu einem allgemeinen Integral für beliebige Funktionen.

Dazu bilden wir zunächst die folgenden Begriffe des *Unterintegrals* und des *Oberintegrals*:

Definition 1.3 Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion. Dann setzt man

$$\int_{a*}^b f(x) dx := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \mid \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f \right\} \quad (\text{Unterintegral})$$

$$\int_a^{b*} f(x) dx := \inf \left\{ \int_a^b \psi(x) dx \mid \psi \in T[a, b], \psi \geq f \right\} \quad (\text{Oberintegral}).$$

Beim Unterintegral schmiegen sich einer Funktion also von unten Treppenfunktionen an und sein Wert ist gleich dem Supremum der dabei möglichen Treppenfunktionsintegrale. Beim Oberintegral erfolgt die Annäherung von oben.

Lesehilfe

Die Aussage in Definition 1.3 wirkt wahrscheinlich recht technisch. Letztlich passiert aber beim Unterintegral der Funktion f tatsächlich „nur“ eine beliebig genaue Annäherung durch Treppenfunktionen von unten. Im Einzelnen: Dass die Treppenfunktionen vollständig unterhalb von f sind, drückt sich durch $\varphi \leq f$ aus. Die Mengenklammer beinhaltet somit sämtliche Integralwerte von Treppenfunktionen, die unterhalb von f liegen. Und das Supremum dieser Werte, also die kleinste obere Schranke dieser Werte, bezeichnet man als das Unterintegral.

Für das Oberintegral passiert dasselbe von oben. Das Infimum ist die größte untere Schranke.

Definition 1.3 beschreibt eine zunächst rein gedankliche Konstruktion. Aus ihr ergibt sich nicht unmittelbar eine Rechenvorschrift zur tatsächlichen Berechnung von Unter- oder Oberintegral. Dazu muss zunächst noch ein konkreter „Mechanismus“ entwickelt werden, mit dem man Treppenfunktionen beliebig dicht an die Funktion f heranlaufen lassen kann. Dazu kann man z. B. bei geeigneter Wahl der Treppenstufenhöhen äquidistante Unterteilungen wählen und die Breite der Teilintervalle gegen 0 laufen lassen. Siehe Abschn. 1.3.

Für eine Treppenfunktion φ allerdings sind Unter- und Oberintegral leicht anzugeben, denn es ist offenbar

$$\int_{a*}^b \varphi(x) \, dx = \int_a^{b*} \varphi(x) \, dx = \int_a^b \varphi(x) \, dx. \quad (1.2)$$

Wir können nun das *Riemann-Integral*² definieren:

Definition 1.4 Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar oder einfach integrierbar, wenn Unter- und Oberintegral gleich sind, d. h., wenn gilt

$$\int_{a*}^b f(x) \, dx = \int_a^{b*} f(x) \, dx.$$

Man setzt dann $\int_a^b f(x) \, dx := \int_{a*}^b f(x) \, dx$.

Lesehilfe

Unter-, Ober- und damit auch das Riemann-Integral beziehen sich auf beschränkte Funktionen f . Polstellen sind daher ausgeschlossen – weitere Eigenschaften muss die Funktion f aber zunächst nicht aufweisen.

Natürlich ist jede Treppenfunktion Riemann-integrierbar und besitzt den Integralwert aus Definition 1.2.

Die Bedingung der Riemann-Integrierbarkeit kann auch in Form einer *Einschließung zwischen Treppenfunktionen* angegeben werden, siehe Abb. 1.2:

Satz 1.2 Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a, b]$ gibt mit

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) \, dx \leq \varepsilon.$$

² Benannt nach dem deutschen Mathematiker Bernhard Riemann, 1826–1866.

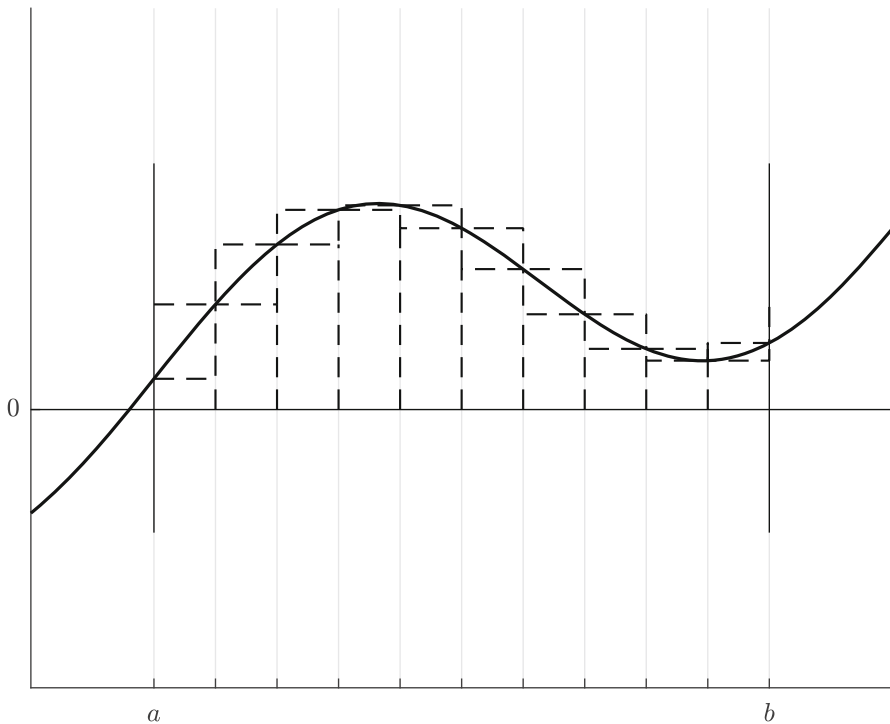


Abb. 1.2 Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn sie so zwischen Treppenfunktionen eingeschlossen werden kann, dass die Differenz ihrer Integrale beliebig klein wird. In der Abbildung sind Treppenfunktionen mit einer äquidistanten Einteilung verwendet

Beweis Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Eigenschaften von Supremum und Infimum in Unter- und Oberintegral und der Definition der Riemann-Integrierbarkeit. •

Lesehilfe zum Satz

Die Treppenfunktionen φ liegen unterhalb von f und die Treppenfunktionen ψ oberhalb. Die Funktion f ist also zwischen diesen Treppenfunktionen eingeschlossen. Der Ausdruck

$$\int_a^b \psi(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) \, dx$$

ist die Differenz ihrer Integrale. Lässt sich diese Differenz unter jeden noch so kleinen Wert ε drücken – wobei die Treppenfunktionen natürlich immer dichter an f heranrücken –, so ist die Funktion Riemann-integrierbar.

Wir wollen uns nun ansehen, welche Eigenschaften einer Funktion sicherstellen, dass sie Riemann-integrierbar ist. Insgesamt stellt die Riemann-Integrierbarkeit keine besonders strenge Anforderung an eine Funktion. Man kann sagen, dass jede „normale“ beschränkte Funktion, deren Funktionsgraph man zeichnen kann, Riemann-integrierbar ist. Insbesondere muss die Funktion nicht stetig sein.

Lesehilfe

Wir wollen uns einige Grundbegriffe für eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ noch einmal klarmachen:

Die Funktion ist *beschränkt*, wenn sie eine obere und eine untere Schranke besitzt. Ihre Funktionswerte bleiben somit endlich.

Die Funktion heißt *stetig*, wenn sich ihr Funktionsgraph „zeichnen lässt, ohne den Stift abzusetzen“. Die Funktion kann damit keine Sprünge machen, wie es etwa bei einer Treppenfunktion der Fall ist. Eine stetige Funktion nimmt auf einem abgeschlossenen Intervall ihr Minimum und ihr Maximum an und erfüllt den *Zwischenwertsatz*: Sie besitzt auf dem Intervall $[a, b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal als Funktionswert, *sie nimmt also jeden Zwischenwert an*.

Eine *differenzierbare* Funktion ist stetig und darüber hinaus weist ihr Funktionsgraph keine „Knicke“ oder andere Stellen auf, an denen keine Tangente definiert wäre. Für differenzierbare Funktionen gilt der *Mittelwertsatz der Differenzialrechnung*: Die Funktion besitzt in mindestens einem Punkt $\xi \in]a, b[$ den *Mittelwert der Steigung* auf dem Intervall, d. h., $f'(\xi) = (f(b) - f(a))/(b - a)$.

Eine Funktion heißt *monoton*, wenn sie entweder monoton steigend oder monoton fallend ist. Die Funktionswerte einer monoton steigenden Funktion bleiben mit größer werdenden Rechtswerten gleich oder sie steigen an, bei einer monoton fallenden Funktion bleiben sie gleich oder fallen ab. Eine monotone Funktion muss nicht stetig sein.

- **Zwischenfrage (2)** Ließe sich die beliebig genaue Annäherung durch Treppenfunktionen φ für das Unterintegral, wie sie in Definition 1.3 erfolgt, nicht einfacher beschreiben, indem man sagt, die Treppenfunktion besitze auf jeder ihrer Unterteilungen den Minimalwert von f auf dieser Unterteilung? Und dann müsste man nur noch die Unterteilung beliebig fein werden lassen? (Analog natürlich für das Oberintegral.)

Stetigkeit oder Monotonie einer Funktion stellen die Integrierbarkeit sicher:

Satz 1.3 (1) *Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.*
 (2) *Jede monotone Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Lesehilfe zum Satz

Beachte, dass Satz 1.3 Implikationen aussagt, nicht etwa Äquivalenzen. Also: Wenn eine Funktion stetig ist, dann ist sie sicher integrierbar. Ist sie nicht stetig, so kann sie natürlich trotzdem integrierbar sein, wie es etwa bei Treppenfunktionen der Fall ist.

Und natürlich können auch Funktionen integrierbar sein, die nicht monoton sind.

Beweis (1) Eine stetige Funktion besitzt die Eigenschaft, dass sie beliebig genau zwischen Treppenfunktionen eingeschlossen werden kann. Das heißt, es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen φ, ψ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$. Für die Differenz ihrer Integrale gilt daher

$$\int_a^b \psi(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) \, dx \leq \varepsilon(b-a).$$

Mit ε kann daher auch die Integraldifferenz beliebig klein gemacht werden und f ist nach Satz 1.2 integrierbar.

(2) Wir beweisen die Aussage für monoton steigende Funktionen: Wir definieren eine äquidistante Unterteilung für das Intervall $[a, b]$:

$$x_k := a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Damit ist $x_0 = a$ und $x_n = b$ und ein Teilintervall hat die Länge $(b-a)/n$. Bezüglich dieser Unterteilung legen wir Treppenfunktionen φ, ψ fest mittels

$$\varphi|_{[x_{k-1}, x_k[} := f(x_{k-1}), \quad \psi|_{[x_{k-1}, x_k[} := f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

und $\varphi(b) := \psi(b) := f(b)$. Da f monoton steigt, gilt $\varphi \leq f \leq \psi$. Für ihre Integraldifferenz Δ erhalten wir nach Definition 1.2

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_a^b \psi(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) \, dx \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Die Länge der Intervalle $x_k - x_{k-1}$ der äquidistanten Unterteilung ist für alle k gleich $(b-a)/n$. Wir haben daher

$$\Delta = \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=1}^n f(x_k) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \right) = \frac{b-a}{n} (f(x_n) - f(x_0)).$$

Da $b - a$ und $f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$ Konstante sind, kann Δ mit genügend großem n unter jede beliebige Schranke ε gedrückt werden und f ist nach Satz 1.2 integrierbar. •

Lesehilfe zum Beweis

Wie du siehst, kann die Monotonie einer Funktion verwendet werden, um explizit Treppenfunktionen zu definieren, die die Funktion von unten bzw. von oben berühren, indem man jeweils den Funktionswert am Beginn der Stufe bzw. an deren Ende als Treppenstufenhöhe wählt. Auch die Treppenstufenränder sind passend festgelegt, beachte die halboffenen Intervalle in $\varphi| [x_{k-1}, x_k[:= f(x_{k-1})$ usw. Schließlich bleibt von den Summen nicht viel übrig,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(x_k) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \\ &= f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) - f(x_0) - f(x_1) - \dots - f(x_{n-1}) \\ &= f(x_n) - f(x_0), \end{aligned}$$

weil sich alles andere aufhebt.

Da die meisten für praktische Anwendungen relevanten Funktionen stetig sind, ist somit der Integralbegriff in diesen Fällen anwendbar.

Schließlich sehen wir uns noch zwei grundlegende Eigenschaften des Integrals an:

Satz 1.4 *Es sei $a < b < c$. Die Funktion $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn die Funktionen $f|_{[a, b]}$ und $f|_{[b, c]}$ integrierbar sind, und es gilt dann*

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx.$$

Beweis Als Beweis wollen wir gelten lassen, dass die Aussage geometrisch unmittelbar einleuchtend ist. •

Definition 1.5 *Man setzt*

$$\int_a^a f(x) \, dx := 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b f(x) \, dx := - \int_b^a f(x) \, dx \quad \text{falls } b < a.$$

Es sind damit auch Integrale definiert, deren untere Grenze größer ist als die obere. Dabei ist das Vertauschen der Integrationsgrenzen gleichbedeutend mit einem Vorzeichenwechsel des Integrals.

Übrigens kann die Integrationsvariable in einem Integral beliebig unbenannt werden, es ist also

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b f(\xi) \, d\xi = \dots$$

- **Antwort auf Zwischenfrage (2)** Gefragt war, ob sich die beliebig genaue Annäherung durch Treppenfunktionen φ für das Unterintegral in Definition 1.3 nicht einfacher durch Treppenfunktion beschreiben ließe, die auf jeder ihrer Unterteilungen den Minimalwert von f besitzen.

Nein, das geht nicht „einfach“ auf diese Weise. Die Treppenstufen sind auf offenen Intervallen definiert. Auf einem offenen Intervall besitzt f nicht unbedingt ein Minimum. „Minimum“ heißt ja, dass der Wert auch tatsächlich von f angenommen wird. Allerdings besitzt f ein Infimum auf dem offenen Intervall.

Übrigens ließe sich das auch nicht „reparieren“, indem man sagt, man betrachte statt der offenen Intervalle der Treppenstufen die abgeschlossenen Intervalle. Auch auf abgeschlossenen Intervallen besitzt f nicht notwendig ein Minimum. Zwar wäre das der Fall, wenn f stetig ist, da stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen ihr Minimum (und ihr Maximum) annehmen. Das Integral soll aber auch für nicht stetige Funktionen wie etwa die Treppenfunktionen funktionieren. Auch lassen sich für monotone Funktionen leicht Treppenfunktionen definieren, die die Funktion von unten berühren, siehe den Beweis zu Satz 1.3. Aber auch diese Einschränkung würden schon Treppenfunktionen i. Allg. nicht erfüllen.

Man könnte also allenfalls sagen, man betrachte Treppenfunktionen, die auf jeder Unterteilung das Infimum von f als „Treppenstufenhöhe“ besitzen, und lässt dann deren Unterteilung beliebig fein werden. Das ist dann etwas anders als in Definition 1.3, aber es ist nicht einfacher ;-)

Beispiele

(1) Polynomfunktionen $x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sind stetig auf \mathbb{R} . Sie sind daher auf beliebigen endlichen Intervallen integrierbar.

Dies gilt natürlich ebenso für alle anderen stetigen Funktionen: Sinus, Cosinus, Exponentialfunktionen usw. Auch der Logarithmus ist auf jedem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ integrierbar.³

³ Die Bezeichnung \mathbb{R}_+ steht für die Menge der nichtnegativen Zahlen, also $\mathbb{R}_+ := [0, \infty[$. Mit hochgestelltem $*$ wird die Null aus einer Menge ausgeschlossen, also ist $\mathbb{R}_+^* :=]0, \infty[$ die Menge der positiven Zahlen.

(2) Gebrochen rationale Funktionen sind auf sämtlichen abgeschlossenen Intervallen integrierbar, die keine Polstelle enthalten. Dabei wollen wir davon ausgehen, dass sie keine hebbaren Lücken besitzen bzw. dass diese bereits behoben sind. Somit weisen die Funktionen abseits der Pole keine Lücken im Definitionsbereich auf.

(3) Als Beispiel für eine Funktion, die nicht Riemann-integrierbar ist, betrachten wir die *Dirichlet-Funktion* $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$d(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Die rationalen Zahlen liegen *dicht* in \mathbb{R} . Das bedeutet, dass es in jedem nichttrivialen Intervall⁴ reeller Zahlen unendlich viele rationale und unendlich viele irrationale Zahlen gibt. Beim „Heranfahren“ mit Treppenfunktionen von unten kommt man daher nicht über die 0 hinaus und beim Heranfahren von oben nicht unter die 1. Das Unterintegral von d besitzt daher auf jedem Intervall den Wert 0, während das Oberintegral etwa auf dem Intervall $[0, 5]$ gleich 5 ist. Die Funktion d ist daher nicht integrierbar.

1.3 Numerische Integration

Definition 1.3 für das Unter- bzw. Oberintegral einer Funktion stellt zumindest theoretisch eine Anweisung zur Berechnung des Integrals dar. Tatsächlich lässt sie sich durchaus in einen Grenzwert übersetzen, der in manchen Fällen die *exakte* Berechnung des Integrals erlaubt. Wir werden aber in Kap. 2 sehen, dass eine solche exakte Berechnung einfacher durch Bestimmung der sogenannten Stammfunktion erfolgt.

Dessen ungeachtet liefert die Annäherung durch Treppenfunktionen für Riemann-integrierbare Funktionen aber unmittelbar eine Möglichkeit zur *näherungsweise numerischen* Berechnung eines Integrals. Sie ist aus mindestens zwei Gründen von Interesse:

- (1) Die numerische Integration benötigt keine weitere Theorie. Mit dem, was wir bisher gesehen haben, kann der numerische Wert praktisch eines jeden Integrals näherungsweise ermittelt werden.
- (2) Es gibt Funktionen, die keine elementare Stammfunktion besitzen. *Solche Funktionen können überhaupt nur numerisch integriert werden.* Und diese Funktionen sind nicht etwa nur Exoten, sondern sie sind auch in „normalen“ praktischen Anwendungen zu finden. Wir werden mit der Normalverteilung in Abschn. 3.6.2 ein wichtiges Beispiel kennenlernen.

Natürlich ist die *numerische Integration* ein weites Feld. Wir wollen sie nicht ansatzweise erschöpfend behandeln. Aber wir wollen das Prinzip verstehen und kon-

⁴ Ein „nichttriviales“ Intervall besteht aus mehr als einem Punkt. Es ist also tatsächlich ein Intervall.

kret numerische Integrationen durchführen können. Auch die systematischen Fehler, die dabei auftreten, werden wir qualitativ verstehen können.⁵

Für unsere numerischen Integrationen wollen wir Treppenfunktionen mit *äquidistanter Unterteilung* verwenden. Sie bieten für praktische Berechnungen den Vorteil, dass sich die Summe, die mit den Treppenfunktionsintegralen verbunden ist, leicht formulieren und auswerten lässt. Des Weiteren halten wir fest:

Ist die Funktion f Riemann-integrierbar, so kann die näherungsweise Berechnung ihres Integrals durch Treppenfunktionen erfolgen, deren Stufenhöhen auf den abgeschlossenen Teilintervallen einmal von f als Funktionswert angenommen werden. Es ist dabei *nicht* notwendig, dass die Treppenfunktion ansonsten ober- oder unterhalb der Funktion bleibt. Je kleiner die Teilintervalle der Treppenfunktionen sind, desto besser ist i. Allg. die Näherung des Integrals, und *der Grenzwert einer unendlich fein werdenden Unterteilung entspricht dem exakten Wert des Riemann-Integrals.*

Lesehilfe

Salopp formuliert verwendet man zur numerischen Berechnung des Integrals also Treppenfunktionen, deren Treppenstufen den Graphen der Funktion f jeweils (mindestens) einmal schneiden oder – wenn man bei offenen Intervallen für die Treppenfunktionen bleibt – ihn zumindest berühren.

► Zwischenfrage (3) Stimmt die folgende Aussage?

„Das Unterintegral (Oberintegral) einer stetigen Funktion f kann berechnet werden, indem man Treppenfunktionen betrachtet, die unterhalb (oberhalb) der Funktion liegen und deren Stufenhöhen c_k auf den abgeschlossenen Teilintervallen einmal von f als Funktionswert angenommen werden. Lässt man die maximale Breite der Unterteilungen gegen 0 gehen, so ergibt sich das Unterintegral (Oberintegral). Dabei sind Unterintegral und Oberintegral stets gleich.“

1.3.1 Äquidistante Unterteilung

Für die konkrete numerische Berechnung eines Integrals

$$I = \int_a^b f(x) \, dx \quad (1.4)$$

⁵ Auf eine quantitative Fehlerbetrachtung verzichten wir im Rahmen dieser Darstellung. Mit einer solchen Betrachtung kann eine numerische Integration unter Angabe einer Fehlerschranke für das zu berechnende Integral erfolgen und eine dazu passend feine Unterteilung des Intervalls vorgenommen werden.

wollen wir auf dem Intervall $[a, b]$ die folgende äquidistante Unterteilung definieren:

$$x_k := a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.5)$$

Es ist dann $x_0 = a$ und $x_n = b$ und ein Teilintervall hat die Länge $(b-a)/n$. Für das Integral benötigen wir auf dieser Unterteilung eine Treppenfunktion φ , deren Stufenhöhen c_k auf den abgeschlossenen Teilintervallen einmal von f als Funktionswert angenommen werden. Dazu kann man *beispielsweise* den Funktionswert von f am Beginn der Intervalle wählen, man setzt also

$$\varphi|_{]x_{k-1}, x_k[} = c_k := f(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.6)$$

Der näherungsweise Wert des Integrals I ist dann

$$I_n = \int_a^b \varphi(x) \, dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}). \quad (1.7)$$

Er wird umso besser, je größer der Wert für n gewählt wird, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I. \quad (1.8)$$

Lesehilfe

Die in (1.6) getroffene Wahl ist tatsächlich nur eine von verschiedenen Möglichkeiten, vielleicht die einfachste. Aber ebenso gut könnte man den Funktionswert am Ende des Intervalls nehmen, dann stünde da $c_k := f(x_k)$ oder die Mitte mit $c_k := f((x_{k-1} + x_k)/2)$ usw. Siehe auch den Beweis zu Satz 1.3 (2).

Zur Schreibweise des Integrals

Die Gleichungen (1.7) und (1.8) beinhalten übrigens den historischen Ursprung für die Schreibweise des Integrals. Um das zu erkennen, bezeichnen wir die Schrittweite der Treppenfunktion als Δx , setzen also $(b-a)/n =: \Delta x$; dies ergibt

$$I_n = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x.$$

Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ ist dann gleichbedeutend mit $\Delta x \rightarrow 0$. Es gilt daher für das Integral

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_k f(x_{k-1}) \Delta x.$$

Diesen Grenzwert gibt man symbolisch durch die Integralschreibweise wieder: Die Summe \sum wurde oft als S geschrieben, das jetzt zu einem \int gedehnt wird, wobei Δx beliebig klein und damit zu dx wird. Gleichzeitig geht $k \rightarrow \infty$, d. h., das Argument x_{k-1} wird kontinuierlich und sein Wertebereich $[a, b]$ wird durch die Grenzen am Integral wiedergegeben:

$$I = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_k f(x_{k-1}) \Delta x =: \int_a^b f(x) dx.$$

Soweit zur historischen Entwicklung der Schreibweise. Wir wollen die Bedeutung des Integrals unabhängig davon natürlich weiterhin an Definition 1.4 festmachen.

- **Antwort auf Zwischenfrage (3)** Gefragt war nach der Richtigkeit der Aussage: „Das Unterintegral (Oberintegral) einer stetigen Funktion f kann berechnet werden, indem man Treppenfunktionen betrachtet, die unterhalb (oberhalb) der Funktion liegen und deren Stufenhöhen c_k auf den abgeschlossenen Teilintervallen einmal von f als Funktionswert angenommen werden. Lässt man die maximale Breite der Unterteilungen gegen 0 gehen, so ergibt sich das Unterintegral (Oberintegral). Dabei sind Unterintegral und Oberintegral stets gleich.“

Die Aussage stimmt. Da die Funktion f stetig ist, nimmt sie auf einem abgeschlossenen Intervall ihr Minimum und ihr Maximum an. Die Treppenfunktionen können daher auf ihren Teilintervallen mit diesen Werten c_k versehen werden und sind dann $\leq f$ bzw. $\geq f$. Geht die Breite der Unterteilungen gegen 0, ergeben sich dann Unter- bzw. Oberintegral. Beide sind gleich, da f stetig und somit Riemann-integrierbar ist.

Beispiel

Wir berechnen das Integral $I = \int_0^b x dx$, $b > 0$. Elementargeometrisch gilt offenbar

$$I = \int_0^b x dx = \frac{b^2}{2}.$$

Lesehilfe

„Elementargeometrisch“ haben wir es bei diesem Integral mit einem rechtwinkligen Dreieck zu tun, dessen zwei Katheten die Länge b haben (eine liegt auf der x -Achse von 0 bis b). Somit ist sein Flächeninhalt gleich $b^2/2$.

Dieses Ergebnis lässt sich auch durch Approximation mit Treppenfunktionen ermitteln: Wir wählen äquidistante Unterteilungen für das Intervall $[0, b]$:

$$x_k := \frac{kb}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n;$$

insbesondere ist $x_0 = 0$ und $x_n = b$ und ein Teilintervall hat die Länge $\frac{b}{n}$. Auf diesen Intervallen definieren wir eine Treppenfunktion durch

$$\varphi|]x_{k-1}, x_k[:= x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

also durch den Funktionswert am Beginn des Teilintervalls. Diese Treppenfunktion nähert sich der monoton steigenden Funktion $\text{id} : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ von unten an, siehe Abb. 1.3. Das Integral der Treppenfunktion lautet:

$$\begin{aligned} I_n &= x_0 \frac{b}{n} + x_1 \frac{b}{n} + \dots + x_{n-1} \frac{b}{n} = \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n x_{k-1} = \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)b}{n} \\ &= \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Für ein endliches n ergibt diese Summe einen Näherungswert für das Integral I . Das entspräche dann einer numerischen Integration.

In diesem einfachen Beispiel ist es aber auch möglich, das Integral exakt zu bilden. Für die in (1.9) verbleibende Summe gilt nämlich allgemein die Formel

$$\sum_{k=0}^m k = \frac{m(m+1)}{2}, \tag{1.10}$$

d. h., es ist $\sum_{k=1}^n (k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$ und wir erhalten

$$I_n = \frac{b^2}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{b^2}{n^2} \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{b^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Für $n \rightarrow \infty$ strebt dieser Ausdruck gegen $b^2/2$.

Die Bildung des Grenzwerts entspricht der *exakten* Berechnung des Unterintegrals. Wie man leicht nachrechnet, ergibt eine Annäherung von oben mit einer Treppenfunktion, die definiert wird durch

$$\psi|]x_{k-1}, x_k[:= x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

für $n \rightarrow \infty$ ein Oberintegral mit demselben Wert.

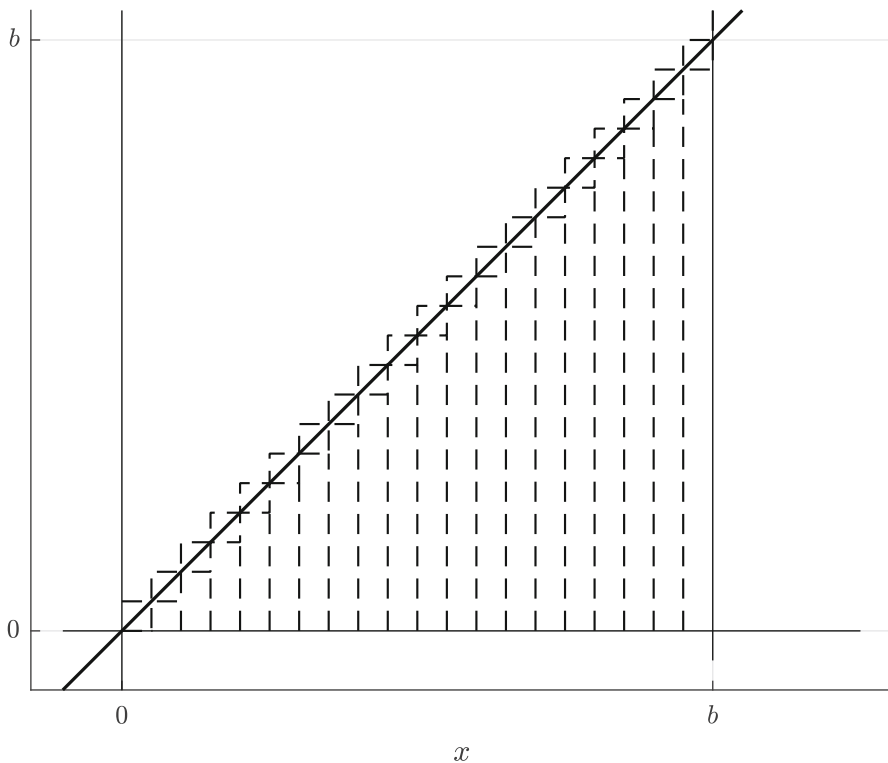


Abb. 1.3 Die Funktion $\text{id} : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist monoton steigend. Sie kann daher auf einfache Weise durch Treppenfunktionen angenähert werden: Für eine Annäherung von unten (oben) wählt man eine Treppenfunktion mit äquidistanter Unterteilung und gibt in jeder Unterteilung den Funktionswert am Beginn (Ende) des Intervalls vor. Der Grenzwert unendlich kleiner Unterteilungen ergibt dann das Unterintegral (Oberintegral)

Lesehilfe

Um etwaigen Missverständnissen vorzubeugen: Was wir hier gemacht haben, ist nicht das, was man i. Allg. unter „Integrieren“ versteht. Wir wollen an diesem Beispiel nur einmal sehen, dass Integrale tatsächlich auch über Grenzwerte von Treppenfunktionsintegralen exakt ermittelt werden können.

- **Zwischenfrage (4)** Wir haben gerade gesehen, dass gilt $\int_0^b x \, dx = b^2/2$ für $b > 0$. Stimmt diese Formel auch für $b \leq 0$?
 Offenbar ist darüber hinaus $\int_a^b x \, dx = b^2/2 - a^2/2$ für $0 < a < b$.
 Bleibt diese Formel auch für beliebig anders gewählte a und b richtig?

1.3.2 Trapeznäherung

Im obigen sehr einfachen Beispiel konnte das Integral mithilfe des Grenzwerts der Treppenfunktionsintegrale exakt berechnet werden. Im Allgemeinen lässt sich der Grenzwert selbst jedoch nicht ohne Weiteres ermitteln und man muss es daher bei einem numerischen Näherungswert mit endlichem n belassen. Dabei ist es wünschenswert, mit möglichst „kleinem“ Wert von n ein gutes Ergebnis zu erzielen.⁶ Bleibt man bei Treppenfunktionen mit äquidistanter Unterteilung, kann man versuchen, durch geschickte Wahl der Treppenstufenhöhen die Ergebnisse positiv zu beeinflussen.

Wählt man – wie in (1.6) – den Beginn des Intervalls als Treppenstufenhöhe, so werden monoton steigende Funktionen beispielsweise systematisch unterschätzt, während die Wahl des Intervallendes sie grundsätzlich überschätzen würde, siehe Abb. 1.3. Bei Funktionen, die auf dem Integrationsintervall teilweise steigen und teilweise fallen, kompensieren sich diese Fehler immerhin teilweise gegenseitig.

Eine besonders vorteilhafte Wahl der Treppenstufenhöhe ist oft die *Trapeznäherung*: Für sie wird der Mittelwert aus Intervallanfang und Intervallende gewählt, man verwendet also die Treppenfunktion φ^* mit

$$\varphi^*|_{[x_{k-1}, x_k]} := \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.11)$$

Bei dieser Treppenfunktion wird das Integral durch *Trapeze* auf den Teilintervallen der Treppenfunktion angenähert, siehe Abb. 1.4. Man erhält damit

$$I_n^* = \int_a^b \varphi^*(x) dx = \frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k)). \quad (1.12)$$

Lesehilfe

Ein Trapez ist ein Viereck mit mindestens einem Paar paralleler Seiten.

Die in (1.12) auftretende Summe lässt sich für die numerische Auswertung vorteilhafter schreiben:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k)) &= (f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + \dots \\ &\quad + (f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})) + (f(x_{n-1}) + f(x_n)) \\ &= f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k). \end{aligned} \quad (1.13)$$

⁶ Der Fehler bei der Annäherung des Integralwerts durch Summen wie in (1.7) lässt sich auch durch großes n prinzipiell nicht *beliebig* klein machen, da neben dem „Verfahrensfehler“, der aus endlichem n resultiert, auch die Rundungsfehler des Rechensystems (Computer) eine Rolle spielen. Letztere werden bei (sehr) großen n bedeutsam.

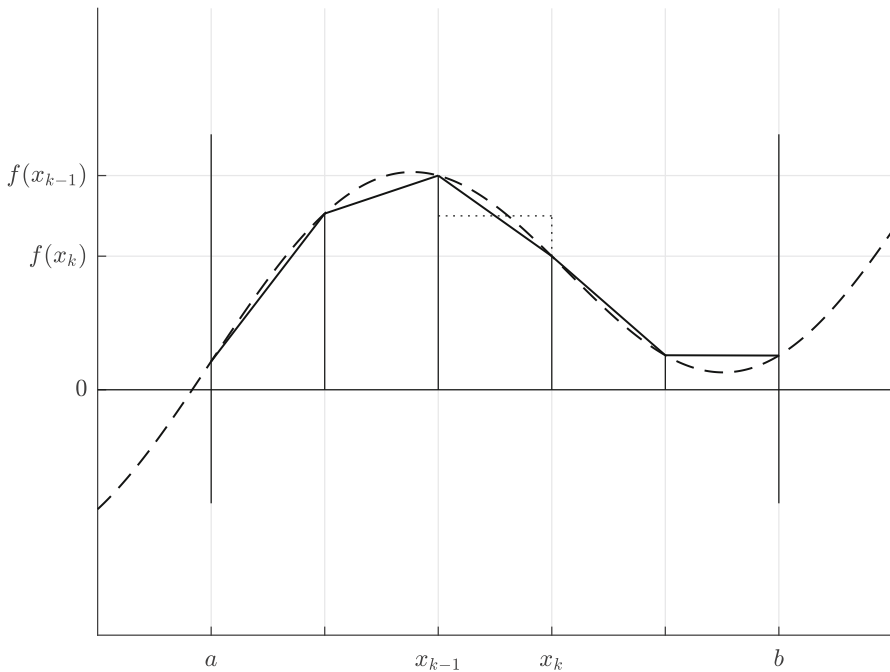


Abb. 1.4 Die Annäherung eines Integrals $\int_a^b f(x) dx$ kann über Trapezflächen durchgeführt werden: Der Flächeninhalt des Rechtecks mit der Grundseite $x_k - x_{k-1}$ und der Höhe $(f(x_{k-1}) + f(x_k))/2$ entspricht dem des Trapezes, das an der Stelle x_{k-1} die Höhe $f(x_{k-1})$ und an der Stelle x_k die Höhe $f(x_k)$ besitzt

Lesehilfe

Wie du sicher gesehen hast, tauchen in der Summe alle Summanden bis auf den ersten und den letzten zweifach auf. Der erste und der letzte Summand bleiben daher einzeln stehen und die restlichen werden als 2 mal ihre Summe zusammengefasst.

Mit (1.5) erhalten wir daraus die folgende *Trapezformel*

$$I_n^* = \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \right]. \quad (1.14)$$

Die Trapeznäherung ergibt in der Regel bei gleichen Werten für n bessere Werte als die Näherung (1.7). Aber auch die Trapezregel weist systematische Fehler auf: Sie überschätzt konvexe Anteile einer Funktion und unterschätzt konkave. Für die numerische Integration einer Funktion wird man dennoch in der Regel die Trapez-

formel (1.14) verwenden. Zu ihrer Ausführung reicht schon ein Taschenrechner mit einer Summenfunktion.

Lesehilfe

Eine Funktion heißt *konvex*, wenn ihr Graph *unterhalb* jeder Verbindungsstrecke zweier seiner Punkte liegt. Sie heißt *konkav*, wenn ihr Graph *oberhalb* jeder solchen Verbindungsstrecke liegt.

Die Trapeze der Trapezregel entsprechen mit ihrer oberen Seite gerade solchen Verbindungsstrecken zweier Punkte des Graphen. Siehe Abb. 1.4.

Übrigens ist es für eine numerische Integration nicht notwendig, dass die Funktion f in Form einer expliziten Funktionsvorschrift vorliegt, sondern es können auch nur numerisch vorliegende Funktionen integriert werden. Es sind dann lediglich die Stützpunkte der Treppenfunktion so zu wählen, dass sie mit numerisch bekannten Stellen der Funktion übereinstimmen.

- **Antwort auf Zwischenfrage (4)** Gefragt war, ob $\int_0^b x \, dx = b^2/2$ auch für $b \leq 0$ gilt. Und ob $\int_a^b x \, dx = b^2/2 - a^2/2$ für beliebig gewählte a und b richtig bleibt.

Nach Definition 1.5 ist für $b = 0$

$$\int_0^0 x \, dx = 0.$$

Die Formel stimmt also für $b = 0$. Für $b < 0$ haben wir

$$\int_0^b x \, dx = - \int_b^0 x \, dx = -F$$

und das zweite Integral ist ein „normales“ Flächenintegral. Da in diesem Integrationsbereich der Integrand $x < 0$ ist, besitzt es den negativen Wert $F = -b^2/2$. Insgesamt gilt daher wieder

$$\int_0^b x \, dx = b^2/2.$$

Diese Formel stimmt somit für alle $b \in \mathbb{R}$.

Mit Satz 1.4 haben wir

$$\int_a^b x \, dx = \int_a^0 x \, dx + \int_0^b x \, dx,$$

wenn auch zunächst nur für $a < 0 < b$. Aufgrund von Definition 1.5 bleibt diese Gleichung aber auch für jede andere Wahl von a und b richtig. Ist beispielsweise $0 < a < b$, so ist ebenso

$$\int_a^b x \, dx = \int_0^b x \, dx - \int_0^a x \, dx = \int_0^b x \, dx - \left(- \int_a^0 x \, dx \right) = \int_0^b x \, dx + \int_a^0 x \, dx$$

usw. Somit gilt

$$\int_a^b x \, dx = \int_a^0 x \, dx + \int_0^b x \, dx = \int_0^b x \, dx - \int_0^a x \, dx = b^2/2 - a^2/2$$

tatsächlich für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

- **Zwischenfrage (5)** Warum ist die Summe (1.13) vorteilhafter für die numerische Auswertung als die Summe in (1.12)?

Beispiel

Wir berechnen näherungsweise die Fläche unter einem halben Cosinus- bzw. Sinusbogen, d. h. das Integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx. \quad (1.15)$$

Die Cosinusfunktion ist stetig und daher integrierbar. Der exakte Wert dieses Integrals ist 1, mithilfe der Stammfunktion lässt er sich leicht ermitteln. Seine Kenntnis erlaubt uns hier, die Güte der Näherungen zu erkennen.

Zur numerischen Berechnung nehmen wir eine äquidistante Unterteilung des Intervalls $[0, \frac{\pi}{2}]$ vor gemäß

$$x_k := \frac{k\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

und definieren eine Treppenfunktion durch

$$\varphi|_{[x_{k-1}, x_k]} := \cos x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

geben also jeder Treppenstufe den Cosinuswert am Beginn des Intervalls als Wert vor. Diese Treppe liegt vollständig oberhalb der Funktion, da \cos auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ monoton fällt. Der Näherungswert für n Unterteilungen lautet (siehe (1.7))

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \varphi(x) \, dx = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \cos x_{k-1} = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right). \quad (1.16)$$

Für $n = 10$ erhalten wir mithilfe eines Taschenrechners oder Computers den Wert

$$I_{10} = \frac{\pi}{20} \sum_{k=1}^{10} \cos \frac{(k-1)\pi}{20} = 1.07648$$

und für $n = 100$

$$I_{100} = \frac{\pi}{200} \sum_{k=1}^{100} \cos \frac{(k-1)\pi}{200} = 1.00783.$$

Vergleicht man dies mit dem exakten Wert $I = 1$, so erkennt man erwartungsgemäß, dass sich der Wert mit größerem n verbessert.

Schließlich wollen wir das Integral mithilfe der Trapeznäherung approximieren, also Treppenfunktionen des Typs (1.11), d. h. die Trapezformel (1.14) verwenden:

$$I_n^* = \int_0^{\pi/2} \varphi^*(x) dx = \frac{\pi}{4n} \left[\cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \right]. \quad (1.17)$$

Dies ergibt die Näherungswerte

$$I_{10}^* = \frac{\pi}{40} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^9 \cos\left(\frac{k\pi}{20}\right) \right] = 0.99794$$

und

$$I_{100}^* = \frac{\pi}{400} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{99} \cos\left(\frac{k\pi}{200}\right) \right] = 0.99998.$$

Sie nähern sich dem exakten Wert von unten, da die Funktion \cos im Bereich von 0 bis $\pi/2$ konkav ist und daher die Trapeze vollständig unterhalb des Funktionsgraphen liegen. Die Fehler sind bei gleichem n deutlich kleiner als bei Verwendung von (1.16).

- **Antwort auf Zwischenfrage (5)** Gefragt war, warum die Summe (1.13) vorteilhafter für die numerische Auswertung ist als die Summe in (1.12).

Um die Summe in (1.12),

$$\sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k)),$$

zu berechnen, muss die Funktion f für jeden Summanden zweimal ausgewertet werden, also insgesamt $2n$ -mal. Für die Summe (1.13),

$$f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k),$$

ist dies hingegen nur $(2 + n - 1) = (n + 1)$ -mal notwendig. Wenn man davon ausgeht, dass die Auswertung der Funktionswerte von f die wesentliche Rechenlast darstellt – man denke hier an Funktionen wie Sinus, Exponentialfunktion, Logarithmus –, so sollte die Auswertung der Summe (1.13) daher nur etwa die halbe Rechenzeit benötigen.

1.4 Grundlegende Eigenschaften des Integrals

Zunächst halten wir fest, dass die Eigenschaften der *Linearität* und der *Monotonie* nicht nur für Integrale über Treppenfunktionen, sondern allgemein für sämtliche Riemann-Integrale gelten:

Satz 1.5 *Es seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$ eine Zahl. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und cf integrierbar und es gilt*

$$(1) \quad \int_a^b (f + g)(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$

$$(2) \quad \int_a^b (cf)(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx$$

$$(3) \quad f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Beweis Hält man sich die Flächeneigenschaft des Integrals vor Augen, sind die Aussagen geometrisch unmittelbar einleuchtend. Ein formaler Beweis kann mithilfe von Satz 1.2 erfolgen. Setzt man die Integrierbarkeit der Funktionen $f + g$ und cf voraus, so ergeben sich die Rechenregeln – durch Betrachten des Unterintegrals – auch aus Satz 1.1. \circ

Die Linearität stellt eine grundlegende Rechenregel für Integrale dar. Sie lässt sich zusammengefasst mit zwei Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ auch in folgender Form ausdrücken:

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) \, dx = c_1 \int_a^b f(x) \, dx + c_2 \int_a^b g(x) \, dx. \quad (1.18)$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ähnlich wie die Differenzialrechnung besitzt auch die Integralrechnung einen *Mittelwertsatz*:

Satz 1.6 Es seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und es sei $g \geq 0$. Dann existiert ein $\mu \in [a, b]$ so, dass gilt

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(\mu) \int_a^b g(x) \, dx.$$

Ist speziell $g = 1$, so ergibt sich

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\mu)(b - a).$$

Beweis Eine stetige Funktion nimmt auf einem abgeschlossenen Intervall ihr Minimum und ihr Maximum an; wir können daher setzen

$$m := \min\{f(x) | x \in [a, b]\} \quad \text{und} \quad M := \max\{f(x) | x \in [a, b]\}.$$

Wegen $g \geq 0$ gilt dann $mg \leq fg \leq Mg$ und damit nach Satz 1.5

$$m \int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x)g(x) \, dx \leq M \int_a^b g(x) \, dx.$$

Es muss daher ein $\beta \in [m, M]$ geben mit

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = \beta \int_a^b g(x) \, dx.$$

Da die Funktion f stetig ist, nimmt sie auf $[a, b]$ jeden Wert zwischen m und M an; daher gibt es ein μ mit $f(\mu) = \beta$. •

Lesehilfe

Kurz zur kompakten Schreibweise, die wir hier und an anderen Stellen für Funktionen verwenden: $g \geq 0$ bedeutet genauer $g(x) \geq 0$ für alle x , hier alle $x \in [a, b]$. Ebenso steht $g = 1$ für $g(x) = 1$ für alle x .

Und die Ungleichung $mg \leq fg \leq Mg$ bedeutet $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ für alle x , wobei m und M feste Zahlen sind.

Die kurzen Schreibweisen für die Funktionen sind hoffentlich intuitiv und klar und vielleicht bist du auch gar nicht an ihnen hängengeblieben ;-)

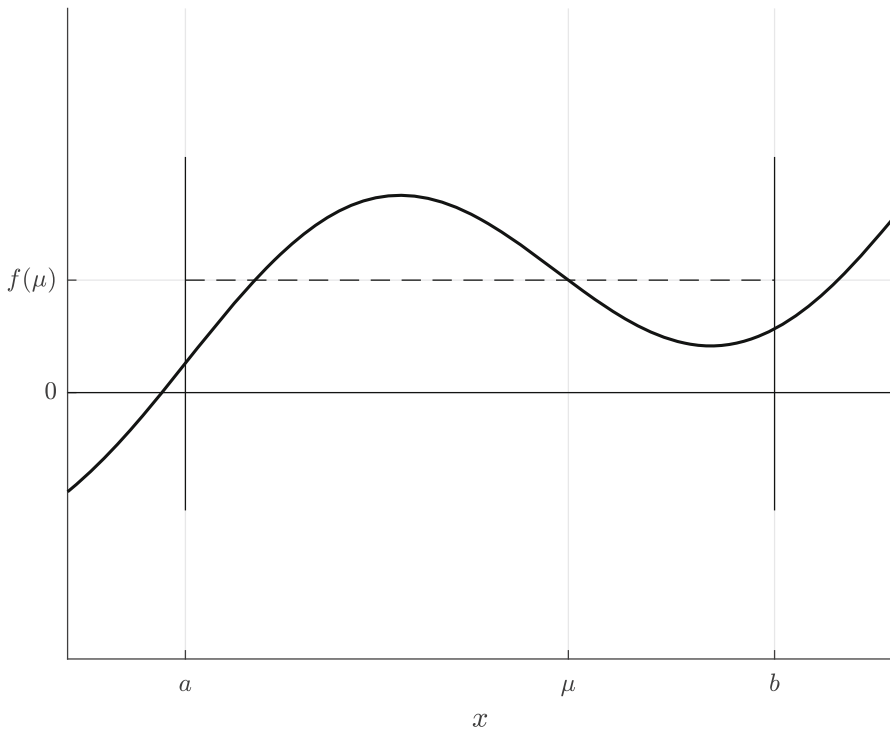


Abb. 1.5 Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es mindestens einen Wert $\mu \in [a, b]$ so, dass das Integral über die Funktion gleich der Rechteckfläche $f(\mu)(b - a)$ ist; der Wert $f(\mu)$ wird als der integrale Mittelwert der Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ bezeichnet

► **Zwischenfrage (6)** Warum gilt in Satz 1.6 für $g = 1$

$$f(\mu) \int_a^b g(x) \, dx = f(\mu)(b - a)?$$

Und warum „funktioniert“ der Beweis nur für Funktionen $g \geq 0$?

Geometrisch bedeutet der Mittelwertsatz, dass es für eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ einen Wert μ gibt, sodass die Fläche unter dem Graphen gleich der Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen $b - a$ und $f(\mu)$ ist, siehe Abb. 1.5. Eine stetige Funktion f nimmt auf dem Intervall $[a, b]$ also mindestens einmal ihren Mittelwert an.

Allgemeiner setzt man für beliebige integrierbare Funktionen

$$M(f) := \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx \quad (1.19)$$

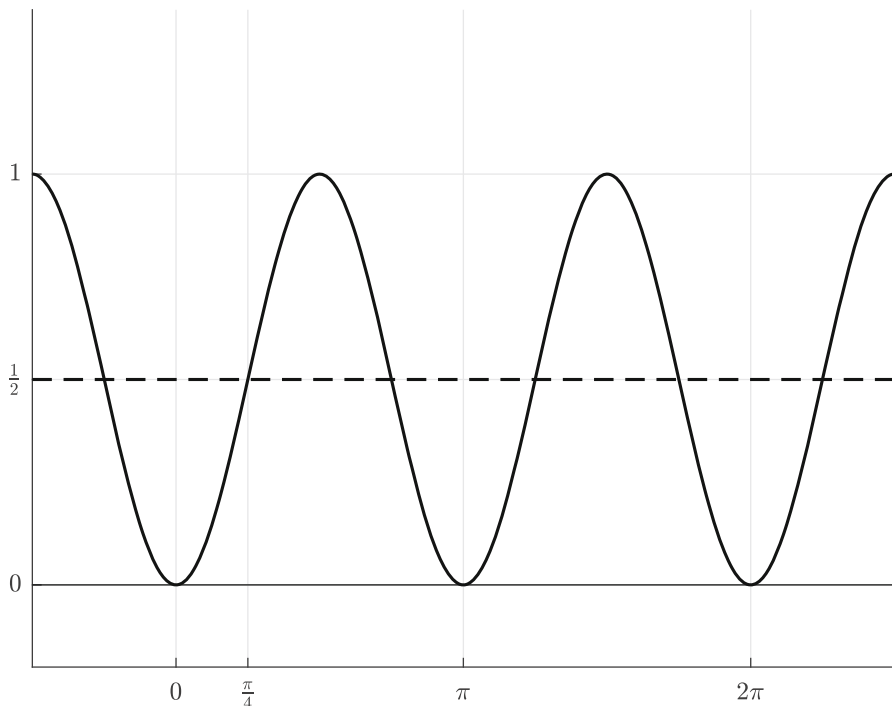


Abb. 1.6 Zwei „Höcker“ der \sin^2 -Funktion schließen den Flächeninhalt π ein. Der Mittelwert der Funktion ist daher $M_{\sin^2} = \pi/2\pi = 1/2$. Da die Funktion stetig ist, nimmt sie ihren Mittelwert mindestens einmal als Funktionswert an, z. B. an der Stelle $\pi/4$

und nennt diese Zahl den (*integralen*) Mittelwert von f auf dem Intervall $[a, b]$. Er existiert auch dann, wenn die Funktion nicht stetig ist. Es ist dann lediglich nicht sichergestellt, dass die Funktion ihren Mittelwert auf dem Intervall auch selbst einmal als Funktionswert annimmt. Für Anwendungen des Mittelwerts spielt das aber in der Regel gar keine Rolle.

Beispiel

Wir berechnen den integralen Mittelwert der Funktion $\sin^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ über eine Periode, d. h. auf dem Intervall $[0, 2\pi]$:

$$M(\sin^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx.$$

Wir benötigen also das Integral

$$I = \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx,$$

das man ohne Weiteres exakt bestimmen kann – siehe die nächsten Kapitel –, dessen Wert wir aber an dieser Stelle noch einmal numerisch mithilfe der Trapeznäherung (1.14) mit $n = 100$ bestimmen wollen:

$$I_{100}^* = \frac{\pi}{100} \left[0 + 0 + 2 \sum_{k=1}^{99} \sin^2 \left(\frac{2\pi k}{100} \right) \right] = 3.14159.$$

Dieser Wert gibt die ersten Stellen der Zahl π wieder, und das wäre auch das exakte Ergebnis. Daher haben wir

$$M(\sin^2) = \frac{1}{2\pi} \pi = \frac{1}{2}, \quad (1.20)$$

d. h., der *Mittelwert der Funktion* \sin^2 ist gleich $1/2$. Dieser Mittelwert ist in naturwissenschaftlichen oder technischen Anwendungen von Bedeutung. Der Mittelwert dieser periodischen Funktion ist übrigens auch auf den Intervallen $[0, \pi/2]$, $[0, \pi]$ gleich $1/2$.

Da die Funktion \sin^2 stetig ist, nimmt sie ihren Mittelwert auch als Funktionswert an: Es ist beispielsweise $\sin^2(\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)^2 = 1/2$. Siehe Abb. 1.6.

- **Antwort auf Zwischenfrage (6)** Gefragt war nach der Gleichung $f(\mu) \int_a^b g(x) dx = f(\mu)(b-a)$ für $g = 1$ und dem Grund für die Einschränkung von Satz 1.6 auf Funktionen $g \geq 0$.

Für $g = 1$ ist

$$f(\mu) \int_a^b g(x) dx = f(\mu) \int_a^b 1 dx.$$

Und das Integral über die Funktion 1 auf dem Intervall $[a, b]$ ist gleich $1 \cdot (b-a)$.

Der Beweis verwendet das Minimum m und das Maximum M von f . Es gilt somit $m \leq f \leq M$. Nur dann, wenn eine solche Ungleichung mit einer nichtnegativen Zahl multipliziert wird, bleiben die Ungleichheitszeichen ungeändert. Daher folgt $mg \leq fg \leq Mg$ nur für $g \geq 0$.

Das Wichtigste in Kürze

- Eine **Treppenfunktion** ist eine stückweise konstante Funktion. Das **Integral einer Treppenfunktion** ergibt sich als Summe der Rechteckflächen, die über den Teilintervallen ihrer Unterteilung mit den dort konstanten Funktionswerten entstehen.
- Das **Riemann-Integral** einer gewöhnlichen Funktion erhält man, indem man die Funktion beliebig genau durch Treppenfunktionen annähert und den damit verbundenen Grenzwert des Integrals dieser Treppenfunktionen betrachtet.

- Die Integrierbarkeit stellt keine besonderen Anforderungen an eine Funktion: Alle „normalen“ beschränkten Funktionen sind integrierbar.
- Die Definition des Integrals einer Funktion mittels Annäherung durch Treppenfunktionen erlaubt unmittelbar seine **näherungsweise numerische Berechnung**. Dazu wählt man äquidistant unterteilte Treppenfunktionen, die auf jedem Teilintervall in mindestens einem Punkt mit der Funktion übereinstimmen. Besonders gute Ergebnisse erzielt man mit der **Trapeznäherung**.
- Der **integrale Mittelwert** einer Funktion auf einem vorgegebenen Intervall gibt den mittleren Wert der Funktion auf diesem Intervall wieder. ◀

Und was bedeuten die Formeln?

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad \varphi|_{]x_{k-1}, x_k[} = c_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\int_a^b \varphi(x) \, dx := \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1}),$$

$$\int_{a*}^b f(x) \, dx := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) \, dx \mid \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f \right\},$$

$$\int_{a*}^b f(x) \, dx = \int_a^{b*} f(x) \, dx =: \int_a^b f(x) \, dx,$$

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) \, dx \leq \varepsilon,$$

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx,$$

$$\int_a^a f(x) \, dx := 0, \quad \int_a^b f(x) \, dx := - \int_b^a f(x) \, dx \quad \text{falls } b < a,$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b f(\xi) \, d\xi = \dots,$$

$$x_k := a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}),$$

$$\varphi^*|_{]x_{k-1}, x_k[} := \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$I_n^* = \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \right],$$

$$F_{100}^* = \frac{\pi}{400} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{99} \cos\left(\frac{k\pi}{200}\right) \right] = 0.99998,$$

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) \, dx = c_1 \int_a^b f(x) \, dx + c_2 \int_a^b g(x) \, dx,$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\mu)(b-a), \quad M(f) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx, \quad M(\sin^2) = 1/2.$$

Übungsaufgaben

A1.1 Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe jeweils deine Antwort.

- (I) Eine Treppenfunktion $\varphi \in T[a, b]$ ist eine stetige Funktion.
- (II) Das Integral über eine Treppenfunktion ergibt sich als Summe endlich vieler Rechteckflächen und ist daher stets endlich.
- (III) Positive Treppenfunktionen besitzen stets ein positives Integral.
- (IV) Das Integral einer Treppenfunktion kann nur dann gleich 0 sein, wenn die Treppenfunktion selbst 0 ist.

A1.2 Könnte man in der Definition des Unterintegrals,

$$\int_{a*}^b f(x) \, dx := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) \, dx \mid \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f \right\},$$

statt des Supremums auch einfach das Maximum verwenden, also „sup“ durch „max“ ersetzen?

A1.3 Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die stetig ist, ist integrierbar. Ist sie dann auch differenzierbar? Folgt somit aus der Integrierbarkeit die Differenzierbarkeit? Und umgekehrt: Folgt aus Differenzierbarkeit die Integrierbarkeit?

A1.4 Berechne mithilfe eines Taschenrechners die Fläche unter dem Sinusbogen, d. h. das Integral

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx,$$

näherungsweise durch die folgende Treppenfunktion: Nimm 10 äquidistante Unterteilungen des Integrationsintervalls vor durch

$$x_k := \frac{k\pi}{10} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, \dots, 10$$

und definiere die Treppenfunktion durch

$$\varphi(x) := \sin x_{k-1} \quad \text{für } x \in]x_{k-1}, x_k[, k = 1, 2, \dots, 10.$$

Vergleiche das Ergebnis der Approximation mit dem exakten Wert 2 des Integrals.

A1.5 Der Wert des Integrals $I_1 = \int_0^b f(x) dx$ einer integrierbaren Funktion $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ werde mit der Trapezregel und n Unterteilungen näherungsweise ermittelt. Dabei liege ein Fehler Δ_1 vor. Stimmt nun die folgende Aussage: Berechnet man das Integral $I_2 = \int_0^{2b} f(x) dx$ mit $2n$ Unterteilungen, so ist der hierbei gemachte Fehler $\Delta_2 \geq \Delta_1$.

A1.6 Für $a > 0$ betrachten wir integrierbare Funktionen $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$. Begründe, dass für eine *achsensymmetrische* Funktion f gilt

$$\int_0^a f(x) dx = - \int_0^{-a} f(x) dx,$$

während eine *punktsymmetrische* Funktion f die Gleichung

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^{-a} f(x) dx$$

erfüllt.

A1.7 Ermittle die integralen Mittelwerte der Funktionen \sin^3 und \sin^4 auf dem Intervall von 0 bis 2π . Werte die auftretenden Integrale nötigenfalls mithilfe der Trapezregel und $n = 100$ Unterteilungen aus. Lassen sich die exakten Mittelwerte erraten?

Nachdem wir das Integral als Fläche kennengelernt haben, die der Graph einer Funktion mit der Rechtsachse einschließt, werden wir nun sehen, dass die Integration in gewisser Weise die *Umkehrung der Differenziation* ist: Das sogenannte unbestimmte Integral entspricht einer *Stammfunktion*, deren Ableitung dem Integranden entspricht. Mit bekannter Stammfunktion ergibt sich dann eine einfache Möglichkeit zur exakten Berechnung von Integralen.

Darüber hinaus wollen wir den Integralbegriff so erweitern, dass er in bestimmten Fällen auf offene Intervalle und nicht beschränkte Funktionen ausgedehnt werden kann.

Wozu dieses Kapitel im Einzelnen

- „Die Integration ist die Umkehrung der Differenziation.“ Da man eine Fläche nicht ableiten kann, müssen wir uns ansehen, was das eigentlich bedeuten soll. Dabei werden wir insbesondere den Begriff der Stammfunktion kennenlernen.
- Viele Integrale können leicht exakt ausgerechnet werden. Dies erlaubt der „Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung“. Wir wollen sehen, was sich hinter dieser gewichtigen Bezeichnung verbirgt.
- Wenn man differenzieren kann, kann man auch integrieren. Wir nutzen das zu einer ersten einfachen Integraltafel.
- Eine unbeschränkte Fläche kann endlich sein. Wir wollen uns ansehen, was das in Bezug auf Integrale heißt. Und sagen „uneigentlich“ dazu ;-)
- Schließlich wollen wir verstehen, was es mit der Vertauschung von Integration und Limesbildung auf sich hat. Und können dann die Exponentialfunktion zu Fuß integrieren.

2.1 Unbestimmtes Integral und Stammfunktion

Bisher betrachteten wir Integrale immer über ein festes, abgeschlossenes Intervall $[a, b]$. Ein solches *bestimmtes* Integral ist eine Zahl.

Jetzt wollen wir eine Integrationsgrenze als variabel auffassen. Dadurch erhält man bei der Integration einer Funktion f eine neue Funktion F , deren Wert von der variablen Integralgrenze abhängt und die man das *unbestimmte Integral* nennt. Für sie gilt der folgende Satz, wobei die Menge $I \subseteq \mathbb{R}$ hier und im Folgenden stets ein nichttriviales Intervall sei:

Satz 2.1 *Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in I$. Für $x \in I$ setzt man*

$$F(x) := \int_a^x f(t) \, dt \quad (\text{unbestimmtes Integral}).$$

Dann ist die Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $F' = f$.

Lesehilfe zum Satz

Ein Integral ist auch über nicht stetige Funktionen möglich. In Satz 2.1 werden allerdings stetige Integranden vorausgesetzt, weil nur dann das unbestimmte Integral differenzierbar ist.

Die Ableitung F' ist die „Änderungsrate“ der Flächenfunktion F mit wachsendem x . Und sie ist gleich f , also gleich der Höhe der Fläche am Punkt x . Die Aussage $F' = f$ ist daher geometrisch einleuchtend :-)

Beweis Wir bilden den Differenzenquotienten der Funktion F : Für $h \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) \, dt + \int_x^a f(t) \, dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt, \end{aligned}$$

siehe Definition 1.5 und Satz 1.4. Da f stetig ist, gibt es nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung, Satz 1.6, ein μ_h zwischen x und $x+h$ so, dass gilt

$$\int_x^{x+h} f(t) \, dt = f(\mu_h)h.$$

Für $h \rightarrow 0$ strebt μ_h gegen x , d. h., $\lim_{h \rightarrow 0} \mu_h = x$. Zur Berechnung von F' bilden wir nun den Grenzwert des obigen Differenzenquotienten:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} h f(\mu_h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(\mu_h) \stackrel{f \text{ stetig}}{=} f(x). \quad \bullet$$

Lesehilfe zum Beweis

Es gibt ein „ μ_h zwischen x und $x + h$ “ bedeutet $\mu_h \in [x, x + h]$ für $h > 0$ und $\mu_h \in [x + h, x]$ für $h < 0$. Für $h \rightarrow 0$ laufen die Intervalle auf den Punkt x zusammen und daher ist $\lim_{h \rightarrow 0} \mu_h = x$.

Für stetige Funktionen gilt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Daher ist $\lim_{h \rightarrow 0} f(\mu_h) = f(x)$.

Satz 2.1 drückt aus, in welchem Sinn die Integration die Umkehrung der Differenziation ist: Integriert man f unbestimmt, so erhält man eine Funktion F . Differenziert man nun F , so erhält man wieder f . Funktionen F , die diese Eigenschaft haben, nennt man *Stammfunktionen*:

Definition 2.1 Eine differenzierbare Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, falls gilt $F' = f$.

Nach Satz 2.1 ist also das unbestimmte Integral eine Stammfunktion des Integranden. Das bleibt übrigens auch dann richtig, wenn sich das unbestimmte Integral

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (2.1)$$

nicht „berechnen“ lässt, d. h., wenn es nicht durch eine elementare Funktion ausgedrückt werden kann und in dieser Integralform stehen bleiben muss.

Mit einer Stammfunktion F ist offenbar auch jede Funktion $F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktion zu f , denn es ist ja $(F + c)' = F'$. Umgekehrt können sich zwei Stammfunktionen F und G auch nur höchstens durch eine additive Konstante voneinander unterscheiden: Aus $F' = G'$ folgt $F' - G' = (F - G)' = 0$, also ist $F - G$ konstant.

► **Zwischenfrage (1)** Ergibt eine unterschiedliche Wahl von a in Satz 2.1 bzw. in (2.1) unterschiedliche Stammfunktionen?

Beispiele

(1) Die Parabel $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, besitzt die Stammfunktion F_n mit $F_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, denn es gilt

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \frac{1}{n+1} (n+1) x^{n+1-1} = x^n. \quad (2.2)$$

So hat beispielsweise x^2 die Stammfunktion $x^3/3$; aber auch $x^3/3 - 17$ ist eine Stammfunktion von x^2 .

(2) Die Funktion \cos besitzt die Stammfunktion \sin , denn es ist $\sin' = \cos$.

2.2 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Wir kommen nun zum Zusammenhang zwischen bestimmten Integralen und Stammfunktionen und damit zum *Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung*:

Satz 2.2 Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f . Dann gilt für alle $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Beweis Für $x \in I$ setzen wir $F_a(x) := \int_a^x f(t) \, dt$. Dieses unbestimmte Integral F_a ist eine Stammfunktion von f . Ist nun F eine weitere Stammfunktion von f , so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F - F_a = c$. Deshalb ist

$$F(b) - F(a) = F_a(b) - F_a(a) \stackrel{F_a(a)=0}{=} F_a(b) = \int_a^b f(x) \, dx. \quad \bullet$$

Lesehilfe zum Beweis

Es ist $F(b) - F(a) = F_a(b) - F_a(a)$, weil sich die Stammfunktionen nur um eine Konstante c unterscheiden können, die sich in der Differenz aufhebt. Und $F_a(a)$ ist nichts anderes als $\int_a^a f(x) \, dx$ und damit gleich 0.

Das bestimmte Integral einer *stetigen* Funktion kann also berechnet werden, wenn man eine Stammfunktion des Integranden kennt. Die Aufgabe der Integration besteht damit im Auffinden einer Stammfunktion und aus jeder Differenzierungsregel ergibt sich eine Regel zur Integration. Wir werden aber sehen, dass das „Integrieren“, also das Rückwärtsanwenden von Differenzierungsregeln, i. Allg. schwieriger ist als das Differenzieren.

Unter Verwendung der Schreibweise

$$F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a) \tag{2.3}$$

kann das bestimmte Integral geschrieben werden als

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b. \quad (2.4)$$

Den Zusammenhang zwischen einer Funktion f und einer Stammfunktion F gibt man oft in Form eines unbestimmten Integrals wieder als

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c. \quad (2.5)$$

Gleichung (2.2) aus dem obigen Beispiel wird dann z. B. geschrieben als

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$$

wobei man den Zusatz „ $+c$ “ oft einfach weglässt.

- **Antwort auf Zwischenfrage (1)** Gefragt war, ob eine unterschiedliche Wahl von a in Satz 2.1 unterschiedliche Stammfunktionen ergibt.

Ja, bei anderer Wahl von a hat man es i. Allg. mit unterschiedlichen Funktionen zu tun. Betrachten wir neben

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

eine zweite Stammfunktion

$$F^*(x) = \int_{a^*}^x f(t) \, dt.$$

Nun ist aber

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt = \int_a^{a^*} f(t) \, dt + \int_{a^*}^x f(t) \, dt,$$

sodass sich die beiden Stammfunktion um das bestimmte Integral $\int_a^{a^*} f(t) \, dt$ und damit um eine Konstante unterscheiden.

Anders ausgedrückt: Mit anderer Wahl von a verschiebt man die untere Grenze des Integrals, dessen obere Grenze variabel ist. Dadurch hat man jeweils nur ein konstantes Flächenstück mehr oder weniger, also eine additive Konstante.

Beispiele

(1) Wir greifen noch einmal das Beispiel (2.2) auf. Allgemeiner gilt nämlich für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\int_a^b x^s dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} \Big|_a^b. \quad (2.6)$$

Für das Integrationsintervall $[a, b]$ sind dabei folgende Einschränkungen zu beachten: Für $s \in \mathbb{N}$ (Parabeln) sind $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Ist s eine ganze Zahl ≤ -2 , so darf 0 nicht im Integrationsintervall liegen. Ist s nicht ganz, so ist $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ vorzusetzen. Einige Beispiele:

$$\begin{aligned} \int x dx &= \frac{x^2}{2}, & \int_0^1 x dx &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}; \\ \int x^3 dx &= \frac{x^4}{4}, & \int_{-2}^{+2} x^3 dx &= \frac{x^4}{4} \Big|_{-2}^{+2} = 4 - 4 = 0; \\ \int \frac{1}{x^2} dx &= \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x}, & \int_1^{1000} \frac{1}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} \Big|_1^{1000} = -\frac{1}{1000} + 1 = 0.999; \\ \int \sqrt{x} dx &= \int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}, & \int_1^2 \sqrt{x} dx &= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_1^2 = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1). \end{aligned}$$

Lesehilfe

Für $s \in \mathbb{N}$ hat man die normalen Parabeln x^2, x^3 usw. Sie sind auf ganz \mathbb{R} „ohne Probleme“. Für $s = -2, -3$ usw. hat man es mit Hyperbeln zu tun. Sie besitzen bei 0 eine Polstelle und sind dort nicht definiert. Daher darf man nicht über die 0 hinweg integrieren. Für nicht ganze s schließlich bekommt man es mit Wurzeln zu tun. Sie sind zumindest teilweise nur für positive Argumente definiert. Daher hier pauschal die Einschränkung auf positive Integrationsintervalle.

Für $s = -1$ funktioniert die Formel (2.6) nicht. Siehe aber (2.7).

(2) Wie sich aus dem Satz zur Ableitung der Umkehrfunktion ergibt, ist $(\ln x)' = 1/x$ für $x > 0$. Daher gilt für $a, b > 0$

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_a^b. \quad (2.7)$$

Für $a, b < 0$ ist

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(-x) \Big|_a^b,$$

da $(\ln(-x))' = 1/x$ für $x < 0$. Beide Fälle lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad \text{für } x \neq 0, \text{ d. h. } 0 \text{ nicht im Integrationsintervall.} \quad (2.8)$$

Das ergibt beispielsweise

$$\int_1^{1000} \frac{1}{x} dx = (\ln x) \Big|_1^{1000} = \ln 1000 - \ln 1 = \ln 1000 \approx 6.91.$$

Lesehilfe Differenziation

Für eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Umkehrfunktion f^{-1} besagt der *Satz zur Ableitung der Umkehrfunktion*: Ist f in $a \in I$ differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$, so ist f^{-1} in $x := f(a)$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Nun ist der natürliche Logarithmus $\ln: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion \exp und es ist $\exp' = \exp$. Also haben wir

$$\ln' x = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

(3) Es ist

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \quad \int \sin x dx = -\cos x + c. \quad (2.9)$$

Damit erhält man $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(-1) - (-1) = 2$, d. h., die *Fläche unter einem Sinusbogen ist gleich zwei* (siehe auch das Beispiel (1.15) aus Kap. 1).

Ferner gilt beispielsweise

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c. \quad (2.10)$$

► **Zwischenfrage (2)** Warum ist $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$?

(4) Es ist

$$\int \exp(x) dx = \exp(x) + c. \quad (2.11)$$

(5) Aus den Differenzierungsregeln $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$ und $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ für $|x| < 1$ ergibt sich

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \quad (2.12)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \quad (|x| < 1). \quad (2.13)$$

Lesehilfe Differenziation

Die Ableitungen $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$ und $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ ergeben sich wie die Ableitung des Logarithmus aus dem Satz zur Ableitung der Umkehrfunktion. Diese Ableitungen weiß man vielleicht nicht unbedingt auswendig. Aber jetzt kennen wir sie wieder ;-)

Die vorstehenden Beispiele (1)–(5) geben einige Grundintegrale wieder, wie sie sich aus diversen Ableitungsregeln ablesen lassen. Sie stellen damit eine erste einfache *Integraltafel* dar. Eine solche Tafel kann von großem praktischen Nutzen sein, weil das Integrieren, also das Finden einer Stammfunktion, nicht immer einfach ist.

- **Antwort auf Zwischenfrage (2)** Gefragt war nach $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$. Diese Formel stimmt genau dann, wenn $\tan x$ eine Stammfunktion von $1/\cos^2 x$ ist, d. h., wenn gilt

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Und das ist richtig. Du kannst es mit der Quotientenregel leicht nachrechnen:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Fläche zwischen Funktionsgraphen

Manchmal stellt sich die Frage, wie groß die Fläche ist, die von den Graphen zweier stetiger Funktionen f , g eingeschlossen wird. Liegt die Funktion f oberhalb von g , gilt also $f \geq g$ auf dem Intervall $[a, b]$, so ist die auf diesem Intervall eingeschlossene Fläche gleich

$$F = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Etwas komplizierter wird es, wenn sich die Funktionsgraphen schneiden, also mal die eine Funktion oberhalb liegt und mal die andere. In diesem allgemeinen Fall ergibt sich die zwischen den Graphen zweier Funktionen f und g eingeschlossene Fläche F als

$$F = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \quad (2.14)$$

Zur Auswertung des Betrags in dieser Formel ist es in der Regel notwendig, die Schnittpunkte der beiden Graphen zu ermitteln und die einzelnen Teile der Gesamtfläche separat zu berechnen.

- **Zwischenfrage (3)** Stimmt es, dass man die Betragsstriche in (2.14) auch vor das Integral schreiben kann, dass also gilt

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right| ?$$

2.3 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir stets Integrale von beschränkten Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen betrachtet. Aber auch wenn das Integrationsintervall unendlich ist oder die zu integrierende Funktion nicht beschränkt ist, kann sich die Frage nach der eingeschlossenen Fläche stellen. Und tatsächlich kann der Integralbegriff durch Grenzwerte von Riemann-Integralen bzw. der zugehörigen Stammfunktionen unter bestimmten Bedingungen so erweitert werden, dass auch solche Fälle behandelt werden können. Man spricht dann von *uneigentlichen Integralen*.

2.3.1 Integrationsgrenze Unendlich

Wir sehen uns zunächst den Fall eines unendlichen Integrationsintervalls an:

Definition 2.2 Es sei $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem Intervall $[a, r]$ mit $a < r < \infty$ integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f(x) dx$ existiert, heißt das Integral $\int_a^\infty f(x) dx$ konvergent und man setzt

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f(x) dx.$$

Analog definiert man das Integral $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ für eine Funktion $f :]-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel

Wir untersuchen das Integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^v}$, $v \neq 1$: Die Funktion $x \mapsto 1/x^v$ ist stetig auf \mathbb{R}_+^* . Daher gilt für $r > 0$

$$\int_1^r \frac{dx}{x^v} = \int_1^r x^{-v} dx = \left. \frac{x^{1-v}}{1-v} \right|_1^r = \frac{1}{v-1} (1 - r^{1-v}). \quad (2.15)$$

Lesehilfe

Für $v > 0$ haben wir es hier mit Hyperbeln zu tun. Man denkt sofort an $1/x$ oder $1/x^2$, aber auch $1/x^{1/2}$ ist eine Hyperbel. Ihre Graphen sehen ähnlich aus und nähern sich im ersten Quadranten asymptotisch der x - und der y -Achse an.

Für $v > 1$ ist $1 - v < 0$ und daher $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1-v} = 0$. Daraus folgt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^v} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r \frac{dx}{x^v} = \frac{1}{v-1} \quad \text{für } v > 1. \quad (2.16)$$

Das Integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^v}$ konvergiert also für $v > 1$. Für $v = 2$ haben wir beispielsweise

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1, \quad (2.17)$$

siehe Abb. 2.1. Diese Tatsache ist durchaus bemerkenswert: Die Fläche, die dem Integral $\int_1^\infty dx/x^2$ entspricht, ist unbegrenzt, sie geht auf der x -Achse bis ins Unendliche weiter. Allerdings wird sie dabei immer flacher und sie hat insgesamt den endlichen Flächeninhalt 1.

Umgekehrt halten wir fest: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^v}$ konvergiert nicht für $v \leq 1$. Für $v < 1$ ist $1 - v > 0$ und daher $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1-v} = \infty$. Und für $v = 1$ gilt

$$\int_1^r \frac{dx}{x} = \ln r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty.$$

Die von $1/x$ eingeschlossene Fläche sieht ähnlich aus wie bei $1/x^2$. Auch sie wird mit $x \rightarrow \infty$ immer flacher. Aber sie wird langsamer flacher als $1/x^2$ und führt zu einer unendlich großen Gesamtfläche, siehe Abb. 2.1.

► **Antwort auf Zwischenfrage (3)** Gefragt war, ob die Formel

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

stimmt.

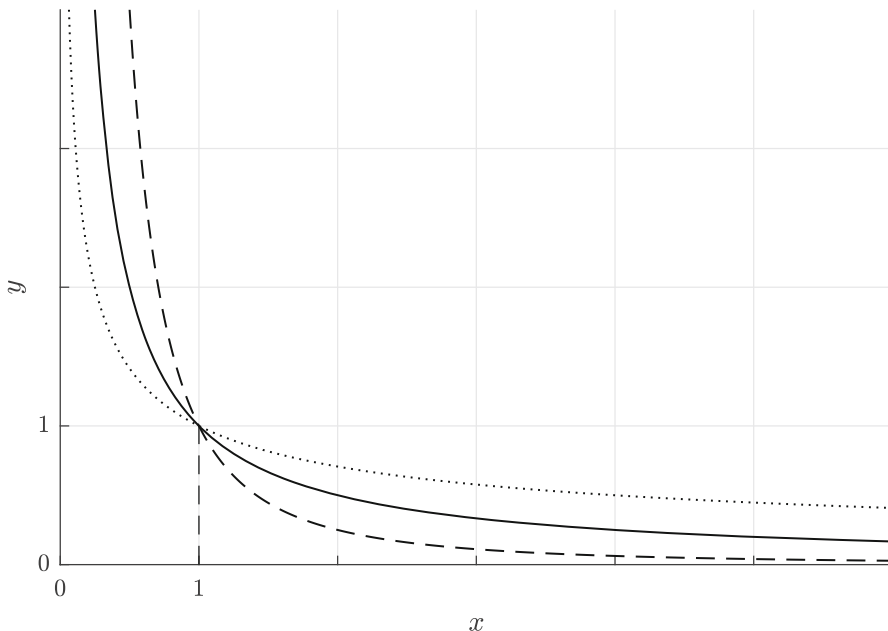


Abb. 2.1 Die Fläche, die der Graph der Hyperbel $y = 1/x^2$ (gestrichelt) zwischen 1 und ∞ mit der x -Achse einschließt, ist endlich und hat den Betrag 1. Das Flächenstück hingegen, das sie zwischen 0 und 1 einschließt, ist unendlich groß. Umgekehrt schließt die Hyperbel $y = 1/\sqrt{x}$ (gepunktet) zwischen 0 und 1 ein endliches Flächenstück mit dem Betrag 2 ein, während das Flächenstück von 1 bis ∞ unendlich groß ist. Zum Vergleich ebenso eingezeichnet ist die Hyperbel $y = 1/x$

Nein, diese Formel stimmt nicht. Bei $\left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|$ wird zunächst das Integral gebildet. Wenn sich die Graphen der Funktionen f und g im Intervall $]a, b[$ schneiden, liegt mal der eine Graph oberhalb und mal der andere. Die entsprechenden Flächenanteile haben dann unterschiedliche Vorzeichen und kompensieren sich teilweise gegenseitig.

Bei $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ hingegen werden die Flächen zwischen den Graphen stets positiv addiert.

2.3.2 Integrand an einer Integralgrenze nicht definiert

Wir betrachten nun Integrale, bei denen der Integrand an einer Integralgrenze nicht definiert ist und mit Annäherung an diese Grenze unbeschränkt wächst oder fällt, so wie es bei einer Polstelle auftritt:

Definition 2.3 Es sei $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem Teilintervall $[a + \varepsilon, b]$ mit $0 < \varepsilon < b - a$ integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$

existiert, heißt das Integral $\int_a^b f(x) dx$ konvergent und man setzt

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Analog definiert man das Integral $\int_a^b f(x) dx$, wenn die obere Grenze kritisch ist, d. h. für eine Funktion $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel

Wir sehen uns das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^v}$ an. Für $0 < \varepsilon < 1$ und $v \neq 1$ ist

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^v} = \frac{1}{1-v} (1 - \varepsilon^{1-v}). \quad (2.18)$$

Für $v < 1$ ist $1 - v > 0$ und damit $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{1-v} = 0$. Es ist also

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^v} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^v} = \frac{1}{1-v} \quad \text{für } v < 1. \quad (2.19)$$

Das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^v}$ konvergiert somit für $v < 1$. Für $v = 1/2$ etwa hat man

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{1-1/2} = 2. \quad (2.20)$$

Der Graph von $y \mapsto 1/\sqrt{x}$ verläuft für $x \searrow 0$ dichter an der y-Achse als der Graph von $y \mapsto 1/x$, siehe Abb. 2.1.

Andererseits konvergiert $\int_0^1 \frac{dx}{x^v}$ nicht für $v \geq 1$. Die „Grenze“ für die Konvergenz liegt wieder bei $v = 1$:

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 = -\ln \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \infty. \quad (2.21)$$

- **Zwischenfrage (4)** Stimmen die Aussagen, die für die uneigentlichen Integrale über $1/x^v$ gemacht wurden, auch für negative v ? Oder $v = 0$? Oder ist dann etwas grundsätzlich anders?

2.3.3 Integral an beiden Grenzen kritisch

Integrale, die an beiden Integrationsgrenzen kritisch sind, lassen sich aufgrund von Satz 1.4, d. h. durch Verwendung der Formel

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

leicht in die Summe zweier Integrale aufteilen: Es wird einfach an einer beliebigen Stelle c im Inneren des Integrationsintervalls „aufgeschnitten“. Dadurch entstehen zwei uneigentliche Integrale mit jeweils einer kritischen Grenze, auf die anschließend die Definitionen 2.2 und 2.3 angewendet werden können.

Beispiele

(1) Wie wir den obigen Beispielen entnehmen können, divergiert das Integral $\int_0^\infty \frac{dx}{x^v}$ für alle $v \in \mathbb{R}$. Für $v \geq 1$ entsteht bei 0 eine Divergenz und für $v \leq 1$ bei ∞ . Für $v = 1$ ist somit sowohl die Teilfläche bei 0 als auch die Fläche Richtung ∞ divergent.

(2) Wir berechnen das Integral $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, siehe Abb. 2.2. Es soll dazu an der Stelle 0 aufgeschnitten werden und wir verwenden (2.12):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s \frac{dx}{1+x^2} \\ &= -\lim_{r \rightarrow \infty} \arctan(-r) + \lim_{s \rightarrow \infty} \arctan(s) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi. \quad (2.22) \end{aligned}$$

Der Funktionsgraph $y = 1/(1+x^2)$ schließt also mit der x -Achse den endlichen Flächeninhalt π ein.

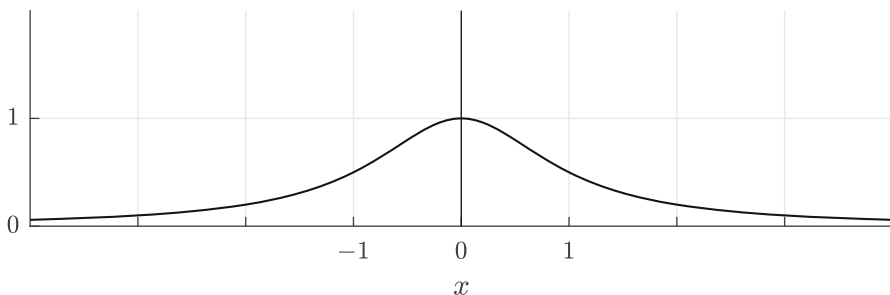


Abb. 2.2 Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/(1+x^2)$ schließt mit der x -Achse ein endliches Flächenstück vom Betrag π ein

Lesehilfe

Die Arcustangensfunktion ist die Umkehrung des zentralen Tangenzweigs, der zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ liegt. Daher lauten ihre Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Außerdem ist $\arctan 0 = 0$.

- **Antwort auf Zwischenfrage (4)** Gefragt war nach den uneigentlichen Integralen über $1/x^v$ für negative v oder $v = 0$.

Die getroffenen Aussagen stimmen auch für $v \leq 0$, sind dann aber von vornherein klar ;-)

Für $v = 0$ ist $1/x^v = 1/x^0 = 1$ und es ist offenbar

$$\int_1^{\infty} dx = \infty \quad \text{und} \quad \int_0^1 dx = 1.$$

Für $v < 0$ haben wir $1/x^v = x^{-v} = x^{|v|}$, also positive Exponenten und damit Wurzeln oder Parabeln. Für sie ist

$$\int_1^{\infty} x^{|v|} dx = \infty \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^{|v|} dx < 1,$$

wobei es sich bei $\int_0^1 x^{|v|} dx$ um ein „normales“ und kein uneigentliches Integral handelt.

2.4 Integration und Limesbildung

Schließlich wollen wir uns ansehen, wie sich die Integration im Zusammenhang mit Funktionenfolgen verhält. Wir betrachten Folgen stetiger Funktionen

$$f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.23)$$

die gegen eine Grenzfunktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergieren, es ist also

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (2.24)$$

für alle $x \in [a, b]$. Erfolgt diese Konvergenz nicht nur punktweise, sondern *gleichmäßig*, so ist darüber hinaus die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \text{ so, dass gilt } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \text{ und } n \geq N$$

erfüllt, siehe auch Abb. 4.2. Gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen erhalten die Stetigkeit und ihre Integration kann gleichermaßen vor oder nach der Limesbildung ausgeführt werden:

Satz 2.3 *Es seien $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, stetige Funktionen. Die Folge (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist auch die Funktion f stetig und es gilt*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx.$$

Beweis Stetigkeit von f : Es sei $x \in [a, b]$. Für die Stetigkeit von f in x ist zu zeigen, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, dass gilt $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in [a, b]$ mit $|x - z| < \delta$ („ ε - δ -Kriterium“ der Stetigkeit). Da die Folge (f_n) gleichmäßig konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass gilt

$$|f_N(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } z \in [a, b].$$

Da f_N in x stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, dass gilt

$$|f_N(x) - f_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } z \in [a, b] \text{ mit } |x - z| < \delta.$$

Daher gilt für alle $z \in D$ mit $|x - z| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(z)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(z) + f_N(z) - f(z)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(z)| + |f_N(z) - f(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Integration: f ist stetig und damit integrierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b f_n(x) \, dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x)) \, dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| \, dx \\ &\leq (b - a) \sup \left\{ |f(x) - f_n(x)| \mid x \in [a, b] \right\}. \end{aligned}$$

Nun ist die gleichmäßige Konvergenz gleichbedeutend mit

$$\sup \left\{ |f(x) - f_n(x)| \mid x \in [a, b] \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Der gesamte obige Ausdruck geht also für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 und das heißt

$$\int_a^b f(x) \, dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = 0. \quad \bullet$$

Lesehilfe zum Beweis

Im ersten Teil des Beweises werden die Definitionen von Stetigkeit und gleichmäßiger Konvergenz zusammen mit der Dreiecksungleichung verwendet.

Nun zum zweiten Teil: Die Bedingung der gleichmäßigen Konvergenz von f_n gegen f ,

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ so, dass gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in [a, b]$ und $n \geq N$,

bedeutet offenbar, dass das Supremum der Werte $|f_n(x) - f(x)|$ gegen 0 geht, da das $\varepsilon > 0$ beliebig klein gemacht werden kann.

Bei *gleichmäßiger* Konvergenz von $f_n \rightarrow f$ gilt also

$$\int_a^b dx \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b dx f_n(x),$$

gleichbedeutend mit einer *Vertauschung von Integration und Limesbildung*.

Reihen, also unendliche Summen, sind äquivalent zu Folgen. Die Aussage von Satz 2.3 gilt daher ebenso für die Integration gleichmäßig konvergenter Reihen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x). \quad (2.25)$$

Ihre Konvergenz ist gleichbedeutend mit der Konvergenz der Folge ihrer Partialsummen $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x)$. Erfolgt die Konvergenz $s_n \rightarrow f$ gleichmäßig, haben wir somit

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) &= \int_a^b dx \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b dx s_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b dx \sum_{k=0}^n a_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b dx a_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b dx a_k(x), \end{aligned} \quad (2.26)$$

d. h., *gleichmäßig konvergente Reihen dürfen gliedweise integriert werden*.

Lesehilfe

Die „Summenregel“ der Integration,

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

erlaubt die Vertauschung von Integration und Summenbildung bei zwei Summanden. Durch mehrfache Anwendung kann diese Regel auf *endlich* viele Summanden ausgeweitet werden. Das ist oben für die Partialsumme verwendet worden,

$$\int_a^b dx \sum_{k=0}^n a_k(x) = \sum_{k=0}^n \int_a^b dx a_k(x).$$

Diese Regel darf aber nicht etwa ohne Weiteres auch auf *unendliche* Summen übertragen werden. Allerdings haben wir gerade gesehen, dass dies zulässig ist, wenn die unendliche Summe gleichmäßig konvergiert.

Beispiele

(1) Wir machen uns anhand eines Beispiels klar, dass nur punktweise Konvergenz nicht ausreicht, um Integration und Limesbildung vertauschen zu dürfen: Wir betrachten die Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 2$, mit

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & \text{für } 0 \leq x \leq 1/n \\ 2n - n^2 x & \text{für } 1/n < x \leq 2/n \\ 0 & \text{für } 2/n < x \leq 1. \end{cases} \quad (2.27)$$

Die Graphen dieser stetigen Funktionen bilden ein immer schmäler und höher werdendes gleichschenkliges Dreieck auf dem Intervall $[0, 2/n]$, das den konstanten Flächeninhalt 1 einschließt, siehe Abb. 2.3.

Die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion. Die Konvergenz ist allerdings *nicht gleichmäßig*, denn für kein $n \geq 2$ liegen die Graphen der f_n beispielsweise vollständig in dem Bereich ± 1 um 0 (entsprechend der Wahl von $\varepsilon = 1$ in der Bedingung für gleichmäßige Konvergenz).

Lesehilfe

Es ist vielleicht überraschend, dass die Funktionen f_n mit den immer höher werdenden Zacken gegen die Nullfunktion konvergieren. Aber die Zacken werden gleichzeitig immer schmäler. An jedem Argumentwert $x > 0$ sind die Zacken daher irgendwann, d. h. ab hinreichend großen n , vollständig „vorbei-

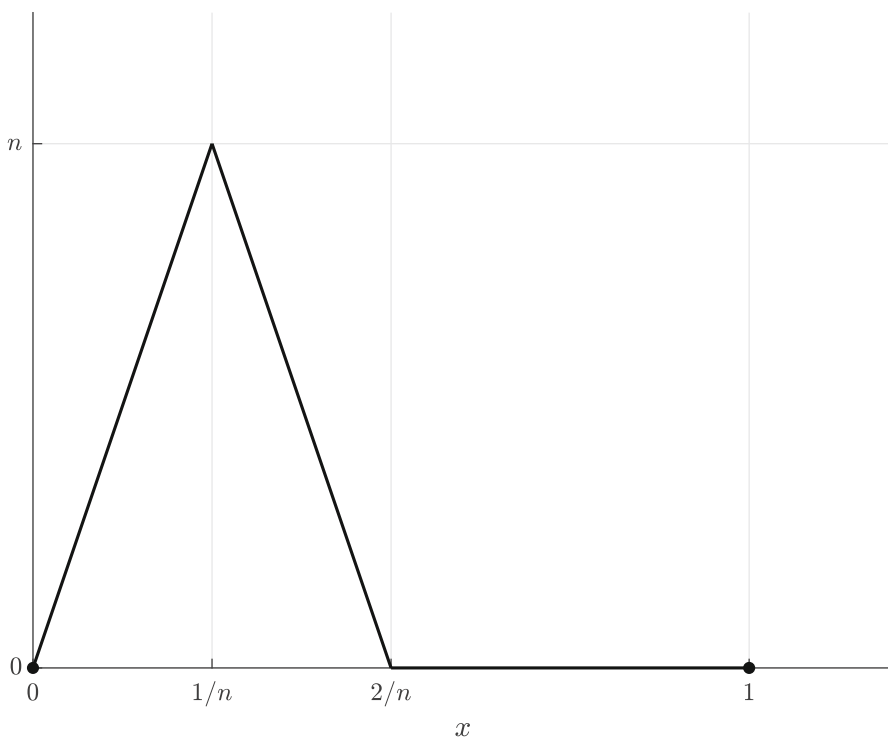


Abb. 2.3 Die Graphen der Funktionen f_n aus (2.27) bilden auf dem Intervall $[0, 2/n]$ ein Dreieck, das mit wachsendem n höher und schmaler wird, dabei aber immer den Flächeninhalt 1 einschließt. Die Funktionen sind stetig und sie besitzen den Maximalwert n . Für $n \rightarrow \infty$ konvergieren die Funktionen punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Grenzfunktion 0

gelaufen“ und der Funktionswert $f_n(x)$ bleibt dann 0. Die stetigen Funktionen f_n konvergieren daher punktweise gegen die stetige Funktion 0. Aber diese Konvergenz erfolgt nicht gleichmäßig.

Betrachten wir nun die Integrale über die Funktionen, so sehen wir: Es ist

$$\int_0^1 f_n(x) \, dx = 1 \quad \forall n \geq 2, \quad \text{d. h.,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = 1,$$

im Gegensatz zu

$$\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) \, dx = \int_0^1 0 \, dx = 0.$$

Integration und Limesbildung können hier also nicht vertauscht werden.

(2) Die Exponentialreihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ ist eine Potenzreihe, die für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Sie konvergiert daher auf jedem Intervall $[a, b]$ gleichmäßig, sodass Integration und Limesbildung vertauscht werden dürfen (*). Es ist daher

$$\begin{aligned} \int_a^b \exp(x) \, dx &= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) dx \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \frac{x^n}{n!} \, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_a^b = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Big|_a^b \stackrel{(**)}{=} \exp(x) \Big|_a^b. \end{aligned}$$

In (**) wurde verwendet, dass sich $\exp(x)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k!$ nur durch den konstanten Summanden für $k = 0$ unterscheiden und dieser durch die Integralgrenzen keine Rolle spielt. Wir haben also erneut gefunden: *exp ist eine Stammfunktion von exp.*

Lesehilfe Potenzreihen

Potenzreihen, also Reihen von Potenzen, besitzen die Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad c_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Zahl x_0 nennt man den *Entwicklungspunkt* der Reihe. Potenzreihen besitzen besonders gute Konvergenzeigenschaften: Im Entwicklungspunkt ist die Potenzreihe trivialerweise immer konvergent mit $f(x_0) = c_0$. Findet man darüber hinaus eine Stelle $x^* \neq a$, in der die Potenzreihe konvergiert, so konvergiert die Reihe für ein beliebiges r mit $0 < r < |x^* - a|$ auf dem Intervall $[x_0 - r, x_0 + r]$ gleichmäßig.

Die Exponentialreihe ist demnach eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und $c_n = 1/n!$. Da sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, ist sie auf jedem Intervall $[-r, r]$ mit beliebigem $r > 0$ gleichmäßig konvergent und damit erst recht auf jedem darin enthaltenen Teilintervall, also auf jedem beliebigen Intervall $[a, b]$.

Das Wichtigste in Kürze

- Beim **unbestimmten Integral** handelt es sich um ein Integral, bei dem eine Grenze variabel ist. Die Ableitung dieser Integralfunktion ergibt den Integranden.
- Für eine **Stammfunktion** F zu einer Funktion f gilt $F' = f$. Sie ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.
- Der **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung** besagt, dass der Wert eines bestimmten Integrals mit einer Stammfunktion auf einfache Weise

berechnet werden kann. Die **Aufgabe der Integration** besteht daher in der Regel in der **Bestimmung einer Stammfunktion**.

- Jede **Differenzierungsregel ergibt durch Umkehrung eine Integrationsregel**.
- **Uneigentliche Integrale** sind Integrale, die eine Integrationsgrenze Unendlich haben oder die an einer Integrationsgrenze nicht definiert sind. Sie können ggf. durch eine Grenzwertbetrachtung für die Integralgrenzen bestimmt werden.
- Bei gleichmäßiger Konvergenz einer Funktionenfolge dürfen **Integration und Limesbildung** vertauscht werden. ◀

Und was bedeuten die Formeln?

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt, \quad F' = f, \quad (F + c)' = F',$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a),$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad \int_1^{1000} \frac{1}{x^2} dx = 0.999,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad (x \neq 0), \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c,$$

$$\int \exp(x) dx = \exp(x) + c, \quad F = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx,$$

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f(x) dx, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1,$$

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2,$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi,$$

$$\int_a^b dx \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b dx f_n(x), \quad \int_a^b dx \sum_{k=0}^\infty a_k(x) = \sum_{k=0}^\infty \int_a^b dx a_k(x).$$

Übungsaufgaben

A2.1 Berechne die folgenden unbestimmten Integrale, d. h., gib jeweils eine Stammfunktion des Integranden an:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int x^2 \, dx, & F_2(x) &= \int (x-3)^2 \, dx, \\ F_3(x) &= \int \frac{dx}{\pi e^2}, & F_4(x) &= \int \sin(x+2) \, dx, \\ F_5(x) &= \int e^{3x} \, dx, & F_6(x) &= \int \pi^2 \sqrt{8x} \, dx, \\ F_7(x) &= \int \left(\frac{x}{3}\right)^{-3} \, dx, & F_8(x) &= \int \left(\frac{1}{x^2 - 2x - 1}\right)^{-2} \, dx. \end{aligned}$$

A2.2 Welchen Flächeninhalt F_i schließen die Graphen der Funktionen f_i im angegebenen Intervall jeweils mit der x -Achse ein?

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 \quad \text{für } x \in [0, 5], & f_2(x) &= x^2 \quad \text{für } x \in [-2, +2], \\ f_3(x) &= \sqrt{x} \quad \text{für } x \in [0, 3], & f_4(x) &= \sqrt[3]{x} \quad \text{für } x \in [-8, +8], \\ f_5(x) &= \frac{1}{x^2} + x \quad \text{für } x \in [1, 10], & f_6(x) &= \cos x \quad \text{für } x \in \left[0, \frac{13\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

A2.3 Jemand sagt: Für eine nichtnegative, integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b |f(x)| \, dx = \left| \int_a^b f(x) \, dx \right|$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Hat er recht?

A2.4 Wie groß ist die Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f: x \mapsto x^2 + x + 1$ und $g: x \mapsto 3x + 4$ eingeschlossen wird? Funktioniert der Rechenweg für jede Kombination aus Parabel zweiten Grads und linearer Funktion auf dieselbe Weise? Wie sieht es bei einer Parabel dritten Grads und linearer Funktion aus?

A2.5 Ein 1 km langer Kanal mit einer Breite von 8 m und einer maximalen Tiefe von 2 m besitze einen parabelförmigen Boden (im Querschnitt). Wie viel Wasser enthält er maximal? Wie viel Wasser enthält er, wenn er nur bis zur halben Höhe gefüllt ist?

A2.6 a) Wie groß ist die Fläche, die der Graph der Funktion $f: x \mapsto 1/\sqrt[3]{x^4}$ von 1 aufwärts mit der x -Achse einschließt?

b) Begründe, dass das Integral $\int_0^\infty e^{-ax} \, dx$ für alle $a > 0$ konvergent ist. Was passiert für $a = 0$ und $a < 0$?

Integration zusammengesetzter Funktionen

3

Bei einfachen Funktionen kann eine Stammfunktion praktisch „erraten“ werden, indem man die Differenziationsregel umkehrt. Bei zusammengesetzten Funktionen, also etwa bei Verkettungen oder Produkten von Grundfunktionen, ist das nicht mehr ohne Weiteres möglich. Hier helfen Integrationsregeln weiter, die wir uns nun ansehen wollen.

Bei den Integrationsregeln handelt es sich um die Umkehrungen der Differenzierungsregeln. Sie funktionieren aber doch ganz anders. Der Rechenaufwand ist i. Allg. höher und insbesondere gelingt die Integration im Unterschied zur Differenziation nicht bei jeder beliebig hingeschriebenen Funktion.

Darüber hinaus gibt es Funktionen, die keine elementare Stammfunktion besitzen. Für sie kann die Stammfunktion grundsätzlich nur in Form eines unbestimmten Integrals angegeben werden. Wir werden uns die Normalverteilung als ein wichtiges Beispiel einer solchen Funktion genauer ansehen.

Wozu dieses Kapitel im Einzelnen

- Integrale sind linear. Das wissen wir schon und wollen es jetzt zum Integrieren verwenden.
- Die Umkehrung der Kettenregel heißt Substitutionsregel. Hier ist der Name Programm. Wir wollen sehen, was das heißt.
- Manche Integrale sind erstaunlich einfach, andere überraschend schwierig. Anhand etlicher Beispiele werden wir sehen, was damit gemeint ist.
- Die Umkehrung der Produktregel heißt partielle Integration. Auch hier müssen wir uns ansehen, wie sie funktioniert.
- Die Normalverteilung ist die Grundlage von Messprozessen. Ihre Analyse erfordert Integrationen, die allerdings nur numerisch möglich sind. So werden wir die Zahl 68.3 % berechnen können.

3.1 Linearität

Wie wir wissen, ist das Integral *linear*, siehe Satz 1.5, d. h., für beliebige auf dem Intervall $[a, b]$ integrierbare Funktionen f, g und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx. \quad (3.1)$$

Auch die Ableitung ist linear. Sind f und g stetig und besitzen sie die Stammfunktionen F bzw. G , so ist (3.1) daher gleichbedeutend mit

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = (c_1 F(x) + c_2 G(x)) \Big|_a^b. \quad (3.2)$$

- **Zwischenfrage (1)** Inwiefern ist für (3.2) relevant, dass die Ableitung linear ist? Und warum müssen die Funktionen f und g jetzt stetig sein, wo doch (3.1) ohne diese Forderung auskommt?

Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (3x - 2 \sin x) dx &= 3 \int_0^\pi x dx - 2 \int_0^\pi \sin x dx = 3 \frac{x^2}{2} \Big|_0^\pi + 2 \cos x \Big|_0^\pi \\ &= \frac{3\pi^2}{2} - 0 + 2(-1 - 1) = \frac{3\pi^2}{2} - 4 \end{aligned}$$

bzw. in Form des unbestimmten Integrals

$$\int (3x - 2 \sin x) dx = \frac{3}{2} x^2 + 2 \cos x + c.$$

3.2 Substitutionsregel

Bei der *Substitutionsregel* der Integration handelt es sich um die *Umkehrung der Kettenregel der Differenziation*. Sie ist daher oftmals hilfreich, wenn verkettete Funktionen integriert werden sollen. Die Menge $I \subseteq \mathbb{R}$ sei hier und im Folgenden weiterhin ein nichttriviales Intervall. Die Substitutionsregel lässt sich wie folgt ausdrücken:

Satz 3.1 Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $g([a, b]) \subseteq I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt.$$

Lesehilfe

Die Grenzen an einem Integral beziehen sich immer auf die Integrationsvariable, d. h. auf die Variable im Differenzial dx , dt usw. So betreffen die Grenzen am Integral $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$ die Variable x und die Grenzen bei $\int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$ die Variable t .

Beweis Es sei $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f , d. h., es gelte $F' = f$. Für die Ableitung der Funktion $F \circ g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ergibt sich dann nach der Kettenregel

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Daraus folgt

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = (F \circ g)(x) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt. \quad \bullet$$

Lesehilfe Differenziation

Zur Erinnerung noch einmal die *Kettenregel der Differenziation*: Für differenzierbare Funktionen f und g gilt

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Dies kann man als „äußere Ableitung mal innere Ableitung“ beschreiben. Die Ableitung der äußeren Funktion f ist dabei an der Stelle $g(x)$ zu betrachten und die Ableitung der inneren Funktion g an der Stelle x .

Bei der Substitutionsregel wird eine Integrationsvariable durch eine andere *substituiert*, d. h. ersetzt: Schreibt man

$$\frac{dg(x)}{dx} = g'(x), \quad \text{also} \quad dg(x) = g'(x) dx, \quad (3.3)$$

so nimmt die Substitutionsregel die Form

$$\int_{x=a}^b f(g(x))dg(x) = \int_{t=g(a)}^{g(b)} f(t) dt \quad (3.4)$$

an. Es wird demnach $g(x)$ durch t ersetzt, wobei die Integrationsgrenzen für x in die entsprechenden Grenzen für t zu überführen sind.

- **Antwort auf Zwischenfrage (1)** Gefragt war, inwiefern für (3.2) die Linearität der Ableitung und die Stetigkeit von f und g relevant sind.

Gleichung (3.1) ist eine Aussage für Integrale. Integrale benötigen keine stetigen Integranden. Soll das Integral jedoch mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung anhand einer Stammfunktion ermittelt werden – und nicht beispielsweise numerisch –, so muss der Integrand stetig sein, siehe Satz 2.2.

Nun stimmt (3.2), wenn gilt

$$(c_1 F(x) + c_2 G(x))' = c_1 f(x) + c_2 g(x).$$

Aus der Linearität der Ableitung folgt

$$(c_1 F(x) + c_2 G(x))' = c_1 F'(x) + c_2 G'(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x),$$

da F, G Stammfunktionen von f, g sind.

Anwendung der Regel

Die Substitutionsregel kann durchaus in der Form, wie sie in Satz 3.1 angegeben ist, zur Berechnung von Integralen verwendet werden. So ist z. B. für $k \neq 0$

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin(kx) dx &= \int_a^b \sin(kx) \underbrace{\frac{1}{k}}_{g(x)} \underbrace{k}_{g'(x)} dx \\ &= \frac{1}{k} \int_{ka}^{kb} \sin t dt = \frac{1}{k} (-\cos t) \Big|_{ka}^{kb} = \frac{1}{k} (\cos(ka) - \cos(kb)). \quad (3.5) \end{aligned}$$

In den meisten Fällen erfolgt die Anwendung der Regel jedoch auf einfachere und übersichtlichere Art, wenn man die Substitution mithilfe von Gleichungen des Typs (3.3) vornimmt: Zur Berechnung des Integrals

$$I = \int \sin(kx) dx$$

wählen wir die Substitution $t = kx$. Wir ersetzen also den Ausdruck kx durch die neue Variable t (in der obigen Schreibweise ist $t = g(x)$). Nun müssen wir auch das Differenzial ersetzen. Dazu verwenden wir:

$$\frac{dt}{dx} = k, \quad \text{also} \quad dx = \frac{1}{k} dt.$$

Eingesetzt in das Integral ergibt dies

$$I = \int \sin t \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k} \int \sin t dt = \frac{1}{k} (-\cos t) \stackrel{t=kx}{=} -\frac{1}{k} \cos(kx).$$

Lesehilfe

Führt man bei einem Integral eine Substitution durch, so ändern sich auch die Integralgrenzen: Sie müssen nun an die neue Variable angepasst werden. Führt man aber im letzten Schritt eine Rücksubstitution durch, verwendet man also wieder die ursprüngliche Variable, so sind auch die Grenzen wieder wie anfangs. In dem Fall muss man sich um das Umrechnen der Grenzen keine Gedanken machen, man lässt sie zwischendurch einfach weg und schreibt am Ende die alten Grenzen an das Integral ;-)

Also in obigem Beispiel:

$$\int_a^b \sin(kx) dx = \int \sin t \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k} (-\cos t) = -\frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_a^b.$$

Aber Vorsicht: Zwischendurch wären die Grenzen a und b falsch. Sie werden erst wieder richtig, wenn zur ursprünglichen Variable x zurückgekehrt wird.

Die Anwendung der Substitutionsregel geschieht also in folgenden Schritten:

- (1) Zur Berechnung eines Integrals $\int f(x) dx$ wird eine geeignete Substitution $g(x) =: t$ gewählt, es wird also ein Ausdruck mit x , der im Integral auftaucht, durch t ersetzt. Eine solche „geeignete“ Wahl ist dabei nicht immer so offensichtlich wie im obigen, sehr einfachen Beispiel. Erlaubt ist grundsätzlich jede Substitution¹; ob sie hilfreich ist, zeigt sich nach Schritt (2).
- (2) Nachdem x bzw. $g(x)$ – soweit möglich – durch die neue Variable t ersetzt wurde, muss auch dx durch dt ersetzt werden, indem die Ableitung dt/dx gebildet wird. Es sollte jetzt *insgesamt ein Integral in t entstehen*, das einfacher auszuwerten ist als das ursprüngliche Integral in x . Dabei ist zu beachten: Sollte nach der vollständigen Ersetzung neben t *auch noch x* im Integral auftauchen, so kann es nicht berechnet werden. Keinesfalls dürfen noch auftretende x als Konstante behandelt werden!
- (3) Die Integration in t wird ausgeführt und im Ergebnis wird t schließlich wieder durch $g(x)$ ersetzt.

Als weiteres Beispiel berechnen wir das Integral $\int x e^{ax^2} dx$ mit einem beliebigen Parameter $a \neq 0$: Als Substitution liegt nahe $t = ax^2$. Mit $\frac{dt}{dx} = 2ax$, d. h. $dx = \frac{dt}{2ax}$, führt dies auf

$$\int x e^{ax^2} dx = \int x e^t \frac{dt}{2ax} = \frac{1}{2a} \int e^t dt = \frac{1}{2a} e^t = \frac{1}{2a} e^{ax^2}. \quad (3.6)$$

¹ Es ist auch möglich, x zu ersetzen durch $x = \tilde{g}(t)$. Auch dann kann das Differenzial wie in Schritt (2) ersetzt werden, jetzt mit der Ableitung $\frac{dx}{dt}$.

Die Substitution hat hier also aufgrund des zusätzlichen Faktors x im Integranden „funktioniert“.

Lesehilfe

Wir gehen das Beispiel (3.6) noch einmal langsam durch: Die Ersetzung $ax^2 = t$ führt zunächst auf

$$\int x e^{ax^2} dx = \int x e^t dx.$$

Hier sieht man noch nicht, ob die Ersetzung „funktioniert“. Es muss erst noch das Differenzial ersetzt werden:

$$\int x e^t \frac{dt}{2ax}.$$

Das Differenzial bringt einen Faktor $1/x$ mit, der sich mit dem x vor e^t kürzt. Daher entsteht das Integral

$$\frac{1}{2a} \int e^t dt,$$

das nur noch die Variable t enthält und leicht berechnet werden kann.

Fehlt dem Integranden nun der zusätzliche Faktor x , so hat man mit derselben Substitution

$$\int e^{ax^2} dx = \int e^t \frac{dt}{2ax} = \frac{1}{2a} \int \frac{e^t}{x} dt.$$

Das hier verbleibende Integral enthält noch t und x und kann daher in dieser Form nicht berechnet werden. Nun könnte man zwar für $t > 0$ das x ersetzen durch $x = \sqrt{t/a}$ und hätte dann das Integral

$$\frac{\sqrt{a}}{2a} \int \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt,$$

aber dieses Integral in t ist nicht leichter als das ursprüngliche Integral in x .

Übrigens helfen bei $\int e^{ax^2} dx$ tatsächlich gar keine „Tricks“ weiter: Es kann nicht ausgeführt werden, die Funktion $x \mapsto e^{ax^2}$ besitzt keine elementare Stammfunktion, egal wie sehr man sich bemüht.

Beispiele

(1) Für beliebige stetige Funktionen f gilt

$$\int_a^b f(kx) \, dx = \frac{1}{k} \int_{ak}^{bk} f(t) \, dt, \quad (3.7)$$

wie man mit der Substitution $t = kx$ leicht sieht. Diese Formel ist nichts anderes als die Verallgemeinerung des Beispiels (3.5).

(2) Mit der Substitution $t = x^2$ erhält man

$$\int_a^b f(x^2)x \, dx = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} f(t) \, dt, \quad (3.8)$$

vergleiche (3.6).

(3) **Logarithmische Integration.** Für beliebige stetig differenzierbare Funktionen f mit $f(x) \neq 0$ im Integrationsintervall gilt

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| \Big|_a^b, \quad (3.9)$$

wie aus Satz 3.1 und $\int_a^b \frac{dt}{t} = \ln |t| \Big|_a^b$ folgt (siehe (2.8)).

Die Formel (3.9) wird als „logarithmische Integration“ bezeichnet, weil sie als Ergebnis den Logarithmus der Funktion f ergibt. Sie ist immer dann anwendbar, wenn der Zähler die Ableitung des Nenners enthält. So ist z. B.

$$\int \frac{12x^3 + 6e^{2x}}{3x^4 + 3e^{2x} + 10} \, dx = \ln(3x^4 + 3e^{2x} + 10) + c. \quad (3.10)$$

Lesehilfe

Das Integral (3.10) wäre sehr viel „unfreundlicher“, wenn im Zähler beispielsweise statt $6e^{2x}$ nur $5e^{2x}$ stünden. Dann ließe sich die Stammfunktion nicht einfach so angeben.

Die logarithmische Integration ist oft nützlich: Wir werden ihr noch mehrfach in weniger künstlichen Beispielen begegnen ;-)

(4) Aus (3.9) ergibt sich

$$\int_a^b \tan x \, dx = \int_a^b \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int_a^b \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = - \ln |\cos x| \Big|_a^b \quad (3.11)$$

für $[a, b] \subset]-\pi/2, \pi/2[$.

(5) Als Beispiel für eine etwas andere Anwendung der Substitutionsregel berechnen wir das Integral

$$I = \int \sqrt{1-x^2} \, dx \quad (3.12)$$

für $|x| \leq 1$ unter Verwendung der Substitution $x = \sin t$:

$$x = \sin t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \text{d. h.} \quad dx = \cos t \, dt.$$

Lesehilfe

Du hast sicher bemerkt, dass die Substitution hier „andersherum“ erfolgt als sonst: Es wird nicht ein zusammengesetzter Ausdruck mit x durch t ersetzt, sondern x wird durch einen Ausdruck mit t ersetzt. Auch diese Art der Substitution ist erlaubt.

Warum diese Substitution hier vorteilhaft ist, muss sich noch zeigen.

Wir erhalten

$$I = \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos t} \cos t \, dt = \int \cos^2 t \, dt.$$

Zur Integration von \cos^2 verwenden wir die trigonometrische Identität

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1) \quad (3.13)$$

und erhalten

$$I = \frac{1}{2} \int (\cos(2t) + 1) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(2t) + t \right). \quad (3.14)$$

An dieser Stelle ließe sich die Rücksubstitution $t = \arcsin x$ durchführen. Das Ergebnis lässt sich jedoch schöner schreiben, wenn man $\sin(2t)$ zunächst noch ersetzt durch

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}.$$

So ergibt die Rücksubstitution schließlich

$$I = \frac{1}{2} \left(\sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} + t \right) = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x \right). \quad (3.15)$$

Lesehilfe

Aus dem Additionstheorem für Cosinus und dem „trigonometrischen Pythagoras“ $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ ergibt sich

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1$$

und daraus (3.13). Außerdem folgt aus dem Additionstheorem für Sinus

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t,$$

des Weiteren gilt $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$, usw.

Trigonometrische Identitäten (Formeln) ergeben sich immer aus einer Kombination der drei Grundformeln, d. h. der beiden Additionstheoreme und des trigonometrischen Pythagoras. Und diese Formeln sind (auch) beim Integrieren oft wichtig.

Schließlich ist das Ergebnis (3.15) schicker, weil man hier $\sin(\arcsin x) = x$ verwenden kann. Setzt man $t = \arcsin x$ in (3.14) ein, so hat man $\sin(2 \arcsin x)$, was sich nicht vereinfachen lässt.

In den Grenzen von -1 bis $+1$ gibt das Integral I geometrisch die Fläche des halben Einheitskreises wieder, siehe Abb. 3.1. Tatsächlich ergibt sich auch rechnerisch

$$I \Big|_{-1}^{+1} = 0 + \frac{1}{2} \arcsin x \Big|_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.16)$$

- **Zwischenfrage (2)** Lässt sich das Ergebnis $F = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi/2$ auch direkt aus (3.14) erhalten, in der das Integral ja bereits ausgeführt wurde?

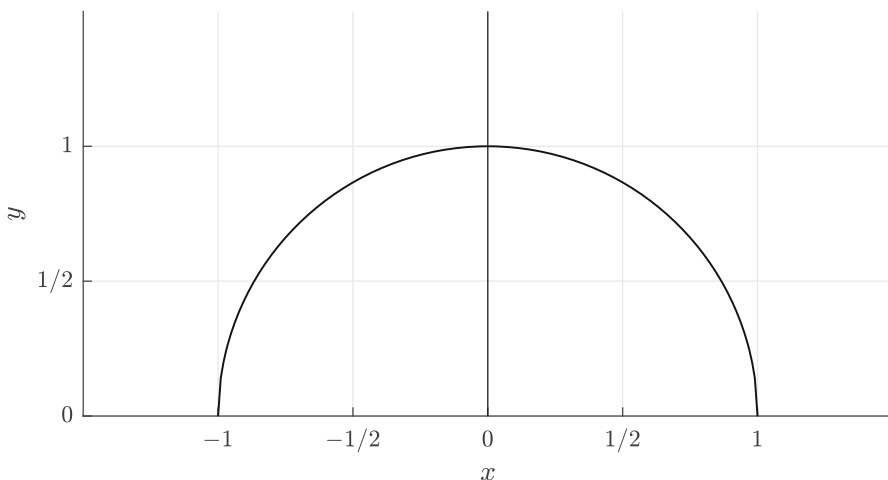


Abb. 3.1 Der Graph der Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = y = \sqrt{1-x^2}$, gibt den halben Kreisbogen eines Einheitskreises in einem xy -Koordinatensystem wieder. Das Integral $\int_{-1}^{+1} f(x) dx$ entspricht daher der halben Fläche des Einheitskreises. Sein Wert ist gleich $\pi/2$

3.3 Beispiel: „Linearer Term durch quadratischer Term“

Viele zusammengesetzte Funktionen können – mal mehr und mal weniger aufwendig – elementar integriert werden. Die Ergebnisse dieser Integrationen können in *Integraltafeln* nachgeschlagen werden.²

Als ein Beispiel für einen Funktionentyp, dessen Integration vollständig möglich ist, sehen wir uns „linearer Term durch quadratischer Term“ an, d. h. Integrale

$$\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx \quad (3.17)$$

mit beliebigen Koeffizienten $m, n, a, b, c \in \mathbb{R}$. Das dazu erforderliche Vorgehen wollen wir im Folgenden anhand von konkreten Beispielen erläutern.

Zurückführung auf „Eins durch quadratischer Term“

In einem ersten Schritt können Integrale des Typs (3.17) durch logarithmische Integration immer auf Integrale des Typs

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (3.18)$$

zurückgeführt werden: Die Ableitung eines quadratischen Terms ergibt einen linearen Term. Es ist daher möglich, den linearen Term $mx + n$ im Zähler so umzuschreiben, dass er die Ableitung $2ax + b$ des Nenners enthält. Betrachten wir ein konkretes Beispiel:

$$I = \int \frac{2x - 3}{3x^2 + x + 9} dx. \quad (3.19)$$

Die Ableitung des Nenners lautet $6x + 1$. Den Zähler schreiben wir daher als

$$2x - 3 = \frac{2}{6} 6x - 3 = \frac{2}{6} (6x + 1 - 1) - 3 = \frac{1}{3} (6x + 1) - \frac{10}{3}.$$

Eingesetzt in das Integral (3.19) ergibt dies aufgrund der Linearität des Integrals und unter Verwendung der logarithmischen Integration

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int \frac{6x + 1}{3x^2 + x + 9} dx - \frac{10}{3} \int \frac{dx}{3x^2 + x + 9} \\ &= \frac{1}{3} \ln |3x^2 + x + 9| - \frac{10}{3} \int \frac{dx}{3x^2 + x + 9}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

► **Antwort auf Zwischenfrage (2)** Gefragt war, ob sich $F = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \pi/2$ auch direkt aus (3.14) erhalten lässt.

² Eine ausführliche Integraltafel findet sich beispielsweise im „Bronstein“, einem klassischen Nachschlagewerk der Mathematik (Bronstein et al., *Taschenbuch der Mathematik*).

Ja, das geht auch, ohne dass man (geschickt) rücksubstituiert. Man muss nur beachten, dass die Grenzen ± 1 für x auf die Variable $t = \arcsin x$ umzurechnen sind. Es ist also

$$F = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(2t) + t \right) \Big|_{\arcsin(-1)}^{\arcsin 1}.$$

Nun ist $\arcsin \pm 1 = \pm \pi/2$ und wir erhalten

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin \pi + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(-\pi) - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Integration von „Eins durch quadratischer Term“

Es bleibt die Aufgabe, ein Integral des Typs (3.18) zu lösen. Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden:

- (1) *Der Nenner hat keine Nullstelle.* Die Integration erfolgt durch Zurückführung auf das „Arcustangens-Integral“ (2.12).
- (2) *Der Nenner hat eine (doppelte) Nullstelle.* Die Integration erfolgt auf einfache Weise durch Substitution.
- (3) *Der Nenner hat zwei Nullstellen.* Die Integration erfolgt über eine Partialbruchzerlegung.

Lesehilfe

Mit „Arcustangens-Integral“ sprechen wir hier das Integral

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

an, also das Integral, bei dem der Arcustangens herauskommt. Das ist so etwas wie der Prototyp von „Eins durch quadratische Funktion ohne Nullstellen“.

Unabhängig davon gibt es natürlich auch das Integral des Arcustangens, siehe (3.32).

Sehen wir uns jeweils ein Beispiel an:

- (1) Im obigen Integral (3.19) bleibt das Integral

$$I_1 = \int \frac{dx}{3x^2 + x + 9} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{1}{3}x + 3} \quad (3.21)$$

zu lösen. Sein Nenner $x^2 + \frac{1}{3}x + 3$ besitzt keine Nullstelle und wir führen das Integral auf das „Arcustangens-Integral“

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x$$

zurück: Quadratische Ergänzung ergibt für den Nenner

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{3}x + 3 &= x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + 3 = \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{107}{36} \\ &= \frac{107}{36} \left[\frac{36}{107} \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + 1 \right] = \frac{107}{36} \left[\left(\frac{6}{\sqrt{107}} \left(x + \frac{1}{6}\right) \right)^2 + 1 \right]. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{1}{3}x + 3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\frac{107}{36} \left[\left(\frac{6}{\sqrt{107}} \left(x + \frac{1}{6}\right) \right)^2 + 1 \right]} \\ &= \frac{1}{3} \frac{36}{107} \int \frac{dx}{\left(\frac{6}{\sqrt{107}} \left(x + \frac{1}{6}\right) \right)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Wir substituieren

$$z = \frac{6}{\sqrt{107}} \left(x + \frac{1}{6}\right), \quad \frac{dz}{dx} = \frac{6}{\sqrt{107}}, \quad dx = \frac{\sqrt{107}}{6} dz.$$

Lesehilfe

Die Substitution sieht vielleicht gefährlich aus, ist aber ganz harmlos. Das Substituieren eines linearen Ausdrucks ist immer unkritisch und führt nur zu einem zusätzlichen konstanten Faktor.

Dies ergibt

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{3} \frac{36}{107} \int \frac{\frac{\sqrt{107}}{6} dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{3} \frac{6}{\sqrt{107}} \int \frac{dz}{z^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{107}} \arctan z = \frac{2}{\sqrt{107}} \arctan \left[\frac{6}{\sqrt{107}} \left(x + \frac{1}{6}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

als Lösung des Integrals.

(2) Als Beispiel für den Fall (2) ändern wir das Integral I_1 leicht ab und betrachten

$$I_2 = \int \frac{dx}{3x^2 + x + \frac{1}{12}}. \quad (3.23)$$

Der Nenner besitzt jetzt eine doppelte Nullstelle und kann geschrieben werden als

$$3x^2 + x + \frac{1}{12} = 3 \left(x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} \right) = 3 \left(x + \frac{1}{6} \right)^2,$$

sodass sich mit der Substitution $z = x + \frac{1}{6}$ für das Integral ergibt

$$I_2 = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{6}\right)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{3} \frac{1}{x + \frac{1}{6}} = -\frac{2}{6x + 1}. \quad (3.24)$$

(3) Als Beispiel für den Fall (3) lösen wir das Integral

$$I_3 = \int \frac{dx}{3x^2 + x - 3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{1}{3}x - 1}. \quad (3.25)$$

Jetzt besitzt der Nenner zwei Nullstellen:

$$x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + 1} = -\frac{1}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{37}.$$

Er lässt sich daher schreiben als $x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = (x - x_1)(x - x_2)$, sodass eine Partialbruchzerlegung durchgeführt werden kann, d. h., man sucht Zahlen A und B so, dass für alle x gilt

$$\frac{1}{x^2 + \frac{1}{3}x - 1} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}. \quad (3.26)$$

Wir fassen die rechte Seite zusammen:

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} = \frac{A(x - x_2) + B(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Gleichung (3.26) ist somit erfüllt, wenn gilt

$$A(x - x_2) + B(x - x_1) = x(A + B) - Ax_2 - Bx_1 = 1.$$

Dies ist für alle x der Fall, wenn A und B die Gleichungen

$$A + B = 0 \quad \text{und} \quad -Ax_2 - Bx_1 = 1$$

erfüllen. Wir haben also

$$A = -B \quad \text{und} \quad A = \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{3}{\sqrt{37}}. \quad (3.27)$$

Mit diesen Vorbereitungen kann das Integral I_3 leicht gelöst werden:

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{1}{3}x - 1} = \frac{1}{3} \left(A \int \frac{dx}{x - x_1} + B \int \frac{dx}{x - x_2} \right) \\ &= \frac{A}{3} (\ln |x - x_1| - \ln |x - x_2|) = \frac{A}{3} \ln \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{37}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{37}}{x + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{37}} \right|. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Das soeben durchgeführte Vorgehen einer Partialbruchzerlegung kann übrigens auch direkt bei Integralen des Typs (3.17) angewendet werden, wenn der Nenner zwei unterschiedliche Nullstellen besitzt. Eine vorherige „Abtrennung“ des linearen Anteils aus dem Zähler mithilfe der logarithmischen Integration ist dann nicht unbedingt notwendig.

Lesehilfe

Alle diese Rechnungen sind nicht schwierig, aber länglich. Wenn du sie in Ruhe durchgehst, wirst du merken, dass es vorwiegend Bruchrechnen, Ausmultiplizieren usw. ist, was das alles etwas mühsam macht. Und genau deswegen werden Integraltafeln so gemocht ;-)

Zusammenfassung

Führt man die Rechnungen, die zu den Ergebnissen (3.22), (3.24) und (3.28) geführt haben, allgemein durch, so lassen sich die Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} & \text{für } 4ac - b^2 > 0 \\ -\frac{2}{2ax+b} & \text{für } 4ac - b^2 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| & \text{für } 4ac - b^2 < 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

So oder ähnlich findet man es in einer Integraltafel wieder, zusammen mit folgendem Eintrag, mit dem sich ein linearer Anteil im Zähler behandeln lässt:

$$\int \frac{x \, dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}. \quad (3.30)$$

Vor dem Hintergrund unserer obigen Rechnung, siehe (3.20), kann auch diese Formel leicht nachvollzogen werden.

Lesehilfe

Die Bedingungen $4ac - b^2 > 0$, $= 0$ oder < 0 in (3.29) sind nichts anderes als die Bedingungen für keine, eine oder zwei Nullstellen des Nenners.

3.4 Partielle Integration

Neben der Substitutionsregel ist die *partielle Integration* die zweite wichtige Integrationsregel. Sie ergibt sich aus der Produktregel der Differenziation:

Satz 3.2 Es seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx.$$

Beweis Für die Funktion fg gilt nach der Produktregel der Differenziation

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Daraus folgt

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx + \int_a^b f(x)g'(x) \, dx = \int_a^b (fg)'(x) \, dx = f(x)g(x) \Big|_a^b. \quad \bullet$$

► **Zwischenfrage (3)** Für Satz 3.2 müssen die Funktionen f, g als Voraussetzung stetig differenzierbar sein. Warum ist das so?

Bei der partiellen Integration wird also die Aufgabe, das Integral $\int f(x)g'(x)dx$ zu lösen, durch eine andere ersetzt, nämlich das Integral $\int f'(x)g(x)dx$ zu lösen. Die Anwendung der Regel ist somit dann sinnvoll, wenn dieses Integral leichter zu lösen ist als das ursprüngliche. Dabei ist zu beachten, dass es zur Anwendung der Regel notwendig ist, eine Stammfunktion von g zu kennen.

Lesehilfe

Die Formel zur partiellen Integration lautet kurz

$$\int fg' \, dx = fg - \int f'g \, dx.$$

Du musst dir nur merken, dass im vorderen Integral der Strich an der anderen der beiden Funktionen steht als hinten. Ebenso stimmt auch

$$\int f'g \, dx = fg - \int fg' \, dx.$$

Beispiele

(1) Wir berechnen das Integral der Funktion $x \mapsto x \cos(3x)$ mittels partieller Integration. Die Integration vereinfacht sich offenbar, wenn statt des Faktors x dessen Ableitung 1 im Integral auftaucht; außerdem ist die Stammfunktion von $\cos(3x)$ bekannt bzw. leicht zu ermitteln:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_f \underbrace{\cos(3x)}_{g'} dx &= \underbrace{x}_f \underbrace{\frac{1}{3} \sin(3x)}_g - \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\frac{1}{3} \sin(3x)}_g dx \\ &= \frac{x}{3} \sin(3x) - \frac{1}{3} \int \sin(3x) dx = \frac{x}{3} \sin(3x) + \frac{1}{9} \cos(3x). \end{aligned}$$

Auf diese Weise lassen sich Integranden der Form

$$x \sin(kx), \quad x \cos(kx), \quad x \exp(kx)$$

behandeln; der Faktor x wird durch die Ableitung zu 1 reduziert, und die Funktionen \sin , \cos und \exp reproduzieren sich bei der Integration.

Wendet man diese partielle Integration n -mal hintereinander an, so erlaubt sie die Bearbeitung aller Integranden der Form

$$x^n \sin(kx), \quad x^n \cos(kx), \quad x^n \exp(kx).$$

Lesehilfe

Wie so oft beim Integrieren, so ist auch für die Anwendung der partiellen Integration ein wenig Erfahrung hilfreich. Schreibst du den Strich an die „falsche“ Stelle, kann es sein, dass das neue Integral schlimmer ist als das ursprüngliche. Das macht aber nichts, dann probierst du es einfach noch einmal andersherum :-)

(2) Die partielle Integration kann auch dann hilfreich sein, wenn der Integrand eigentlich gar kein Produkt ist; es wird dann einfach der Faktor 1 hinzugefügt:

Stammfunktion für \ln : Für $a, b > 0$ ist

$$\begin{aligned} \int_a^b \ln x \, dx &= \int_a^b \underbrace{1}_{g'} \underbrace{\ln x}_f dx = \underbrace{x}_g \underbrace{\ln x}_f \Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{x}_g \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} dx \\ &= x \ln x \Big|_a^b - \int_a^b 1 \, dx = x(\ln x - 1) \Big|_a^b. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Stammfunktion für arctan: Die Funktion \arctan ist auf ganz \mathbb{R} stetig und damit integrierbar. Man erhält zunächst

$$\int \arctan x \, dx = \int \underbrace{1}_{g'} \underbrace{\arctan x}_f \, dx = \underbrace{x}_g \underbrace{\arctan x}_f - \int \underbrace{x}_g \underbrace{(\arctan x)'}_{f'} \, dx.$$

Dabei ist $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, sodass das Integral

$$\int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

zu lösen bleibt. Da im Zähler fast die Ableitung des Nenners steht, verwenden wir dazu die logarithmische Integration, siehe (3.9):

$$\int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Insgesamt haben wir somit

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \quad (3.32)$$

Lesehilfe

Die Stammfunktionen von \ln und insbesondere von \arctan wird man sich nicht lange merken können. Das ist aber auch nicht notwendig. Man merkt sich einfach den „Trick“, die 1 dazuzuschreiben. Der Rest geht dann von alleine ;-)

(3) „Exponentialfunktion mal Sinus oder Cosinus“: Als weiteres Beispiel wollen wir Integrale des Typs

$$\int e^{ax} \sin(kx) \, dx \quad \text{oder} \quad \int e^{ax} \cos(kx) \, dx \quad (3.33)$$

mit reellen Konstanten a, k lösen: Zweimalige partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} I &= \int e^{ax} \sin(kx) \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin(kx) - \int \frac{1}{a} e^{ax} \cos(kx) k \, dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(kx) - \frac{k}{a} \int e^{ax} \cos(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(kx) - \frac{k}{a} \left[\frac{1}{a} e^{ax} \cos(kx) - \int \frac{1}{a} e^{ax} (-\sin(kx)) k \, dx \right] \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(kx) - \frac{k}{a^2} e^{ax} \cos(kx) - \underbrace{\frac{k^2}{a^2} \int e^{ax} \sin(kx) \, dx}_I. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Lesehilfe

Für (3.34) wurde zweimal partiell integriert. Die „Richtung“ ist hier übrigens egal, d. h., im ursprünglichen Integral kann e^{ax} als f' – wie oben geschehen – oder auch als f gehandhabt werden. Wichtig ist allerdings, dass bei der zweiten partiellen Integration „dieselbe Richtung“ verwendet wird. Andernfalls erhält man eine leere Aussage. Probiere das doch ruhig einmal aus.

Das Ursprungsintegral ist nicht aufgelöst worden, aber es wurde reproduziert³ und die entstandene Gleichung kann nach dem gesuchten Integral aufgelöst werden:

$$I\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right) = e^{ax} \left(\frac{1}{a} \sin(kx) - \frac{k}{a^2} \cos(kx) \right),$$

also

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin(kx) dx &= \frac{e^{ax}}{1 + \frac{k^2}{a^2}} \left(\frac{1}{a} \sin(kx) - \frac{k}{a^2} \cos(kx) \right) \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2 + k^2} (a \sin(kx) - k \cos(kx)). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Analog erhält man

$$\int e^{ax} \cos(kx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + k^2} (a \cos(kx) + k \sin(kx)). \quad (3.36)$$

- **Antwort auf Zwischenfrage (3)** Gefragt war nach der Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit in Satz 3.2.

Eine „stetig differenzierbare“ Funktion ist eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung stetig ist. Zur Verwendung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung muss der Integrand stetig sein. In Satz 3.2 tauchen Integrale $\int fg' dx$ und $\int f'g dx$ auf und der Hauptsatz wird verwendet. Daher müssen die Produkte fg' und $f'g$ stetig sein. Es müssen daher f , f' , g , g' stetig sein und das heißt, dass f und g stetig differenzierbar sein müssen.

3.5 Spezielle Integrale mit Sinus und Cosinus

Integrale über Sinus- oder Cosinusfunktionen spielen in natur- und ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen naturgemäß eine große Rolle. Wir wollen uns daher einige grundlegende Integrale ansehen.

³ Einen solchen Umstand, dass das ursprüngliche Integral reproduziert wird und somit „wieder erscheint“, nennt man manchmal den „Phönix-Effekt“.

3.5.1 Rekursionsformeln für \sin^n und \cos^n

Mithilfe der partiellen Integration kann eine *Rekursionsformel* zur Berechnung des Integrals

$$I_n := \int \sin^n x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.37)$$

hergeleitet werden: Partielle Integration ergibt für $n \geq 2$

$$\begin{aligned} I_n &= \int \underbrace{\sin^{n-1} x}_f \underbrace{\sin x}_{g'} \, dx \\ &= \underbrace{\sin^{n-1} x}_f \underbrace{(-\cos x)}_g - \int \underbrace{(n-1) \sin^{n-2} x \cos x}_{f'} \underbrace{(-\cos x)}_g \, dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \, dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \underbrace{\int \sin^{n-2} x \, dx}_{I_{n-2}} - (n-1) \underbrace{\int \sin^n x \, dx}_{I_n}, \end{aligned}$$

also

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Auflösen nach I_n ergibt daraus die Rekursionsformel

$$I_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad (3.38)$$

mit der das Integral I_n auf das Integral I_{n-2} zurückgeführt wird.

Lesehilfe

Gleichung (3.38) erlaubt also nicht die unmittelbare Berechnung von I_n , sondern nur die Zurückführung auf I_{n-2} . Beispielsweise kann I_9 zurückgeführt werden auf I_7 , erneutes Anwenden der Formel führt dann auf I_5 usw. Man kann also „rekursiv“ die Ordnung verringern, bis man auf ein leicht zu berechnendes Integral kommt, I_0 oder I_1 . Siehe unten :-)

Zusammen mit

$$I_0 = \int \sin^0 x \, dx = x \quad \text{und} \quad I_1 = \int \sin^1 x \, dx = -\cos x$$

erlaubt (3.38) – ggf. durch mehrfache Anwendung – die Berechnung sämtlicher Integrale I_n . Zum Beispiel

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x \\ I_3 &= \int \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3} \cos x \sin^2 x + \frac{2}{3} I_1 = -\frac{1}{3} \cos x \sin^2 x - \frac{2}{3} \cos x \\ I_4 &= \int \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4} \cos x \sin^3 x + \frac{3}{4} I_2 = -\frac{1}{4} \cos x \sin^3 x - \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x. \end{aligned}$$

Natürlich kann auch für die Cosinusintegrale

$$J_n := \int \cos^n x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.39)$$

auf dieselbe Weise eine Rekursionsformel hergeleitet werden. Sie lautet für $n \geq 2$:

$$J_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} J_{n-2}. \quad (3.40)$$

Lesehilfe

Für Integrale über \sin^2 oder \cos^2 benötigt man die Rekursionsformeln noch nicht unbedingt. Sie lassen sich mithilfe trigonometrischer Identitäten leicht auf andere Weise berechnen, siehe (3.13). Bei höheren Potenzen sind die Rekursionsformeln aber der mit Abstand schnellste Weg zum Ergebnis.

- **Zwischenfrage (4)** Welchen (integralen) Mittelwert besitzt die \sin^4 -Funktion?

3.5.2 Orthogonalitätsrelationen

Wir wollen uns die speziellen Integrale des Typs

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(lx) \, dx$$

mit natürlichen Zahlen k, l ansehen, also die bestimmten Integrale solcher Produkte von Sinus- und/oder Cosinusfunktionen über eine Periode. Um ihren Wert zu berechnen, verwenden wir die folgenden Identitäten, die sich sofort aus den Addi-

tionstheoremen für Sinus- und Cosinus ergeben:

$$\sin(kx) \cos(lx) = \frac{1}{2} [\sin((k+l)x) + \sin((k-l)x)] \quad (3.41)$$

$$\cos(kx) \cos(lx) = \frac{1}{2} [\cos((k+l)x) + \cos((k-l)x)] \quad (3.42)$$

$$\sin(kx) \sin(lx) = \frac{1}{2} [\cos((k-l)x) - \cos((k+l)x)]. \quad (3.43)$$

Lesehilfe

Die Formeln (3.41) bis (3.43) kannst du tatsächlich sehr leicht nachrechnen, wenn du die Ausdrücke $\sin((k+l)x) = \sin(kx + lx)$ usw. der rechten Seiten mit den Additionstheoremen umformst und anschließend die Summanden zusammenfasst.

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(lx) \, dx &\stackrel{(3.41)}{=} \frac{1}{2} \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin((k+l)x) \, dx}_{=0 \text{ für alle } k, l \in \mathbb{N}} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin((k-l)x) \, dx}_{=0 \text{ für alle } k, l \in \mathbb{N}} \right] \\ \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(lx) \, dx &\stackrel{(3.42)}{=} \frac{1}{2} \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos((k+l)x) \, dx}_{\begin{array}{ll} =2\pi & \text{für } k=l=0 \\ =0 & \text{für } k=l \neq 0 \\ =0 & \text{für } k \neq l \end{array}} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos((k-l)x) \, dx}_{\begin{array}{ll} =2\pi & \text{für } k=l=0 \\ =2\pi & \text{für } k=l \neq 0 \\ =0 & \text{für } k \neq l \end{array}} \right] \\ \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(lx) \, dx &\stackrel{(3.43)}{=} \frac{1}{2} \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos((k-l)x) \, dx}_{\begin{array}{ll} =2\pi & \text{für } k=l=0 \\ =2\pi & \text{für } k=l \neq 0 \\ =0 & \text{für } k \neq l \end{array}} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos((k+l)x) \, dx}_{\begin{array}{ll} =2\pi & \text{für } k=l=0 \\ =0 & \text{für } k=l \neq 0 \\ =0 & \text{für } k \neq l \end{array}} \right]. \end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir also die folgenden Beziehungen:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(lx) \, dx = 0 \quad \text{für alle } k, l \in \mathbb{N} \quad (3.44)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(lx) \, dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(lx) \, dx = 0 \quad \text{für } k \neq l \quad (3.45)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(kx) \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(kx) \, dx = \pi \quad \text{für } k \geq 1. \quad (3.46)$$

Man bezeichnet diese Gleichungen als die *Orthogonalitätsrelationen für Sinus und Cosinus*. Damit hat es folgende Bewandnis: Die Funktionen $\sin_k : x \mapsto \sin(kx)$ und $\cos_l : x \mapsto \cos(lx)$, $k, l \in \mathbb{N}$, kann man als Vektoren eines Funktionenraums auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ auffassen. Das *Skalarprodukt* in solchen Räumen entspricht einem Integral: Für zwei Funktionen f, g ist⁴

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(x)g(x) \, dx. \quad (3.47)$$

Nach (3.44) haben wir also z. B.

$$\langle \sin_k, \cos_l \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(lx) \, dx = 0.$$

Nun nennt man zwei Vektoren, deren Skalarprodukt verschwindet, „orthogonal“ zueinander. In diesem Sinn besagen die Orthogonalitätsrelationen also:

- Die Funktionen \sin_k und \cos_l sind orthogonal zueinander (entspricht (3.44)).
- Für unterschiedliche k, l sind die Funktionen \sin_k und \sin_l bzw. \cos_k und \cos_l auch jeweils orthogonal zueinander (entspricht (3.45)).

Die Orthogonalitätsrelationen spielen u. a. im Zusammenhang mit der Fourier-Entwicklung periodischer Funktionen eine zentrale Rolle.

Lesehilfe

Der Begriff „Orthogonalitätsrelation“ wirkt vielleicht zunächst eigenartig. Tatsächlich lassen sich die dahinterstehenden Zusammenhänge mit Aussagen wie „ \sin_k und \cos_l sind orthogonal zueinander“ aber leichter merken und aussagen, als wenn man etwa immer (3.44) aufsagen muss ;-)

⁴ Für Skalarprodukte in Funktionenräumen ist die Schreibweise $\langle f, g \rangle$ anstelle von $f \cdot g$ gebräuchlich, weil Letzteres mit dem normalen Produkt der Funktionen verwechselt werden kann.

- **Antwort auf Zwischenfrage (4)** Gefragt war nach dem Mittelwert der \sin^4 -Funktion.

Der integrale Mittelwert der periodischen \sin^4 -Funktion kann beispielsweise über das Intervall von 0 bis π berechnet werden:

$$M(\sin^4) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx,$$

siehe (1.19). Nun ist

$$I_4 = \int \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4} \cos x \sin^3 x - \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x$$

und damit

$$\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx = \frac{3}{8} \pi - 0 = \frac{3}{8} \pi$$

und daher $M(\sin^4) = 3/8$. Dieser Mittelwert ist somit etwas kleiner als der Mittelwert von \sin^2 , siehe (1.20).

3.6 Nicht elementar lösbare Integrale

Mithilfe der Integrationsregeln kann eine Vielzahl zusammengesetzter Funktionen elementar integriert werden. Dessen ungeachtet ist eine solche elementare Integration – im Unterschied zur Differenziation – *nicht für alle zusammengesetzten Funktionen möglich*. In solchen Fällen kann eine Stammfunktion nur in „Integralform“, d. h. als unbestimmtes Integral angegeben werden.

3.6.1 Elliptische Integrale

Für $0 < k < 1$ können die Integrale

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \quad \text{und} \quad E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} dt \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \quad (3.48)$$

nicht elementar ausgeführt werden. Man nennt sie die (bestimmten) *elliptischen Integrale 1. bzw. 2. Gattung*. Da die Integranden stetig sind, sind die Integralwerte wohldefiniert und können numerisch ermittelt werden.

Lesehilfe

Das Differenzial in einem Integral kann auch direkt hinter das Integralzeichen geschrieben werden:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b dx \, f(x).$$

Das ist manchmal praktischer. Insbesondere ist sofort klar, auf welche Variable sich die Grenzen beziehen.

Neben diesen Integralen gibt es noch weitere elliptische Integrale. Sie werden so bezeichnet, weil sie bei der Berechnung des Umfangs einer Ellipse auftreten: Eine Ellipse mit der großen Halbachse a und der Exzentrizität e besitzt den Umfang

$$U = 4a \int_0^{\pi/2} dt \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} = 4a E(e, \pi/2), \quad (3.49)$$

siehe auch (6.26). Der Umfang einer Ellipse kann somit nur numerisch bestimmt werden.

Lesehilfe

Die Exzentrizität e einer Ellipse mit der großen Halbachse a ist definiert als $e := c/a$, wobei c der Abstand des Brennpunkts vom Mittelpunkt der Ellipse ist. Für $e = 0$ hat man einen Kreis mit dem Radius a und für $e = 1$ eine zu einer Strecke mit der Länge $2a$ entartete Ellipse.

- **Zwischenfrage (5)** Kann das Integral $E(k, \varphi)$ für $k = 0$ und $k = 1$ ausgeführt werden?

3.6.2 Normalverteilung und Verteilungsfunktion

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{-x^2}$ ist nicht elementar integrierbar. Diese Aussage trifft nicht etwa auf sämtliche Funktionen zu, die diesen Term enthalten; beispielsweise kann $x e^{-x^2}$ sehr wohl integriert werden, siehe (3.6).

Lesehilfe

Es gibt also keine elementare Funktion, deren Ableitung gleich e^{-x^2} wäre. Das ist natürlich bei den Integranden der elliptischen Integrale auch so, aber bei dem vergleichsweise einfachen Ausdruck e^{-x^2} ist es vielleicht besonders überraschend.

Die Funktion f ist von besonderem Interesse, weil sie den Kern der *Normalverteilung* oder *Gauß-Verteilung* bildet, die gegeben wird durch

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}. \quad (3.50)$$

Sie enthält die Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Mit μ wird die Lage des Zentrums der Normalverteilung festgelegt, in dem sie ihren Maximalwert annimmt und von dem aus sie zu beiden Seiten hin symmetrisch abfällt. Der Parameter σ heißt *Standardabweichung* der Normalverteilung und bestimmt die „Breite“ der Verteilung. Der Funktionsvorschrift (3.50) lässt sich entnehmen, dass mit größer werdendem σ die Verteilung breiter und flacher wird, siehe Abb. 3.2. Des Weiteren kann man leicht zeigen, dass sich an den Stellen $\mu \pm \sigma$ die Wendepunkte der Verteilung befinden.

Lesehilfe

Die Wirkung von μ ist klar. Allgemein bewirkt die Ersetzung von x durch $x - \mu$ in einer Funktionsvorschrift eine Verschiebung ihres Graphen um μ nach rechts. So kommt man also von $x \mapsto e^{-x^2}$ zu $x \mapsto e^{-(x-\mu)^2}$.

Die Wirkung von σ ist weniger offensichtlich. Aber offenbar bewirkt ein wachsendes σ in der Funktion $e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ einen betragsmäßig kleineren Exponenten, der zu einem langsameren Abfall der Funktion führt. Gleichzeitig wird der Normierungsfaktor $1/\sigma\sqrt{2\pi}$ kleiner. Der Graph wird somit „irgendwie“ breiter und flacher.

- **Antwort auf Zwischenfrage (5)** Gefragt war nach dem Integral $E(k, \varphi)$ für $k = 0$ und $k = 1$.

Das Integral $E(k, \varphi) = \int_0^\varphi dt \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}$ lautet für $k = 0$ einfach

$$E(0, \varphi) = \int_0^\varphi dt \sqrt{1} = \varphi$$

und für $k = 1$

$$E(1, \varphi) = \int_0^\varphi dt \sqrt{1 - \sin^2 t} = \int_0^\varphi dt \cos t = \sin t \Big|_0^\varphi = \sin \varphi.$$

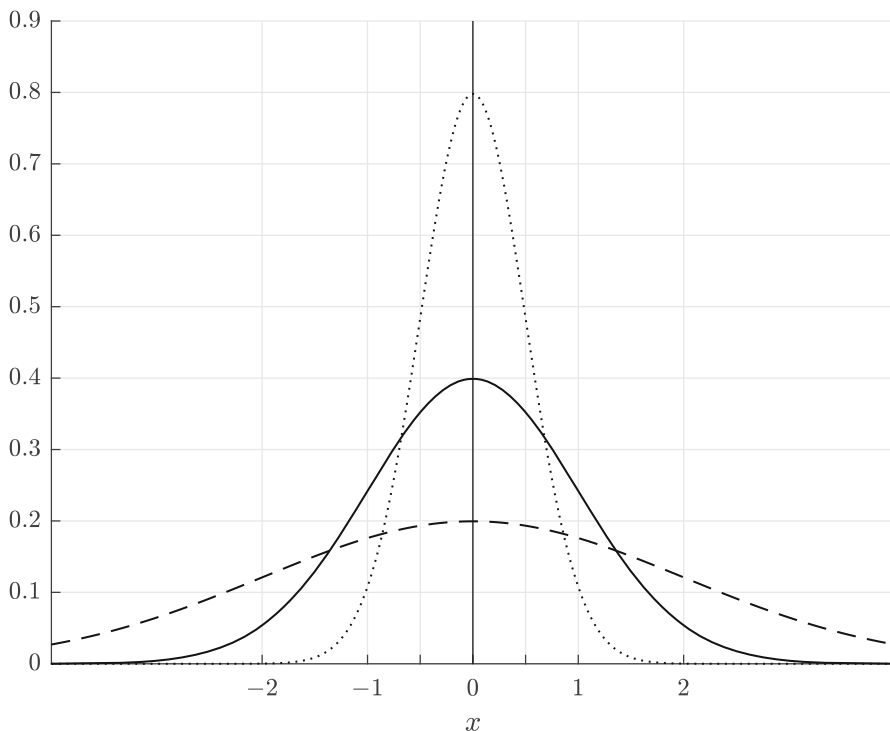


Abb. 3.2 Dargestellt sind die Graphen verschiedener Normalverteilungen $g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ mit $\mu = 0$ und $\sigma = 0.5$ (gepunktet), 1 (durchgezogen), 2 (gestrichelt). Mit größer werdendem σ wird die Verteilung breiter und flacher. Der Normierungsfaktor $1/\sigma\sqrt{2\pi}$ sorgt dafür, dass die Verteilungen für alle Werte von $\sigma > 0$ mit der x -Achse den Flächeninhalt 1 einschließen

Speziell ist $E(0, \pi/2) = \pi/2$ und der Umfang der „Ellipse“ mit der Exzentrizität $e = 0$ ergibt sich nach (3.49) zu $U = 4a\pi/2 = 2\pi a$ und ist damit gleich dem Kreisumfang. Für $e = 1$ haben wir $U = 4a \sin(\pi/2) = 4a = 2a + 2a$, also den korrekten „Umfang“ der zu einer Strecke $2a$ entarteten Ellipse.

Normierung

Der Vorfaktor $1/\sigma\sqrt{2\pi}$ in der Normalverteilung (3.50) dient der Normierung. Er ist so gewählt, dass ihr Graph für alle Werte von σ mit der x -Achse den Flächeninhalt 1 einschließt. Um das zu sehen, wollen wir den Flächeninhalt berechnen. Zwar ist die Funktion g nicht elementar integrierbar, mithilfe eines Tricks kann das uneigentliche Integral, das die gesamte eingeschlossene Fläche angibt, aber dennoch exakt berechnet werden:

Wir suchen

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2/2\sigma^2}. \quad (3.51)$$

Der Integrand entspricht der Normalverteilung ohne den Vorfaktor und außerdem wurde $\mu = 0$ gewählt, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Statt direkt A berechnen wir A^2 ; es ist

$$A^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2/2\sigma^2} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2/2\sigma^2} \right) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} dx dy e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}.$$

- **Zwischenfrage (6)** Warum bedeutet die Wahl von $\mu = 0$ in (3.51) keine Einschränkung der Allgemeinheit?

Wir haben es hier mit einer Integration über die gesamte xy -Ebene zu tun. Drücken wir das Integral in Polarkoordinaten r, φ aus, so ist $x^2 + y^2 = r^2$ und das Flächenelement $dx dy$ ist durch $r dr d\varphi$ zu ersetzen. Es tritt also der zusätzliche Skalenfaktor r auf, der sich aus dem Wechsel von kartesischen Koordinaten auf die Polarkoordinaten r, φ ergibt (und den wir an dieser Stelle glauben wollen; siehe aber (5.54)). Er ermöglicht die Ausführung der Integration:

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{r=0}^{\infty} dr r e^{-r^2/2\sigma^2} = 2\pi \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2/2\sigma^2} \stackrel{(3.6)}{=} -2\pi\sigma^2 e^{-r^2/2\sigma^2} \Big|_0^{\infty} \\ &= -2\pi\sigma^2(0 - 1) = 2\pi\sigma^2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Die gesuchte Fläche ist also $A = \sigma\sqrt{2\pi}$, was gerade dem Vorfaktor der Normalverteilung $g(x)$ entspricht. Wir halten also fest:

Das Integral über die Normalverteilung (3.50) hat für sämtliche Werte von σ (und μ) stets den Wert 1,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1. \quad (3.53)$$

- **Antwort auf Zwischenfrage (6)** Gefragt war, warum die Wahl von $\mu = 0$ in (3.51) keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Unterschiedliche Werte von μ in der Normalverteilung bedeuten eine Verschiebung der gesamten Funktion in x -Richtung. Da sich das Integral (3.51) von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt und damit die gesamte unter dem Graphen eingeschlossene Fläche beinhaltet, wirkt sich eine solche Verschiebung in x -Richtung nicht auf seinen Wert aus. Daher kann das „einfachste μ “ gewählt werden.

Verteilungsfunktion

Bei der Normalverteilung (3.50) handelt es sich um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Das unbestimmte Integral der Verteilung bezeichnet man als die *Verteilungsfunktion*:

$$G(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x dt \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right). \quad (3.54)$$

Besitzt eine Zufallsvariable X diese Verteilung, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Variable in den Bereich zwischen a und b fällt, gleich

$$P(a < X \leq b) = G(b) - G(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b dt \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right). \quad (3.55)$$

Damit die numerische Auswertung nicht für sämtliche Werte von σ erneut erfolgen muss, führt man die Verteilungsfunktion G oftmals zurück auf das Integral der *Standard-Normalverteilung* oder *(0,1)-Verteilung* mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$, also auf die Funktion Φ mit

$$\Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z du e^{-u^2/2}, \quad (3.56)$$

siehe Abb. 3.3. Wir wissen bereits, dass gilt $\Phi(\infty) = 1$, und außerdem ist aufgrund der Symmetrie der Funktion offenbar

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z). \quad (3.57)$$

- **Zwischenfrage (7)** Warum gilt $\Phi(\infty) = 1$ und warum ist „offenbar“ $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$?

Liegen die Werte dieser speziellen Verteilungsfunktion Φ vor – wobei man sich wegen (3.57) auf positive Argumente beschränken kann –, so können diese auf beliebige Verteilungen übertragen werden: Setzt man in (3.54)

$$\frac{t-\mu}{\sigma} = u,$$

so ist $du/dt = 1/\sigma$ und damit $dt = \sigma du$. Die Integration über t von $-\infty$ bis x entspricht dann der Integration über u von $-\infty$ bis $(x-\mu)/\sigma$. Es ist also

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} du e^{-u^2/2} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (3.58)$$

und

$$P(a < X \leq b) = G(b) - G(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \quad (3.59)$$

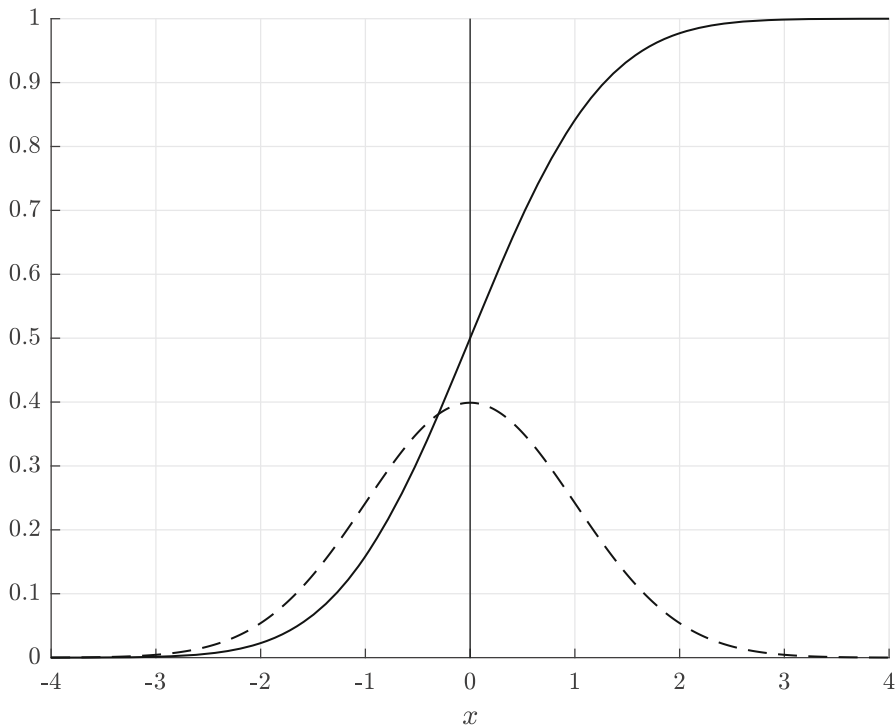


Abb. 3.3 Das Integral der Normalverteilung mit Mittelwert $\mu = 0$ und Standardabweichung $\sigma = 1$, der sog. (0, 1)-Verteilung, ergibt die Verteilungsfunktion $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x du e^{-u^2/2}$. Die Werte dieser Verteilungsfunktion sind vertafelt bzw. sie können numerisch berechnet werden

Von besonderer praktischer Bedeutung sind die Wahrscheinlichkeiten für eine Abweichung der Zufallsvariablen X um σ , 2σ , 3σ vom Mittelwert μ , d. h.

$$\begin{aligned} P_{\sigma} &= P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = \Phi(1) - \Phi(-1) \\ P_{2\sigma} &= P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = \Phi(2) - \Phi(-2) \\ P_{3\sigma} &= P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Wir ermitteln ihre Werte numerisch mithilfe der Trapezregel mit $n = 100$, siehe (1.14):

$$P_{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 du e^{-u^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{50} \left(e^{-1/2} + \sum_{k=1}^{99} e^{-(1 + \frac{k}{50})^2/2} \right) = 0.68267, \quad (3.61)$$

also

$$P_{\sigma} \approx 68.3 \%. \quad (3.62)$$

Analog erhält man

$$P_{2\sigma} \approx 95.4 \% \quad (3.63)$$

$$P_{3\sigma} \approx 99.7 \%. \quad (3.64)$$

Die Wahrscheinlichkeit, die Zufallsvariable innerhalb des 1σ -Intervalls um den Mittelwert μ vorzufinden, ist also gleich 68.3 %, für das 2σ -Intervall beträgt sie 95.4 % und für das 3σ -Intervall bereits 99.7 %.

Lesehilfe

Die 68.3 % sind „berühmt“. Diese Zahl spielt eine wichtige Rolle in der Fehlerlehre, vielleicht hattest du schon mit ihr zu tun. Und diese Zahl lässt sich tatsächlich nur numerisch ermitteln, wie in (3.61) oder auch anhand von (3.69).

- **Antwort auf Zwischenfrage (7)** Gefragt war, warum $\Phi(\infty) = 1$ und $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ gilt.

Die Funktion

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z du e^{-u^2/2}$$

ist das unbestimmte Integral über die spezielle Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$, aber nach wie vor über eine Normalverteilung. Für jede Normalverteilung g gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1,$$

somit ist auch $\Phi(\infty) = 1$.

Nun ist

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2/2} = \int_{-\infty}^z du e^{-u^2/2} + \int_z^{\infty} du e^{-u^2/2},$$

also

$$1 - \Phi(z) = \int_z^{\infty} du e^{-u^2/2} = - \int_{\infty}^z du e^{-u^2/2}.$$

Nun substituieren wir $u =: -\tilde{u}$. Damit ist $u^2 = \tilde{u}^2$ und $du = -d\tilde{u}$ und wir erhalten

$$-\int_{u=-\infty}^z du e^{-u^2/2} = \int_{\tilde{u}=-\infty}^{-z} d\tilde{u} e^{-\tilde{u}^2/2} = \Phi(-z).$$

Die Beziehung $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ geht letztlich darauf zurück, dass der Integrand $e^{-u^2/2}$ gerade ist, also achsensymmetrisch zur Hochachse.

Weitere Definitionen und Formeln für die Verteilungsfunktion

In Zusammenhang mit der Verteilungsfunktion (3.56) werden oft auch die folgenden Funktionen verwendet:

$$\Phi_0(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z du e^{-u^2/2} = \Phi(z) - \frac{1}{2} \quad (3.65)$$

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z du e^{-u^2} = 2\Phi_0(\sqrt{2}z). \quad (3.66)$$

Für die Funktion erf lässt sich die folgende Darstellung als absolut konvergente Reihe angeben:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!(2k+1)}. \quad (3.67)$$

Lesehilfe

Bei Φ_0 beginnt das unbestimmte bei 0 statt bei $-\infty$, wie es bei Φ der Fall ist. Sie unterscheiden sich daher um die halbe Gesamtfläche, also um $1/2$.

Die Bezeichnung „erf“ steht für „error function“. Diese Bezeichnung zeigt an, dass die Verteilungsfunktion im Zusammenhang mit der Fehlerlehre eine zentrale Bedeutung besitzt.

Die Wahrscheinlichkeit $P_\sigma = \Phi(1) - \Phi(-1)$ kann somit auch wie folgt berechnet werden:

$$P_\sigma = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi_0(1) - \Phi_0(-1) = 2\Phi_0(1) = \operatorname{erf}\left(1/\sqrt{2}\right). \quad (3.68)$$

Nun ist

$$\left(1/\sqrt{2}\right)^{2k+1} = \left(1/\sqrt{2}\right)^{2k} \left(1/\sqrt{2}\right) = \frac{(1/2)^k}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^k \sqrt{2}},$$

sodass sich anhand von (3.67) die folgende Reihendarstellung für P_σ angeben lässt:

$$P_\sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)2^k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} \pm \dots \right]. \quad (3.69)$$

Der Wert für P_σ kann somit auch über diese Reihe ermittelt werden. Für die ausgeschriebenen ersten vier Glieder etwa ergibt sich

$$P_\sigma \approx 0.7979 \left[1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} \right] \approx 0.6825.$$

Natürlich lässt sich die Güte des Ergebnisses durch Hinzunehmen weiterer Reihenglieder problemlos verbessern.

3.7 Normalverteilung und Messprozess*

Wegen der großen praktischen Bedeutung für Naturwissenschaft und Technik wollen wir uns losgelöst von der Integralrechnung in diesem Abschnitt ansehen, inwiefern die Normalverteilung Grundlage für die Beschreibung von Messprozessen ist.

Die *Messung einer Größe* wird dazu als Zufallsexperiment betrachtet. Die Zufallsvariable X entspricht dem Messergebnis, und wird die Messung n -mal ausgeführt, so erhalten wir die Messergebnisse x_1, x_2, \dots, x_n .

Lesehilfe

Die Begriffe „Messung“ und „Zufall“ scheinen zunächst vielleicht nicht zusammenzupassen. Bei vernünftiger Messmethode liegen die Messwerte natürlich allesamt in der Nähe des wahren Werts. Aber ihre Streuung um den wahren Wert erfolgt zufällig.

3.7.1 Streuung von Messwerten

Geht man von einer Messung mit nur statistischen Abweichungen⁵ aus, so streuen die Messwerte um den *wahren* Wert x_w , der allerdings unbekannt ist. Als Maß für die Streuung der Messwerte x_i , $i = 1, \dots, n$, verwendet man normalerweise die *mittlere quadratische Abweichung*⁶

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_w)^2. \quad (3.70)$$

⁵ Es sollen also keine systematischen Abweichungen vorliegen, die aus einer fehlerhaften Messmethode entstehen und die Messwerte in systematischer Weise beeinflussen.

⁶ Man könnte auch an die Summe der Beträge, also eine „mittlere Abweichung“ $|s| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - x_w|$ denken, was aber aufgrund der Beträge rechentechnisch unvorteilhafter ist.

Aufgrund des unbekannten Werts von x_w kann diese Summe nicht unmittelbar berechnet werden. Bekannt ist allerdings der *Mittelwert* der Messergebnisse,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (3.71)$$

und wir werden nun sehen, dass sich die Summe (3.70) unter Verwendung von \bar{x} näherungsweise berechnen lässt: Zunächst ist

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_w)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - x_w)]^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_w)^2 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\bar{x} - x_w) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - x_w)^2 + \underbrace{\frac{2}{n} (\bar{x} - x_w) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}_{(*)}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Lesehilfe

Für die zweite Zeile wurde einfach die binomische Formel verwendet. Ferner ist $\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_w)^2 = n(\bar{x} - x_w)^2$, weil die Summanden gar nicht von i abhängen und daher n -mal derselbe Summand dasteht.

Die Summe (*) ist nichts anderes als die Summe der Abweichungen vom Mittelwert; diese ist aber gleich 0:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x} \stackrel{(3.71)}{=} 0.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} (\bar{x} - x_w)^2 &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{n} x_w \right)^2 = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_w) \right]^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \left[(x_1 - x_w)^2 + (x_2 - x_w)^2 + \dots + (x_n - x_w)^2 \right. \\ &\quad + 2(x_1 - x_w)(x_2 - x_w) + 2(x_1 - x_w)(x_3 - x_w) + \dots \\ &\quad \left. + \dots + 2(x_{n-1} - x_w)(x_n - x_w) \right]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Lesehilfe

Hier wurde wieder so etwas wie die binomische Formel verwendet, diesmal aber für eine Summe, die aus n Summanden besteht. Wenn du dir das einmal langsam aufschreibst für drei oder vier Summanden, wirst du sehen, dass das für n Summanden praktisch genauso funktioniert wie in der bekannten Formel für zwei Summanden.

► **Zwischenfrage (8)** Warum ist $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{n} x_w\right)^2 = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_w)\right]^2$?

Wenn die Messwerte x_i statistisch verteilt sind, sind die positiven und negativen Abweichungen gleichverteilt, sodass die gemischten Terme in (3.73), die diese Vorzeichen enthalten, sich ungefähr aufheben und jedenfalls viel kleiner sind als die Summe der Quadrate, bei denen die Vorzeichen keine Rolle spielen; wir haben daher

$$(\bar{x} - x_w)^2 \approx \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_w)^2,$$

was nach (3.70) gleichbedeutend ist mit

$$(\bar{x} - x_w)^2 \approx \frac{s^2}{n}.$$

Gleichung (3.72) führt damit auf

$$s^2 \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \frac{s^2}{n}$$

und Auflösen nach s^2 ergibt schließlich die wichtige Formel

$$s^2 \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (3.74)$$

Im Unterschied zur Definition (3.70) erlaubt (3.74) die (näherungsweise) Berechnung der mittleren quadratischen Abweichung aus den Messwerten. Ihre Wurzel

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.75)$$

nennt man die *Standardabweichung der Messwerte*.

- **Antwort auf Zwischenfrage (8)** Gefragt war nach $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{n} x_w\right)^2 = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_w)\right]^2$.

Wir schreiben das langsam auf:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{n} x_w\right)^2 = \left(\frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i - n x_w\right]\right)^2 = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n x_i - n x_w\right]^2.$$

Schreibt man nun etwas künstlich $n x_w = \sum_{i=1}^n x_w$, so hat man

$$\frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n x_i - n x_w\right]^2 = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_w\right]^2 = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_w)\right]^2.$$

3.7.2 Normalverteilung der Einzelmessung

Geht man nun davon aus, dass die Messwerte x_1, \dots, x_n *normalverteilt* sind, so möchte man die Parameter μ und σ der ihnen entsprechenden Normalverteilung

$$g(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (3.76)$$

abschätzen.

Naheliegenderweise wird man den Mittelwert μ der Verteilung mit dem Mittelwert der Stichprobe gleichsetzen:

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Das zweite wichtige Maß einer Verteilung ist ihre „Streubreite“, d. h. die mittlere Abweichung der Stichprobe vom Mittelwert. In der Theorie der Wahrscheinlichkeitsverteilungen verwendet man die *Varianz* σ^2 als Maß für die Abweichungen vom Mittelwert: *Die Varianz ist der Erwartungswert der mittleren quadratischen Abweichung*. Sie kann daher durch s^2 abgeschätzt werden:

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Nun erinnern wir uns, dass die Normalverteilung (3.76) einen Parameter namens σ besitzt. Berechnet man nun die Varianz der Normalverteilung, so stellt man fest, dass *die Normalverteilung tatsächlich die Varianz σ^2 besitzt*.⁷ Ihr Parameter hat also den „richtigen“ Namen.

⁷ Die Varianz einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist definiert als $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 g(x) dx$. Für die Normalverteilung (3.76) ergibt dieses Integral den Wert σ^2 . (Das Integral kann durch partielle Integration, wobei der Integrand in „ $x \cdot x e^{-x^2}$ “ aufgeteilt wird, und unter Verwendung der Normierung berechnet werden.)

Wir haben somit folgendes Ergebnis: *Normalverteilte Messwerte x_1, \dots, x_n werden durch eine Normalverteilung (3.76) mit den Parametern*

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.77)$$

$$\sigma \approx s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.78)$$

beschrieben.

Daraus ergibt sich insbesondere:

Bei einer erneuten Messung unter denselben Bedingungen liegt das Messergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3 % im Bereich $\bar{x} \pm s$.

Histogramm

Führt man eine Messung n -mal durch, so erhält man n Messergebnisse x_i . Abhängig von der Genauigkeit des Messgeräts kann es durchaus sein, dass man dabei n verschiedene Einzelergebnisse erhält, oder es werden Messergebnisse mehrfach erhalten. Unabhängig davon lässt sich der Zusammenhang mit der Normalverteilung graphisch erkennen, wenn man die X -Achse geeignet in gleich lange Intervalle aufteilt und die Anzahl der Messungen als Säule über den Intervallen aufträgt; man erstellt also ein *Histogramm*, d. h. eine graphische Darstellung der Häufigkeitsverteilung. Dieses Histogramm nähert sich bei einer idealen Messung bei zunehmender Anzahl an Messwerten immer besser der Normalverteilung mit den Parametern (3.77) und (3.78) an, siehe Abb. 3.4.

3.7.3 Varianz des Mittelwerts

Als Ergebnis einer Messreihe, also der n -maligen Messung einer Größe mit derselben Methode, wird oft der Mittelwert angegeben als die beste Näherung für den wahren Wert. Dabei wird man davon ausgehen können, dass der Mittelwert eine umso bessere Näherung ist, je mehr Einzelmessungen ausgeführt werden, je größer also n wird. Auf Ebene des Histogramms kann man sich das wie folgt vorstellen: Je mehr Messungen vorliegen, und je kleiner man die Intervalle wählt, umso präziser lässt sich durch die Säulen eine Glockenkurve festlegen. Auch die Lage ihres Zentrums wird damit immer genauer festgelegt. Die Breite der Kurve wird dabei zwar nach wie vor durch die Standardabweichung s der Messung bestimmt, die gar nicht von der Anzahl der Einzelmessungen abhängt, sondern lediglich von der Präzision des Messprozesses als solchem. Die Genauigkeit der Lage des Zentrums der Kurve aber wird immer größer und hängt damit von n ab.

Die Varianz des Mittelwerts ist komplizierter zu ermitteln als die Varianz der Einzelmessung. Dazu müssen – anders als bisher – die n Einzelmessungen als n



Abb. 3.4 Histogramm einer fiktiven Messreihe mit n Einzelmessungen. Die Messergebnisse werden in Intervallen zusammengefasst, über denen ihre relative Häufigkeit, d. h. die absolute Häufigkeit geteilt durch n , aufgetragen wird. Bei zunehmender Anzahl an Einzelmessungen und kleiner werdenden Intervallgrößen nähert sich das Histogramm so der Normalverteilung mit den Parametern $\mu = \bar{x}$ (hier gleich 4) und $\sigma = s$ (hier 1) an

unterschiedliche Zufallsvariable X_1, \dots, X_n betrachtet werden. Der Mittelwert

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \quad (3.79)$$

ergibt sich dann aus einer *Summe normalverteilter Zufallsvariablen*. Für diese Summe gilt (was wir an dieser Stelle ohne Nachweis glauben wollen):

Es seien X_1, \dots, X_n unabhängige normalverteilte Zufallsvariable mit den Mittelwerten μ_1, \dots, μ_n und den Varianzen $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$. Dann ist auch die Zufallsvariable

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

normalverteilt und für ihren Mittelwert $\bar{\mu}$ und ihre Varianz $\bar{\sigma}^2$ gilt

$$\bar{\mu} = \frac{1}{n}(\mu_1 + \dots + \mu_n), \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n^2}(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2).$$

Für unseren Zweck bedeutet das: Wir haben es mit n gleichverteilten Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n zu tun, die – da es sich immer um denselben wiederholten Messprozess handelt – alle dieselbe Varianz σ^2 besitzen. Ihr Mittelwert (3.79) besitzt daher die Varianz

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{1}{n} \sigma^2,$$

was übertragen auf die Standardabweichung bedeutet

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (3.80)$$

Das wichtige Ergebnis also ist: *Die Standardabweichung des Mittelwerts wird mit größer werdender Anzahl n der Messungen mit dem Faktor $1/\sqrt{n}$ kleiner.*

Auch ohne die Genauigkeit der Einzelmessung zu erhöhen, was einem kleineren σ entspräche, kann also durch oftmaliges Messen – zumindest theoretisch – der Fehler für den Mittelwert beliebig klein werden.

Allerdings bedeutet das *nicht*, dass eine Messung tatsächlich beliebig genau werden kann. Die obigen Aussagen beziehen sich nämlich nur auf den rein stochastischen Fehler. Tatsächlich weist aber jede reale Messung auch systematische Fehler auf, die auch bei hoher stochastischer Genauigkeit bestehen bleiben. Das Ergebnis wird also durch eine höhere Anzahl an Messungen nur verbessert, solange der stochastische Fehler die Hauptfehlerquelle darstellt.

Lesehilfe

Du musst hier sauber unterscheiden: σ ist die Varianz der Einzelmessung. Sie hängt an der Messmethode, beispielsweise am verwendeten Messgerät. Eine erneute Einzelmessung besitzt immer wieder diese Varianz.

Die Varianz $\bar{\sigma}$ hingegen ist die Varianz des Mittelwerts, der sich aus n Einzelmessungen ergibt. Sie lässt sich verkleinern, wenn mehr Messungen durchgeführt werden, wenn also n vergrößert wird.

Übrigens findet das in Messgeräten manchmal automatisch statt: In modernen Laserentfernungsmessern beispielsweise wird eine Streckenmessung vom Gerät vielfach ausgeführt, bis die Varianz $\bar{\sigma}$ ein bestimmtes vorgegebenes Maß unterschreitet. Der Messwert erhält so die gewünschte Genauigkeit.

Das Wichtigste in Kürze

- Das Integral ist **linear**.
- Bei der **Substitutionsregel** der Integration handelt es sich um die Umkehrung der Kettenregel der Differenziation. Bei ihr wird die Integrationsvariable durch eine andere ersetzt. Diese Substitution muss auch für das Differenzial durchgeführt werden.

- Die **partielle Integration** entstammt der Produktregel der Differenziation. Bei ihr wird ein Integral durch ein anderes ersetzt, von dem man hofft, dass es leichter als das ursprüngliche zu lösen ist.
- Integrationen können mit erheblichem Aufwand verbunden sein: Kompliziertere Integrale können auf einfachere zurückgeführt werden, es können sich Rekursionsformeln ergeben usw.
- Integrale können in einer **Integraltafel** nachgeschlagen werden.
- Nicht sämtliche Integrale sind elementar lösbar. Numerische Integration ist stets möglich.
- Die **Normalverteilung** ist nicht elementar integrierbar. Ihr uneigentliches Integral von $-\infty$ bis ∞ hat den Wert 1.
- Misst man eine Größe mit derselben Methode n -mal, so **streuen die Messergebnisse** unter idealen Bedingungen statistisch um den unbekannten wahren Wert.*
- Die **mittlere quadratische Abweichung** s^2 ist ein Maß für die Streuung. Bei statistischer Streuung kann sie mithilfe des Mittelwerts der Messwerte näherungsweise berechnet werden.*
- Unterliegt die Messung rein statistischer Streuung, so kann man davon ausgehen, dass die Messwerte **normalverteilt** sind. Die Parameter der Normalverteilung können mit $\mu \approx \bar{x}$ und $\sigma \approx s$ geschätzt werden.*
- Auch der **Mittelwert einer Messung** – als resultierende Messgröße aufgefasst – ist normalverteilt. Seine Standardabweichung sinkt mit wachsendem n .* ◀

Und was bedeuten die Formeln?

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx,$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt, \quad dg(x) = g'(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x^2)x dx = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} f(t) dt, \quad \int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| \Big|_a^b,$$

$$\int_a^b \tan x dx = -\ln |\cos x| \Big|_a^b, \quad \int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x),$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} & \text{für } 4ac - b^2 > 0 \\ -\frac{2}{2ax+b} & \text{für } 4ac - b^2 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| & \text{für } 4ac - b^2 < 0, \end{cases}$$

$$\int \frac{x \, dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c},$$

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx, \quad \int f'g \, dx = fg - \int fg' \, dx,$$

$$\int_a^b \ln x \, dx = x(\ln x - 1) \Big|_a^b, \quad \int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2),$$

$$\int e^{ax} \cos(kx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + k^2} (a \cos(kx) + k \sin(kx)),$$

$$I_n = \int \sin^n x \, dx, \quad I_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad M(\sin^4) = 3/8,$$

$$\langle \sin_k, \cos_l \rangle := \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(lx) \, dx = 0 \quad \text{für alle } k, l \in \mathbb{N},$$

$$U = 4a \int_0^{\pi/2} dt \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} = 4a E(e, \pi/2),$$

$$g(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dx = 1,$$

$$G(x) := \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x dt e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2},$$

$$P(a < X \leq b) = G(b) - G(a) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_a^b dt e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2},$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z du e^{-u^2/2}, \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z),$$

$$G(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad P_\sigma = P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = \Phi(1) - \Phi(-1),$$

$$P_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 du e^{-u^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{50} \left(e^{-1/2} + \sum_{k=1}^{99} e^{-(-1+\frac{k}{50})^2/2} \right) = 0.68267,$$

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z du e^{-u^2/2} = \Phi(z) - \frac{1}{2}, \quad \operatorname{erf}(z) = 2\Phi_0(\sqrt{2}z),$$

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!(2k+1)}, \quad P_{\sigma} = 2\Phi_0(1) = \operatorname{erf}\left(1/\sqrt{2}\right),$$

$$P_{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)2^k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} \pm \dots \right] \approx 0.6825,$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_w)^2 \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

$$g(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad \text{mit } \mu = \bar{x} \text{ und } \sigma = s, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Übungsaufgaben

A3.1 Berechne die folgenden unbestimmten Integrale, d.h., gib jeweils eine Stammfunktion des Integranden an:

$$F_1(x) = \int \cos(\omega t + \varphi_0) dt, \quad F_2(x) = \int \sin x \cos x dx,$$

$$F_3(x) = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx, \quad F_4(x) = \int \sqrt{7x+3} dx,$$

$$F_5(x) = \int x^2 \sqrt[5]{5x^3+1} dx, \quad F_6(x) = \int 2^{2x+2} dx,$$

$$F_7(x) = \int \frac{x}{3x^2+7} dx, \quad F_8(x) = \int \frac{x^2}{x^2+1} dx.$$

A3.2 Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{c}{a^2 + x^2} \quad \text{mit } a > 0.$$

Bestimme die Konstante $c \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von a so, dass gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

A3.3 Löse das Integral

$$I_a = \int \frac{2-x}{a+x+\frac{1}{4}x^2} dx$$

für beliebige $a \in \mathbb{R}$. Wie lauten speziell die Lösungen für $a = 0, 1, 2$?

A3.4 Berechne die folgenden unbestimmten Integrale, d.h., gib jeweils eine Stammfunktion des Integranden an:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int x^2 e^{-2x} dx, & F_2(x) &= \int \ln(2x) dx, \\ F_3(x) &= \int x \ln x dx, & F_4(x) &= \int \ln^2 x dx, \\ F_5(x) &= \int \frac{x-1}{e^x} dx, & F_6(x) &= \int \cos^3 x dx, \\ F_7(x) &= \int \arcsin x dx, & F_8(x) &= \int x \arctan x dx. \end{aligned}$$

A3.5 Berechne das Integral $F(x) = \int_0^x t^3 e^{-t^2} dt$.

A3.6 Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe jeweils deine Antwort.

- (I) Eine stetige Funktion, die nicht elementar integrierbar ist, besitzt keine Stammfunktion.
- (II) Bei der numerischen Integration, die zur Verteilungsfunktion führt, gibt es kein „+c“ wie bei „normalen“ Stammfunktionen.
- (III) Die Wahrscheinlichkeit, bei einer erneuten Einzelmessung exakt den Mittelwert einer vorhergehenden Messkampagne zu erhalten, ist gleich 0.
- (IV) Eine kleinere Standardabweichung bedeutet eine genauere Messmethode.

A3.7 a) Wie kann die Wahrscheinlichkeit $P_{q\sigma}$ ($q > 0$), ein Messergebnis im Bereich von $\pm q\sigma$ um den Mittelwert vorzufinden, durch die Funktion erf und ihre Reihendarstellung ausgedrückt werden? Reicht es für ein numerisch genaues Ergebnis aus, nur die ersten Glieder der Summe zu berücksichtigen?

b) Die Messung einer normalverteilten Größe werde mit einem gegebenen Messverfahren zehnmal ausgeführt. Dabei erhalte man einen Mittelwert von 100 mit einer Standardabweichung von 5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer erneuten Einzelmessung einen Wert > 105 zu erhalten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einer neuen Messkampagne einen Mittelwert > 105 zu erreichen? Spielt es dabei eine Rolle, aus wie vielen Einzelmessungen die neue Messkampagne besteht?

Hinweis

In diesem Kapitel wird mit der Fourier-Entwicklung ein wichtiges Beispiel zur Anwendung von Integralen entwickelt. Allerdings werden seine Ergebnisse im weiteren Verlauf des Buchs nicht benötigt. Sofern die Fourier-Entwicklung für dich nicht von Interesse ist, kannst du direkt zu Kap. 5 übergehen.

In Wissenschaft und Technik hat man es oft mit periodischen Erscheinungen zu tun, also mit Vorgängen, die sich nach einer bestimmten *Periodendauer* wiederholen. Man kann hier an Schwingungs- oder Wellenerscheinungen denken, an Wechselstrom, an Zyklen in wirtschaftlichen Modellen usw. Solche Vorgänge werden mathematisch beschrieben durch *periodische Funktionen*.

Der „Prototyp“ einer periodischen Funktion ist die Sinus- bzw. Cosinusfunktion. Die Fourier-Entwicklung erlaubt es nun, eine *beliebige* periodische Funktion als *Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen* darzustellen. Dies entspricht einer *Spektralzerlegung* des periodischen Vorgangs, also einer Zerlegung in seine Grund- und Oberschwingungen.

Die Formulierung der Fourier-Reihe erfolgt mithilfe von Integralen. Insbesondere sind die Fourier-Koeffizienten als Integrale definiert. Wir werden daher unser Wissen aus den vorangegangenen Kapiteln für diese wichtige Anwendung nutzen können.

Neben den Fourier-Reihen gibt es auch Fourier-Integrale. Bei ihnen hat man es nicht mehr mit periodischen Funktionen zu tun. Wir werden abschließend zumindest einen Ausblick in dieses theoretisch anspruchsvollere Themenfeld geben.

Lesehilfe

Die wichtigen Zusammenhänge und Integrale in diesem Kapitel werden alle reell sein. Für manche Formeln und Definitionen im Zusammenhang mit der Fourier-Entwicklung ist aber auch die komplexe Schreibweise bedeutsam. Die Abschnitte, in denen komplexe Zahlen auftreten, sind mit einem Stern* gekennzeichnet. Sie enthalten Lesehilfen zu den komplexen Zahlen und sollten daher auch verständlich sein, wenn du bisher noch wenig mit komplexen Zahlen zu tun hattest.

Wozu dieses Kapitel im Einzelnen

- Periodische Funktionen wiederholen sich nach ihrer Periodendauer. Wir sehen uns an, was das heißt, und warum die Periodendauer 2π besonders einfach ist.
- Sinusfunktionen kann man addieren und erhält dann Funktionen, die gar nicht mehr nach Sinus aussehen. Das ergibt die Idee der Fourier-Entwicklung.
- „Trigonometrische Polynome“ haben auf den ersten Blick nicht viel mit Polynomen zu tun. Aber der zweite Blick wird uns den Namen erschließen, auch wenn wir uns dazu ein wenig mit komplexen Zahlen befassen müssen.
- Die Formeln für trigonometrische Polynome sind dieselben wie für die Fourier-Reihe. Trotzdem ist dann manches anders und wir müssen uns die Unterschiede genau ansehen.
- Das „Fundamentalbeispiel“ ist ein „Sägezahn“. An ihm werden wir alle wichtigen Aspekte einer Fourier-Reihe erkennen können.
- Das Fourier-Integral ist etwas anderes als die Fourier-Reihe. Aber es geht aus ihr als eine Art Grenzwert hervor. Wir werden uns ansehen, was damit gemeint ist.*

4.1 Periodische Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *periodisch* mit der *Periode* $T > 0$, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(t + T) = f(t).$$

Natürlich gilt dann auch $f(t + nT) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

Lesehilfe

Hier und im Folgenden sind oft auch komplexe Zahlen \mathbb{C} als Wertemenge der Funktionen zugelassen. Da reelle Zahlen eine Teilmenge der komplexen Zahlen sind, sind natürlich die reellen Funktionen darin enthalten und du kannst auch gedanklich zunächst einfach bei reellen Zahlen bleiben ;-)

Besonders wichtige periodische Funktionen sind die Sinus- und Cosinusfunktionen. So handelt es sich z. B. bei der Funktion f_1 , die gegeben wird durch

$$f_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{mit } \omega := \frac{2\pi}{T} \text{ und } A_1, \varphi_1 \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

um eine Funktion mit der Periode T . Sie stellt eine beliebige Sinusfunktion mit der „Grundfrequenz“¹ ω dar. Aber auch die Funktionsvorschriften

$$\begin{aligned} f_2(t) &= A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) \\ f_3(t) &= A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) \\ f_4(t) &= A_4 \sin(4\omega t + \varphi_4) \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

mit ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz ω besitzen die Periode T , ebenso wie die konstante Funktion f_0 ,

$$f_0(t) = A_0.$$

- **Zwischenfrage (1)** Warum ist beispielsweise $f_3(t) = A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3)$ mit $\omega = 2\pi/T$ periodisch mit der Periode T ? Und mit welcher Periode ist $f_0(t) = A_0$ periodisch?

Bekanntlich ergibt die Addition verschiedener Sinus- oder Cosinusfunktionen *mit derselben Frequenz* stets wieder eine Sinusfunktion. Addiert man jedoch Funktionen des obigen Typs, bildet also eine Summe

$$s(t) = f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t) + \dots, \quad (4.2)$$

so ergeben sich – natürlich abhängig von den Amplituden A_i und den Phasenverschiebungen φ_i – ganz andere, allerdings immer noch periodische Funktionen mit der Periode T , siehe Abb. 4.1.

¹ Tatsächlich handelt es sich hier um eine „Kreisfrequenz“. Eine Frequenz $f = 1/T$ entspricht der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$. Wir wollen trotzdem etwas ungenau ω einfach als „Frequenz“ ansprechen.

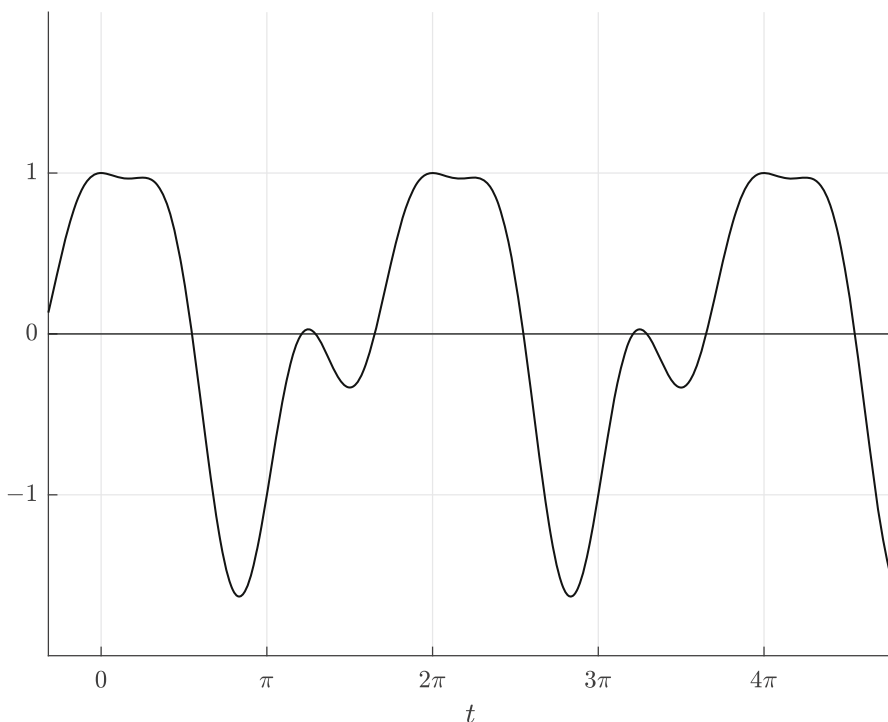


Abb. 4.1 Die Sinusfunktionen $t \mapsto \sin(t + \pi/2)$, $t \mapsto \frac{1}{2} \sin(2t)$, $t \mapsto -\frac{1}{3} \sin(3t)$ sind periodisch mit der Periode 2π . Ihre Überlagerung $t \mapsto \sin(t + \pi/2) + \frac{1}{2} \sin(2t) - \frac{1}{3} \sin(3t)$ ist daher ebenfalls periodisch mit derselben Periode, weicht aber in ihrem Aussehen bereits stark von einer Sinusfunktion ab

Lesehilfe

Noch einmal kurz zu ein paar Sprechweisen im Zusammenhang mit Sinusfunktionen:

Das Argument eines Sinusausdrucks $\sin(\omega t + \varphi)$ bezeichnet man auch als „Phase“ und φ dabei als „Anfangsphase“ oder „Phasenverschiebung“, weil $\sin(\omega t + \varphi)$ um φ gegen $\sin(\omega t)$ verschoben ist.

Es ist $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2)$, der Cosinus ist daher auch eine (verschobene) „Sinusfunktion“.

Die Summe zweier (und damit beliebig vieler) Sinusfunktionen mit derselben Frequenz ergibt wieder eine Sinusfunktion dieser Frequenz,

$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = B \sin(\omega t + \psi),$$

mit neuer Amplitude B und neuer Anfangsphase ψ , aber nach wie vor eine Sinusfunktion mit derselben Frequenz ω .

Idee der Fourier-Entwicklung

Summen von Sinusfunktionen des Typs (4.2) ergeben periodische Funktionen, die allerdings einer Sinusfunktion schon bei wenigen Summanden i. Allg. nicht mehr ähnlich sehen, sondern abhängig von der Wahl der Amplituden A_i und der Anfangsphasen φ_i scheinbar willkürliche Formen annehmen können. Umgekehrt kann man sich nun die Frage stellen, ob es möglich ist, eine *beliebig vorgegebene periodische Funktion* f mit geeigneter Wahl der A_i und φ_i als eine endliche oder unendliche Summe des Typs (4.2) darzustellen. Man sucht dann also eine Darstellung

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k). \quad (4.3)$$

Genau dies ist die Idee der *Fourier-Entwicklung*. Üblicherweise zerlegt man die Funktion dabei jedoch getrennt in Sinus- und Cosinusanteile ohne zusätzliche Anfangsphasen: Aus dem Additionstheorem für den Sinus folgt

$$\begin{aligned} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) &= A_k [\sin(k\omega t) \cos \varphi_k + \cos(k\omega t) \sin \varphi_k] \\ &= \underbrace{A_k \sin \varphi_k}_{=:a_k} \cos(k\omega t) + \underbrace{A_k \cos \varphi_k}_{=:b_k} \sin(k\omega t), \end{aligned}$$

sodass man die gewünschte Reihendarstellung (4.3) auch schreiben kann als

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]. \quad (4.4)$$

Die Fragestellungen der Fourier-Entwicklung lauten also:

- Für welche periodischen Funktionen f ist es möglich, sie in eine Reihendarstellung des Typs (4.4) zu entwickeln?
- Sofern dies möglich ist: Wie lassen sich die Koeffizienten A_0, a_k, b_k berechnen?

Wir werden sehen, dass die Fourier-Entwicklung tatsächlich für eine große Klasse von Funktionen f erfolgen kann. Und da die entsprechenden unendlichen Reihen konvergent sein müssen, ist dabei klar, dass die Entwicklungskoeffizienten a_k, b_k mit wachsendem k schnell kleiner werden. Dies wiederum bedeutet, dass man eine näherungsweise Darstellung der Funktion f erhalten kann, wenn man sich auf eine begrenzte Anzahl von Summanden beschränkt. Hieraus ergibt sich eine Vielzahl von praktischen Anwendungen.

Lesehilfe

Eine unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$ besitzt unendlich viele Summanden s_k . Damit eine solche unendliche Summe einen endlichen Gesamtwert haben kann,

müssen ihre Summanden s_k mit wachsendem k schnell genug gegen 0 gehen. Da in der unendlichen Summe (4.4) die Cosinus- und Sinusterme auch für große k unverändert Werte bis ± 1 aufweisen, müssen somit die Entwicklungskoeffizienten a_k und b_k mit wachsendem k klein werden, wenn die Reihe konvergieren soll.

- **Antwort auf Zwischenfrage (1)** Gefragt war, warum $f_3(t) = A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3)$ mit $\omega = 2\pi/T$ periodisch mit der Periode T ist und mit welcher Periode ist $f_0(t) = A_0$ periodisch ist.

Die Funktion $t \mapsto \sin(\omega t)$ ist periodisch mit der Periode T . Die Funktion $t \mapsto \sin(3\omega t)$ ist dann ebenso periodisch: Sie „läuft genau dreimal schneller“ ab. Eine Anfangsphase φ_3 ändert daran nichts, sie verschiebt die Funktion nur insgesamt nach rechts oder links. Wenn es sein muss, kannst du das mit den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus auch formal nachrechnen:

$$\begin{aligned} f_3(t + T) &= A_3 \sin(3\omega(t + T) + \varphi_3) \\ &= A_3 \left[\sin(3\omega t + 3\omega T) \cos \varphi_3 + \cos(3\omega t + 3\omega T) \sin \varphi_3 \right] \\ &= A_3 \left[\sin(3\omega t) \cos(3\omega T) \cos \varphi_3 + \cos(3\omega t) \sin(3\omega T) \cos \varphi_3 \right. \\ &\quad \left. + \cos(3\omega t) \cos(3\omega T) \sin \varphi_3 - \sin(3\omega t) \sin(3\omega T) \sin \varphi_3 \right]. \end{aligned}$$

Nun ist $\cos(3\omega T) = \cos(3 \cdot 2\pi) = \cos(6\pi) = 1$ und $\sin(3\omega T) = \sin(6\pi) = 0$. Es bleiben daher nur der erste und der dritte Summand erhalten:

$$\begin{aligned} f_3(t + T) &= A_3 \left[\sin(3\omega t) \cos \varphi_3 + \cos(3\omega t) \sin \varphi_3 \right] \\ &= A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) = f_3(t). \end{aligned}$$

Eine konstante Funktion wie $f_0(t) = A_0$ ist periodisch bzgl. jeder beliebigen Periode, denn es ist offenbar $f_0(t + T) = A_0 = f_0(t)$ für alle $T > 0$.

Periode 2π

Durch eine Variablentransformation kann man Funktionen mit der Periode $T > 0$ auf solche mit der Periode 2π zurückführen:

Besitzt die periodische Funktion f die Periode T , so besitzt die Funktion g mit

$$g(x) := f\left(\frac{T}{2\pi} x\right) \quad (4.5)$$

die Periode 2π .

Aus der Funktion g erhält man f zurück durch

$$f(t) = g\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \quad (4.6)$$

Bei der Behandlung periodischer Funktionen kann man sich daher auf den Fall der Periode 2π beschränken. Dadurch wird die Darstellung etwas erleichtert, denn dann ist $\omega = 1$, siehe (4.1).

Im Folgenden wollen wir unter periodischen Funktionen stets solche mit der Periode 2π verstehen.

Lesehilfe

Die Betrachtung periodischer Funktionen mit der Periode 2π und daher mit $\omega = 1$ vereinfacht die Formeln. Es lässt sich alles kürzer aufschreiben :-). Dennoch verliert man nichts: Mittels (4.6) kann bei Bedarf jederzeit zu einer beliebigen Periode T zurückgewechselt werden.

4.2 Trigonometrische Polynome

Wir betrachten zunächst spezielle periodische Funktionen, die *trigonometrischen Polynome*. Bei ihnen handelt es sich um so etwas wie endliche „Fourier-Summen“:

Definition 4.1 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *trigonometrisches Polynom* der Ordnung n , falls sie geschrieben werden kann als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad (4.7)$$

mit reellen Koeffizienten a_0 und $a_k, b_k, k = 1, 2, \dots, n$.

Lesehilfe

Es gibt zwar ein a_0 , aber es gibt kein b_0 . Unter dem Summenzeichen geht es für die a_k und b_k erst bei $k = 1$ los. Der zusätzliche konstante Term wird hier als $a_0/2$ geschrieben, weil sich auf diese Weise a_0 genau wie die a_k darstellen lässt. Das werden wir aber mit (4.10) erst noch sehen.

Trigonometrische Polynome² sind also *endliche* Summen von Cosinus- und Sinusfunktionen mit aufsteigenden Vielfachen der „Grundfrequenz“, die hier wegen der Periode 2π nicht mehr explizit als Faktor ω auftaucht. Mit seinen Summanden ist auch das trigonometrische Polynom f periodisch.

² Die Bezeichnung „trigonometrisches Polynom“ hat ihren Ursprung in der komplexen Version trigonometrischer Polynome. Siehe die Lesehilfe zu Definition (4.2).

4.2.1 Berechnung der Koeffizienten

Gibt man ein beliebiges trigonometrisches Polynom f vor, so sind seine Koeffizienten a_k und b_k eindeutig festgelegt und können aus f berechnet werden. Grundlage dieser eindeutigen „Rückwärtsdarstellung“ sind die Orthogonalitätsrelationen für Sinus und Cosinus,

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(lx) \, dx = 0 \quad (4.8)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(lx) \, dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(lx) \, dx = \pi \delta_{kl} \quad (4.9)$$

für natürliche Zahlen $k, l \geq 1$, siehe Abschn. 3.5.2.

Lesehilfe

Die Orthogonalitätsrelationen

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(lx) \, dx &= \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(lx) \, dx = 0 && \text{für } k \neq l \\ \int_0^{2\pi} \cos^2(kx) \, dx &= \int_0^{2\pi} \sin^2(kx) \, dx = \pi && \text{für } k \geq 1 \end{aligned}$$

können für $k, l \geq 1$ zusammengefasst werden zu der einen Formel

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(lx) \, dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(lx) \, dx = \pi \delta_{kl}.$$

Dabei ist δ_{kl} das *Kronecker-Symbol* mit

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l. \end{cases}$$

Zur Berechnung der Koeffizienten a_k integrieren wir nun das Produkt des trigonometrischen Polynoms

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^n [a_l \cos(lx) + b_l \sin(lx)]$$

mit $\cos(kx)$ über eine Periode:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx &= \underbrace{\frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(kx) \, dx}_{\substack{=2\pi & \text{für } k=0 \\ =0 & \text{sonst}}} \\
 &+ \sum_{l=1}^n \left[\underbrace{a_l \int_0^{2\pi} \cos(lx) \cos(kx) \, dx}_{=\pi \delta_{lk}} + b_l \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(lx) \cos(kx) \, dx}_{=0} \right] \\
 &= \pi a_k \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Lesehilfe

Auf der rechten Seite von (4.10) steht ursprünglich

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^n [a_l \cos(lx) + b_l \sin(lx)] \right) \cos(kx) \, dx.$$

Das Integral und die Multiplikation mit $\cos(kx)$ kann aber in die Summe hineingezogen und konstante Faktoren vor das Integral geschrieben werden.

Nun ergibt die Summe $\sum_{l=1}^n \dots \delta_{lk} \dots$ nur ihren Summanden mit $l = k$. Alle anderen Summanden verschwinden wegen $\delta_{lk} = 0$ für $l \neq k$.

Zur Berechnung der b_k multipliziert man analog mit $\sin(kx)$ und integriert:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx &= \underbrace{\frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \sin(kx) \, dx}_{=0} \\
 &+ \sum_{l=1}^n \left[\underbrace{a_l \int_0^{2\pi} \cos(lx) \sin(kx) \, dx}_{=0} + b_l \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(lx) \sin(kx) \, dx}_{=\pi \delta_{lk}} \right] \\
 &= \pi b_k \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Insgesamt haben wir somit folgendes Ergebnis:

Satz 4.1 *Mit den Bezeichnungen von Definition (4.1) sind die Konstanten a_k , b_k durch die Funktion f eindeutig bestimmt und es gilt*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4.12)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.13)$$

Diese Integralformeln erlauben also die Berechnung der Koeffizienten a_k und b_k , wenn ein beliebiges trigonometrisches Polynom f vorgegeben wird.

Lesehilfe

Hier haben wir bereits die grundlegenden Formeln für eine Fourier-Reihe vor uns. Sie werden letztlich der Kern des gesamten Kapitels sein.

4.2.2 Komplexe trigonometrische Polynome*

Die Cosinus- und Sinusausdrücke $\cos(kx)$ und $\sin(kx)$ der trigonometrischen Polynome (4.7) hängen mittels der *Euler-Formel* eng mit komplexen Exponentialausdrücken zusammen:

$$e^{\pm ikx} = \cos(kx) \pm i \sin(kx). \quad (4.14)$$

Umgekehrt ist

$$\cos(kx) = \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \quad (4.15)$$

$$\sin(kx) = \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx}). \quad (4.16)$$

Periodische Gesetzmäßigkeiten können daher ebenso mittels der Exponentialausdrücke $e^{\pm ikx}$ beschrieben werden, was manchmal von Vorteil ist und auch eine insgesamt kürzere Darstellung erlaubt.

Lesehilfe Euler-Formel

Zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, definiert man die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} := x - iy$. Damit lassen sich Real- und Imaginärteil von z offenbar schreiben als

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Die Euler-Formel besagt nun, dass für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Die speziellen komplexen Zahlen $e^{i\varphi}$ besitzen also den Realteil $\cos \varphi$ und den Imaginärteil $\sin \varphi$. Für die komplexe Konjugation gilt

$$\overline{e^{i\varphi}} = e^{\overline{i\varphi}} = e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi.$$

Kombiniert man diese Zusammenhänge, so erhält man die „inversen“ Euler-Formeln

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}).$$

Auf diese Weise können $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ also als Linearkombinationen der komplexen Exponentialausdrücke $e^{i\varphi}$ und $e^{-i\varphi}$ dargestellt werden.

Es gibt daher auch die *komplexe* Variante trigonometrischer Polynome:

Definition 4.2 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ein (komplexes) trigonometrisches Polynom der Ordnung n , falls sie eine Darstellung der Form

$$f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad (4.17)$$

mit i. Allg. komplexwertigen Koeffizienten c_k besitzt.

Lesehilfe

Hier erklärt sich der Begriff des „trigonometrischen Polynoms“: Die Summe enthält die Terme $e^{ikx} = (e^{ix})^k$, also die Potenzen von e^{ix} bis zur Ordnung n . Wir haben also ein „Polynom“ der „trigonometrischen“ Ausdrücke $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Das komplexe trigonometrische Polynom (4.17) ist deutlich kompakter als die reelle Variante (4.7). Zu beachten ist allerdings, dass seine Summe auch über negative k zu bilden ist.

Mit den Funktionen $x \mapsto e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$, $k \in \mathbb{Z}$, sind natürlich auch die komplexen Polynome periodisch.

Zusammenhang mit reellen trigonometrischen Polynomen

Die reellen trigonometrischen Polynome (4.7) sind in den komplexen Polynomen enthalten, d. h., auch für jene ist eine Darstellung als Summe von Exponentialfunktionen möglich. Verwendet man in (4.7),

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)],$$

die Euler-Formeln

$$\cos(kx) = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) \quad \text{und} \quad \sin(kx) = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}), \quad (4.18)$$

so erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} a_k (e^{ikx} + e^{-ikx}) - \frac{1}{2} i b_k (e^{ikx} - e^{-ikx}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (a_k - i b_k) e^{ikx} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (a_k + i b_k) e^{-ikx}. \end{aligned}$$

Setzt man daher in (4.17)

$$c_0 := \frac{a_0}{2} \quad \text{und} \quad c_k := \frac{1}{2}(a_k - i b_k), \quad c_{-k} := \frac{1}{2}(a_k + i b_k) \quad \text{für } k \geq 1, \quad (4.19)$$

so erhält man das reelle trigonometrische Polynom (4.7). Wir haben damit eine *alternative Darstellung aus komplexwertigen Summanden, die sich zu einer reellen Gesamtfunktion ergänzen*, analog zu den inversen Euler-Formeln (4.15) und (4.16).³ Aufgrund der Exponentialausdrücke anstelle von Sinus und Cosinus ist diese Darstellung rechentechnisch oft von Vorteil.

Orthogonalitätsrelationen und Berechnung der Koeffizienten c_k

Zur Berechnung der Koeffizienten c_k eines komplexen trigonometrischen Polynoms $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ benötigen wir – analog zum Vorgehen im Reellen – Orthogonalitätsrelationen für die Funktionen $x \mapsto e^{\pm ikx}$. Dazu sind Integrationen über komplexwertige Funktionen erforderlich. Sie lassen sich einfach auf reelle Integrale zurückführen:

³ Lässt man im Polynom (4.7) auch komplexwertige Koeffizienten a_k und b_k zu, so kann ein komplexwertiges Polynom f auch in dieser Form dargestellt werden. Der soeben ermittelte Zusammenhang mit den c_k bleibt gültig.

Definition 4.3 Es seien $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen. Die komplexwertige Funktion $z := u + iv : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt integrierbar, falls u und v integrierbar sind. Man setzt dann

$$\int_a^b z(x) dx = \int_a^b (u(x) + iv(x)) dx := \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

Für die Funktionen $x \mapsto e^{ikx}$ mit $k \neq 0$ erhalten wir somit aufgrund der Euler-Formel:

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{ikx} dx &= \int_a^b \cos(kx) dx + i \int_a^b \sin(kx) dx = \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_a^b + i \frac{1}{k} (-\cos(kx)) \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{ik} \left(i \sin(kx) \Big|_a^b + \cos(kx) \Big|_a^b \right) = \frac{1}{ik} e^{ikx} \Big|_a^b. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Lesehilfe

Dies entspricht genau der Regel $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$, wie wir sie aus dem Reellen kennen.

Speziell erhalten wir:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}^*. \quad (4.21)$$

- **Zwischenfrage (2)** Warum ist $\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}^*$? Und was ist mit $k = 0$?

Aus (4.21) ergeben sich die *Orthogonalitätsrelationen* für die Funktionen $e_k : x \mapsto e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, auf dem Intervall $[0, 2\pi]$: Da es sich um komplexwertige Funktionen handelt, wird das Skalarprodukt in diesem Funktionenraum definiert als

$$\langle e_k, e_l \rangle := \int_0^{2\pi} \overline{e_k(x)} e_l(x) dx = \int_0^{2\pi} e^{-ikx} e^{ilx} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(l-k)x} dx,$$

d. h., es ist

$$\langle e_k, e_l \rangle = 2\pi \delta_{kl}. \quad (4.22)$$

Für $k \neq l$ sind die Funktionen e_k und e_l also *orthogonal* zueinander.

Lesehilfe

In komplexen Funktionenräumen wird das Skalarprodukt zweier Funktionen f und g definiert als

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx,$$

es wird also die erste Funktion komplex konjugiert in das Integral geschrieben. Diese allgemeine Definition gilt übrigens auch für reelle Funktionen: Bei ihnen wirkt sich die komplexe Konjugation nicht aus.

Nun ist $\overline{e^{ikx}} = e^{-ikx}$ und daher

$$\langle e_k, e_l \rangle = \int_0^{2\pi} e^{i(l-k)x} dx.$$

Dieses Integral ist gleich 0 für $l - k \in \mathbb{Z}^*$. Es ist also nur ungleich 0 für $l = k$ und hat dann den Wert 2π . Das ist die Aussage von (4.22).

Analog zum reellen Vorgehen in (4.10) und (4.11) lassen sich die Koeffizienten c_k eines komplexen trigonometrischen Polynoms

$$f(x) = \sum_{l=-n}^n c_l e^{ilx}$$

nun einfach berechnen, indem man es mit e^{-ikx} multipliziert und über eine Periode integriert:

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \sum_{l=-n}^n c_l \int_0^{2\pi} e^{ilx} e^{-ikx} dx = \sum_{l=-n}^n c_l \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(l-k)x} dx}_{2\pi \delta_{lk}} = 2\pi c_k.$$

Wir haben also das Ergebnis:

Satz 4.2 *Mit den Bezeichnungen von Definition (4.2) sind die Konstanten c_k durch die Funktion f eindeutig bestimmt und es gilt*

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (4.23)$$

Wir haben hier das Analogon zu den Beziehungen (4.12) und (4.13). Wie man sieht, fällt die komplexe Darstellung im Vergleich deutlich kürzer aus.

Lesehilfe

Die komplexe Darstellung ist tatsächlich wesentlich kürzer. Aber natürlich nur dann, wenn man die zusätzlichen Erläuterungen zu komplexen Zahlen nicht benötigt und weglassen kann ;-)

- **Antwort auf Zwischenfrage (2)** Gefragt war nach $\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = 0$ für $k \in \mathbb{Z}^*$ nach $k = 0$.

Nach (4.20) ist

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \frac{1}{ik} \left(i \sin(kx) \Big|_0^{2\pi} + \cos(kx) \Big|_0^{2\pi} \right).$$

Nun ist $\sin(kx) \Big|_0^{2\pi} = 0$ und $\cos(kx) \Big|_0^{2\pi} = 0$ für $k \in \mathbb{Z}^*$, also auch für negative ganzzahlige k .

Für $k = 0$ haben wir

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \int_0^{2\pi} e^0 dx = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dx = 2\pi.$$

4.3 Fourier-Reihen

Bei den trigonometrischen Polynomen handelt es sich um periodische Funktionen, die *exakt* durch eine *endliche* Fourier-Summe dargestellt werden. Je größer ihre Ordnung ist, umso größer ist dabei die Bandbreite der Funktionen.

Im Folgenden betrachten wir nun *beliebige* periodische Funktionen f . Für diese wollen wir dieselben Zusammenhänge wie für trigonometrische Polynome annehmen, wobei die Reihenentwicklung jetzt bis ins Unendliche ausgedehnt wird. Wir werden sehen, dass sich auf diese Weise eine Fourier-Reihe der Funktion f erhalten lässt, die gegen die Funktion konvergiert.

4.3.1 Definition und Hauptsatz

Definition 4.4 Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine periodische, auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare Funktion. Dann heißen die Zahlen

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad \text{für } k \in \mathbb{N}^*$$

die Fourier-Koeffizienten von f und die Reihe

$$\mathcal{F}[f](x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

die Fourier-Reihe⁴ von f .⁵

Die Fourier-Reihe lässt sich auch schreiben in der komplexen Form

$$\mathcal{F}[f](x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Lesehilfe

Hier ist von periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die Rede. Tatsächlich funktioniert die Fourier-Entwicklung für komplexwertige Funktionen ebenso wie für reellwertige.

Für reelle Funktionen f wird man natürlich zunächst an die Verwendung der reellen Fourier-Reihe denken. Aber manchmal kann es auch für reelle f sinnvoll sein, sie in eine komplexe Fourier-Reihe zu entwickeln.

Es ist wichtig, zwischen der Funktion f und ihrer Fourier-Reihe $\mathcal{F}[f]$ zu unterscheiden. Zwar werden wir sehen, dass die Fourier-Reihe in gewisser Weise gegen f konvergiert, sie ist aber dennoch i. Allg. nicht identisch mit f .

Zur Formulierung der zentralen Aussage über Fourier-Reihen benötigen wir zunächst einen passenden Konvergenzbegriff:

Definition 4.5 Es seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, periodische, über dem Intervall $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare Funktionen. Man sagt, die Funktionenfolge (f_n) konvergiere im quadratischen Mittel gegen f , falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - f_n(x)|^2 dx = 0.$$

⁴ Benannt nach dem französischen Mathematiker und Physiker Joseph Fourier, 1768–1830.

⁵ Zur Formulierung der Fourier-Reihe für beliebige Periodenlänge $2L$ siehe Abschn. 4.4.1.

Man nennt den Ausdruck $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - f_n(x)|^2 dx$ das *quadratische Mittel der Abweichungen zwischen f und f_n* . Er stellt so etwas dar wie eine „Flächendifferenz“ zwischen den Graphen von f und f_n . Aufgrund der Eigenschaften des Integrals ändert sich diese nicht, wenn man f in einem (oder mehreren) isolierten Punkten ändert. Dies bedeutet, dass aus der Konvergenz im quadratischen Mittel nicht die punktweise Konvergenz folgen kann und damit erst recht nicht die gleichmäßige Konvergenz.

Umgekehrt ist jedoch unmittelbar ersichtlich, dass *aus der gleichmäßigen Konvergenz die Konvergenz im quadratischen Mittel folgt*. Denn wenn sich die Graphen der f_n – wie bei gleichmäßiger Konvergenz gefordert – vollständig in einem immer schmäler werdenden Schlauch um f befinden müssen, so strebt auch ihre Flächendifferenz gegen 0.

Lesehilfe Konvergenz von Funktionenfolgen

Unendliche Reihen und Folgen sind äquivalent. Fragt man nach der Konvergenz einer unendlichen Reihe, so ist dies gleichbedeutend mit der Frage nach der Konvergenz der Folge ihrer Partialsummen. Bei der Fourier-Reihe hat man es daher mit einer Funktionenfolge zu tun.

Nun kann eine Funktionenfolge f_n *punktweise* gegen eine Grenzfunktion s konvergieren, was bedeutet, dass für jeden Argumentwert x die Folge $f_n(x)$ gegen $s(x)$ konvergiert.

Darüber hinaus kann die Konvergenz auch *gleichmäßig* erfolgen. Dazu muss es zu jedem beliebig vorgegebenen ε ein $N \in \mathbb{N}$ so geben, dass die Funktionen f_n für $n \geq N$ *global* weniger als ε von s entfernt sind, dass also gilt

$$|f_n(x) - s(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \text{ und } n \geq N.$$

Die Funktionen f_n liegen dann also für $n \geq N$ im „ ε -Schlauch“ um die Grenzfunktion s , siehe Abb. 4.2.

Erst bei gleichmäßiger Konvergenz ist bei einer Folge stetiger Funktionen f_n sichergestellt, dass auch ihre Grenzfunktion s stetig ist.

Der Hauptsatz zu Fourier-Reihen lautet nun mit den Bezeichnungen von Definition (4.4):

Satz 4.3 *Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine periodische, auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare Funktion. Dann konvergiert die Fourier-Reihe $\mathcal{F}[f]$ im quadratischen Mittel gegen f und die Fourier-Koeffizienten a_k und b_k erfüllen die Vollständigkeitsrelation*

$$\frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

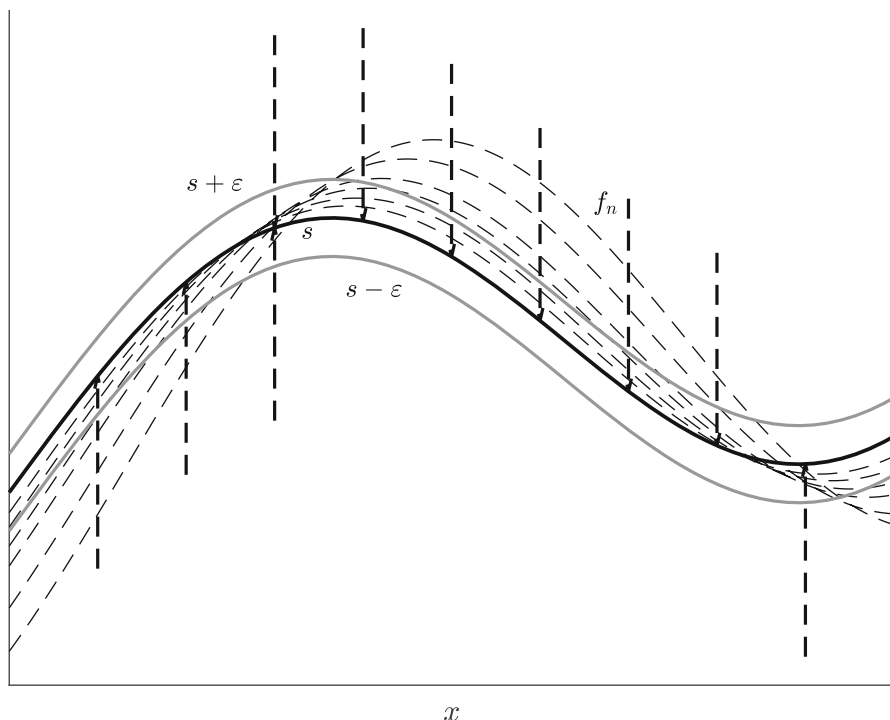


Abb. 4.2 Die Grenzfunktion s einer Folge von Funktionen f_n (gestrichelt) ergibt sich aus deren punktwiser Konvergenz. Erfolgt diese Konvergenz darüber hinaus gleichmäßig, so liegen fast alle f_n vollständig in jedem ε -Schlauch um die Grenzfunktion s

In der komplexen Form mit den Fourier-Koeffizienten c_k lautet die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Beweis Der Beweis dieses Satzes ist aufwendig und wird an dieser Stelle nicht ausgeführt. ◦

Lesehilfe

Für komplexe Zahlen z ist i. Allg. $|z|^2 \neq z^2$. Daher stehen die Koeffizienten a_k , b_k , c_k und auch die Funktion f trotz des Quadrats in Betragsstrichen.

Für den „Normalfall“ einer reellen Funktion f , die in eine reelle Fourier-Reihe entwickelt wird, erhält man reelle Koeffizienten a_k und b_k . In diesem Fall können die Betragsstriche ignoriert werden.

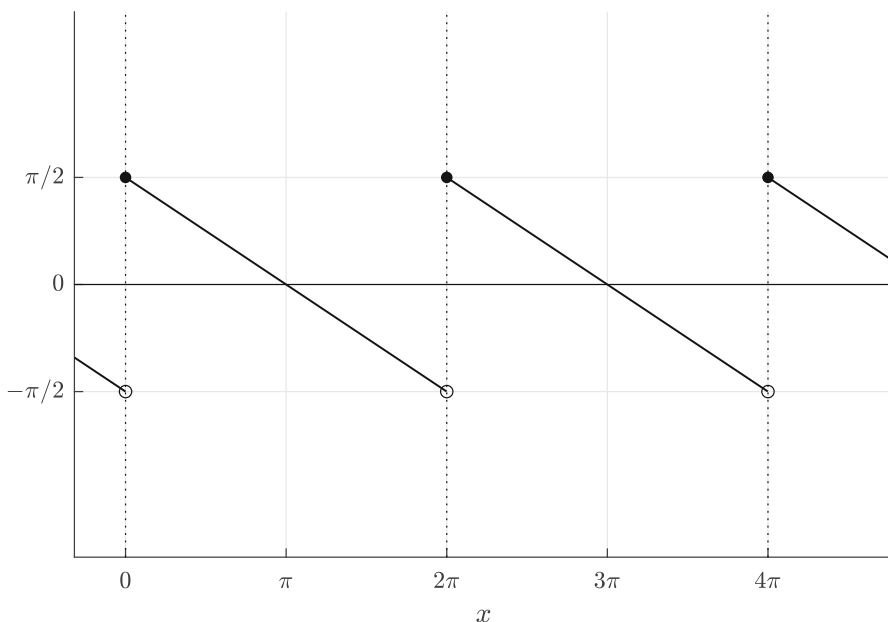


Abb. 4.3 Die periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = (\pi - x)/2$ für $0 \leq x < 2\pi$ entspricht einer „Sägezahnkurve“. Die Funktion ist offenbar nicht stetig, sondern weist bei $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ usw. Sprungstellen auf

Hat man die Fourier-Koeffizienten einer Funktion f berechnet, erlaubt es die Vollständigkeitsrelation, im Nachhinein eine Summenformel zu gewinnen. Mit der eigentlichen Berechnung der Koeffizienten hat sie nicht unmittelbar zu tun.

4.3.2 Beispiel: Sägezahnkurve

Wir entwickeln die periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{für } 0 \leq x < 2\pi \quad (4.24)$$

in eine Fourier-Reihe. Der Graph dieser Funktion hat die Form einer „Sägezahnkurve“, siehe Abb. 4.3. Man bezeichnet diese Fourier-Entwicklung auch als das *Fundamentalbeispiel*.⁶ Wir werden sehen, dass sich die grundlegenden Eigenschaften einer Fourier-Entwicklung an diesem Beispiel sehr gut erkennen lassen.

⁶ Dass diese Funktion f im Inneren des Intervalls durch eine unendliche Reihe von Sinusfunktionen dargestellt werden kann, ist aus anderen Teilgebieten der Analysis bekannt. Sie kann daher als „Prototyp“ oder „Test“ für die Fourier-Entwicklung verwendet werden.

Lesehilfe

Eine periodische Funktion ist immer so zu verstehen, dass das Definitionsintervall, hier $[0, 2\pi[$, automatisch wiederholt wird. Es reicht zur Definition also aus, ein halboffenes Intervall der Länge 2π mit Werten zu belegen.

Wir entwickeln die Funktion in eine reelle Fourier-Reihe, berechnen also die Fourier-Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{und} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Dabei enthält a_0 im Unterschied zu den anderen a_k und b_k kein Sinus oder Cosinus und kann vorweg berechnet werden. Im Einzelnen:

- Der Koeffizient a_0 entspricht dem Integral über die Funktion f :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0,$$

wie man für die Sägezahnkurve einfach durch Hinsehen feststellt.

Lesehilfe

Das Integral über die Sägezahnkurve ist offenbar 0, weil die Flächenanteile oberhalb und unterhalb der x -Achse gleich groß sind, wie ein Blick auf Abb. 4.3 erkennen lässt. Aber natürlich könnte man das Integral auch ausrechnen, wenn man möchte.

- Für a_k mit $k \neq 0$ haben wir

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos(kx) dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(kx) dx}_{=0} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(kx) dx.$$

Partielle Integration ergibt

$$\int_0^{2\pi} x \cos(kx) dx = \underbrace{x \cdot \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1}{k} \sin(kx) dx}_{=0},$$

also ist $a_k = 0$ für alle k .

- Analog berechnet sich b_k mit $k \neq 0$:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin(kx) dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(kx) dx}_{=0} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(kx) dx.$$

Partielle Integration ergibt hier

$$\int_0^{2\pi} x \sin(kx) dx = \underbrace{x \left(-\frac{1}{k}\right) \cos(kx) \Big|_0^{2\pi}}_{=-\frac{1}{k} (2\pi - 0) = -\frac{2\pi}{k}} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{k}\right) \cos(kx) dx}_{=0},$$

$$\text{also } b_k = -\frac{1}{2\pi} \left(-\frac{2\pi}{k}\right) = \frac{1}{k}.$$

Lesehilfe

Die obigen Integrale sind allesamt einfach. Und dennoch musst du dich bei der Berechnung von Fourier-Koeffizienten konzentrieren: Mehrere Teilintegrale, Minuszeichen und Minusklammern usw. führen leicht zu Flüchtigkeitsfehlern.

Einsetzen in die Fourier-Reihe ergibt das Ergebnis

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}. \quad (4.25)$$

Es ist manchmal hilfreich, die Größe der Koeffizienten einer Fourier-Entwicklung in Form eines Stabdiagramms darzustellen. Für die Koeffizienten $b_k = 1/k$ der Sägezahnkurve ergibt dies eine Darstellung wie in Abb. 4.4.

Approximation von f

Da die „Sägezahnkurve“ f Riemann-integrierbar ist, konvergiert ihre Fourier-Reihe

$$\mathcal{F}[f](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \sin x + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots$$

nach dem Hauptsatz im quadratischen Mittel gegen f . Beschränkt man sich auf endlich viele Glieder der Reihe, so nähern sich diese Summen mit größer werdender Anzahl der Summanden immer besser an f an, siehe Abb. 4.5. Die ersten Glieder einer Fourier-Reihe können somit zur *Approximation* der Funktion verwendet werden.

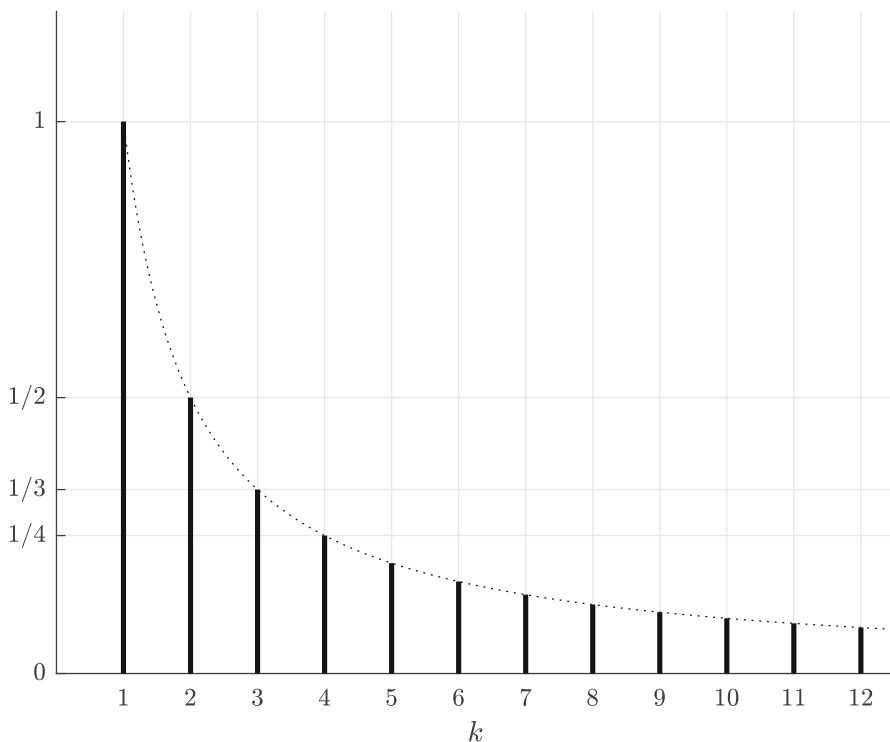


Abb. 4.4 Die Fourier-Koeffizienten $b_k = 1/k$ für das Fundamentalbeispiel können als Stabdiagramm dargestellt werden. Hieraus lassen sich die relativen Amplituden der einzelnen beitragenden Sinusanteile ablesen. Der Wert k gibt dabei an, welches Vielfache der Grundfrequenz jeweils vorliegt

Ist nur eine solche näherungsweise Darstellung durch die führenden Glieder der Fourier-Reihe gewünscht, so können die Koeffizienten a_k und b_k bei gegebener Funktion f auch einfach numerisch berechnet werden. Das ist insbesondere dann von Interesse, wenn die exakten analytischen Integrationen mit großem Aufwand verbunden wären oder gar nicht möglich sind. Natürlich erhält man auf diese Weise nur einzelne Zahlwerte $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \dots$ und die diesen Werten entsprechende Fourier-Summe

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots,$$

ohne eine qualitative Aussage über das Verhalten der höheren Fourier-Koeffizienten oder ihre Abhängigkeit von k treffen zu können.

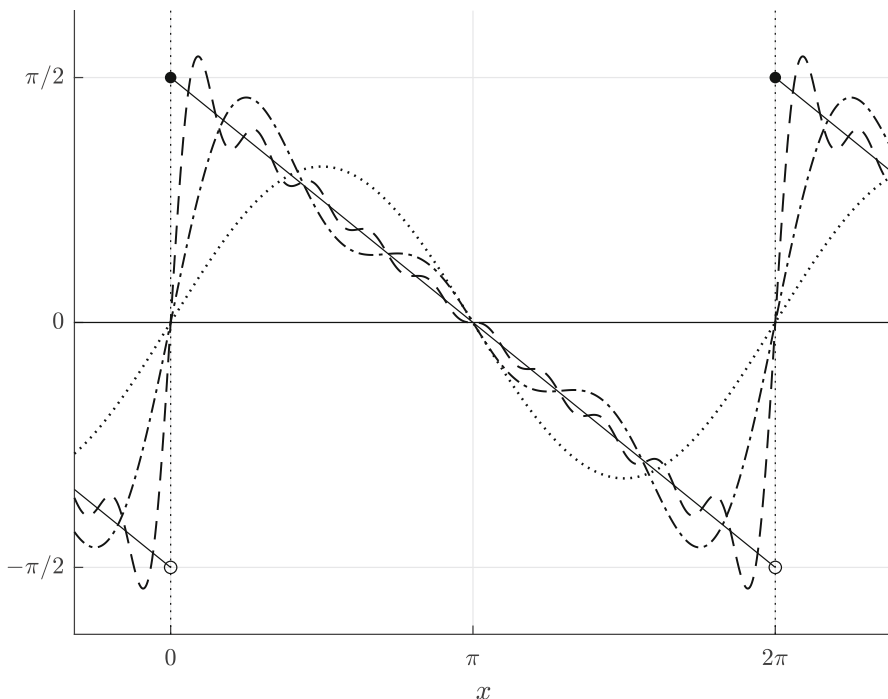


Abb. 4.5 Betrachtet man die ersten n Glieder der Fourier-Reihe $\mathcal{F}[f]$ des Fundamentalbeispiels, hier für $n = 1$ (gepunktet), $n = 3$ (Strich-Punkt), $n = 10$ (gestrichelt), so erkennt man, dass sie sich immer besser der Funktion f annähern

Vollständigkeitsrelation

Schließlich werten wir die Vollständigkeitsrelation aus. Für die reellen Koeffizienten lautet sie nach dem Hauptsatz

$$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx,$$

d. h., mit $a_k = 0$ und $b_k = 1/k$ haben wir jetzt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2} \right)^2 dx.$$

Das Integral ergibt

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 dx = \frac{1}{4} \frac{(x - \pi)^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{12} (\pi^3 + \pi^3) = \frac{\pi^3}{6},$$

sodass wir insgesamt die folgende Summenformel erhalten:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (4.26)$$

Die Vollständigkeitsrelation ergibt hier also den Reihenwert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$.

Lesehilfe

Dieses Ergebnis ist durchaus bemerkenswert. Zwar lässt sich leicht zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$ konvergiert und auch, dass sie durch 2 beschränkt ist, aber der exakte Wert der Reihe lässt sich nicht ohne Weiteres ermitteln. Hier haben wir ihn nun als Nebenprodukt der Fourier-Entwicklung erhalten.

4.3.3 Komplexe Rechnung*

Zum Vergleich führen wir die Fourier-Entwicklung der Sägezahnkurve (4.24) noch einmal komplex aus, berechnen also die Koeffizienten $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$, $k \in \mathbb{Z}$:

- Für $k = 0$ ergibt sich

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot 1 dx = 0.$$

- Für $k \neq 0$ haben wir

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} e^{-ikx} dx = \frac{\pi}{4\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-ikx} dx}_{=0} - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} x e^{-ikx} dx.$$

Partielle Integration ergibt für das verbleibende Integral

$$\int_0^{2\pi} x e^{-ikx} dx = \frac{1}{-ik} x e^{-ikx} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{-ik} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-ikx} dx}_{=0} = -\frac{2\pi}{ik},$$

sodass wir insgesamt erhalten

$$c_k = -\frac{1}{4\pi} \left(-\frac{2\pi}{ik} \right) = \frac{1}{2ik}. \quad (4.27)$$

Die gesuchte komplexe Fourier-Reihe lautet daher

$$\mathcal{F}[f](x) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2ik} e^{ikx}. \quad (4.28)$$

Wenig überraschend erfolgt die Rechnung ähnlich wie im Reellen. Für die Entwicklung einer reellen Funktion ist das komplexe Ergebnis allerdings in der Regel wenig vorteilhaft. Es kann hier wie folgt in die reelle Reihe überführt werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](x) &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2ik} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2ik} e^{ikx} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{1}{2ik} e^{ikx} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{ikx}}{k} + \frac{e^{-ikx}}{-k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \underbrace{\frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx})}_{=\sin(kx)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}. \end{aligned}$$

Wir können festhalten, dass die komplexe Rechnung zunächst etwas kürzer ist als die reelle, weil nur eine Sorte Koeffizient berechnet werden muss. Ist aber für die Entwicklung einer *reellen* Funktion das reelle Ergebnis gewünscht, muss die komplexe Reihe abschließend noch in eine reelle Reihe überführt werden – was dann natürlich stets möglich ist. Allerdings erfordert es etwas Übersicht.

Insgesamt wird man wohl sagen können, dass für die Entwicklung *reeller* Funktionen die reelle Fourier-Reihe vorteilhafter erscheint. Zumal dann, wenn man unter Ausnutzung eventuell vorhandener Symmetrien von vornherein sagen kann, dass die a_k oder die b_k verschwinden, siehe Abschn. 4.3.5.

4.3.4 Konvergenzverhalten

Der Hauptsatz besagt, dass die Fourier-Reihe einer auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ integrierbaren Funktion f im quadratischen Mittel gegen f konvergiert. Wir haben bereits festgestellt, dass dies nicht bedeutet, dass sie gleichmäßig oder auch nur punktweise gegen f konvergieren muss. Dies ist übrigens auch im Fundamentalbeispiel sichtbar: Bei 0 behalten sämtliche Fourier-Summen den Wert 0, siehe Abb. 4.5, während f hier den Wert $\pi/2$ besitzt.

Über die bloße Konvergenz im quadratischen Mittel hinaus lassen sich aber weitere Aussagen zur Konvergenz einer Fourier-Reihe treffen, die für Anwendungen wichtig sein können. Wir wollen sie hier ohne Beweis angeben.

Zunächst halten wir fest: Wenn die Funktion f keine Sprünge aufweist, „verbessert“ sich das Konvergenzverhalten ihrer Fourier-Reihe. Genauer gilt:

Ist die periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourier-Reihe von f gleichmäßig gegen f .

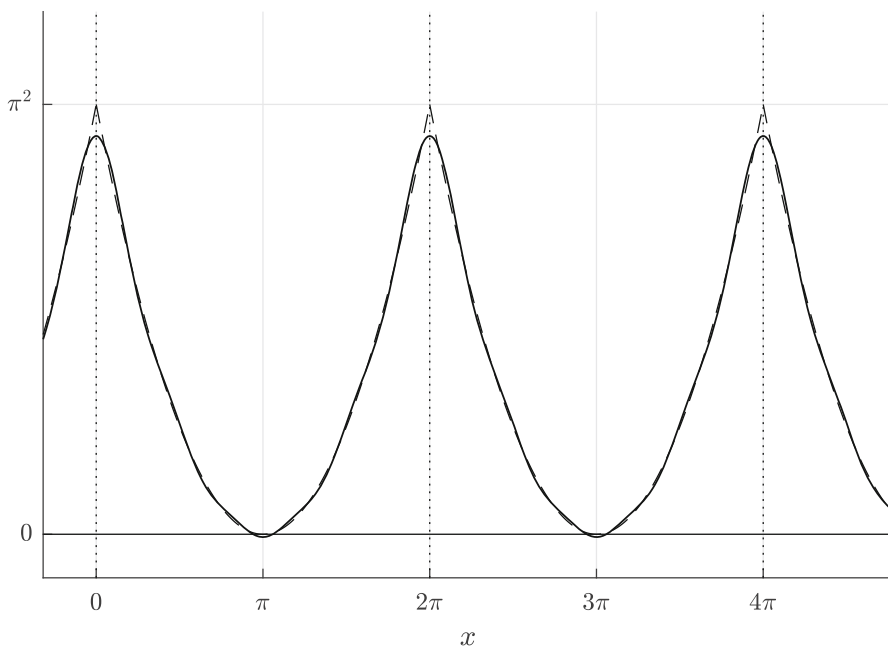


Abb. 4.6 Die periodische Funktion g mit $g(x) = (x - \pi)^2$ auf $[0, 2\pi[$ ist stetig und stückweise stetig differenzierbar. Ihre Fourier-Reihe $\mathcal{F}[g](x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \cos(kx)$ konvergiert gleichmäßig gegen g . Ihre ersten fünf Summanden lassen bereits kaum noch einen Unterschied zu g erkennen

Lesehilfe

Stückweise stetig differenzierbar bedeutet, dass es eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 2\pi$ des Intervalls $[0, 2\pi]$ gibt, sodass $f|_{[t_{k-1}, t_k]}$ für $k = 1, \dots, n$ stetig differenzierbar ist. Und stetig differenzierbar bedeutet differenzierbar mit stetiger Ableitung.

Eine stetige Funktion darf also nicht differenzierbare Stellen, d. h. „Knicke“ oder unendlich steile Stellen im Funktionsgraph aufweisen, um noch eine gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe zu besitzen. Siehe Abb. 4.6.

Die „Sägezahnkurve“ des Fundamentalbeispiels ist *keine* stetige Funktion. Das Konvergenzverhalten ihrer Fourier-Reihe ist komplizierter und weist charakteristische Eigenschaften auf, die für Fourier-Reihen allgemein gelten:

- Die Fourier-Reihe von f konvergiert *punktweise* gegen eine Funktion s , die bis auf die Sprungstellen mit f übereinstimmt. In den Sprungstellen nimmt sie den *Mittelwert* an, siehe Abb. 4.7. Diese Mittelwerteigenschaft gilt allgemein für alle

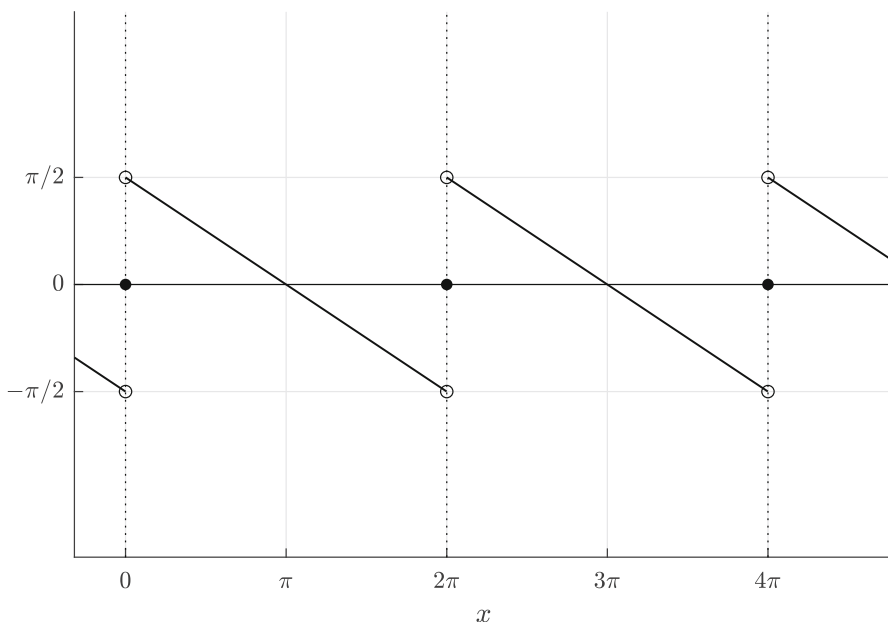


Abb. 4.7 Die Fourier-Reihe für das Fundamentalbeispiel mit $f(x) = (\pi - x)/2$ für $0 \leq x < 2\pi$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion s , die bis auf die Sprungstellen mit f übereinstimmt. In den Sprungstellen nimmt s den Mittelwert von rechts- und linksseitigem Grenzwert an

$x \in \mathbb{R}$, d. h., es ist

$$s(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{w \nearrow x} s(w) + \lim_{w \searrow x} s(w) \right). \quad (4.29)$$

Die Funktion s unterscheidet sich also ggf. in den Sprungstellen von f .

Lesehilfe

Die Sägezahnkurve ließe sich durchaus auch so definieren, dass die Funktion in den Sprungstellen anstelle von $\pi/2$ den Wert 0 besitzt. Ihre Fourier-Reihe bliebe davon unberührt. Auf diese Weise wäre dann aber $s = f$.

- Die Fourier-Reihe konvergiert auf jedem abgeschlossenen Intervall, das keine Sprungstelle von f enthält, *gleichmäßig* gegen f .
- In Unstetigkeitsstellen gilt das *Gibbs-Phänomen*⁷: Für hinreichend große Ordnung überschwingen alle Partialsummen der Fourier-Reihe einen Sprung von s um 17.89 %, siehe Abb. 4.8.

⁷ Benannt nach dem amerikanischen Physiker Josiah Willard Gibbs, 1839–1903.

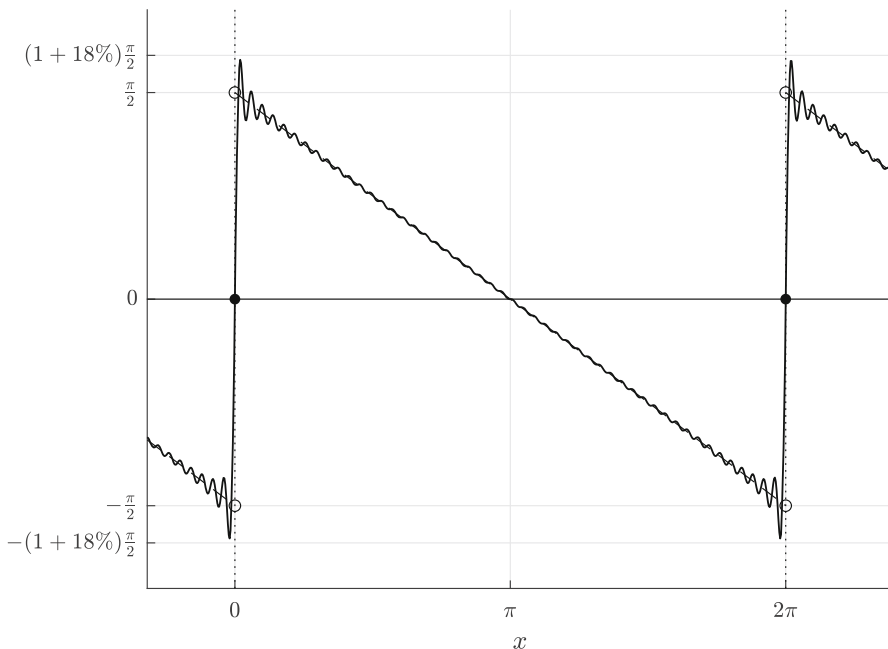


Abb. 4.8 Sieht man sich die ersten 50 Glieder der Fourier-Reihe $\mathcal{F}[f]$ des Fundamentalbeispiels an, erkennt man, dass f bereits sehr gut wiedergegeben wird. In den Sprungstellen treten allerdings die als Gibbs-Phänomen bezeichneten Überschwinger von ca. 18 % der Sprunghöhe von s auf. Diese Überschwinger bleiben bestehen, selbst wenn man die Ordnung weiter erhöht

Will man also – wie es etwa in elektrotechnischen Anwendungen vorkommt – eine nicht stetige Zielfunktion, beispielsweise die obige Sägezahnkurve, durch eine Überlagerung von harmonischen Schwingungen, also durch eine entsprechende Fourier-Reihe synthetisch erzeugen, so sind die „Überschwinger“, die das Gibbs-Phänomen beschreibt, nicht zu vermeiden. Man hat es hier dann z. B. mit Strom- oder Spannungsspitzen zu tun, die bei der Dimensionierung von Bauteilen zu beachten sind.

- **Zwischenfrage (3)** Wie passen die Überschwinger, die an einem Sprung der zu entwickelnden Funktion auftreten und deren Höhe sich auch mit großer Ordnung nicht verringert, mit der Konvergenz im quadratischen Mittel zusammen?

4.3.5 Symmetrien

Bei den Integralen zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten handelt es sich um Integrale über periodische Funktionen. Die Integration kann daher statt über das Intervall von 0 bis 2π auch über jedes beliebige andere, gleich lange Intervall aus-

geführt werden, beispielsweise von $-\pi$ bis π . Es ist also

$$\int_0^{2\pi} \dots = \int_{-\pi}^{\pi} \dots = \int_c^{2\pi+c} \dots \quad \text{für jedes } c \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten nun noch einmal die reelle Fourier-Reihe

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)].$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \quad \text{und} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx, \quad (4.30)$$

die wir jetzt als Integrale von $-\pi$ bis $+\pi$ schreiben. Nun gilt:

Wird ein Integral über ein zu 0 symmetrisches Intervall über eine ungerade Funktion ausgeführt, so verschwindet es.

Die Integrale der Fourier-Koeffizienten verschwinden also, wenn der Integrand *ungerade* ist. Dabei ergibt das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Funktion wieder eine ungerade Funktion, und der Cosinus ist gerade und der Sinus ist ungerade.

Lesehilfe

Für ungerade Funktionen f gilt $f(-x) = -f(x)$, ihr Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Für gerade Funktionen g gilt $g(-x) = g(x)$, ihr Graph ist achsensymmetrisch zur y -Achse. Für das Produkt $h(x) := f(x)g(x)$ gilt dann

$$h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x),$$

es ist somit ungerade.

Daraus ergibt sich:

- Ist die Funktion f *gerade*, so treten in der Fourier-Entwicklung nur die *Cosinus-anteile* auf. Die Koeffizienten b_k sind also allesamt gleich 0 und die a_k lassen sich aufgrund der Symmetrie auch berechnen als

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx. \quad (4.31)$$

- Ist die Funktion f *ungerade*, so treten in der Fourier-Entwicklung nur die *Sinus-anteile* auf. Die Koeffizienten a_k verschwinden und die b_k lassen sich aufgrund der Symmetrie auch berechnen als

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx. \quad (4.32)$$

Ist die Funktion f , die in eine reelle Fourier-Reihe zu entwickeln ist, also gerade oder ungerade, so muss man nur einen Satz der Koeffizienten berechnen. Dazu darf f durchaus in einzelnen Punkten von der Symmetrie abweichen: Im obigen Fundamentalbeispiel wäre die Punktsymmetrie eigentlich nur für $f(0) = 0$ (anstelle von $f(0) = \pi/2$) vollständig erfüllt. Dieses Abweichen in einem Punkt spielt hier jedoch keine Rolle, die Funktion kann für unsere Zwecke als ungerade angesehen werden.

Ganz allgemein kann man aufgrund der Tatsache, dass es sich bei den Fourier-Koeffizienten um Integrale handelt, festhalten, dass sich eine Fourier-Reihe nicht ändert, wenn sich f in einzelnen Punkten ändert.

Lesehilfe

Natürlich *muss* die Funktion f , die in eine Fourier-Reihe entwickelt werden soll, *keineswegs* eine der beiden Symmetrien aufweisen, auch wenn das in vielen praktischen Anwendungen der Fall ist. Ohne Symmetrie, oder ohne, dass man sich über Symmetrie Gedanken gemacht oder sie erkannt hat, müssen die a_k und b_k einfach auf normale Weise mithilfe der Formeln (4.30) berechnet werden, wobei das Integral natürlich auch von 0 bis 2π ausgeführt werden kann. Und wenn dann die a_k oder die b_k gleich 0 sind, weiß man spätestens jetzt, dass Symmetrie vorliegt ;-)

Schließlich halten wir fest, dass – unabhängig von einer eventuellen Symmetrie der Funktion f – der erste Summand $a_0/2$ der Fourier-Reihe gleich dem Mittelwert der Funktion f ist. Mit ihm wird die gesamte Reihe nach oben oder unten verschoben; die Summe $\sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$ ist als Summe von Cosinus- und Sinusausdrücken grundsätzlich um 0 zentriert.

- **Antwort auf Zwischenfrage (3)** Gefragt war nach den Überschwüngen und der Konvergenz im quadratischen Mittel.

Die Überschwinger behalten ihre Höhe bei. Damit stehen sie zwar einer gleichmäßigen Konvergenz im Weg, da sie sich nicht in einem beliebig schmalen ε -Schlauch um die Grenzfunktion unterbringen lassen. Die Konvergenz im quadratischen Mittel verlangt jedoch nur, dass die Flächendifferenz beliebig klein wird. Und die Spitzen der Überschwinger behalten zwar ihre Höhe, werden aber mit zunehmender Ordnung

der Fourier-Summe beliebig schmal, sodass die in den Überschwingern eingeschlossene Fläche gegen 0 geht.

- **Zwischenfrage (4)** Beweise, dass das Integral $\int_{-a}^a f(x) dx$ über eine beliebige integrierbare ungerade Funktion f gleich 0 ist.

4.4 Fourier-Integrale*

Fourier-Reihen erlauben die Entwicklung *periodischer* Funktionen in eine unendliche *Summe* trigonometrischer Funktionen. Wir wollen uns nun ansehen, wie sich eine solche Entwicklung auf *nicht* periodische Funktionen übertragen lässt. Wir gelangen damit zum *Fourier-Integral*. Mathematisch sind Fourier-Integrale anspruchsvoller als Fourier-Reihen. Wir wollen zumindest einen Ausblick in dieses Thema geben, das insbesondere in Physik und Elektrotechnik bedeutsam ist.

Wie die Fourier-Reihen gibt es auch die Fourier-Integrale in einer reellen und einer komplexen Form. Sie werden aber vorwiegend in ihrer komplexen Variante verwendet.

4.4.1 Fourier-Reihe für beliebige Periodenlänge

Als Vorbereitung für den Übergang zum Fourier-Integral schreiben wir zunächst die Fourier-Reihe⁸

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (4.33)$$

um auf periodische Funktionen mit der beliebigen Periodenlänge $2L$, $L > 0$: Die Funktion f^* mit der Periode $2L$ ergibt sich aus f über

$$f^*(x) := f\left(\frac{\pi}{L}x\right); \quad \text{umgekehrt ist dann } f(t) = f^*\left(\frac{L}{\pi}t\right),$$

siehe (4.5) und (4.6). Damit haben wir

$$f^*(x) = f\left(\frac{\pi}{L}x\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{L}x}, \quad c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

mit

$$f(t) = f^*\left(\frac{L}{\pi}t\right), \quad \frac{d\left(\frac{L}{\pi}t\right)}{dt} = \frac{L}{\pi}, \quad \text{d. h.} \quad dt = \frac{\pi}{L} d\left(\frac{L}{\pi}t\right).$$

⁸ Wir verzichten hier vereinfachend auf die Unterscheidung zwischen der Funktion f und ihrer Fourier-Reihe $\mathcal{F}[f]$.

Also ist

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\pi}^{\pi} f^*\left(\frac{L}{\pi}t\right) e^{-ik\frac{\pi}{L}t} \frac{\pi}{L} d\left(\frac{L}{\pi}t\right) \stackrel{\frac{L}{\pi}t=:T}{=} \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{L} \int_{T=-L}^L f^*(T) e^{-ik\frac{\pi}{L}T} dT \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dT f^*(T) e^{-ik\frac{\pi}{L}T}. \end{aligned}$$

Wir kehren nun wieder zu den normalen Bezeichnungen zurück, ersetzen also f^* durch f und T durch t und haben folgendes Ergebnis:

Die Fourier-Reihe einer Funktion f mit der Periode $2L$ lautet

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{L}x} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dt f(t) e^{-ik\frac{\pi}{L}t}. \quad (4.34)$$

Lesehilfe

Der Übergang zur beliebigen Periodenlänge $2L$ anstelle von 2π ist vielleicht holpriger als gedacht, weil auch die Variablen im Integral vollständig ersetzt werden müssen. Vergleichst du aber die „ 2π -Reihe“ (4.33) mit der „ $2L$ -Reihe“ (4.34), so erkennst du, dass letztendlich π durch L ersetzt wurde, wobei im Exponenten jetzt statt eines unsichtbaren $1 = \pi/\pi$ der Ausdruck π/L auftaucht.

Die reelle Fourier-Reihe für die Periodenlänge $2L$ lautet dementsprechend

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(k\frac{\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right) \right].$$

mit

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(k\frac{\pi}{L}x\right) dx \quad \text{und} \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right) dx.$$

Natürlich kann die Integration der Fourier-Koeffizienten hier auch von 0 bis $2L$ ausgeführt werden.

- **Antwort auf Zwischenfrage (4)** Es sollte gezeigt werden, dass gilt $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ für eine ungerade Funktion f .

Anschaulich ist die Aussage klar: Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Daher entsprechen positive

(negative) Flächen für $x > 0$ gleich großen negativen (positiven) Flächen im Bereich $x < 0$.

Aber wir wollen es auch „richtig“ nachrechnen: Zunächst ist

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^{-a} f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Nun substituieren wir im ersten Integral $x =: -\tilde{x}$ und $dx = -d\tilde{x}$. Da für ungerade Funktionen gilt $f(-x) = -f(x)$, ergibt dies

$$\int_0^{-a} f(x) dx = - \int_0^a f(-\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_0^a f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_0^a f(x) dx,$$

wobei im letzten Schritt nur die Integrationsvariable umbenannt wurde. Somit ist $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

4.4.2 Übergang zum Fourier-Integral

Fügt man die Gleichungen (4.34) zusammen, so erhält man

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} e^{ik \frac{\pi}{L} x} \int_{-L}^L dt f(t) e^{-ik \frac{\pi}{L} t}.$$

Wir setzen $\frac{\pi}{L} =: \Delta\omega$; damit haben wir

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta\omega e^{ik\Delta\omega x} \int_{-L}^L dt f(t) e^{-ik\Delta\omega t}. \quad (4.35)$$

Folgende Überlegung führt nun zum Fourier-Integral: Lässt man die Periode $L \rightarrow \infty$ gehen, so befreit man sich von der Einschränkung auf periodische Funktionen. Der Grenzübergang $L \rightarrow \infty$ bedeutet $\Delta\omega \rightarrow 0$ und die Zahlen $k\Delta\omega$, $k = -\infty, \dots, \infty$ stellen eine äquidistante Unterteilung der gesamten reellen Achse dar. Die unendliche Summe in (4.35) geht somit in ein Riemann-Integral über, sodass sich aus (4.35) folgende Formel als plausibel entnehmen lässt:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega x} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}}_{=: \tilde{f}(\omega)}. \quad (4.36)$$

Dies ist die *Fourier-Integralformel*. Im Fall ihrer Existenz heißt die Funktion \tilde{f} die *Fourier-Transformierte* von f .

Lesehilfe

Mit $L \rightarrow \infty$ befreit man sich von der Einschränkung auf periodische Funktionen, weil die zentrale Periode von $-L$ bis L auf ganz \mathbb{R} ausgedehnt wird.

Die obige Plausibilitätsbetrachtung stellt natürlich keinen mathematischen Beweis der Fourier-Integralformel dar. Auch existiert die Fourier-Transformierte nur für hinreichend „gutartige“ Funktionen f . Insbesondere muss f für $|x| \rightarrow \infty$ ausreichend schnell gegen 0 gehen, sodass das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ konvergiert.

Im Gegensatz zur Fourier-Reihe einer periodischen Funktion, in der diskrete Schwingungen überlagert werden, entspricht das Integral in (4.36) einer kontinuierlichen Überlagerung von Schwingungen, deren Amplitude durch \tilde{f} gegeben wird.

Es ist üblich, den Faktor $1/2\pi$ in Formel (4.36) „aufzuteilen“ und sie in folgender symmetrischer Form zu schreiben:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} F(\omega) \quad (4.37)$$

mit

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t). \quad (4.38)$$

Die Funktion F nennt man die *Fourier-Transformierte* von f . Man erkennt hier die wechselseitige Entsprechung der Funktionen f und F besonders deutlich:

- Aus f kann mit (4.38) die Fourier-Transformierte F berechnet werden: Man führt die *Fourier-Transformation* $f \rightarrow F$ durch.
- Aus F kann mit (4.37) die Funktion f wieder zurückgewonnen werden. Dies entspricht der *inversen Fourier-Transformation* $F \rightarrow f$.

Die Funktionen f und F entsprechen sich also via Fourier-Transformation, $f \leftrightarrow F$. Soll beispielsweise ein endlicher Schwingungsvorgang beschrieben werden, so erlaubt die Fourier-Transformation die wechselseitige Darstellung dieses Vorgangs im „Zeitbereich“ (t) oder im „Frequenzbereich“ (ω).

4.4.3 Beispiel: Rechteckimpuls

Wir wollen uns ein Beispiel für die kontinuierliche Überlagerung von Frequenzen ansehen. Dazu betrachten wir das Frequenzband von -1 bis 1 mit der Amplitude 1,

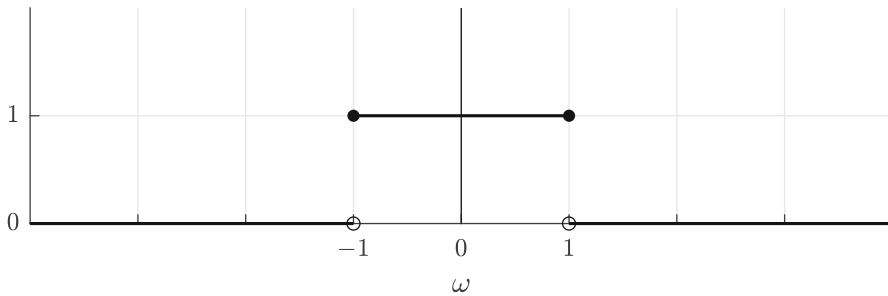


Abb. 4.9 Die Rechteckfunktion R mit $R(\omega) = 1$ für $|\omega| \leq 1$ und sonst 0 entspricht einem kontinuierlichen Frequenzband von -1 bis 1 mit der Amplitude 1

also die Rechteckfunktion $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$R(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |\omega| > 1, \end{cases} \quad (4.39)$$

siehe Abb. 4.9.

Lesehilfe

Abb. 4.9 ist übrigens das Analogon zu Abb. 4.4 für Fourier-Reihen. In deren Stabdiagramm sind nur einzelne diskrete Frequenzen mit konstantem Abstand zueinander enthalten.

Wir berechnen die Fourier-Transformierte des Rechteckimpulses R :

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} R(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 d\omega e^{i\omega t}$$

mit

$$\int_{-1}^1 d\omega e^{i\omega t} = \int_{-1}^1 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) d\omega = \begin{cases} 2 \frac{\sin t}{t} & \text{für } t \neq 0 \\ 2 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Lesehilfe

Beachte, dass hier über ω integriert wird und nicht über t , wie man es sonst gewohnt ist; t ist also bei der Integration als Konstante zu betrachten. Und da das Integral der Sinusfunktion über ein zur 0 symmetrisches Intervall gleich 0 ist, verschwindet der Imaginärteil.

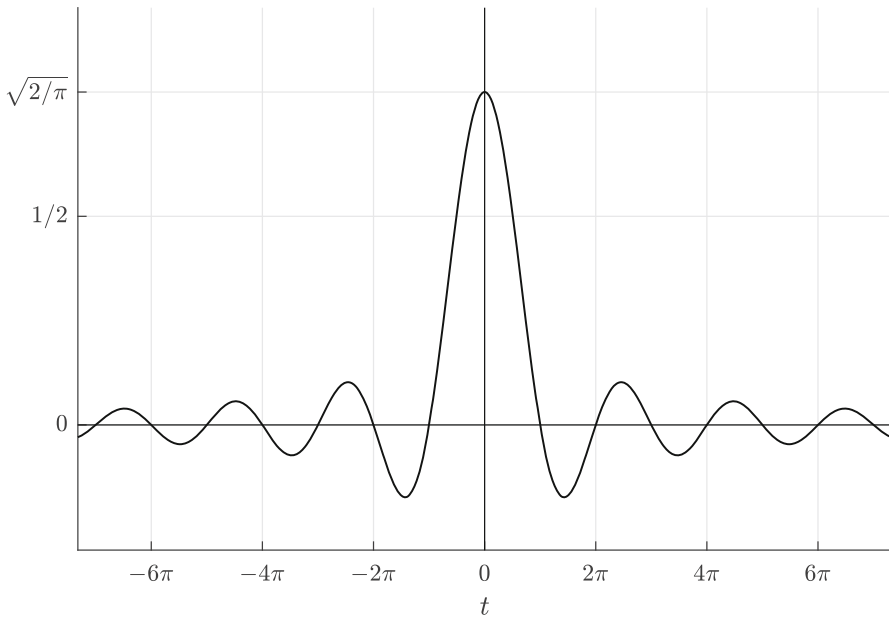


Abb. 4.10 Die Fourier-Transformierte r der Rechteckfunktion wird gegeben durch $r(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin t}{t}$. Dies entspricht einer „endlichen Schwingung“

Wegen $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ kann dieser Term bei 0 stetig fortgesetzt werden, sodass wir insgesamt folgende Fourier-Transformierte erhalten:

$$r(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin t}{t}, \quad (4.40)$$

siehe Abb. 4.10. Die Überlagerung eines endlichen Frequenzbands erzeugt also ein endliches Schwingungsbild. In der Physik entsteht auf diese Weise etwa ein „Wellenpaket“.

Das Wichtigste in Kürze

- Für eine **periodische Funktion** f mit der Periode T gilt $f(t + T) = f(t)$. Zur Beschreibung der Eigenschaften periodischer Funktionen kann man sich **auf die Periode 2π beschränken**.
- Bei einem **reellen trigonometrischen Polynom** handelt es sich also um eine **Linearkombination von Sinus- und Cosinusfunktionen** mit aufsteigenden Vielfachen der Grundfrequenz.
- Die Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms sind durch das Polynom eindeutig bestimmt. Mithilfe der Orthogonalitätsrelationen lassen sich **Integralformeln für die Koeffizienten** ermitteln.

- Bei einem **komplexen trigonometrischen Polynom** handelt es sich um eine **Linearkombinationen von Exponentialfunktionen mit rein imaginären Argumenten**.*
- Eine **Fourier-Reihe** entspricht in ihrer Form einem trigonometrischen Polynom mit unendlich vielen Summanden.
- Eine Funktionenfolge **konvergiert im quadratischen Mittel** gegen eine Funktion, wenn die „**Flächendifferenz**“ **beliebig klein** wird. Daraus folgt weder die gleichmäßige noch die punktweise Konvergenz.
- Die **Fourier-Reihe** einer integrierbaren Funktion f **konvergiert im quadratischen Mittel gegen f** . Die Fourier-Koeffizienten erfüllen die **Vollständigkeitsrelation**.
- Die Grenzfunktion einer Fourier-Reihe erfüllt die **Mittelwerteigenschaft**. Sofern Sprungstellen vorhanden sind, treten dort charakteristische „**Überschwinger**“ auf (**Gibbs-Phänomen**).
- Die Fourier-Reihen von **geraden (ungeraden) Funktionen** weisen nur die **Cosinusanteile (Sinusanteile)** auf.
- **Fourier-Integrale** ergeben sich aus Fourier-Reihen, indem man die **Periode unendlich groß** werden lässt.*
- Eine **Funktion und ihre Fourier-Transformierte entsprechen einander wechselseitig**.*
- Die **Überlagerung eines kontinuierlichen Frequenzbands** ergibt ein **endliches Schwingungsbild**.* ◀

Und was bedeuten die Formeln?

$$f(t + T) = f(t), \quad f_k(t) = A_k \sin(k\omega t + \varphi_k), \quad \omega = 2\pi/T,$$

$$g(x) := f\left(\frac{T}{2\pi}x\right), \quad f(t) = g\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad g_k(x) = A_k \sin(kx + \varphi_k),$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)],$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = \pi \delta_{kl},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx,$$

$$\cos(kx) = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \quad \sin(kx) = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}),$$

$$f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad e^{ikx} = (e^{ix})^k =: e_k(x),$$

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle = 2\pi \delta_{kl}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} := \frac{1}{2}(a_k + ib_k),$$

$$\mathcal{F}[f](x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)], \quad \mathcal{F}[f](x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - f_n(x)|^2 dx = 0, \quad |f_n(x) - s(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \text{ und } n \geq N,$$

$$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2,$$

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \text{ für } 0 \leq x < 2\pi, \quad \mathcal{F}[f](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$s(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{w \nearrow x} s(w) + \lim_{w \searrow x} s(w) \right), \quad \int_0^{2\pi} \dots = \int_{-\pi}^{\pi} \dots = \int_c^{2\pi+c} \dots,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad (\text{wenn } f \text{ gerade}),$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad (\text{wenn } f \text{ ungerade}),$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} e^{ik \frac{\pi}{L} x} \int_{-L}^L dt f(t) e^{-ik \frac{\pi}{L} t},$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} F(\omega) \quad \text{und} \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t),$$

$$R(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |\omega| > 1 \end{cases}, \quad r(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin t}{t}.$$

Übungsaufgaben

A4.1 Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe jeweils deine Antwort.

- (I) Eine periodische Funktion mit der Periode 2π ist auch periodisch mit der Periode 4π .
- (II) Eine periodische Funktion mit der Periode 2π ist auch periodisch mit der Periode π .
- (III) Ein trigonometrisches Polynom ist stets gleichmäßig konvergent.
- (IV) Ein trigonometrisches Polynom ohne konstanten Term, also mit $a_0 = 0$, besitzt den (integralen) Mittelwert 0.

A4.2 a) Zeige, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x$.

b) Beweise die folgenden Integralformeln:

$$\int x^2 \cos(kx) dx = \frac{2x}{k^2} \cos(kx) + \left(\frac{x^2}{k} - \frac{2}{k^3} \right) \sin(kx) + c_1$$

$$\int x^2 \sin(kx) dx = \frac{2x}{k^2} \sin(kx) - \left(\frac{x^2}{k} - \frac{2}{k^3} \right) \cos(kx) + c_2.$$

A4.3 a) Entwickle die periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, \pi[\\ -1 & \text{für } x \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

in eine Fourier-Reihe. Überprüfe dein Ergebnis, indem du mit einem geeigneten Computerprogramm die Partialsumme der ersten zehn nicht verschwindenden Glieder darstellen lässt. Wird die gewünschte f Funktion angenähert?

b) Welche Aussage trifft die Vollständigkeitsrelation für die hier betrachtete Funktion f ? Welche Summenformel lässt sich ableiten?

A4.4 Gegeben ist die periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (x - \pi)^2 \quad \text{für } x \in [0, 2\pi[.$$

a) Ist die Funktion f stetig?

b) Entwickle die Funktion f in eine reelle Fourier-Reihe $\mathcal{F}[f]$.

c) Konvergiert die Fourier-Reihe $\mathcal{F}[f]$ gleichmäßig gegen f ? Konvergiert sie punktweise gegen f ? Konvergiert sie im quadratischen Mittel gegen f ?

A4.5 a) Beweise die Integralformel

$$\int \sin(ax) \cos(bx) dx = -\frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} - \frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} + c.$$

b) Gegeben ist die periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |\sin x|.$$

Zeige, dass sich ihre Fourier-Reihe $\mathcal{F}[f]$ schreiben lässt als

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos(2x)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4x)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6x)}{5 \cdot 7} + \dots \right].$$

A4.6 a) Berechne die Fourier-Transformierte des für $t > 0$ exponentiell abfallenden Impulses, d. h. für die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

mit dem reellen Parameter $a > 0$.

b) Verwende das Ergebnis aus Aufgabenteil a), um die (reelle) Fourier-Transformierte des symmetrisch abfallenden Impulses $g(t) = e^{-a|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ anzugeben. Welches qualitative Verhalten weisen g und die Fourier-Transformierte G für größer werdendes a auf?

Hinweis

Die Lösung dieser Aufgabe erfordert das Rechnen mit komplexen Zahlen. Sofern du damit nicht vertraut bist, überspring sie einfach. Komplexe Zahlen spielen im weiteren Verlauf des Buchs keine Rolle.

Bisher haben wir die Integration gewöhnlicher Funktionen einer Veränderlichen behandelt. Aber natürlich können auch Funktionen integriert werden, die von mehreren Variablen abhängen. Die mathematisch exakte und erschöpfende Behandlung solcher Mehrfachintegrale ist aufwendig. Dessen ungeachtet sind in Anwendungen Mehrfachintegrale oft von Bedeutung, man denke an Integrale über Flächen oder Volumina.

Wir wollen in diesem Kapitel die Theorie der mehrdimensionalen Integration zumindest so weit besprechen, dass wir den allgemeinen Integralbegriff formulieren können. Im Vordergrund steht das Ziel, Mehrfachintegrale konkret berechnen zu können. Wir werden sehen, dass die Transformationsformel und der Wechsel in geeignete Koordinaten dabei eine wichtige Rolle spielen.

Hinweis

Bei der mehrdimensionalen Integration haben wir es naturgemäß mit mehrdimensionalen Funktionen zu tun. Zu ihrer Beschreibung ist die gewöhnliche eindimensionale Analysis zu erweitern, beispielsweise sind die Ableitungen jetzt partiell usw.

Die Grundbegriffe mehrdimensionaler Funktionen sind in Kap. 6 dargestellt und wir benötigen sie natürlich für die Darstellung der mehrdimensionalen Integration. Solltest du nicht mit ihnen vertraut sein, kannst du dir daher zunächst Kap. 6 ansehen. Oder du probierst es erst einmal so und greifst bei Bedarf auf einzelne Abschnitte aus Kap. 6 zurück :-)

Wozu dieses Kapitel im Einzelnen

- Mehrfachintegrale sind genau das: Man muss mehrfach integrieren. Wir werden sehen, dass das im einfachsten Fall nur eine mehrfache Einfachintegration ist.

- Grenzen sind bei Mehrfachintegralen komplizierter, da wir es mit mehrdimensionalen Integrationsgebieten zu tun haben. Aber man kann sie in den Integranden „einbauen“ und dann fällt die Formulierung der Integrale leichter.
- Integration setzt keine stetigen Integranden voraus. Der Schritt dorthin erfordert die Annäherung durch Funktionenfolgen und ist bei Mehrfachintegralen komplizierter als bei Einfachintegralen. Wir müssen uns daher ein wenig mit neuen Begriffen vertraut machen.
- Das Lebesgue-Integral ist der allgemeine Integralbegriff. Seine Definition sieht fast wie die des Riemann-Integrals aus, auch wenn mehr dahintersteckt und sie nicht leicht zu durchschauen ist. Aber das Lebesgue-Integral hat sehr gutmütige Eigenschaften :-)
- Zum Berechnen von Integralen müssen wir insbesondere mit den Integralgrenzen fertig werden. Sie sind manchmal sogar das Hauptproblem. Die Transformationsformel kann das Vorgehen sehr erleichtern, weil komplizierte Grenzen in passenden Koordinaten ganz einfach sein können.

5.1 Mehrfachintegrale stetiger Funktionen

Wir wollen Integrale über Funktionen f bilden, die von n Variablen x_1, \dots, x_n abhängen. Für stetige Funktionen auf einem kompakten Quader ist ein direkter Zugang möglich.

5.1.1 Stetige Funktionen auf kompaktem Quader

Wir betrachten stetige Funktionen, die auf einem kompakten achsenparallelen Quader

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad (5.1)$$

definiert sind, also stetige Funktionen

$$f : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n).$$

Hält man x_2, \dots, x_n fest, so hat man eine Funktion $x_1 \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$, die über das Intervall $[a_1, b_1]$ integriert werden kann, und wir setzen

$$F_1(x_2, \dots, x_n) := \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1. \quad (5.2)$$

Die solchermaßen definierte Funktion F_1 ist wieder stetig.

Lesehilfe

Es ist sicher plausibel, dass mit der ursprünglichen Funktion f auch die Funktion F_1 stetig ist, die aus f durch Integration über die Variable x_1 entsteht. Man kann allgemein sagen, dass „Integration die Eigenschaften einer Funktion verbessert“.

Bei der Integration über x_1 mit festgehaltenen Parametern x_2, \dots, x_n handelt es sich um ein „Parameterintegral“. Allgemein gilt: *Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Menge und $f : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion. Dann ist auch die durch*

$$F(y) := \int_a^b f(x, y) dx$$

definierte Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Nun kann die Funktion F_1 wiederum bei festgehaltenem x_3, \dots, x_n über x_2 integriert werden:

$$F_2(x_3, \dots, x_n) := \int_{a_2}^{b_2} F(x_2, \dots, x_n) dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2.$$

Führt man auf diese Weise bis zur Variable x_n fort, so erhält man eine wohldefinierte Zahl I , die das *Integral von f über Q* heißt:

$$I := \int_{a_n}^{b_n} \dots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \right) \dots dx_n. \quad (5.3)$$

Bei Mehrfachintegralen ist es oft praktisch, das Differenzial direkt an das entsprechende Integralzeichen zu schreiben,

$$I = \int_{a_n}^{b_n} dx_n \dots \int_{a_1}^{b_1} dx_1 f(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, \dots, x_n),$$

und folgende abkürzende Schreibweisen sind üblich:

$$I = \int_Q f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_Q f(x_1, \dots, x_n) d^n x = \int_Q f(x) d^n x,$$

wobei natürlich die Differenziale auch hier direkt hinter das Integralzeichen geschrieben werden können.

Zur Berechnung des Integrals (5.3) werden die Integrationen über x_1 bis x_n der Reihe nach von „innen nach außen“ ausgeführt. Da die Nummerierung der Variablen beliebig ist, kann die tatsächliche *Reihenfolge der Integrationen letztlich frei gewählt werden*.

Ein besonders einfacher Fall liegt vor, wenn der Integrand f in Faktoren zerfällt, die jeweils nur von einer Variablen abhängen, d. h., wenn gilt

$$f(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) \quad (5.4)$$

mit stetigen Funktionen $\varphi_k : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \int_Q f(\mathbf{x}) \, d^n x &= \int_Q \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{a_n}^{b_n} dx_n \dots \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \dots \varphi_n(x_n) \\ &= \left(\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \varphi_1(x_1) \right) \int_{a_n}^{b_n} dx_n \dots \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \varphi_2(x_2) \dots \varphi_n(x_n) \\ &= \left(\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \varphi_1(x_1) \right) \left(\int_{a_2}^{b_2} dx_2 \varphi_2(x_2) \right) \dots \left(\int_{a_n}^{b_n} dx_n \varphi_n(x_n) \right) \\ &= \prod_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \varphi_k(x_k) \, dx_k. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Das Integral zerfällt hier also in Faktoren mit gewöhnlichen Integralen über Funktionen einer Veränderlichen.

- **Zwischenfrage (1)** Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = 1/x_1 x_2$. Ist die Funktion in ihrem Definitionsbereich stetig? Kann sie über jeden Quader integriert werden, der vollständig im Definitionsbereich liegt? Ist sie eine Funktion des Typs (5.4)?

Beispiele

(1) Wir berechnen das Integral der Funktion

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = xz \cos(\pi yz)$$

auf dem Quader $Q = [0, 2] \times [1, 3] \times [-1, 0]$. Wir schreiben hier x, y, z anstelle von x_1, x_2, x_3 . Die Funktion f ist stetig. Es ist

$$\begin{aligned}
 \int_Q d^3x f(x) &= \int_{-1}^0 dz \int_1^3 dy \int_0^2 dx \, xz \cos(\pi yz) \\
 &= \int_{-1}^0 dz \int_1^3 dy \left[\frac{x^2}{2} z \cos(\pi yz) \right]_{x=0}^2 = \int_{-1}^0 dz \int_1^3 dy \, 2z \cos(\pi yz) \\
 &= \int_{-1}^0 dz \left[\frac{2}{\pi} \sin(\pi yz) \right]_{y=1}^3 = \int_{-1}^0 dz \left(\frac{2}{\pi} \sin(3\pi z) - \frac{2}{\pi} \sin(\pi z) \right) \\
 &= \left[-\frac{2}{3\pi^2} \cos(3\pi z) + \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi z) \right]_{z=-1}^0 \\
 &= -\frac{2}{3\pi^2} + \frac{2}{\pi^2} - \left(\frac{2}{3\pi^2} - \frac{2}{\pi^2} \right) = \frac{8}{3\pi^2}.
 \end{aligned}$$

Lesehilfe

Wie du sicher merkst, kann das Aufschreiben und Ausführen von Mehrfachintegralen mühselig sein, und man muss aufpassen, mit den Variablen nicht durcheinander zu kommen. Deswegen ist eine möglichst kompakte und klare Notation wichtig.

An reiner Integration ist im obigen Beispiel nicht viel passiert. Neben $\int t \, dt = t^2/2$ sind nur die Integrationsregeln $\int \cos(\omega t) \, dt = \sin(\omega t)/\omega$ und $\int \sin(\omega t) \, dt = -\cos(\omega t)/\omega$ verwendet worden.

(2) Die Funktion

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = xz \cos(\pi y)$$

zerfällt in Faktoren, die jeweils nur von einer Variablen abhängen. Ihr Integral über den Quader $Q = [0, 2] \times [1, 3] \times [-1, 0]$ ist daher gleich

$$\int_Q d^3x f(x) = \left(\int_0^2 x \, dx \right) \left(\int_1^3 \cos(\pi y) \, dy \right) \left(\int_{-1}^0 z \, dz \right) = 2 \cdot 0 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = 0.$$

(3) Volumen eines Quaders: Für Funktionen mit einer Veränderlichen ist der „Quader“ Q nur ein Intervall, für Funktionen zweier Veränderlichen ist $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ein Rechteck, für drei Veränderliche ist $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ ein räumlicher Quader und für n Veränderliche ist $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ein n -dimensionaler Hyperquader.

Integriert man nun die konstante Funktion f mit $f(x_1, \dots, x_n) = 1$ über den Quader Q , so erhält man sein Volumen $\text{Vol}(Q)$:

$$\text{Vol}(Q) = \int_Q d^n x. \quad (5.6)$$

Da eine konstante Funktion eine Funktion des Typs (5.4) ist, gilt ferner

$$\int_Q d^n x = \left(\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \right) \dots \left(\int_{a_n}^{b_n} dx_n \right).$$

Die einzelnen Integrale über ein Intervall $[a_k, b_k]$ ergeben einfach dessen Länge,

$$\int_{a_k}^{b_k} 1 \, dx_k = [x_k]_{a_k}^{b_k} = b_k - a_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

sodass wir als Volumen des Quaders erhalten

$$\text{Vol}(Q) = \int_Q d^n x = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n). \quad (5.7)$$

Für $n = 2$ und 3 entspricht das dem elementargeometrischen Flächeninhalt bzw. Volumen. So ist beispielsweise das Volumen des Quaders $[0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$, also einem Quader mit den Kantenlängen 1, 2 und 3, gleich 6.

- **Antwort auf Zwischenfrage (1)** Gefragt war, ob die Funktion $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = 1/x_1 x_2$ stetig ist und ob sie über jeden Quader im Definitionsbereich integriert werden kann. Gefragt war ferner, ob sie vom Typ (5.4) ist.

Die Funktion ist als Produkt und Quotient stetiger Funktionen in ihrem Definitionsbereich stetig (die Werte $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ liegen nicht im Definitionsbereich). Sie kann daher über jeden *abgeschlossenen* Quader im Definitionsbereich integriert werden, also über jeden Quader

$$Q = [\varepsilon_1, b_1] \times [\varepsilon_2, b_2]$$

mit $0 < \varepsilon_1 < b_1$ und $0 < \varepsilon_2 < b_2$.

Die Funktion zerfällt in zwei Faktoren, die jeweils nur von einer Variablen abhängen:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2}.$$

Ihr Integral ist daher

$$I = \int_Q \frac{1}{x_1 x_2} dx_1 dx_2 = \left(\int_{\varepsilon_1}^{b_1} \frac{dx_1}{x_1} \right) \left(\int_{\varepsilon_2}^{b_2} \frac{dx_2}{x_2} \right) = \left(\ln \frac{b_1}{\varepsilon_1} \right) \left(\ln \frac{b_2}{\varepsilon_2} \right).$$

Numerische Integration

Natürlich können auch Mehrfachintegrale numerisch ausgewertet werden. Bei Integranden des Typs (5.4) hat man es einfach mit einem Produkt aus herkömmlichen Einfachintegralen zu tun. Im allgemeinen Fall sind jedoch Mehrfachsummen zu bilden. Für $n = 2$ etwa hat man Doppelsummen des Typs

$$I = \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y$$

zu bilden, mit denen Säulen der Höhen $f(x_i, y_j)$ über kleinen Rechteckflächen $\Delta x \Delta y$ zu einem Näherungswert für das Gesamtintegral aufsummiert werden. Konkret kann man für das Integrationsgebiet $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ beispielsweise $\Delta x := (b_1 - a_1)/m_1$ und $\Delta y := (b_2 - a_2)/m_2$ setzen und hat dann mit

$$I = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} f(a_1 + (i-1)\Delta x, a_2 + (j-1)\Delta y) \Delta x \Delta y \quad (5.8)$$

einen Näherungswert für das Integral $\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dx dy$, bei dem die Höhen der einzelnen Säulen jeweils durch den Funktionswert an der „linken unteren“ Ecke der rechteckigen Säulenbasis gegeben werden. Natürlich hängt die Qualität der Näherung dabei i. Allg. von der Anzahl der Unterteilungen, also von m_1 und m_2 ab.

Für eine solche numerische Integration ist es übrigens nicht notwendig, dass der Integrand stetig ist. Auch kann eine nur punktweise bekannte Funktion auf diese Weise integriert werden: Es reicht aus, wenn die Funktionswerte an den Stützstellen bekannt sind. Natürlich muss man dabei davon ausgehen können, dass der vollständige Graph der Funktion die bekannten Punkte „gutmütig“ verbindet.

Selbstverständlich kann die numerische Integration auch für höherdimensionale Integrale erfolgen: Im allgemeinen Fall hat man es zu tun mit n -fachen Summen der Form

$$\sum_1 \sum_2 \dots \sum_n f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n.$$

5.1.2 Stetige Funktionen auf kompaktem Träger

Wie wir gesehen haben, kann die Integration einer stetigen Funktion auf einem Quader leicht definiert werden. Ein Quader stellt einfache Integralgrenzen dar, die hinsichtlich der einzelnen Integrationsintervalle unabhängig voneinander sind. Andere Integrationsgebiete sind damit möglich, wenn man sie (näherungsweise) aus Quadern zusammensetzen kann.

Ist eine stetige Funktion nur auf einem beschränkten Gebiet ungleich 0, so kann das Integral über die gesamte Funktion auch ohne explizite Angabe von Integralgrenzen definiert werden. Die Grenzen sind dann sozusagen im Integranden „mit

enthalten“. Für die Formulierung allgemeiner Eigenschaften des Integrals ist das oft sehr vorteilhaft.

Wir betrachten nun also Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Die abgeschlossene Hülle der Menge aller Punkte, in denen die Funktion von 0 verschieden ist, bezeichnet man als den *Träger* der Funktion:

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}. \quad (5.9)$$

Den Vektorraum aller *stetigen* Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $C(\mathbb{R}^n)$, sodass

$$C_c(\mathbb{R}^n) := \{f \in C(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp}(f) \text{ kompakt}\} \quad (5.10)$$

den *Untervektorraum aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger* darstellt. Zu jeder Funktion $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gibt es daher einen abgeschlossenen Quader Q mit $\text{supp}(f) \subseteq Q$. Außerhalb von Q ist f identisch 0.

Lesehilfe

Noch einmal kurz zu den Begriffen und Abkürzungen: Die abgeschlossene Hülle einer Menge ist ihre kleinste abgeschlossene Obermenge. Das kennzeichnet man durch einen Strich über der Menge. Der Träger einer Funktion ist also per Definition stets abgeschlossen.

Eine Menge heißt *kompakt*, wenn sie abgeschlossen *und* beschränkt ist. Besitzt eine Funktion einen kompakten Träger, so ist sie nur auf einer beschränkten Teilmenge ungleich 0.

Die Bezeichnung „supp“ kommt vom englischen „support“ für Träger. Das große „C“ leitet sich von „continuous“ für stetig ab und das kleine „c“ von „compact“.

Für Funktionen $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ können wir das Integral wie folgt definieren: Wir wählen einen abgeschlossenen achsenparallelen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit $\text{supp}(f) \subseteq Q$ und setzen

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n := \int_Q f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (5.11)$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Quaders Q , da sich unterschiedliche Quader, die den Träger von f vollständig enthalten, nur um Bereiche unterscheiden können, in denen f identisch verschwindet. Natürlich sind auch hier Schreibweisen wie

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(x) = \int_{\mathbb{R}} dx_1 \dots \int_{\mathbb{R}} dx_n f(x)$$

gebräuchlich.

- **Zwischenfrage (2)** Kann das Integral einer stetigen Funktion f über den Quader Q alternativ immer auch als Integral einer (anderen?) Funktion $\tilde{f} \in C_c(\mathbb{R}^n)$ über \mathbb{R}^n ausgedrückt werden?

Die Eigenschaften der *Linearität* und der *Monotonie* lassen sich durch n -malige Anwendung der entsprechenden Aussagen für Integrale von Funktionen einer Veränderlichen leicht auf Mehrfachintegrale übertragen:

Satz 5.1 Es seien $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ zwei Funktion mit kompaktem Träger und $a \in \mathbb{R}$ eine Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_{\mathbb{R}^n} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) \, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \, d^n x + \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) \, d^n x \\ (2) \quad & \int_{\mathbb{R}^n} a f(\mathbf{x}) \, d^n x = a \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \, d^n x \\ (3) \quad & f \leq g \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \, d^n x \leq \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) \, d^n x. \end{aligned}$$

Natürlich dürfen die Funktionen f und g unterschiedliche Träger besitzen.

Darüber hinaus ist das Integral über Funktionen $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ *translationsinvariant*: Für einen beliebigen Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ gilt offenbar

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \, d^n x.$$

Lesehilfe

Die obigen Aussagen sind mit Integralen über Funktionen $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, d. h. für Integrale über den gesamten \mathbb{R}^n , leicht zu formulieren. Natürlich gelten sie sinngemäß auch für Integrale über Quader. Dann müsste man sich aber zusätzlich über die jeweiligen Integralgrenzen Gedanken machen und die exakte Formulierung würde sich deutlich holpriger gestalten. Darüber hinaus werden wir noch sehen, dass sich Integrale über Quader mit der Erweiterung des Integrals auf halbstetige Funktionen ebenso als Integrale der Form $\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \, d^n x$ darstellen lassen.

Beispiel

Wir betrachten die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deren Werte für reelle a, b mit $a \leq b$ und einer weiteren Konstante $k \in \mathbb{N}^*$ festgelegt sind durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 - ak + kx & \text{für } x \in]a - 1/k, a[\\ 1 & \text{für } x \in [a, b] \\ 1 + bk - kx & \text{für } x \in]b, b + 1/k[\\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (5.12)$$

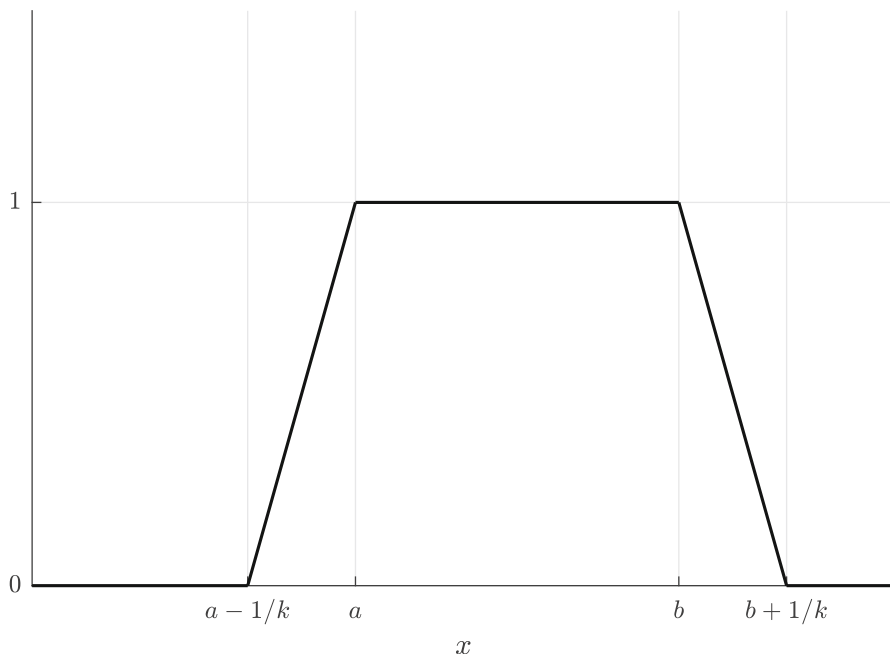


Abb. 5.1 Die Funktion (5.12) besitzt auf dem Intervall $[a, b]$ den konstanten Wert 1. Außerhalb der Intervallgrenzen fällt sie auf Teilintervallen der Länge $1/k$ linear und stetig auf ihren sonstigen Wert 0 ab. Träger der Funktion ist das Intervall $[a - 1/k, b + 1/k]$

siehe Abb. 5.1. Die Funktion φ besitzt also auf dem Intervall $[a, b]$ den Wert 1 und geht anschließend auf Teilintervallen der Länge $1/k$ linear und stetig in den Wert 0 über. Ihre Funktionswerte sind somit für $x \in]a - 1/k, b + 1/k[$ ungleich 0. Der Träger der Funktion ist daher

$$\text{supp}(\varphi) = [a - 1/k, b + 1/k]$$

und es handelt sich um eine Funktion einer Veränderlichen mit kompaktem Träger. Ihr Integral ist

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, dx = \int_{a-1/k}^{b+1/k} \varphi(x) \, dx = b - a + 1/k, \quad (5.13)$$

wie geometrisch unmittelbar klar wird, siehe Abb. 5.1. Dabei haben wir den „Quader“ $Q = [a - 1/k, b + 1/k]$ zur Integration gewählt. Das ist der minimale Quader Q mit $Q \supseteq \text{supp}(\varphi)$. Jeder größere Quader – hier also jedes größere abgeschlossene Intervall – enthält nur zusätzliche Bereiche mit $\varphi(x) = 0$, ergibt also keinen weiteren Beitrag zum Integral.

Definiert man nun eine Funktion mit n Veränderlichen durch

$$f(x_1, \dots, x_n) := \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n), \quad (5.14)$$

so wird deren Integral nach (5.5) gegeben durch

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) d^n x = \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \right)^n = (b - a + 1/k)^n. \quad (5.15)$$

- **Antwort auf Zwischenfrage (2)** Gefragt war, ob das Integral einer stetigen Funktion f über den Quader Q alternativ als Integral einer (anderen?) Funktion $\tilde{f} \in C_c(\mathbb{R}^n)$ über \mathbb{R}^n ausgedrückt werden kann.

Das funktioniert nur dann, wenn die Funktion f auf dem gesamten Rand des Quaders Q gleich 0 ist. Für eine Funktion \tilde{f} , die in Q mit f übereinstimmt und außerhalb identisch 0 ist, gilt dann $\int_Q f(\mathbf{x}) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\mathbf{x}) d^n x$.

Verschwindet f aber auf dem Rand des Quaders nicht, so ist eine Funktion \tilde{f} , die innerhalb von Q mit f übereinstimmt und außerhalb identisch 0 ist, am Rand des Quaders nicht stetig, gehört also nicht zu $C_c(\mathbb{R}^n)$. Wir werden allerdings noch sehen, dass der Integralbegriff auch auf solche nicht stetigen Funktionen \tilde{f} ausgeweitet werden kann.

5.2 Erweiterung des Integralbegriffs

Bisher haben wir Mehrfachintegrale stetiger Funktionen betrachtet. Aber ebenso wie das eindimensionale Riemann-Integral keineswegs stetige Integranden benötigt – man denke nur an die Treppenfunktionen, die sogar Ausgangspunkt des Riemann-Integrals sind –, können auch Mehrfachintegrale auf eine größere Gruppe von Funktionen ausgedehnt werden.

Lesehilfe

In diesem Abschnitt besprechen wir die theoretischen Grundlagen für die Formulierung des allgemeinen Integralbegriffs, des Lebesgue-Integrals. Sofern du nur an der praktischen Berechnung von Mehrfachintegralen interessiert bist, kannst du ihn überspringen und mit Abschn. 5.3 fortfahren.

5.2.1 Monotone Funktionenfolgen

Die Erweiterung des Integralbegriffs erfasst zunächst Funktionen, die sich als monotone Grenzwerte von Funktionen aus $C_c(\mathbb{R}^n)$ darstellen lassen. Ausgangspunkt dieses Zugangs ist der *Satz von Dini*¹:

Satz 5.2 *Auf einer kompakten Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ sei eine Folge stetiger Funktionen $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, gegeben. Die Folge sei monoton steigend,*

$$f_0 \leq f_1 \leq \dots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \dots,$$

und sie besitze eine stetige Grenzfunktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in A.$$

Dann konvergiert die Funktionenfolge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf A gleichmäßig gegen f .

Beweis Für eine gegebenes $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$U_k := \{\mathbf{x} \in A \mid f(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x}) < \varepsilon\}.$$

Die Funktionenfolge (f_k) konvergiert nach Voraussetzung punktweise gegen f , sodass die Mengen U_k , $k \in \mathbb{N}$, eine Überdeckung von A bilden. Da die Funktionen f und f_k und damit auch $f - f_k$ stetig sind, sind die Mengen U_k offen. Da A kompakt ist, enthält nach dem Satz von Heine-Borel jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung. Es sei N der größte Index dieser endlich vielen Überdeckungsmengen. Für alle Indizes $k > N$ gilt dann $U_k = A$. Also ist

$$|f(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x})| = f(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x}) < \varepsilon \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in A \text{ und } k > N.$$

Das ist nichts anderes als die Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz der Folge (f_k) gegen f . •

- **Zwischenfrage (3)** Ist die Voraussetzung der Monotonie im Satz von Dini überhaupt notwendig? Besitzt nicht eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge stetiger Funktionen immer eine stetige Grenzfunktion?

Bei gleichmäßiger Konvergenz dürfen Integration und Limesbildung vertauscht werden. Für stetige Funktionen mit kompaktem Träger bedeutet der Satz von Dini daher:

¹ Benannt nach dem italienischen Mathematiker und Politiker Ulisse Dini, 1845–1918.

Satz 5.3 Es sei $f_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, eine monoton steigende Funktionenfolge, die gegen die Funktion $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ konvergiere,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(\mathbf{x}) \, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \, d^n x.$$

Da die Folge (f_k) monoton ist, gilt für die Träger der Funktionen

$$\text{supp}(f_k) \subseteq \text{supp}(f_0) \cup \text{supp}(f)$$

für alle k . Zur Integration kann man daher einen gemeinsamen Quader $Q \supseteq \text{supp}(f_0) \cup \text{supp}(f)$ wählen.

Natürlich gelten die Aussagen der Sätze 5.2 und 5.3 analog auch für monoton fallende Funktionenfolgen (f_k) .

► **Antwort auf Zwischenfrage (3)** Gefragt war nach der Notwendigkeit der Voraussetzung der Monotonie im Satz von Dini.

Richtig ist, dass eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge stetiger Funktionen immer eine stetige Grenzfunktion besitzt. Diese Aussage kann aber nicht ohne Weiteres „umgedreht“ werden: Besitzt eine Folge stetiger Funktionen eine stetige Grenzfunktion, so erfolgt die Konvergenz nicht notwendig gleichmäßig, siehe etwa das Beispiel der Funktion (2.27) in Abschn. 2.4.

Nach dem Satz von Dini erfolgt die Konvergenz aber gleichmäßig, wenn die Funktionenfolge nicht nur konvergent ist, sondern es sich zusätzlich um eine monotone Funktionenfolge handelt. Daher spielt die Monotonie auch im Beweis des Satzes von Dini eine entscheidende Rolle (andernfalls wäre nicht $U_k = A$ für alle Indizes $k > N$).

5.2.2 Übergang zu nicht stetigen Funktionen

Bisher hatten wir es mit stetigen Funktionen zu tun. Für die Erweiterung des Integrals auf nicht stetige Funktionen macht man sich nun die besonderen Konvergenzeigenschaften monotoner Funktionenfolgen zunutze: Es sei unverändert $f_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, eine monoton steigende Funktionenfolge. Für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist dann $(f_k(\mathbf{x}))_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge reeller Zahlen, die gegen eine reelle Zahl oder gegen ∞ konvergiert. Setzt man

$$f(\mathbf{x}) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x}), \tag{5.16}$$

so erhält man eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und wir schreiben $f_k \uparrow f$. Im Unterschied zu den f_k muss ihre Grenzfunktion f nicht stetig sein.

Lesehilfe

Wir erinnern uns: Im Satz von Dini ist eine stetige Grenzfunktion gefordert. Diese Forderung wird hier fallengelassen. Somit werden auch nicht stetige Grenzfunktionen zugänglich, für die dann allerdings keine gleichmäßige Konvergenz mehr vorliegt.

Die Menge aller Funktionen f , die sich auf diese Weise als Grenzwerte monoton steigender Funktionenfolgen $f_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, erhalten lassen, bezeichnen wir mit $H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und definieren ihr Integral als

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \, d^n x := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(\mathbf{x}) \, d^n x. \quad (5.17)$$

Da mit f_k auch die Folge der Integrale $\int f_k(\mathbf{x}) \, d^n x$ monoton steigt, existiert der Limes immer eigentlich oder uneigentlich. Sein Wert ist unabhängig von der Wahl der Folge f_k .

Ist f stetig, gilt also $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, so ergibt Definition 5.17 aufgrund von Satz 5.3 wieder das normale Integral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger. Somit gilt $C_c(\mathbb{R}^n) \subset H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$.

Lesehilfe

Die Menge $H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und ihr Integralbegriff (5.17) schließen also nicht stetige Funktionen mit ein, und zwar gerade solche, die Grenzwerte monoton steigender Folgen stetiger Funktionen sind.

Analog zu $H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen f , die sich als Grenzwerte monoton fallender Funktionenfolgen $f_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, erhalten lassen, mit $H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ und definieren ihr Integral als

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \, d^n x := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(\mathbf{x}) \, d^n x. \quad (5.18)$$

Offenbar gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \, d^n x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ für $f_k \downarrow f$.

Es gibt Funktionen f , die sowohl zu $H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ als auch zu $H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ gehören. Dazu wollen wir hier ohne Beweis festhalten, dass es dabei um die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger handelt, es ist also

$$H^\uparrow(\mathbb{R}^n) \cap H^\downarrow(\mathbb{R}^n) = C_c(\mathbb{R}^n). \quad (5.19)$$

Beispiel

Wir betrachten eine stetige nichtnegative Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Diese Zuordnung erweitern wir auf ganz \mathbb{R} , indem wir eine Funktion $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieren durch

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{für } x \in [a, b] \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]. \end{cases} \quad (5.20)$$

Die Funktion $\tilde{\varphi}$ ist i. Allg. nicht stetig, da sie bei a von 0 auf den Wert $\varphi(a)$ und bei b von $\varphi(b)$ zurück auf 0 „springen“ muss. Aber $\tilde{\varphi}$ gehört zu $H^1(\mathbb{R})$. Um das zu sehen, müssen wir eine Folge von Funktionen $f_k \in C_c(\mathbb{R})$ mit $f_k \downarrow \tilde{\varphi}$ konstruieren: Dazu sei f_k für $k \geq 1$ die Funktion, die auf $[a, b]$ mit φ übereinstimmt, auf $]-\infty, a - 1/k[$ und $]b + 1/k, \infty[$ gleich 0 ist und auf $[a - 1/k, a]$ linear von 0 auf $\varphi(a)$ ansteigt und auf $[b, b + 1/k]$ linear von $\varphi(b)$ auf 0 abfällt, siehe Abb. 5.2. Die Funktionen f_k sind stetig, sie bilden eine monoton fallende Funktionenfolge und es gilt $f_k \downarrow \tilde{\varphi}$. Ihr Integral kann wie folgt berechnet werden:

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = \frac{1}{2k} \varphi(a) + \int_a^b \varphi(x) dx + \frac{1}{2k} \varphi(b) = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2k} + \int_a^b \varphi(x) dx$$

(vergleiche auch das Beispiel (5.12)). Somit ist

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (5.21)$$

- **Zwischenfrage (4)** Muss die Funktion φ tatsächlich nichtnegativ sein, damit die Funktion $\tilde{\varphi}$, (5.20), zu $H^1(\mathbb{R})$ gehört? Im Einzelnen: (1) Reicht es aus, wenn $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ nichtnegativ sind, die Funktion aber im Inneren des Intervalls $[a, b]$ negative Werte annimmt? (2) Wie sieht es aus, wenn $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$ ist und die Funktion im Inneren des Intervalls vollständig negativ ist? (3) Was passiert schließlich bei $\varphi(a) < 0$ oder $\varphi(b) < 0$?

Das Beispiel kann ohne Weiteres auf n Variable erweitert werden: Eine Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Quader $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ werde gegeben durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) \quad (5.22)$$

mit Funktionen $\varphi_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, die allesamt stetig und nichtnegativ seien. Sie werden analog zu (5.20) zu Funktionen $\tilde{\varphi}_i$ auf ganz \mathbb{R} erweitert. Damit definieren wir die Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) := \tilde{\varphi}_1(x_1) \dots \tilde{\varphi}_n(x_n). \quad (5.23)$$

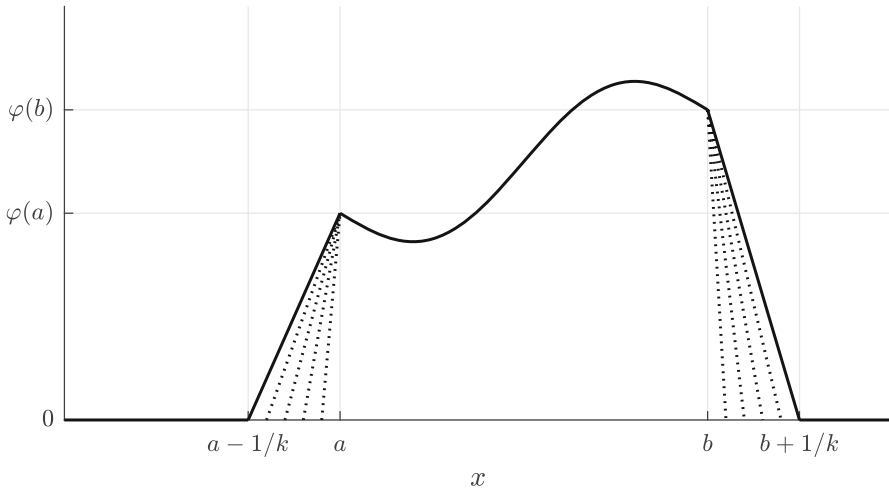


Abb. 5.2 Die Funktionen f_k entsprechen auf dem Intervall $[a, b]$ der Funktion φ und besitzen außerhalb des Intervalls $[a - 1/k, b + 1/k]$ den Wert 0. Auf den dazwischen liegenden Teilintervallen der Länge $1/k$ verbinden sie die 0 linear und stetig mit den Randwerten $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$. Die Folge der stetigen Funktionen $f_k, k \in \mathbb{N}^*$, ist monoton fallend und konvergiert gegen $\tilde{\varphi}$, es ist also $f_k \downarrow \tilde{\varphi}$

Die Funktion \tilde{f} ist i. Allg. nicht stetig, aber sie gehört zu $H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ und für ihr Integral gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) \, d^n x = \int_Q f(x) \, d^n x. \quad (5.24)$$

Das Integral über den Quader Q kann somit durch ein Integral über \mathbb{R}^n ausgedrückt werden.

- **Antwort auf Zwischenfrage (4)** Gefragt war, ob φ tatsächlich nicht-negativ sein muss, damit $\tilde{\varphi}$, (5.20), zu $H^\downarrow(\mathbb{R})$ gehört. Im Einzelnen: (1) $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ nichtnegativ, aber im Inneren des Intervalls negative Werte? (2) $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$ und im Inneren des Intervalls vollständig negativ? (3) $\varphi(a) < 0$ oder $\varphi(b) < 0$?

Zu (1): Die Funktionen f_k sind im Inneren des Intervalls allesamt gleich φ . Es ist für den Grenzwertprozess daher unerheblich, ob dort negative Werte angenommen werden, und die Funktion gehört nach wie vor zu $H^\downarrow(\mathbb{R})$.

Zu (2): Für $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$ ist die Funktion $\tilde{\varphi}$ stetig, also gilt $\tilde{\varphi} \in C_c(\mathbb{R})$. Sie kann daher ohne Weiteres integriert werden. Mit $\tilde{\varphi} \in C_c(\mathbb{R})$ gilt erst recht $\tilde{\varphi} \in H^\downarrow(\mathbb{R})$ (und auch $\tilde{\varphi} \in H^\uparrow(\mathbb{R})$).

Zu (3): Mit $\varphi(a) < 0$ oder $\varphi(b) < 0$ sind die Funktionen f_k , die wie zuvor definiert werden, nicht mehr monoton fallend: Die Verbin-

dungsstücke zwischen 0 und $\varphi(a)$ oder $\varphi(b)$ und 0 liegen dann mit wachsendem k *oberhalb* der Stücke mit kleinerem k . Hier sind die f_k daher monoton steigend und die Funktion gehört nicht mehr zu $H^\downarrow(\mathbb{R})$.

Für $\varphi(a) < 0$ und $\varphi(b) < 0$ gehört die Funktion $\tilde{\varphi}$ zu $H^\uparrow(\mathbb{R})$.

5.2.3 Halbstetigkeit

Die Mengen $H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und $H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ sind die Mengen aller Funktionen, die sich als Grenzwerte monoton steigender bzw. monoton fallender Funktionenfolgen stetiger Funktionen mit kompaktem Träger erhalten lassen. Die Bezeichnung „ H “ deutet bereits an, dass die *Halbstetigkeit* die zentrale Eigenschaft dieser Funktionen ist. Halbstetige Funktionen können nicht stetige Stellen aufweisen, aber die Sprünge führen entweder nur nach oben oder nur nach unten:

Definition 5.1 (1) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt im Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ von unten halbstetig oder unterhalbstetig, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von \mathbf{a} gibt mit

$$f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a}) - \varepsilon \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U.$$

(2) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt im Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ von oben halbstetig oder oberhalbstetig, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von \mathbf{a} gibt mit

$$f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) + \varepsilon \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U.$$

Die Funktion f heißt auf \mathbb{R}^n von unten (oben) halbstetig, falls sie in jedem $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ von unten (oben) halbstetig ist.

Eine unterhalbstetige Funktion springt ausgehend von der Stelle \mathbf{a} mit dem Funktionswert $f(\mathbf{a})$ *nicht* nach unten und eine oberhalbstetige Funktion springt *nicht* nach oben. Entscheidend für die „Sprungrichtung“ ist der Funktionswert in der betrachteten Stelle: Die Funktionen $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}, \quad h(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

unterscheiden sich nur durch ihren Funktionswert bei 0. Die Funktion g ist dort halbstetig von unten, während h dort halbstetig von oben ist, siehe auch Abb. 5.3.

Lesehilfe

Hier und an vielen weiteren Stellen machen wir uns die Begriffe an Funktionen einer Veränderlichen klar, also für $n = 1$. Für mehrere Veränderliche

verhält es sich zwar „analog“, ist aber doch komplizierter. Es ist wichtig, das nicht aus den Augen zu verlieren.

Beispielsweise kann eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ an einer halbstetigen Stelle viele verschiedene Sprunghöhen aufweisen, je nachdem, in welche Richtung man von der Stelle aus sieht.

Wenn eine Funktion weder nach oben noch nach unten springt, also gar nicht springt, ist sie stetig: *Ist eine Funktion halbstetig von oben und halbstetig von unten, so ist die Funktion stetig.*

Lesehilfe Stetigkeit

Das ε - δ -Kriterium der Stetigkeit lautet: *Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig im Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ so, dass gilt } |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon \text{ für alle } \mathbf{x} \text{ mit } |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta.$$

Anders ausgedrückt kann man auch sagen: *Die Funktion ist stetig in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine δ -Umgebung von \mathbf{a} gibt, $U_\delta(\mathbf{a})$, mit*

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon \text{ für alle } \mathbf{x} \in U_\delta(\mathbf{a}).$$

Die Ungleichung $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$ ist äquivalent zu

$$-\varepsilon < f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) < +\varepsilon.$$

Hier bedeutet das linke Ungleichheitszeichen die Halbstetigkeit von unten und das rechte Ungleichheitszeichen die Halbstetigkeit von oben.

Eine Funktion $f \in H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ muss sich als Grenzwert einer monoton steigenden Folge stetiger Funktionen darstellen lassen. Das funktioniert nur dann, wenn die Unstetigkeitsstellen von f allesamt halbstetig von unten sind. Umgekehrt muss eine Funktion $f \in H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ halbstetig von oben sein. Siehe Abb. 5.3.

Der genaue Zusammenhang zwischen Halbstetigkeit und Zugehörigkeit zu $H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ oder $H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ lautet:

Satz 5.4 (1) *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gehört genau dann zu $H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$, wenn sie von unten halbstetig ist und höchstens auf einer beschränkten Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ negative Funktionswerte annimmt.*

(2) *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ gehört genau dann zu $H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$, wenn sie von oben halbstetig ist und höchstens auf einer beschränkten Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ positive Funktionswerte annimmt.*

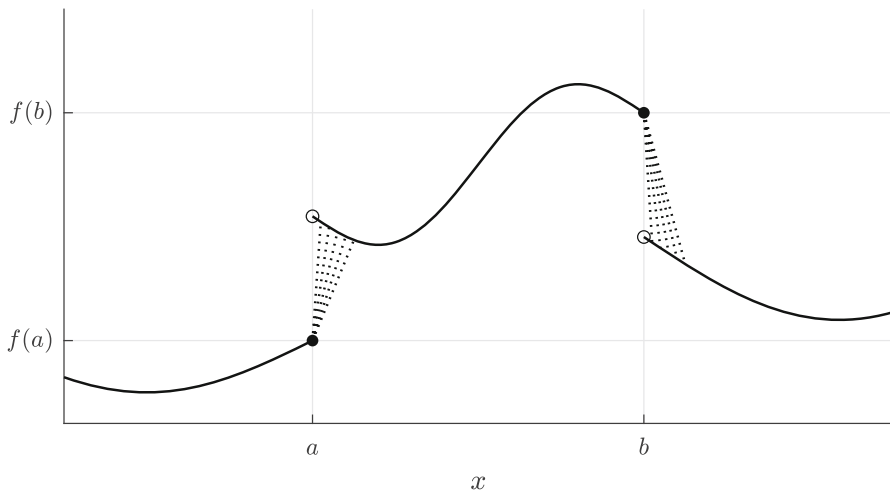


Abb. 5.3 Springt eine halbstetige Funktion f an einer Stelle a vom Wert $f(a)$ nach oben, so ist sie dort halbstetig von unten (dies entspricht der Funktion g aus (5.25)). Ein solcher Sprung kann durch eine monoton steigende Folge stetiger Funktionen „angenähert“ werden. Springt sie umgekehrt bei b von $f(b)$ nach unten, so ist sie dort halbstetig von oben (siehe die Funktion h aus (5.25)). Dieser Sprung kann durch eine monoton fallende Funktionenfolge angenähert werden

Beweis Der exakte Beweis dieses Satzes ist aufwendig. Wir führen ihn nicht aus. ◦

Lesehilfe

Vielleicht sind hier viele Begriffe neu für dich. Tatsächlich ist der allgemeine Integralbegriff für Funktionen mehrerer Veränderlicher wesentlich aufwendiger als das Riemann-Integral für Funktionen mit nur einer Veränderlichen. Anhand der Beispiele sollte sich aber auch hier ein Gefühl für die Dinge entwickeln lassen.

Zur praktischen Berechnung von Mehrfachintegralen werden wir die abstrakten Begriffe übrigens ebenso wenig benötigen wie den Limes von Treppenfunktionen zum Berechnen von Riemann-Integralen ;-)

Beispiele

(1) Die Funktion $\tilde{\varphi}$ aus (5.20),

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{für } x \in [a, b] \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [a, b], \end{cases}$$

ist für $\tilde{\varphi}(a) \geq 0$ und $\tilde{\varphi}(b) \geq 0$ halbstetig von oben. Für $\tilde{\varphi}(a) \leq 0$ und $\tilde{\varphi}(b) \leq 0$ ist sie halbstetig von unten. Außerhalb der beschränkten Menge $[a, b]$ ist $\tilde{\varphi} = 0$ (und

damit weder positiv noch negativ), sodass wir $\tilde{\varphi} \in H^\downarrow(\mathbb{R})$ haben für $\tilde{\varphi}(a) \geq 0$ und $\tilde{\varphi}(b) \geq 0$ und $\tilde{\varphi} \in H^\uparrow(\mathbb{R})$ für $\tilde{\varphi}(a) \leq 0$ und $\tilde{\varphi}(b) \leq 0$.

Für $\tilde{\varphi}(a) > 0$ und $\tilde{\varphi}(b) < 0$ ist $\tilde{\varphi}$ bei a halbstetig von oben und bei b halbstetig von unten, also global weder halbstetig von oben noch von unten. In diesem Fall gehört $\tilde{\varphi}$ daher weder zu $H^\downarrow(\mathbb{R})$ noch zu $H^\uparrow(\mathbb{R})$ und ist mit unseren bisher betrachteten Begriffen nicht integrierbar.

(2) Die *Indikatorfunktion* oder *charakteristische Funktion* einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\chi_M(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{x} \in M \\ 0 & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus M. \end{cases} \quad (5.26)$$

Die Funktion $\chi_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann von unten halbstetig, wenn die Menge M offen ist, und sie ist genau dann von oben halbstetig, wenn M abgeschlossen ist.

Lesehilfe

Die Indikatorfunktion χ_M zeigt an, sie „indiziert“, wo die Menge M ist. Der griechische Buchstabe „chi“ ist der Bezeichnung „charakteristische Funktion“ entlehnt.

- **Zwischenfrage (5)** Sind die folgenden Aussagen richtig? (1) Für die Indikatorfunktion χ_M einer offenen Menge M gilt $\chi_M \in H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$. (2) Für die Indikatorfunktion χ_M einer abgeschlossenen Menge M gilt $\chi_M \in H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$.

5.2.4 Lebesgue-Integral

Machen wir uns den bisherigen Stand der Dinge noch einmal an einem Beispiel klar: Wir betrachten den Quader $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ und integrieren die Funktion 1 über diesen Quader. Das können wir mit seiner Indikatorfunktion χ_Q schreiben als

$$I = \int_Q d^2x = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_Q(\mathbf{x}) d^2x.$$

Dieses Integral ergibt das Volumen des Quaders – das hier natürlich nichts anderes ist als die Fläche des Quadrats mit der Seitenlänge 1 – und hat den Wert 1. Formal ist das Integral über χ_Q wohldefiniert, weil χ_Q zu $H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ gehört.

Betrachten wir stattdessen den offenen Quader $Q^* =]0, 1[\times]0, 1[$, so ist klar, dass er denselben Flächeninhalt hat, da die Randlinien dafür keine Rolle spielen. Auch das Integral

$$I^* = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{Q^*}(\mathbf{x}) d^2x$$

ist definiert, allerdings gehört die Indikatorfunktion χ_{Q^*} jetzt zu $H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$.

Nehmen wir schließlich den Quader $Q^{**} = [0, 1[\times [0, 1[$, der weder abgeschlossen noch offen ist, so wissen wir natürlich, dass auch sein Flächeninhalt gleich 1 ist. Das Integral

$$I^{**} = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{Q^{**}}(\mathbf{x}) \, d^2x$$

ist nun aber nicht definiert, da $\chi_{Q^{**}}$ global weder halbstetig von oben noch halbstetig von unten ist und daher weder zu $H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ noch zu $H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ gehört.

Diese unbefriedigende Situation, dass praktisch dieselbe Sache unterschiedliche Integralbegriffe erfordert oder auch gar nicht definiert ist, wird nun durch den endgültigen Integralbegriff, das *Lebesgue-Integral*², aufgelöst:

Definition 5.2 Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion. Dann setzt man

$$\int_* f(\mathbf{x}) \, d^n x := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) \, d^n x \mid \varphi \in H^\downarrow(\mathbb{R}^n), \varphi \leq f \right\} \quad (\text{Unterintegral})$$

$$\int^* f(\mathbf{x}) \, d^n x := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x}) \, d^n x \mid \psi \in H^\uparrow(\mathbb{R}^n), \psi \geq f \right\} \quad (\text{Oberintegral}).$$

Die Funktion f heißt *Lebesgue-integrierbar* oder *einfach integrierbar*, falls

$$-\infty < \int_* f(\mathbf{x}) \, d^n x = \int^* f(\mathbf{x}) \, d^n x < \infty.$$

Der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt dann das *Lebesgue-Integral* oder einfach das *Integral* von f und wird als $\int f(\mathbf{x}) \, d^n x$ geschrieben.

Der Integrand f muss nun also nicht mehr zu $H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ oder $H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ gehören, sondern sein Integral muss sich nur durch solche Funktionen von unten bzw. von oben mit demselben Ergebnis annähern lassen.

- **Antwort auf Zwischenfrage (5)** Gefragt war nach den Aussagen: (1) Für eine offene Menge M gilt $\chi_M \in H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$. (2) Für eine abgeschlossene Menge M gilt $\chi_M \in H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$.

Zu (1): Da χ_M keine negativen Werte annehmen kann, ist die Aussage richtig, siehe Satz 5.4 (1). Bei nicht beschränkten Mengen kann das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_M(\mathbf{x}) \, d^n x$ dabei auch unendlich groß werden.

Zu (2): Die Funktion χ_M besitzt auf der abgeschlossenen Menge M den positiven Funktionswert 1. Sie gehört daher nur dann zu $H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$, wenn M beschränkt ist. Das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_M(\mathbf{x}) \, d^n x$ bleibt dann stets endlich.

² Benannt nach dem französischen Mathematiker Henri Léon Lebesgue, 1875–1941.

Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

Das Lebesgue-Integral verallgemeinert die zuvor besprochenen Integralbegriffe:

- Natürlich ist jede Funktion $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue-integrierbar.
- Für Funktionen $f \in H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ und $g \in H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ sind Unter- und Oberintegral gleich und gleich dem bisherigen Integral für Funktionen aus $H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ bzw. $H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$.

Beweis Betrachten wir eine Funktion $f \in H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$: Zunächst ist $\int_* f(\mathbf{x}) d^n x = \int f(\mathbf{x}) d^n x$, wo \int für den bisherigen Integralbegriff für Funktionen aus $H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ steht. Dies folgt direkt aus der Definition von \int_* , wenn man $\varphi = f$ wählt. Um die Gleichheit von $\int^* f = \int f$ einzusehen, wählen wir eine Folge $\psi_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi_k \downarrow f$. Damit ist nach Definition des Integrals für Funktionen aus $H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$

$$\int f(\mathbf{x}) d^n x = \inf_k \int \psi_k(\mathbf{x}) d^n x.$$

Andererseits gilt mit $\psi_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ auch $\psi_k \in H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$. Damit ist nach Definition des Oberintegrals

$$\inf_k \int \psi_k(\mathbf{x}) d^n x \geq \int^* f(\mathbf{x}) d^n x \geq \int f(\mathbf{x}) d^n x = \int f(\mathbf{x}) d^n x,$$

wobei wir verwendet haben, dass stets $\int_* f \leq \int^* f$ gilt. Insgesamt muss somit überall das Gleichheitszeichen gelten.

Ebenso stimmen für Funktionen $g \in H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ bisheriges Integral, Unterintegral und Oberintegral überein. •

Funktionen $f \in H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ und $g \in H^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ sind daher genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn gilt

$$\int f(\mathbf{x}) d^n x > -\infty \quad \text{bzw.} \quad \int g(\mathbf{x}) d^n x < \infty.$$

Wir müssen somit keine Unterscheidung zwischen den verschiedenen Integralbegriffen machen. Das Lebesgue-Integral führt die bisher unterschiedlichen Begriffe in einen allgemeinen Integralbegriff zusammen. Es ist allerdings auf endliche Integralwerte beschränkt.

Lebesgue-integrierbare Funktionen erfüllen das folgende, sehr anschauliche Kriterium:

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gibt mit

$$\int_{\mathbb{R}^n}^* |f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| d^n x < \varepsilon.$$

Im Sinn dieser Bedingung lässt sich also eine Lebesgue-integrierbare Funktion beliebig genau durch Funktionen aus $C_c(\mathbb{R}^n)$ approximieren.

Auch wenn wir keinen vollständigen Beweis dieses Kriteriums angeben wollen, so ist es doch zumindest plausibel, da alle besprochenen Integralbegriffe letztlich auf die Annäherung durch Funktionen aus $C_c(\mathbb{R}^n)$ zurückgehen. \circ

Lesehilfe

Das Lebesgue-Integral ist kein einfacher Begriff. Letztendlich aber ist es der Integralbegriff, mit dem sich sämtliche „normale“ Integrale über „vernünftige“ Funktionen erfassen lassen. Eine Beschränkung auf stetige Funktionen beispielsweise wäre dafür zu eng, auch wenn es natürlich viele Anwendungen gibt, in denen man es nur mit stetigen Funktionen zu tun hat.

Für die konkrete Berechnung von Integralen spielt der eigentliche Typ des Integrals in der Regel gar keine Rolle. Das Lebesgue-Integral ist also einfach das „Integral“ – es schließt alle bisher behandelten Integraltypen mit ein und alle bisher genannten Zusammenhänge und Formeln bleiben gültig.

Beispiel

Die Indikatorfunktion $\chi_{Q^{**}}$ mit $Q^{**} = [0, 1[\times [0, 1[$ ist Lebesgue-integrierbar. Für das Unterintegral muss $\chi_{Q^{**}}$ von Funktionen $\varphi \in H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \leq \chi_{Q^{**}}$ angenähert werden. Wir wollen als Funktionen φ andere Indikatorfunktionen wählen. Es ist $\chi_A \in H^\downarrow(\mathbb{R}^n)$, wenn A abgeschlossen ist. Für $0 < \varepsilon < 1$ setzen wir $A_\varepsilon := [0, 1 - \varepsilon] \times [0, 1 - \varepsilon]$. Dann ist $\chi_{A_\varepsilon} \leq \chi_{Q^{**}}$ für alle ε und

$$\begin{aligned} \int_* \chi_{Q^{**}}(\mathbf{x}) \, d^n x &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_\varepsilon}(\mathbf{x}) \, d^n x \mid 0 < \varepsilon < 1 \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_\varepsilon}(\mathbf{x}) \, d^n x = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (1 - \varepsilon)^2 = 1. \end{aligned}$$

Analog gehen wir für das Oberintegral vor: Wir benötigen jetzt offene Mengen U und Funktionen $\chi_U \geq \chi_{Q^{**}}$. Für $\varepsilon > 0$ setzen wir $U_\varepsilon :=]-\varepsilon, 1[\times]-\varepsilon, 1[$. Damit ist $\chi_{U_\varepsilon} \geq \chi_{Q^{**}}$ und

$$\begin{aligned} \int^* \chi_{Q^{**}}(\mathbf{x}) \, d^n x &= \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{U_\varepsilon}(\mathbf{x}) \, d^n x \mid \varepsilon > 0 \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{U_\varepsilon}(\mathbf{x}) \, d^n x = 1. \end{aligned}$$

5.3 Ansätze zur Berechnung von Mehrfachintegralen

Ein (Lebesgue-)Integral $\int f(\mathbf{x}) d^n x$ erstreckt sich über den gesamten \mathbb{R}^n . Damit es endlich bleibt, muss der Integrand für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ schnell genug gegen 0 gehen oder einen kompakten Träger besitzen, also außerhalb eines kompakten Quaders Q identisch verschwinden. In letzterem Fall sind die Integralgrenzen praktisch im Integranden mit enthalten und es ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d^n x = \int_Q f(\mathbf{x}) d^n x.$$

Aber natürlich kann ein Integral über eine beliebige Funktion f auch explizit auf eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ eingeschränkt werden: Mit der Indikatorfunktion

$$\chi_G(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{x} \in G \\ 0 & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus G \end{cases}$$

lässt sich das Integral dann ebenso als Integral über \mathbb{R}^n schreiben,

$$\int_G f(\mathbf{x}) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \chi_G(\mathbf{x}) d^n x. \quad (5.27)$$

Zwar treten Integralgrenzen in einem solchen Lebesgue-Integral nicht explizit auf und sind im Integranden verborgen – was Vorteile in der Formulierung theoretischer Eigenschaften der Integrale mit sich bringt –, für die praktische Berechnung eines solchen Integrals müssen wir uns i. Allg. aber doch ganz explizit um die Grenzen kümmern.

5.3.1 Integralgrenzen

Der einfachste Fall liegt vor, wenn es sich bei der Menge G , über die integriert werden soll, um einen Quader

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

handelt. Die Integralgrenzen besitzen dann keine wechselseitigen Abhängigkeiten und die Integrationen über die Variablen x_1, \dots, x_n können unabhängig voneinander ausgeführt werden,

$$\int_Q f(\mathbf{x}) d^n x = \int_{a_n}^{b_n} \dots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \right) \dots dx_n,$$

sofern alle Integrale existieren, siehe auch Abschn. 5.1.1. Ein ähnliches Vorgehen bleibt möglich, wenn etwa bei einem zweidimensionalen Integral das Integrationsgebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ auf dem x -Intervall $[a, b]$ für y durch stetige Funktionen φ, ψ mit $\varphi \leq \psi$ beschränkt wird: Dann haben wir

$$\int_G f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy f(x, y) \right). \quad (5.28)$$

Im Allgemeinen ist es notwendig, die geometrische Form des Integrationsbereichs G „irgendwie“ in Integrationsgrenzen für Integrationsvariablen x_1, \dots, x_n zu übersetzen. In praktischen Anwendungen hat man es oft mit zwei- oder dreidimensionalen Integralen auf zusammenhängenden kompakten Mengen zu tun, die sich aus der Geometrie der betrachteten Fragestellung ergeben, man integriert also beispielsweise über Kreise, Kugeln, Zylinder usw. Wir werden noch sehen, dass solche Integrationen durch einen Wechsel der Koordinaten wesentlich vereinfacht werden.

Oft ist auch einfach das „Volumen“ einer Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ von Interesse. Man erhält es als Integral über ihre Indikatorfunktion χ_G ,

$$\text{Vol}(G) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_G(\mathbf{x}) \, d^n x = \int_G d^n x \in \mathbb{R}_+. \quad (5.29)$$

Für $n = 2$ hat man es mit einem Flächeninhalt zu tun und für $n = 3$ mit einem räumlichen Volumen.

- **Zwischenfrage (6)** Sind die folgenden Aussagen richtig? (1) Das Volumen einer Menge G kann nur dann endlich sein, wenn die Menge beschränkt ist. (2) Ein Integral $\int_G f(\mathbf{x}) \, d^n x$ kann nur dann endlich sein, wenn $\text{Vol}(G)$ endlich ist.

Beispiel

Wir wollen die Fläche F des Einheitskreises berechnen, also über die Menge $G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ integrieren:

$$F = \int_G d^2 x = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dx \, dy. \quad (5.30)$$

Im Sinn von (5.28) haben wir also $x \in [-1, 1]$ mit $\varphi(x) = -\sqrt{1-x^2}$ und $\psi(x) = \sqrt{1-x^2}$ und $f(x, y) = 1$. Also ist

$$F = \int_{-1}^1 dx \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right).$$

Die Ausführung der y -Integration führt auf

$$F = \int_{-1}^1 dx \left(\sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2}) \right) = 2 \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2}.$$

Das verbleibende Integral kennen wir bereits, siehe (3.12) und (3.16). Mit seinem Wert $\pi/2$ erhalten wir das Ergebnis $F = \pi$.

- **Antwort auf Zwischenfrage (6)** Gefragt war nach den Aussagen: (1) $\text{Vol}(G) < \infty$ nur für beschränkte Mengen G . (2) $\int_G f(\mathbf{x}) d^n x$ endlich nur, wenn $\text{Vol}(G) < \infty$.

Zu (1): Nein, die Aussage stimmt nicht. Es gibt unbeschränkte Mengen mit endlichem Volumen. Ein Beispiel ist die Menge $G = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq 1/(1+x^2)\} \subset \mathbb{R}^2$. Ihr Flächeninhalt ist $\text{Vol}(G) = \pi$, siehe (2.22). Auch kann eine Menge G nur aus einzelnen isolierten Punkten bestehen, etwa $G = \{(n, n, n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^3$. Sie ist unbeschränkt und besitzt das Volumen 0.

Zu (2): Auch diese Aussage stimmt nicht. Wenn der Integrand für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ schnell genug klein wird, kann auch ein Integral über den gesamten Raum endlich bleiben. So ist etwa $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi$, siehe (5.56).

5.3.2 Nullmengen

Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge*, wenn sie das Volumen 0 hat, d. h., wenn gilt

$$\text{Vol}(N) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_N(\mathbf{x}) d^n x = \int_N d^n x = 0. \quad (5.31)$$

Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen bleibt eine Nullmenge.

Ein Punkt im \mathbb{R}^n ist eine Nullmenge, denn man kann den Punkt auffassen als Quader mit den Seitenlängen 0, siehe (5.7).

Mit einer „Linie“ ist es schwieriger. So besitzt das Intervall $[0, 1]$ in \mathbb{R}^1 das Volumen 1 und ist keine Nullmenge; $[0, 1]$ besteht aus überabzählbar vielen Einzelpunkten. In \mathbb{R}^2 aber ist $[0, 1] \times \{0\}$ eine Nullmenge. Allgemein gilt:

Jede Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge. Jede Hyperebene kann als Vereinigung abzählbar vieler entarteter Quader mit einer Seitenlänge 0 dargestellt werden. In \mathbb{R}^2 entsprechen die Hyperebenen den Geraden. In \mathbb{R}^3 sind die Hyperebenen die gewöhnlichen Ebenen. In \mathbb{R}^4 sind die Hyperebenen dreidimensionale Untermengen usw. Mit den Hyperebenen sind natürlich auch alle Teilmengen von Hyperebenen Nullmengen.

Lesehilfe

Im Unterschied zu Quadern sind Hyperebenen nicht beschränkt. Aber sie lassen sich durch abzählbar unendlich viele Quader überdecken. Nehmen wir als einfaches Beispiel die Gerade $y = 0$ im \mathbb{R}^2 , also die x -Achse. Sie ist eine Hyperebene im \mathbb{R}^2 . Die x -Achse wird überdeckt durch die abzählbar vielen Intervalle $[k, k + 1]$, $k \in \mathbb{N}$, und $[-(l + 1), -l]$, $l \in \mathbb{N}$, die allesamt entartete Quader $[k, k + 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ sind, also eine Seitenlänge 0 und damit das Volumen 0 besitzen. Ebenso lässt sich eine (Hyper-)Ebene im \mathbb{R}^3 beispielsweise durch abzählbar unendlich viele gleich große Quadrate überdecken.

Das ändert sich nicht, wenn die Hyperebenen und die sie überdeckenden Quader nicht achsenparallel sind: Ihre Integrale können durch eine Koordinatendrehung leicht auf Integrale über achsenparallele Quader zurückgeführt werden, siehe (5.43).

Eine Hyperebene wird gegeben durch eine lineare Koordinatengleichung. Es kann somit eine Koordinate durch die $(n - 1)$ übrigen Koordinaten ausgedrückt werden. Dies kann verallgemeinert werden: Es sei $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine kompakte Menge und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist der Graph von f ,

$$\Gamma_f := \{\mathbf{x}, y\} \mid \mathbf{x} \in A, y = f(\mathbf{x})\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (5.32)$$

eine Nullmenge in \mathbb{R}^n . So ist beispielsweise ein Kreisbogen mit Radius 1 eine Nullmenge des \mathbb{R}^2 : Er kann aus zwei Halbkreisen zusammengesetzt werden mit den Graphen Γ_1 und Γ_2 der Funktionen $f_1, f_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

► **Zwischenfrage (7)** Sind die Hyperebenen in (5.32) mit enthalten?

„Fast überall gleich“

Man nennt zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (*Lebesgue*-)fast überall gleich, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, wenn also die Menge $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})\}$ eine Nullmenge ist. Ist f integrierbar, so ist auch g integrierbar, und es gilt

$$\int f(\mathbf{x}) \, d^n x = \int g(\mathbf{x}) \, d^n x.$$

Dies lässt sich auf Integralgrenzen übertragen: Sind die Indikatorfunktionen χ_G und χ_{G^*} zweier Mengen $G, G^* \subseteq \mathbb{R}^n$ fast überall gleich, so gilt für eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int f(\mathbf{x}) \chi_G \, d^n x = \int f(\mathbf{x}) \chi_{G^*} \, d^n x, \quad \text{d. h.} \quad \int_G f(\mathbf{x}) \, d^n x = \int_{G^*} f(\mathbf{x}) \, d^n x. \quad (5.33)$$

Es ist also egal, ob man über die Menge G oder die Menge G^* integriert, wenn die Mengen sich nur durch eine Nullmenge voneinander unterscheiden.

Beispiele

(1) In \mathbb{R}^2 sind Strecken und Geraden, Kreise, Ellipsen, Parabeln usw. Nullmengen.

In \mathbb{R}^3 sind Ebenenausschnitte und vollständige Ebenen, Kugeloberflächen, Ellipsoidoberflächen, Rotationsparabeln usw. Nullmengen.

Auch die Vereinigung endlich vieler oder auch abzählbar unendlich vieler solcher Teilmengen sind Nullmengen.

(2) Der Quader $Q = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen, der Quader $Q^* =]0, 1[\times]0, 1[$ ist offen und der Quader $Q^{**} = [0, 1[\times]0, 1[$ ist weder offen noch abgeschlossen. Die Indikatorfunktionen $\chi_Q, \chi_{Q^*}, \chi_{Q^{**}}$ sind fast überall gleich und es ist $\int_Q = \int_{Q^*} = \int_{Q^{**}}$. Es ist also egal, über welchen dieser Quader integriert wird.

► **Antwort auf Zwischenfrage (7)** Gefragt war, ob die Hyperebenen in Mengen der Form

$$\Gamma_f = \{\mathbf{x}, y) \mid \mathbf{x} \in A, y = f(\mathbf{x})\} \subset \mathbb{R}^n$$

mit enthalten sind.

Da die Menge A kompakt sein muss, sind vollständige Hyperebenen nicht in den Mengen der Form Γ_f enthalten. Allerdings ergeben lineare Funktionen f , also Funktionen f mit $f(x_1, \dots, x_{n-1}) = a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}$ und $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, kompakte Ausschnitte von Hyperebenen. Im Allgemeinen handelt es sich bei Γ_f um kompakte „Hyperflächen“, deren Form von f abhängt und die natürlich auch gekrümmt sein können.

5.3.3 Transformationsformel

Die Berechnung von Integralen kann insbesondere bei zwei- oder dreidimensionalen Integralen, also Flächen- oder Volumenintegralen, oft wesentlich vereinfacht werden, wenn die Koordinaten dem Problem angepasst gewählt werden, wenn also etwa statt kartesischer Koordinaten Polarkoordinaten verwendet werden. Ein solcher Wechsel der Koordinaten erfordert aber auch eine Transformation des Flächen- oder Volumenelements, was wir uns im Folgenden geometrisch klarmachen wollen.

Betrachten wir ein Flächenintegral in den normalen kartesischen Koordinaten x, y ,

$$I = \int_G f(x, y) \, dx \, dy. \quad (5.34)$$

Wir wollen zu anderen Koordinaten u, v übergehen, die sich natürlich eindeutig aus x, y ergeben müssen, es ist also $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ und umgekehrt lassen sich auch wieder x und y aus u und v berechnen, $x = x(u, v)$ und $y = y(u, v)$. Den Integranden können wir daher ohne Weiteres als Funktion von u, v

ausdrücken:

$$f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v)) =: \tilde{f}(u, v). \quad (5.35)$$

Zusätzlich ist aber auch das „Flächenelement“ durch die neuen Koordinaten auszudrücken: Die lineare Näherung der Funktionen u und v um eine Stelle (x, y) ergibt zunächst die Gleichungen

$$\begin{aligned} du &= u_x dx + u_y dy \\ dv &= v_x dx + v_y dy, \end{aligned} \quad (5.36)$$

wobei $u_x = \partial_x u$, $u_y = \partial_y u$ usw. für die partiellen Ableitungen stehen.

Lesehilfe

Die lineare Näherung der Funktion u um die Stelle (x, y) lautet

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) = u(x, y) + \partial_x u(x, y) \Delta x + \partial_y u(x, y) \Delta y.$$

Dies kann man schreiben als

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \partial_x u(x, y) \Delta x + \partial_y u(x, y) \Delta y$$

oder mit $\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)$ als

$$\Delta u = \partial_x u(x, y) \Delta x + \partial_y u(x, y) \Delta y.$$

Ersetzt man hier die Abweichungen Δu , Δx und Δy durch du , dx und dy , so erhält man die erste der Gleichungen (5.36).

Das Flächenelement, das den Koordinatenänderungen dx und dy entspricht, ergibt sich in uv -Koordinaten aus dem Parallelogramm, das du und dv damit aufspannen. Die Kantenvektoren \mathbf{k}_u und \mathbf{k}_v dieses Parallelogramms werden durch die Gleichungen (5.36) gegeben, d. h., es ist

$$\mathbf{k}_u = \begin{pmatrix} u_x dx \\ u_y dy \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_v = \begin{pmatrix} v_x dx \\ v_y dy \end{pmatrix}.$$

Das Flächenelement hat daher die Größe

$$\left| \begin{pmatrix} u_x dx \\ u_y dy \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x dx \\ v_y dy \\ 0 \end{pmatrix} \right| = |u_x v_y - v_x u_y| dx dy.$$

Lesehilfe

Den hier verwendeten „Trick“ mit der Parallelogrammfläche kennst du sicher: Wird ein Parallelogramm durch die Vektoren (a, b) und (c, d) aufgespannt, so erweitert man die Vektoren künstlich um die dritte Komponente 0, um das Vektorprodukt verwenden zu können. Der Betrag des Vektors $(a, b, 0) \times (c, d, 0) = (0, 0, ad - bc)$ ergibt dann den Flächeninhalt des Parallelogramms.

Der Term $u_x v_y - v_x u_y$ kann als Determinante geschrieben werden:

$$u_x v_y - v_x u_y = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} =: \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}. \quad (5.37)$$

Die Matrix $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ heißt die *Jacobi-Matrix*³ und deren Determinante die *Funktionaldeterminante* der Koordinatentransformation. Wir können unser Ergebnis somit schreiben als

$$du \, dv = \left| \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dx \, dy \quad \text{oder} \quad dx \, dy = \left| \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|^{-1} du \, dv. \quad (5.38)$$

Da Funktionaldeterminanten für Hin- und Rücktransformationen invers zueinander sein müssen, gilt dabei

$$\left| \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|^{-1} = \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|, \quad (5.39)$$

sodass (5.38) auch in der Form

$$dx \, dy = \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv \quad (5.40)$$

angegeben werden kann.

Lesehilfe

Das Berechnen der Funktionaldeterminante kann also in beide Richtungen erfolgen: Wenn man $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ vorliegen hat, ist $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ leichter zu bilden. Hat man die umgekehrten Zusammenhänge $x = x(u, v)$ und $y = y(u, v)$, so bietet sich die Berechnung von $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$. Durch Inversion erhält man jeweils leicht die andere Funktionaldeterminante.

³ Benannt nach dem deutschen Mathematiker Carl Gustav Jacobi, 1804–1851.

Kommen wir schließlich zu unserem Ausgangsintegral zurück: *Mit dem Wechsel zu neuen Koordinaten $u = u(x, y)$ und $v(x, y)$ gilt für ein Flächenintegral*

$$\int_G f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\tilde{G}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv. \quad (5.41)$$

Im zweiten Integral muss das Integrationsgebiet G und damit die Integralgrenzen dann natürlich auch durch die neuen Koordinaten u und v ausgedrückt werden.

Allgemeine Formulierung

Vollkommen analog zu Flächenintegralen kann die Transformationsformel (5.41) auch für Volumenintegrale hergeleitet werden. Sie gilt allgemein in folgender Form für Funktionen mit n Variablen:

Es sei $\phi : U \rightarrow V$ eine bijektive Abbildung der offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$. Sowohl ϕ als auch die Umkehrabbildung ϕ^{-1} seien stetig differenzierbar. Ihre Funktionaldeterminante wird gegeben durch

$$\det(D\phi) := \det \frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial\phi_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\phi_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial\phi_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

Mit diesen Bezeichnungen und Voraussetzungen gilt

Satz 5.5 *Eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn die Funktion $(f \circ \phi) |\det(D\phi)|$ über U integrierbar ist. Dann gilt*

$$\int_U f(\phi(u)) |\det(D\phi(u))| \, d^n u = \int_V f(x) \, d^n x.$$

Beweis Der vollständige Beweis dieses Satzes für Lebesgue-Integrale erfordert einigen Aufwand. Wir belassen es bei der oben gegebenen geometrischen Begründung. \circ

Lesehilfe zum Satz

Die Abbildung ϕ überführt die Menge U in die Menge V . Die Menge U stellt die Integralgrenzen für die Integrationsvariablen u_1, \dots, u_n dar, während die Menge V die Grenzen für den anderen Satz Variablen, x_1, \dots, x_n , bildet. Dabei sind auch $U = \mathbb{R}^n$ und/oder $V = \mathbb{R}^n$ erlaubt.

Wir werden in den Beispielen sehen, wie die Übertragung der Grenzen praktisch aussieht.

Natürlich gilt Satz 5.5 auch für einfache lineare Koordinatentransformationen, also eine lineare Abbildung $\phi : U \rightarrow V$ mit $\phi(u) = Au$, wo A eine umkehrbare $n \times n$ -Matrix reeller Zahlen ist. Dann ist

$$\int_U f(Au) |\det A| d^n u = \int_V f(x) d^n x \quad (5.43)$$

und die Konstante $|\det A|$ kann auch vor das Integral geschrieben werden. Ist A speziell eine orthogonale Matrix, so ist $|\det A| = 1$, und das Integral ändert sich unter einer solchen Transformation nicht. Man hat es dann mit Drehungen und/oder Spiegelungen zu tun.

- **Zwischenfrage (8)** Warum ist für eine lineare Abbildung $\phi : U \rightarrow V$ mit $\phi(u) = Au$ die Funktionaldeterminante einfach gleich $\det A$?

5.3.4 Beispiele

(1) Kreis und Kugel: Bei radialsymmetrischen Problemen der Ebene bietet sich anstelle der kartesischen Koordinaten x, y die Verwendung von *Polarkoordinaten* r, φ an. Es ist

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (5.44)$$

mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$. Die Funktionaldeterminante der entsprechenden Koordinatentransformation lautet

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r. \quad (5.45)$$

Für das Flächenelement haben wir also

$$dx dy = r dr d\varphi. \quad (5.46)$$

Die Form des Flächenelements in Polarkoordinaten ist geometrisch leicht nachzuvollziehen, siehe Abb. 5.4.

Wir kommen nun noch einmal auf das Beispiel (5.30) zurück, also die Fläche des Einheitskreises

$$F = \int_G d^2x = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy.$$

Mit dem Wechsel zu Polarkoordinaten haben wir jetzt

$$F = \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} r dr d\varphi.$$

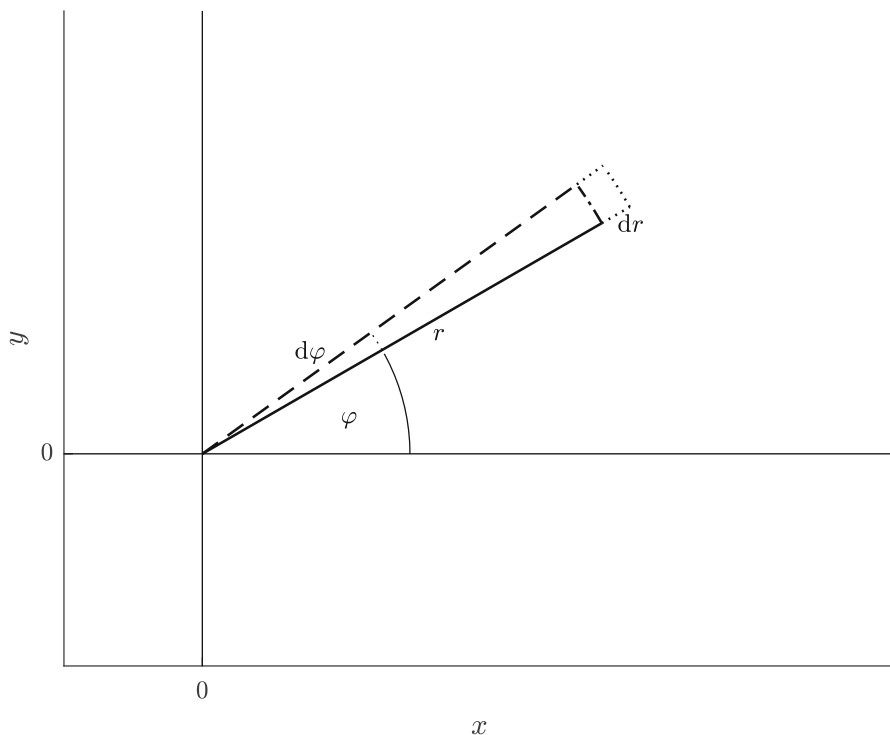


Abb. 5.4 Das Flächenelement wird in Polarkoordinaten gegeben durch $r \, dr \, d\varphi$. Mit dem Winkel $d\varphi$ wird im Abstand r vom Ursprung das Bogenstück $r \, d\varphi$ überstrichen (Strich-Punkt). Multipliziert mit dr ergibt sich daraus das Flächenelement $r \, dr \, d\varphi$ (gepunktet)

Hier sind die Integralgrenzen des Einheitskreises durch die Polarkoordinaten ausgedrückt worden. Wie man sieht, haben wir es jetzt nur noch mit einer Integration über den $r\varphi$ -Quader $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ zu tun und erhalten nun ganz leicht

$$F = \int_{r=0}^1 r \, dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = [r^2/2]_0^1 \cdot 2\pi = \pi.$$

Lesehilfe

Wenn du genau hinsiehst, stellst du fest, dass es sich beim xy -Integrationsgebiet $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ und dem $r\varphi$ -Integrationsgebiet $\tilde{G} = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ nicht um offene Mengen handelt. Auch ist die Transformation nicht bijektiv, da der Punkt $(x, y) = (0, 0)$ durch sämtliche Punkte $(r, \varphi) = (0, \alpha)$ mit $\alpha \in [0, 2\pi[$ abgebildet wird. Dies ließe sich „reparieren“, indem man $V = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1, x \neq 0\}$ (offener Einheitskreis ohne

0 und ohne die positive x -Achse) und $U =]0, 1[\times]0, 2\pi[$ (offener Quader) wählt: Damit hätte man offene Mengen U, V und eine bijektive Transformation $\phi : U \rightarrow V$ im Sinn von Satz 5.5.

Tatsächlich muss man hier aber nicht so genau hinsehen: Die Unterschiede zwischen G und V und zwischen \tilde{G} und U sind Nullmengen. Daher ist $\int_G = \int_V$ und $\int_{\tilde{G}} = \int_U$ und mit dem obigen Vorgehen ist alles in Ordnung.

Für radialsymmetrische Fragestellungen im Raum bietet sich die Verwendung der *Kugelkoordinaten* r, ϑ, φ an: Die Richtung des Ortsvektors der Länge r wird hier neben dem Winkel φ , der wie bei ebenen Polarkoordinaten die Lage seiner Projektion in die xy -Ebene angibt, noch durch den zweiten Winkel ϑ beschrieben, den er mit der positiven z -Achse einschließt.⁴ Es ist

$$\begin{aligned}x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\z &= r \cos \vartheta.\end{aligned}\tag{5.47}$$

mit $r \in \mathbb{R}_+$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi[$. Wir berechnen die Funktionaldeterminante:

$$\begin{aligned}\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} \\&= \cos \vartheta \begin{vmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \end{vmatrix} + r \sin \vartheta \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \end{vmatrix} \\&= \cos \vartheta (r^2 \cos \vartheta \sin \vartheta) + r \sin \vartheta (r \sin^2 \vartheta) \\&= r^2 \sin \vartheta.\end{aligned}\tag{5.48}$$

Lesehilfe

Zur Berechnung der Determinante haben wir nach ihrer dritten Zeile entwickelt und mehrfach den „trigonometrischen Pythagoras“ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ verwendet. Schreibe dir die Entwicklung im Zweifel einfach selbst noch einmal langsam auf ;-)

Das Volumenelement lautet in Kugelkoordinaten also

$$dx \, dy \, dz = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi.\tag{5.49}$$

⁴ Kugelkoordinaten werden auch als „sphärische Polarkoordinaten“ bezeichnet. Generell ist zu beachten, dass ϑ manchmal auch den Winkel bezeichnet, den der Ortsvektor mit der xy -Ebene einschließt. Es ist also auf die jeweils verwendete Konvention zu achten.

Analog zu den Polarkoordinaten der Ebene ist auch die Geometrie dieses Volumenelements unmittelbar nachzuvollziehen: Der Ausdruck $r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ entspricht dem Segment der Kugeloberfläche mit dem Radius r , das von den Winkeln $d\vartheta$ und $d\varphi$ überstrichen wird. Multipliziert mit der Höhe dr ergibt sich das Volumenelement.

Das Volumen einer Kugel mit dem Radius R um den Ursprung kann nun leicht berechnet werden:

$$\begin{aligned} V &= \int_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} dx \, dy \, dz = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Übrigens lässt sich aus (5.50) auch die Oberfläche der Kugel ablesen: Für sie ist $r = R = \text{const.}$, sodass die r -Integration entfällt und wir $O = 4\pi R^2$ erhalten.

► **Antwort auf Zwischenfrage (8)** Gefragt war nach der Funktionaldeterminante einer linearen Abbildung $\phi : U \rightarrow V$ mit $\phi(u) = Au$.

Ausgeschrieben lautet die Gleichung $\phi(u) = Au$ mit den Matrixelementen a_{ij} der Matrix A

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Es ist somit $\phi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j$, $k = 1, \dots, n$, und daher $\frac{\partial \phi_i}{\partial u_j} = a_{ij}$. Also ist

$$\det(D\phi) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det A.$$

(2) Ellipsoid: Ein n -dimensionales Ellipsoid mit den Halbachsen a_1, \dots, a_n ist die Menge

$$E(a_1, \dots, a_n) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^2 \leq 1 \right\}. \quad (5.51)$$

Die n -dimensionale Einheitskugel wird gegeben durch

$$\bar{K}_1(\mathbb{R}^n) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\}. \quad (5.52)$$

Das Ellipsoid $E(a_1, \dots, a_n)$ ist das Bild der Einheitskugel unter der linearen Abbildung

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_1 x_1, \dots, a_n x_n),$$

mit der die i -te Koordinatenrichtung mit dem Faktor a_i gestreckt wird. Dieser Abbildung ist die Matrix $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ mit der Determinante $\det A = a_1 \dots a_n$ zugeordnet. Nach (5.43) gilt daher (hier ist $f = 1$)

$$\int_{\tilde{K}_1(\mathbb{R}^n)} |\det A| \, d^n u = \int_{E(a_1, \dots, a_n)} d^n x,$$

d. h.

$$\text{Vol}(E(a_1, \dots, a_n)) = a_1 \dots a_n \text{Vol}(\tilde{K}_1(\mathbb{R}^n)). \quad (5.53)$$

Das Volumen des Ellipsoids mit den Halbachsen a_1, \dots, a_n ist gleich dem $a_1 \dots a_n$ -Fachen des Volumens der n -dimensionalen Einheitskugel.

Eine ebene Ellipse mit den Halbachsen a und b besitzt daher die Fläche πab und ein dreidimensionales Ellipsoid mit den Halbachsen a, b und c das Volumen $\frac{4}{3}\pi abc$.⁵

Lesehilfe

Hier haben wir natürlich $\text{Vol}(\tilde{K}_1(\mathbb{R}^2)) = \pi$ (Kreisfläche πR^2 mit $R = 1$) und $\text{Vol}(\tilde{K}_1(\mathbb{R}^3)) = 4\pi/3$ (Kugelvolumen $(4/3)\pi R^3$ mit $R = 1$) verwendet. Die Fläche einer Ellipse und das Volumen eines Ellipsoids sind also recht einfach zu erhalten. Beachte aber, dass der Umfang der Ellipse (siehe (6.26)) oder die Oberfläche des Ellipsoids nicht auf diese Weise zugänglich sind.

(3) In den obigen Beispielen haben wir nur Volumina von Mengen berechnet, hatten es also mit Integranden $f = 1$ zu tun. Wir wollen nun das Integral über $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ auf dem Kreis mit dem Radius R berechnen:

$$I = \int_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy. \quad (5.54)$$

Der Wechsel zu Polarkoordinaten r, φ führt hier wegen $x^2 + y^2 = r^2$ auf

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \, r \, e^{-r^2} = 2\pi \int_0^R dr \, r \, e^{-r^2}.$$

⁵ Für $n > 3$ ist zur Verwendung der Formel zunächst das Volumen der entsprechenden Einheitskugel zu ermitteln. Es wird gegeben durch

$$\text{Vol}(\tilde{K}_1(\mathbb{R}^n)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + n/2)}$$

mit der Gammafunktion Γ , die die Fortsetzung der Fakultät auf reelle Zahlen darstellt (es ist $\Gamma(1 + n) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$). So ist etwa $\text{Vol}(\tilde{K}_1(\mathbb{R}^4)) = \pi^2/2$.

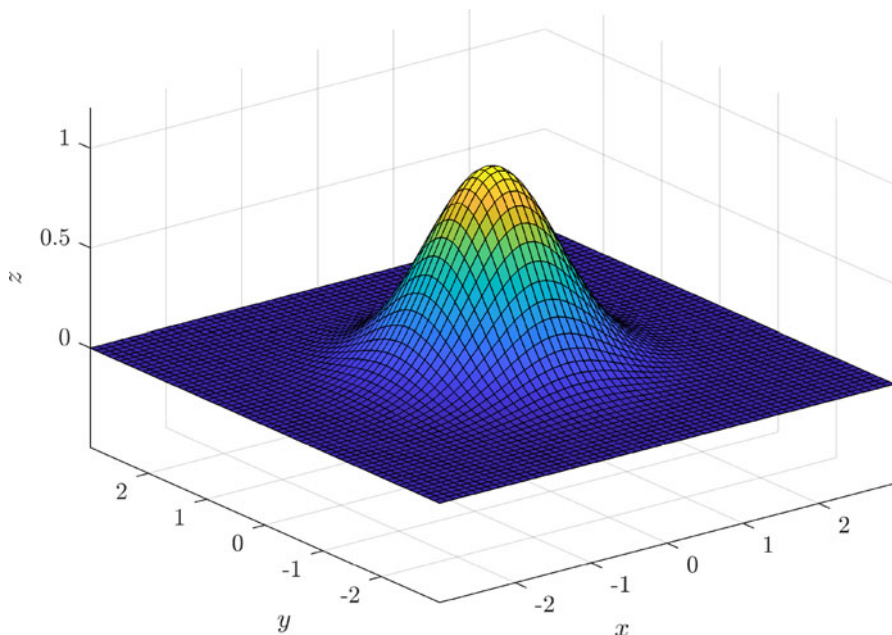


Abb. 5.5 Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ kann als Fläche in einem xyz -Koordinatensystem mit $z = f(x, y)$ dargestellt werden. Das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$ entspricht dem Volumen, das dieser Graph mit der xy -Ebene einschließt. Es besitzt den endlichen Wert π

Das verbleibende r -Integral kennen wir bereits, siehe (3.6). Mit der Stammfunktion $-(1/2)e^{-r^2}$ erhalten wir

$$I = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R = 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-R^2} + \frac{1}{2} \right) = \pi (1 - e^{-R^2}). \quad (5.55)$$

Der Grenzwert $R \rightarrow \infty$ ergibt das Integral über die gesamte xy -Ebene. Es ist daher

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi. \quad (5.56)$$

Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ schließt also mit der xy -Ebene das endliche Volumen π ein, siehe Abb. 5.5.

(4) Gravitationspotenzial einer radialsymmetrischen Massenverteilung: Ein Massenpunkt der Masse m , der sich am Ort \mathbf{x} befindet, erzeugt im Punkt $\mathbf{a} \neq \mathbf{x}$ ein Gravitationspotenzial der Größe

$$V_m(\mathbf{a}) = G \frac{m}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|}.$$

Darin steht G für die universelle Gravitationskonstante. Hat man es nicht nur mit einem Massenpunkt, sondern mit einer auf den Körper K ausgedehnten Massenverteilung der Dichte $\varrho : K \rightarrow \mathbb{R}$ zu tun, so ist für das von diesem Körper erzeugte Gravitationspotenzial über sämtliche seiner „Massenpunkte“ $\varrho \, d^3x$ zu summieren:

$$V_K(\mathbf{a}) = G \int_K d^3x \frac{\varrho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|}, \quad \mathbf{a} \notin K. \quad (5.57)$$

Wir wollen nun eine um den Ursprung zentrierte, radialsymmetrische Massenverteilung innerhalb einer Kugel mit dem Radius R annehmen. Es ist also

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

und $\varrho = \varrho(|\mathbf{x}|)$. Der Punkt \mathbf{a} liege außerhalb der Massenkugel. Aufgrund der Radialsymmetrie können wir annehmen, es sei $\mathbf{a} = (0, 0, a)$ mit $a > R$.

Hat nun ein Punkt $\mathbf{x} \in K$ die Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) , so gilt für den Abstand $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|$

$$|\mathbf{x} - (0, 0, a)|^2 = (a - r \cos \vartheta)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta = a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta,$$

siehe Abb. 5.6. Das Volumenintegral (5.57) lautet somit in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} V_K(a) &= G \int_0^R dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{r^2 \sin \vartheta \varrho(r)}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta}} \\ &= 2\pi G \int_0^R dr r^2 \varrho(r) \int_0^\pi d\vartheta \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta}}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Die Integration über φ konnte separat ausgeführt werden und ergab nur den Faktor 2π . Die verbleibenden Integrationen über r und ϑ sind „gekoppelt“. Die ϑ -Integration kann unter Verwendung der Substitution $t = -\cos \vartheta$ ausgeführt werden. Mit $dt/d\vartheta = \sin \vartheta$ und damit $\sin \vartheta \, d\vartheta = dt$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta}} &= \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2art}} = \frac{1}{ar} \sqrt{a^2 + r^2 + 2art} \Big|_{t=-1}^1 \\ &= \frac{1}{ar} \left(\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar} - \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar} \right) \\ &= \frac{1}{ar} \left(\sqrt{(a+r)^2} - \sqrt{(a-r)^2} \right) \\ &= \frac{1}{ar} (a+r - (a-r)) = \frac{2r}{ar} = \frac{2}{a}. \end{aligned}$$

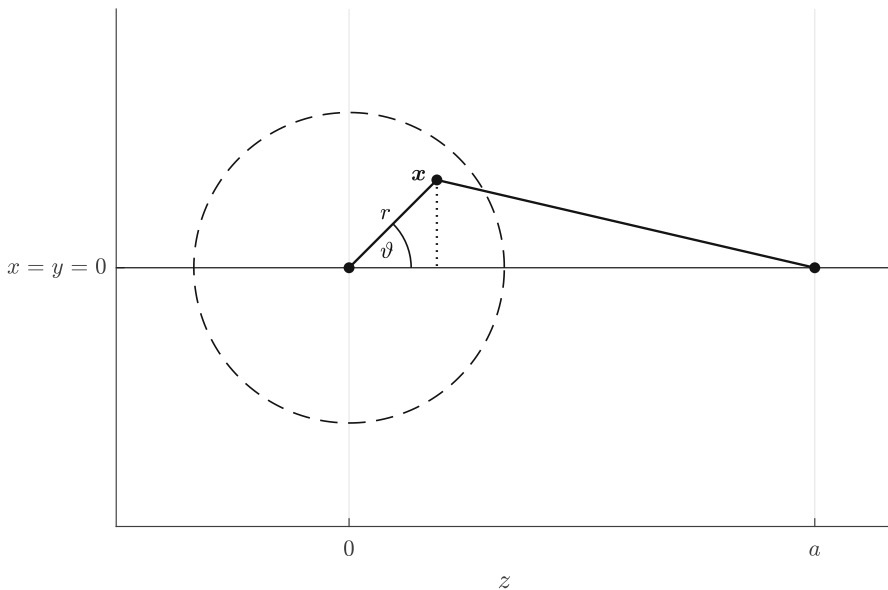


Abb. 5.6 Der Punkt $a = (0, 0, a)$ liegt auf der z -Achse und besitzt den Abstand a vom Ursprung. Der Punkt x im Inneren der Massenkugel hat den Abstand r vom Ursprung und sein Ortsvektor weist den Winkel ϑ zur z -Achse auf. Das Dreieck $0, a, x$ besitzt daher die Höhe $r \sin \vartheta$ (gepunktet) und der Satz des Pythagoras ergibt für den Abstand der Punkte x und a : $|x - a|^2 = (a - r \cos \vartheta)^2 + (r \sin \vartheta)^2$

Lesehilfe

Wie du siehst, wurde hier lediglich ein Integral in der Form

$$\int \frac{dt}{\sqrt{b + ct}} = \int (b + ct)^{-1/2} dt = \frac{2}{c} (b + ct)^{1/2}$$

ausgeführt. Darin stecken die „Potenzregel“ und die Substitution von $b + ct$, die den Faktor $1/c$ ergibt.

Wir haben somit das Ergebnis

$$V_K(a) = 4\pi \frac{G}{a} \int_0^R dr r^2 \varrho(r). \quad (5.59)$$

Die verbleibende Integration über r kann im Prinzip ausgeführt werden, wenn ein Massendichteverlauf $\varrho(r)$ der Massenkugel bekannt ist. Allerdings gilt für ihre Ge-

samtmasse

$$M = \int_K d^3x \varrho(\mathbf{x}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \int_0^R dr r^2 \varrho(\mathbf{x}) = 4\pi \int_0^R dr r^2 \varrho(\mathbf{x}),$$

sodass sich das Potenzial letztlich schreiben lässt als

$$V_K(a) = \frac{GM}{a}. \quad (5.60)$$

Im Außenraum der radialsymmetrischen Massenverteilung wirkt die Masse so, als ob die Gesamtmasse vollständig im Mittelpunkt der Kugel konzentriert wäre.

Das Wichtigste in Kürze

- **Stetige Funktionen auf einem kompaktem Quader** können „normal“ der Reihe nach integriert werden: eine Variable nach der anderen. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle.
- **Stetige Funktionen auf kompaktem Träger** besitzen nur auf einer beschränkten Menge Funktionswerte ungleich 0. Ihre Integrale können ohne explizite Grenzen formuliert werden.
- Nach dem **Satz von Dini** konvergieren **monotone** Funktionenfolgen mit stetiger Grenzfunktion immer gleichmäßig. Diese besondere Konvergenzeigenschaft monotoner Folgen ist Ausgangspunkt für die Verallgemeinerung des Integrals auf nicht stetige Funktionen: Man betrachtet monotone Folgen stetiger Funktionen ohne die Forderung nach stetiger Grenzfunktion.
- Bei **halbstetigen Funktionen** finden Sprünge entweder nur nach oben oder nur nach unten statt. Die Halbstetigkeit ist die zentrale Eigenschaft für Funktionen, die sich als Grenzwert monotoner Funktionenfolgen darstellen lassen.
- Die **Indikatorfunktion** einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt für Argumente $\mathbf{x} \in M$ den Funktionswert 1 und ansonsten den Funktionswert 0.
- Das **Lebesgue-Integral** hebt die Probleme und Fallunterscheidungen im Zusammenhang mit der Integration halbstetiger Funktionen auf. Es stellt den allgemeinen Integralbegriff dar.
- Funktionen, die **fast überall gleich** sind, unterscheiden sich nur auf einer Nullmenge. Ihre Integrale sind daher gleich.
- Die konkrete Berechnung von Integralen erfordert insbesondere die Berücksichtigung der Grenzen. Mithilfe der **Transformationsformel** kann ein Wechsel zu geeigneten Koordinaten erfolgen. ◀

Und was bedeuten die Formeln?

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n],$$

$$\int_Q f(\mathbf{x}) d^n x = \int_{a_n}^{b_n} \dots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \right) \dots dx_n,$$

$$\int_Q \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) \, d^n x = \left(\int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(x_1) \, dx_1 \right) \dots \left(\int_{a_n}^{b_n} \varphi_n(x_n) \, dx_n \right),$$

$$\text{Vol}(Q) = \int_Q d^n x = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n),$$

$$\text{supp}(f) := \overline{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \neq 0\}}, \quad C_c(\mathbb{R}^n) := \{f \in C(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp}(f) \text{ kompakt}\},$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n := \int_Q f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \, d^n x := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(\mathbf{x}) \, d^n x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ für } f_k \uparrow f,$$

$$H^\uparrow(\mathbb{R}^n) \cap H^\downarrow(\mathbb{R}^n) = C_c(\mathbb{R}^n), \quad -\infty < \int_* f(\mathbf{x}) \, d^n x = \int^* f(\mathbf{x}) \, d^n x < \infty$$

$$\chi_G(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{x} \in G \\ 0 & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus G \end{cases}, \quad \int_G f(\mathbf{x}) \, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \chi_G(\mathbf{x}) \, d^n x,$$

$$\text{Vol}(G) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_G(\mathbf{x}) \, d^n x = \int_G d^n x \in \mathbb{R}_+, \quad \text{Vol}(N) = \int_N d^n x = 0,$$

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} dx \, dy = \int_{-1}^1 dx \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) = \pi,$$

$$\int_U f(\phi(u)) |\det(D\phi(u))| \, d^n u = \int_V f(\mathbf{x}) \, d^n x,$$

$$\det(D\phi) := \det \frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial u_n} \end{pmatrix},$$

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta,$$

$$dx \, dy \, dz = \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} \right| dr \, d\vartheta \, d\varphi = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi,$$

$$\int_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} dx \, dy \, dz = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Übungsaufgaben

A5.1 a) Wie groß ist die Fläche, die von der Funktion $x \mapsto e^{-x}$ mit der positiven x -Achse eingeschlossen wird?

b) Wie groß ist das Volumen, das von der Funktion $(x, y) \mapsto e^{-(x+y)}$ mit der Viertelebene $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$ eingeschlossen wird?

c) Handelt es sich bei b) um das „Viertel-Rotationsvolumen“, dessen obere Randfläche aus einer Rotation des Graphen von $x \mapsto e^{-x}$ um die Ordinatenachse entsteht? Falls nein, welchem Integral entspräche es?

A5.2 Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe jeweils deine Antwort.

- (I) Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch partiell differenzierbar.
- (II) Eine partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 2$, ist stetig.
- (III) Der \mathbb{R}^n ist abgeschlossen.
- (IV) Der \mathbb{R}^n ist kompakt.
- (V) Ein Quader $Q \in \mathbb{R}^3$, der nicht leer ist, kann dennoch das Volumen 0 besitzen.
- (VI) Das Volumen eines kompakten Quaders $Q \in \mathbb{R}^3$ ist stets endlich.

A5.3 Für einen Punkt $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ und eine Zahl $R > 0$ betrachten wir die Menge

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < R\}$$

und die zugehörige Indikatorfunktion χ_M .

a) Besitzt die Funktion χ_M einen kompakten Träger? Falls ja, gib einen abgeschlossenen Quader Q an, für den gilt $\text{supp}(\chi_M) \subseteq Q$.

b) Ist die Funktion χ_M stetig? Ist sie halbstetig von oben oder von unten?

c) Welches Volumen besitzt die Menge M ?

A5.4 a) Räumliche Zylinderkoordinaten entsprechen den Polarkoordinaten der Ebene, denen die weitere Koordinate z hinzugefügt wird. Wie lautet das Volumenelement $dx \, dy \, dz$ in Zylinderkoordinaten?

b) Wie kann das Volumen eines Zylinders mit dem Radius R und der Höhe h als Integral ausgedrückt und berechnet werden?

A5.5 Welches Gravitationspotenzial erzeugt eine radialsymmetrische Hohlkugel in ihrem Innenbereich? Betrachte eine radialsymmetrische Massenverteilung, deren Dichte ϱ nur im Bereich

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid R_1^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R_2^2\}$$

mit $0 < R_1 < R_2$ Werte ungleich 0 besitzt, und berechne das Potenzial, das sie an Punkten \mathbf{a} mit $|\mathbf{a}| < R_1$ erzeugt.

Grundbegriffe mehrdimensionaler Funktionen*

6

Hinweis

Dieses Kapitel enthält eine Reihe grundlegender Begriffe für mehrdimensionale Funktionen und insbesondere für Funktionen mehrerer Veränderlicher, die beim Studium von Kap. 5 vorausgesetzt werden. Sofern du mit diesen Begriffen vertraut bist, hat dieses Kapitel nur wiederholenden Charakter. Andernfalls empfiehlt es sich, Kap. 6 vor Kap. 5 zu lesen oder zumindest zu überfliegen und bei Bedarf darauf zurückzugreifen.

„Mehrdimensionale“ Funktionen können vektorwertige Funktionen sein oder Funktionen mehrerer Veränderlicher. Und natürlich können auch vektorwertige Funktionen von mehreren Veränderlichen abhängen. Entsprechend sind die Begriffe der eindimensionalen Analysis zu erweitern. Dabei ist es sicher nicht überraschend, dass mehrdimensionale Funktionen und die mehrdimensionale Analysis komplizierter sind und eine Reihe neuer bzw. erweiterter Begriffsbildungen erfordern.

Natürlich haben wir es bei mehrdimensionalen Funktionen auch mit dem Vektorraum \mathbb{R}^n zu tun, sodass wir zur Formulierung ihrer Analysis auch auf Elemente der linearen Algebra zurückgreifen werden.

Wozu dieses Kapitel im Einzelnen

- Bei Grenzwerten geht man „dicht“ an eine Stelle heran. Wir müssen uns daher zunächst klarmachen, was man unter einem Abstand im \mathbb{R}^n versteht.
- Bei vielen Definitionen ist es notwendig, mit einem Punkt auch dessen Umgebung betrachten zu können. Dann haben wir es mit offenen Mengen zu tun.
- Der Graph einer „Kurve“ ist eben das, nämlich eine Kurve in der Ebene, im Raum oder allgemein im \mathbb{R}^n . Aber selbst in der Ebene kann eine Kurve mehr als eine normale Funktion. Wir werden sehen, was das heißt.

- Der Graph einer normalen Funktion kann ebenso gekrümmt sein wie der Graph einer Kurve. Wir wollen uns ansehen, was „Krümmung“ genau bedeutet, und dass ein Kreis in diesem Zusammenhang eine besondere Rolle einnimmt.
- Funktionen, die von mehreren Veränderlichen abhängen, können nach ihren Variablen abgeleitet werden. Man spricht von partiellen Ableitungen. Und wer „normal“ ableiten kann, kann auch partiell ableiten :-)
- Funktionen mehrerer Veränderlicher besitzen „viele“ Ableitungen. Man fasst sie zu einem Gradienten oder einer Hesse-Matrix zusammen. Wir müssen uns ansehen, was es mit diesen Objekten auf sich hat.
- Wenn eine Funktionen linear approximiert werden kann, heißt sie total differenzierbar. Und das lässt sich unmittelbar „anwenden“.
- Lokale Extreme einer Funktion mehrerer Veränderlicher können „in gewisser Weise“ wie üblich bestimmt werden. Diese gewisse Weise müssen wir uns aber genau ansehen.

6.1 Abstände

Zur Beschreibung und Analyse mehrdimensionaler Funktionen und insbesondere zur Formulierung von Grenzwerten ist es notwendig, über einen Abstandsbegriff im mehrdimensionalen Raum zu verfügen.

6.1.1 Metrische Räume

Liegt für einen Raum ein Abstandsbegriff vor, so spricht man von einem „metrischen“ Raum, man hat dann also einen Raum, in dem Abstände „gemessen“ werden können. Dabei lassen sich durchaus verschiedene Abstände festlegen. Auch wenn wir letztlich nur die *euklidische Metrik* des \mathbb{R}^n verwenden werden, sehen wir uns den Begriff der Metrik zunächst etwas allgemeiner an:

Definition 6.1 *Unter einer Metrik auf der Menge X versteht man eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$, mit folgenden Eigenschaften:*

- (1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (2) *Symmetrie:* $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- (3) *Dreiecksungleichung:* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$.

Die Menge X mit einer Metrik d heißt ein *metrischer Raum* und die Größe $d(x, y)$ heißt der *Abstand von x und y bezüglich d* .

Lesehilfe

Für die Elemente der betrachteten Mengen verwenden wir fettgedruckte Buchstaben \mathbf{x} , \mathbf{y} usw. und damit dieselbe Schreibweise, die wir auch für Vektoren des \mathbb{R}^n verwenden.

Mit einer Metrik wird somit einer beliebigen Menge ein „vernünftiger“ Abstandsbegriff hinzugefügt, der die Eigenschaften erfüllt, die man normalerweise mit einem Abstand verbindet. Die obigen Definitionseigenschaften lassen sich auch wie folgt lesen:

- (1) Zwei *verschiedene* Punkte weisen stets einen Abstand ungleich 0 zueinander auf, sie sind „räumlich“ getrennt.
- (2) Es ist unerheblich für den Abstand, ob man ihn längs des „Hinwegs“ von einem Punkt zum anderen oder längs des „Rückwegs“ misst.
- (3) Die „direkte“ Verbindung zweier Punkte ist die kürzeste. Ein Umweg über einen dritten Punkt ist länger.

Aus der Definition (6.1) folgt auch $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, d. h., Abstände sind grundsätzlich größer oder gleich 0. Die Dreiecksungleichung ergibt nämlich

$$0 = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 2d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \text{also } d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0.$$

Lesehilfe

Tatsächlich ist es sicher eine der ersten Eigenschaften eines Abstands, nicht-negativ zu sein. Denn was sollte ein Abstand von -7 km bedeuten? Diese Nichtnegativität muss aber nicht explizit vorausgesetzt werden, sondern sie ergibt sich wie soeben gesehen automatisch aus der Dreiecksungleichung und der Symmetrie.

Beispiele

(1) Einer beliebigen Menge X wird mit

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ 1 & \text{falls } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \end{cases}$$

für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ eine Metrik hinzugefügt.

Lesehilfe

Die Aussage dieses Abstands ist also nur „am selben Punkt oder nicht“. Aber dieser Abstand erfüllt die Eigenschaften einer Metrik, wie du leicht nachprüfen kannst.

(2) Die Menge \mathbb{R} wird zu einem metrischen Raum mit dem Abstand

$$d(x, y) := |x - y|,$$

wobei $|\dots|$ für den gewöhnlichen Betrag einer reellen Zahl steht. Dieser Abstand ist nichts anderes als der Abstand zweier Zahlen auf dem Zahlenstrahl.

(3) Gegeben seien Punkte in einer Ebene zusammen mit einem Längenmaßstab, also einer Einheitslänge. Die Entfernung zweier Punkte kann dann längs der Verbindungsgeraden dieser Punkte durch Abtragen der Einheitslänge gemessen werden.

In dieser Ebene werde ein Punkt P ausgezeichnet. Der Abstand zweier Punkte A und B sei nun so definiert, dass er gegeben wird durch die Summe der Entfernungen von A zu P und von dort zu B . Mit diesem Abstand wird die Ebene zu einem metrischen Raum.¹

(4) In einem gegebenen Wegenetz ließe sich der „Abstand“ zweier Orte über die Zeitdauer angeben, die für den Weg von einem zum andern mindestens benötigt wird. Auch dies wäre eine Metrik im Sinn der Definition 6.1. Und wenn einzelne Wege und Teilstücke mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten befahren werden können, ist der zeitlich kürzeste Abstand u. U. ein anderer als der räumlich kürzeste Abstand. Allerdings müssen die möglichen Geschwindigkeiten in beiden Richtungen gleich groß sein – andernfalls widerspräche das der Symmetrie in Definition 6.1.

6.1.2 Euklidische Metrik im \mathbb{R}^n

Wir betrachten nun als eine spezielle Menge X den \mathbb{R}^n , also die Menge aller reellen n -Tupel:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}. \quad (6.1)$$

Der \mathbb{R}^n bildet zusammen mit der gewöhnlichen komponentenweisen Addition und Multiplikation mit einem Skalar einen *Vektorraum*. Seine Vektoren können liegend geschrieben werden, (x_1, \dots, x_n) , oder aufrecht, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Für zwei Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ist das *kanonische Skalarprodukt* definiert als

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n. \quad (6.2)$$

Mit dem Skalarprodukt kann die Norm eines Vektors definiert werden,

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}, \quad (6.3)$$

¹ Diese Metrik wird manchmal als die „französische Metrik“ bezeichnet, da die Verkehrswege in Frankreich früher stark auf Paris hin ausgerichtet waren. Daher hat man für die Reise von einem Ort zum anderen oftmals am vorteilhaftesten den Weg über Paris gewählt.

und mit dem kanonischen Skalarprodukt erhält man die *euklidische Norm* von \mathbf{x} :

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \quad (6.4)$$

Lesehilfe

Die euklidische Norm ist also die spezielle Norm des Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, die sich aus dem kanonischen Skalarprodukt ergibt. Es könnten andere Skalarprodukte definiert werden; sie ergäben dann via $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ eine andere Norm des Vektors.

Die Norm wird oft auch *Länge* oder *Betrag* des Vektors genannt.

Mit der Norm oder dem Betrag eines Vektors schließlich kann ein Abstand zweier Punkte \mathbf{x} und \mathbf{y} definiert werden:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (6.5)$$

Dieser Abstand erfüllt die Eigenschaften von Definition 6.1 und der \mathbb{R}^n wird damit zu einem metrischen Raum.

Der *euklidische Abstand* zweier Punkte wird also gegeben durch

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}. \quad (6.6)$$

Im Folgenden verwenden wir im \mathbb{R}^n , wenn nichts anderes gesagt wird, stets diesen *euklidischen Abstand*. Dabei wollen wir, da keine Missverständnisse zu befürchten sind, für die Norm gewöhnliche Betragsstriche verwenden:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \quad (6.7)$$

Stellt man Punkte des \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 in einem kartesischen Koordinatensystem graphisch dar, so *entspricht der euklidische Abstand dem „geometrischen“ Abstand* dieser Punkte, wie er sich auch aus dem Satz des Pythagoras ergeben würde. Für den \mathbb{R}^4 oder höhere Dimensionen ist allerdings keine unmittelbare geometrische Anschauung mehr gegeben.

Beispiel

Die Punkte $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ besitzen den euklidischen Abstand

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}.$$

Der Abstand des Punkts \mathbf{y} von $\mathbf{0}$ beträgt $|\mathbf{y} - \mathbf{0}| = |\mathbf{y}| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$.

6.2 Offene und abgeschlossene Mengen

Für die Formulierung von Aussagen über Funktionen sind oft einschränkende Aussagen über den Definitionsbereich nötig. Auf \mathbb{R} hat man es beispielsweise mit Intervallen zu tun, die „offen“ sein können, wenn sie ihre Grenzen nicht enthalten, oder „abgeschlossen“, wenn die Grenzen mit enthalten sind.

Die Begriffe „offen“ und „abgeschlossen“ benötigen wir bei mehrdimensionalen Funktionen auch für den \mathbb{R}^n . Wir wollen sie uns daher genauer ansehen.

Zunächst bezeichnen wir für einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ und eine Zahl $r > 0$ die Menge

$$K_r(\mathbf{a}) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r \right\} \quad (6.8)$$

als die *offene Kugel* mit Mittelpunkt \mathbf{a} und Radius r .

Lesehilfe

Die Bezeichnung dieser Menge als „offene“ Kugel ist an dieser Stelle noch ein reiner Name. Wir werden aber später sehen, dass diese Menge tatsächlich offen ist.

Zu beachten ist, dass aufgrund des $<$ -Zeichens (und nicht \leq) in der Definition der „Rand“ der Kugel nicht dazugehört.

- **Zwischenfrage (1)** Was ist die offene „Kugel“ für $n = 1$, also in \mathbb{R} ? Und was ist sie im \mathbb{R}^2 und im \mathbb{R}^3 ?

Und: Liegt der Punkt $\mathbf{x} = (2, -3, -1)$ in der offenen Kugel $K_2((3, -3, 1))$? Gib schließlich einen Punkt an, der genau auf dem Rand dieser Kugel liegt.

Wir können nun den Begriff der *Umgebung* definieren:

Definition 6.2 Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Umgebung des Punkts* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $K_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq U$.

Eine Umgebung eines Punkts umschließt diesen Punkt also vollständig. Natürlich ist $K_\varepsilon(\mathbf{x})$ selbst auch eine Umgebung von \mathbf{x} , die ε -Umgebung von \mathbf{x} . Und für zwei verschiedene Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ lassen sich stets leicht zwei punktfremde Umgebungen angeben: Wählt man beispielsweise $\varepsilon := |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/3$, so hat man mit $K_\varepsilon(\mathbf{x})$ und $K_\varepsilon(\mathbf{y})$ zwei Umgebungen mit $K_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap K_\varepsilon(\mathbf{y}) = \emptyset$.²

² Dies ist die Aussage des *Hausdorff-Trennungsaxioms*. Die Bezeichnung als „Axiom“ ist üblich, auch wenn sich diese Eigenschaft für metrische Räume beweisen lässt.

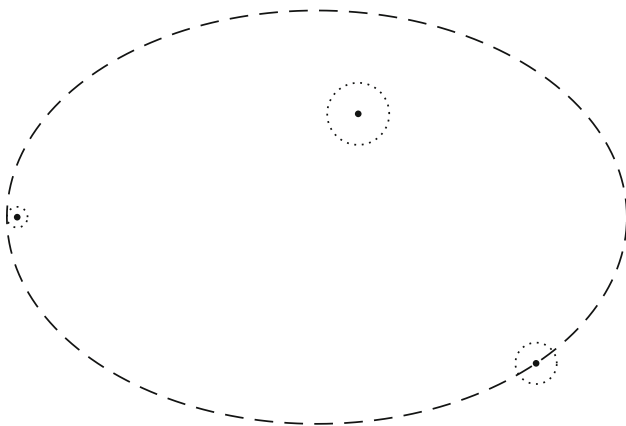


Abb. 6.1 Eine offene Menge ist Umgebung eines jeden ihrer Punkte. Mit jedem Punkt muss daher noch eine Umgebung dieses Punkts mit in der Menge liegen. Dies ist für Punkte auf dem „Rand“ der Menge nicht der Fall

Offene Mengen

Wir kommen nun zum Begriff einer *offenen Menge*:

Definition 6.3 Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, wenn sie Umgebung eines jeden ihrer Punkte ist, d. h., wenn es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subseteq U$ gibt.

Wählt man also einen Punkt aus einer offenen Menge, so ist garantiert, dass dieser Punkt vollständig von der Menge umschlossen wird. Der „Rand“ einer Menge kann daher nicht zu einer offenen Menge gehören, siehe Abb. 6.1.

Für offene Teilmengen des \mathbb{R}^n gilt der folgende

Satz 6.1 (1) Sind die Teilmengen U und V offen, so ist auch der Durchschnitt $U \cap V$ offen.

(2) Es sei I eine beliebige Indexmenge und U_i , $i \in I$, seien offene Teilmengen. Dann ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Beweis (1) Es sei $x \in U \cap V$. Da beide Mengen offen sind, bedeutet dies, dass es $\alpha, \beta > 0$ gibt mit $K_\alpha(x) \subseteq U$ und $K_\beta(x) \subseteq V$. Für $\varepsilon := \min\{\alpha, \beta\}$ gilt dann $K_\varepsilon(x) \subseteq U \cap V$.

(2) Es sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Dann gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$. Da U_j offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subseteq U_j \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. •

Lesehilfe

Noch einmal kurz zur Erinnerung: $x \in U \cap V$ bedeutet $x \in U$ und $x \in V$.
Und $x \in U \cup V$ bedeutet $x \in U$ oder $x \in V$.

Aus Teil (1) des obigen Satzes folgt durch wiederholte Anwendung, dass der Durchschnitt *endlich* vieler offener Teilmengen wieder offen ist. Dies gilt jedoch nicht mehr für Durchschnitte unendlich vieler Mengen, wie man an folgendem Beispiel sieht: Wir betrachten die offenen Intervalle

$$U_n := \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[\quad \text{für } n \in \mathbb{N}^*.$$

Der Durchschnitt dieser Intervalle ist

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\},$$

da nur die 0 in allen Intervallen enthalten ist. Im Unterschied zu den einzelnen Mengen ist also ihr unendlicher Durchschnitt nicht mehr offen.

Bei Vereinigungen ist die Situation einfacher: Teil (2) des Satzes lässt auch Vereinigungen unendlich vieler Mengen zu.

- **Antwort auf Zwischenfrage (1)** Gefragt war nach der offenen „Kugel“ im \mathbb{R}^n für $n = 1, 2, 3$ und nach dem Punkt $\mathbf{x} = (2, -3, -1)$ und der offenen Kugel $K_2((3, -3, 1))$ und einem Punkt auf deren Rand.

In \mathbb{R} ist die offene Kugel einfach ein offenes Intervall:

$$K_r(a) := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r \right\} =]a - r, a + r[.$$

Im \mathbb{R}^2 handelt es sich um einen Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt \mathbf{a} . Im \mathbb{R}^3 ist es dann tatsächlich eine Kugel und für $n > 3$ ist es eine höherdimensionale Kugel, die keine geometrische Anschauung mehr erlaubt.

Der Abstand von \mathbf{x} zum Mittelpunkt $\mathbf{a} = (3, -3, 1)$ der Kugel $K_2((3, -3, 1))$ ist

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Wegen $\sqrt{5} \geq 2$ gilt somit $\mathbf{x} \notin K_2((3, -3, 1))$. Punkte auf dem Rand der Kugel sind beispielsweise $(5, -3, 1)$ oder $(3, -1, 1)$. Sie besitzen genau den Abstand 2 von \mathbf{a} und gehören nicht zur offenen Kugel.

Beispiele

(1) Das Intervall $]a, b[\subset \mathbb{R}$ ist offen, denn für ein beliebiges $x \in]a, b[$ wählt man $\varepsilon := \min\{x - a, b - x\}$ und hat damit ein $K_\varepsilon(x)$ konstruiert, für das gilt $K_\varepsilon(x) \subseteq]a, b[$.

Dagegen sind die Intervalle $[a, b[$ und $]a, b]$ nicht offen, denn für kein $\varepsilon > 0$ ist $K_\varepsilon(a)$ ganz in ihnen enthalten.

(2) Die offene Kugel $K_r(\mathbf{a}) \subset \mathbb{R}^n$ ist offen. Für $\mathbf{x} \in K_r(\mathbf{a})$ wählt man beispielsweise $\varepsilon := r - |\mathbf{x} - \mathbf{a}|$ und erhält damit eine Umgebung $K_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq K_r(\mathbf{a})$.

(3) Die leere Menge \emptyset und der \mathbb{R}^n selbst sind offen. Für die leere Menge gibt es keinen Punkt, zu dem eine Umgebung gefunden werden müsste. Und der \mathbb{R}^n ist unbegrenzt und umschließt offenbar jeden seiner Punkte.

Abgeschlossene Mengen

Neben den offenen Teilmengen gibt es auch abgeschlossene Teilmengen:

Definition 6.4 Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

Lesehilfe

Auch hier zur Erinnerung: $\mathbb{R}^n \setminus A$ wird als „ \mathbb{R}^n ohne A “ ausgesprochen. Und damit ist klar, was es bedeutet :-)

Soll geprüft werden, ob eine Menge abgeschlossen ist, so hat man also ihr Komplement zu betrachten; ist dieses offen, so ist die Menge selbst abgeschlossen.

Zu beachten ist, dass die Eigenschaften „offen“ und „abgeschlossen“ keineswegs komplementär zueinander sind. Ist also beispielsweise eine Menge nicht offen, so ist sie deswegen noch lange nicht abgeschlossen. Vielmehr können alle Fälle auftreten: Eine Menge kann offen sein, sie kann abgeschlossen sein, sie kann weder offen noch abgeschlossen sein, und es gibt auch Beispiele von Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Ist eine abgeschlossene Menge beschränkt, so bezeichnet man sie als *kompakt*:

Definition 6.5 Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, die abgeschlossen und beschränkt ist, bezeichnet man als eine *kompakte Menge* oder ein *Kompaktum*.

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist *beschränkt*, wenn es ein $R > 0$ und ein $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass die Menge vollständig in $K_R(\mathbf{a})$ enthalten ist, dass also gilt $A \subseteq K_R(\mathbf{a})$.

Lesehilfe

In einer beschränkten Menge sind die Abstände zweier Punkte der Menge beschränkt. Sie befindet sich somit vollständig in einer Kugel, wenn deren Radius R ausreichend groß gewählt wird. Dabei ist letztlich unerheblich, wo der Mittelpunkt der Kugel liegt: Wenn er „schlecht“ liegt, muss nur der Radius größer gewählt werden.

Eine zentrale Eigenschaft kompakter Mengen wird durch den *Satz von Heine-Borel*³ ausgedrückt, den wir ohne Beweis angeben wollen:

Satz 6.2 *Jede offene Überdeckung einer kompakten Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ enthält eine endliche Teilüberdeckung.*

Hat man also zu einer kompakten Menge A eine beliebige Überdeckung aus offenen Mengen U_i , $i \in I$, so gibt es darunter endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k \in I$ so, dass gilt

$$A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Diese k Mengen überdecken also A bereits vollständig.

Beispiele

(1) Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ist das Intervall $[a, b]$ abgeschlossen, denn sein Komplement $\mathbb{R} \setminus [a, b] =]-\infty, a[\cup]b, \infty[$ ist als Vereinigung zweier offener Intervalle offen.

Das Intervall $[a, b[$ ist – wie sein Komplement – weder offen noch abgeschlossen.

(2) Das Beispiel der Intervalle kann auf Teilmengen des \mathbb{R}^n verallgemeinert werden (es sei $a < b$):

- Die Menge $]a, b[\times]a, b[\subset \mathbb{R}^2$ ist offen (offenes Quadrat, ohne Ränder), die Menge $[a, b] \times [a, b]$ ist abgeschlossen (Quadrat mit Rändern) und die Menge $[a, b[\times [a, b]$ ist weder offen noch abgeschlossen. Alle diese Mengen sind beschränkt, aber nur die abgeschlossene Menge $[a, b] \times [a, b]$ ist ein Kompaktum.
- Die Menge $]a, b[\times]a, b[\times]a, b[\subset \mathbb{R}^3$ ist offen (offener Würfel, ohne Randflächen), $[a, b] \times [a, b] \times [a, b]$ ist abgeschlossen (Würfel mit Randflächen), $[a, b[\times [a, b] \times [a, b]$ ist weder offen noch abgeschlossen, usw.

(3) Die leere Menge \emptyset und der \mathbb{R}^n selbst sind abgeschlossen. Der \mathbb{R}^n ist aber nicht kompakt, weil er nicht beschränkt ist. Ebenso ist $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, aber nicht kompakt (Vierelebene mit Rand).

- **Zwischenfrage (2)** Wir haben soeben festgestellt, dass die leere Menge \emptyset und der \mathbb{R}^n offen sind. Und scheinbar sind sie auch abgeschlossen. Warum ist das so?

Gib ferner eine Kugel an, in der für $a < b$ die beschränkte Menge $[a, b] \times [a, b]$ vollständig enthalten ist.

6.3 Grenzwerte

Der Grenzwert ist ein zentraler Begriff der gesamten Analysis. Zu seiner Formulierung wird der Begriff eines Abstands benötigt, da er es erlaubt, „dicht“ an eine

³ Benannt nach dem deutschen Mathematiker Eduard Heine, 1821–1881, und dem französischen Mathematiker Émile Borel, 1871–1956.

Stelle heranzugehen. Für den \mathbb{R}^n mit der euklidischen Metrik können wir daher definieren:

Definition 6.6 Eine Folge von Punkten $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^n heißt konvergent gegen den Grenzwert $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, also $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ so, dass gilt } |\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < \varepsilon \quad \forall k \geq N.$$

Eine Folge konvergiert also genau dann gegen \mathbf{a} , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ fast alle Folgenglieder in der ε -Umgebung $K_\varepsilon(\mathbf{a})$ liegen.

Lesehilfe

„Fast alle“ bedeutet „alle bis auf endlich viele“. Zu einem vorgegebenen ε dürfen jeweils nur N Folgenglieder außerhalb liegen, also endlich viele.

Grenzwerte im \mathbb{R}^n können auf die einzelnen Komponenten heruntergebrochen und damit auf die Konvergenz von Folgen reeller Zahlen zurückgeführt werden:

Satz 6.3 Eine Folge (\mathbf{x}_k) mit $\mathbf{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann gegen $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, wenn für $i = 1, \dots, n$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i$.

Beweis „ \Rightarrow “ Es gelte $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < \varepsilon \quad \forall k \geq N$. Für $i = 1, \dots, n$ gilt daher

$$\begin{aligned} |x_{ki} - a_i| &= \sqrt{(x_{ki} - a_i)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_{k1} - a_1)^2 + \dots + (x_{ki} - a_i)^2 + \dots + (x_{kn} - a_n)^2} = |\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

also $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i$.

„ \Leftarrow “ Es sei $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ Zahlen $N_i \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $|x_{ki} - a_i| < \varepsilon' := \varepsilon / \sqrt{n} \quad \forall k \geq N_i$. Wir setzen nun $N := \max\{N_1, \dots, N_n\}$. Es gilt dann für alle $k \geq N$

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| = \left[\underbrace{(x_{k1} - a_1)^2}_{=|x_{k1}-a_1|^2 < \varepsilon'^2} + \dots + \underbrace{(x_{kn} - a_n)^2}_{=|x_{kn}-a_n|^2 < \varepsilon'^2} \right]^{1/2} < \sqrt{n} \varepsilon' = \varepsilon,$$

also $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$. •

Zur Ermittlung eines Grenzwerts $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k$ können also die Grenzwerte der einzelnen Komponenten der Vektoren $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ betrachtet werden. Man hat es dann einfach mit n „Zahlgrenzwerten“ zu tun.

Mit der Konvergenz von Folgen können abgeschlossene Mengen charakterisiert werden:

Satz 6.4 Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Ist $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus M , die gegen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, so liegt \mathbf{a} in M .

Beweis „ \Rightarrow “ Es sei M abgeschlossen und $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$. Angenommen, es sei $\mathbf{a} \notin M$. Da $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen ist, ist dann $\mathbb{R}^n \setminus M$ eine Umgebung von \mathbf{a} . Nach Definition der Konvergenz gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n \setminus M \quad \forall k \geq N$, im Widerspruch zur Annahme! Also muss gelten $\mathbf{a} \in M$.

„ \Leftarrow “ Das „Folgenkriterium“ sei erfüllt. Zu zeigen ist, dass dann M abgeschlossen ist, also dass $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen ist. Es sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus M$ ein beliebiger Punkt. Wir zeigen: Es muss dann ein $\varepsilon > 0$ geben mit $K_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es zu jedem $k > 0$ ein $\mathbf{x}_k \in M$ mit $|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < 1/k$. Dann gilt aber $\lim \mathbf{x}_k = \mathbf{a} \in M$, was im Widerspruch zu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus M$ steht. Es gibt also ein $K_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$, und $\mathbb{R}^n \setminus M$ ist somit offen. •

Bei abgeschlossenen Mengen kann es also nicht passieren, dass der Grenzwert einer Folge von Elementen selbst nicht in der Menge liegt. Bei nicht abgeschlossenen Mengen ist dies durchaus möglich, wie die Folge $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ und die Menge $]0, 1]$ zeigen.

► **Antwort auf Zwischenfrage (2)** Gefragt war, warum die leere Menge \emptyset und der \mathbb{R}^n (auch) abgeschlossen sind. Und ferner war nach einer Kugel gefragt, die die Menge $[a, b] \times [a, b]$ vollständig umschließt.

Für die Frage nach der Abgeschlossenheit einer Menge ist ihr Komplement zu betrachten. Das Komplement der leeren Menge ist der gesamte \mathbb{R}^n ; da er offen ist, ist die leere Menge abgeschlossen. Das Komplement des \mathbb{R}^n ist die leere Menge; da sie offen ist, ist der \mathbb{R}^n abgeschlossen.

Das Quadrat $[a, b] \times [a, b]$ besitzt eine Diagonale der Länge $\sqrt{2}(b-a)$. Wegen $\sqrt{2} < 2$ ist es daher beispielsweise vollständig in der Kugel $K_{2(b-a)}((a, a))$ enthalten. Ebenso ist es in der Kugel $K_{2(|a|+|b|)}(\mathbf{0})$ enthalten oder in der Kugel $K_{1000(|a|+|b|)}(\mathbf{0})$.

Stetigkeit

„Mehrdimensionale“ Funktionen sind im allgemeinen Fall Abbildungen einer Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ in den \mathbb{R}^n ,

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Die einzelnen Komponentenfunktionen können also von m Variablen abhängen, $f_i = f_i(x_1, \dots, x_m)$. Natürlich kann dabei $m = 1$ sein, dann hängt die Funktion nur von einer Variablen ab. Und für $n = 1$ hat man es mit einer reellwertigen (und keiner vektorwertigen) Funktion zu tun.

Die Stetigkeit einer mehrdimensionalen Funktion ist wie üblich definiert:

Definition 6.7 Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf der Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt stetig in $a \in U$, falls gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

d. h., wenn für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten in $U \setminus \{a\}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a).$$

Ist f in jedem $x \in U$ stetig, so heißt f stetig auf U .

Aufgrund von Satz 6.3 ist die Funktion $f = (f_1, \dots, f_n)$ genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen f_i , $i = 1, \dots, n$, stetig sind. Man hat also für die Stetigkeit letztlich nur reellwertige Funktionen zu betrachten.

Schließlich wollen wir festhalten, dass sich die Stetigkeit von Grundfunktionen auf aus diesen zusammengesetzte Funktionen überträgt. So ist etwa $(x_1, x_2) \mapsto x_1 e^{2x_1 x_2}$ stetig, weil die Komponentenfunktionen $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ und $(x_1, x_2) \mapsto x_2$ stetig sind, außerdem Produkte stetiger Funktionen stetig sind, die Exponentialfunktion stetig ist usw.

Beispiel

Die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad t \mapsto \left(t \ln t, \frac{3t^2 + t - 7}{t^5 + 12}, -2 \right) \quad (6.9)$$

besitzt die drei Komponentenfunktionen $f_i : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, mit

$$f_1(t) = t \ln t, \quad f_2(t) = \frac{3t^2 + t - 7}{t^5 + 12}, \quad f_3(t) = -2.$$

Die Komponentenfunktionen sind als aus stetigen Grundfunktionen zusammengesetzte Funktionen stetig, also ist auch f insgesamt stetig.

Grenzwerte werden komponentenweise gebildet. So ist $\lim_{t \searrow 0} f(t) = (a, b, c)$ mit

$$a = \lim_{t \searrow 0} (t \ln t) = 0, \quad b = \lim_{t \searrow 0} \frac{3t^2 + t - 7}{t^5 + 12} = -\frac{7}{12}, \quad c = \lim_{t \searrow 0} (-2) = -2.$$

Lesehilfe

Kurz zur Erinnerung: Grenzwerte wie der obige Grenzwert $a = \lim_{t \searrow 0} (t \ln t)$ sind zunächst problematisch, weil dort zwei konkurrierende Prozesse auf so etwas wie „ $0 \cdot \infty$ “ führen. Du kannst hier den Satz von l'Hospital verwenden, indem du das Produkt als Quotienten schreibst:

$$\lim_{t \searrow 0} (t \ln t) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\ln t}{1/t} \stackrel{\text{r.H.}}{=} \lim_{t \searrow 0} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t \searrow 0} (-t) = 0.$$

Dabei heißt $t \searrow 0$ übrigens „ t von oben gegen 0“. Der Logarithmus ist nur für positive Argumente definiert.

► **Zwischenfrage (3)** Ist die obige Funktion (6.9) stetig bei 0?

6.4 Kurven

Bei Kurven handelt es sich um stetige vektorwertige Abbildungen, die nur von einem reellen Parameter abhängen:

Definition 6.8 Eine Kurve im \mathbb{R}^n ist eine stetige Abbildung $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \mathbf{x}(t)$, auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Eine Kurve wird somit gegeben durch ein n -Tupel

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

stetiger Funktionen $x_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$. Das Argument t nennt man den *Parameter* der Kurve. Da das Intervall I ein zusammenhängender Definitionsbereich ist, entspricht der Graph der Kurve einer „durchgehenden Linie“. Für $n = 2$ hat man es mit einer *ebenen Kurve* zu tun und für $n = 3$ mit einer *Raumkurve*.

Eine Kurve \mathbf{x} heißt (stetig) *differenzierbar*, wenn sämtliche Komponentenfunktionen x_k (stetig) differenzierbar sind.

Lesehilfe

Die Stetigkeit stellt sicher, dass die Kurve keine Sprünge aufweist, ihr Graph also eine durchgehende Linie ist. Wenn die Kurve darüber hinaus differenzierbar ist, lassen sich die Ableitungen bilden. Sind diese darüber hinaus stetig, heißt die Kurve stetig differenzierbar.

Kinematische Interpretation einer Kurve: Manchmal ist es nützlich, die Variable $t \in I$ als Zeit und $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ als Ort aufzufassen. Die Kurve beschreibt dann die zeitliche Bewegung eines Punkts im \mathbb{R}^n , man hat es also mit einem *zeitlich variablen Ortsvektor* zu tun.

Beispiele

(1) Ein Kreis mit Radius $r > 0$ wird beschrieben durch die Kurve

$$\mathbf{x} : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (r \cos t, r \sin t). \quad (6.10)$$

Fügt man dem Argument t einen Faktor $\omega > 0$ hinzu, betrachtet also die Kurve

$$t \mapsto (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t)), \quad (6.11)$$

so wird der Kreis mit geänderter „Geschwindigkeit“ durchlaufen. Beispielsweise würde er für $\omega = 2$ auf dem Intervall $[0, 2\pi[$ zweimal vollständig durchlaufen, und für $\omega = 1/4$ ergäbe sich nur der Viertelkreis im ersten Quadranten des xy -Koordinatensystems.

Analog hat man mit $a > b > 0$ und der Kurve

$$\mathbf{x} : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (a \cos t, b \sin t) \quad (6.12)$$

eine Ellipse mit der großen Halbachse a und der kleinen Halbachse b .

(2) Für $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ wird durch

$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \mathbf{a} + t\mathbf{r} \quad (6.13)$$

eine Gerade im \mathbb{R}^n durch den Punkt \mathbf{a} und mit dem Richtungsvektor \mathbf{r} beschrieben.

(3) Es seien $r > 0$ und $v \neq 0$ reelle Zahlen. Bei der Kurve

$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r \cos t, r \sin t, vt) \quad (6.14)$$

handelt es sich dann um eine *Schraubenlinie*: Die x - und y -Komponente der Kurve führen eine Kreisbewegung durch, während ihre z -Komponente mit konstanter Geschwindigkeit v anwächst, siehe Abb. 6.2.

Übrigens ist auch die Funktion (6.9) eine Raumkurve. Da ihre z -Komponente konstant ist, könnte der Verlauf ihres Graphen vollständig in der xy -Ebene dargestellt werden.

(4) Eine Kurve kann sich natürlich „selbst schneiden“, d. h., sie muss keine injektive Abbildung darstellen, bei der ein Kurvenpunkt nur einem Parameterwert entsprechen darf. So schneidet sich ein Kreis, der zweimal durchlaufen wird, in jedem seiner Punkte. Und für die Kurve $t \mapsto \mathbf{x}(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$ etwa gilt $\mathbf{x}(1) = (0, 0) = \mathbf{x}(-1)$: Sie schneidet sich im Punkt $(0, 0)$ selbst.

► **Antwort auf Zwischenfrage (3)** Gefragt war, ob die Funktion (6.9) stetig bei 0 ist.

Die Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $t \mapsto (t \ln t, \frac{3t^2+t-7}{t^5+12}, -2)$ ist bei 0 gar nicht definiert und kann daher dort auch nicht stetig sein. Da der Grenzwert $\lim_{t \searrow 0} \mathbf{f}(t)$ existiert, könnte sie allerdings bei 0 durch den Wert $\mathbf{f}(0) := (0, -7/12, -2)$ stetig fortgesetzt werden. Auf diese Weise entstünde eine stetige Funktion auf \mathbb{R}_+ .

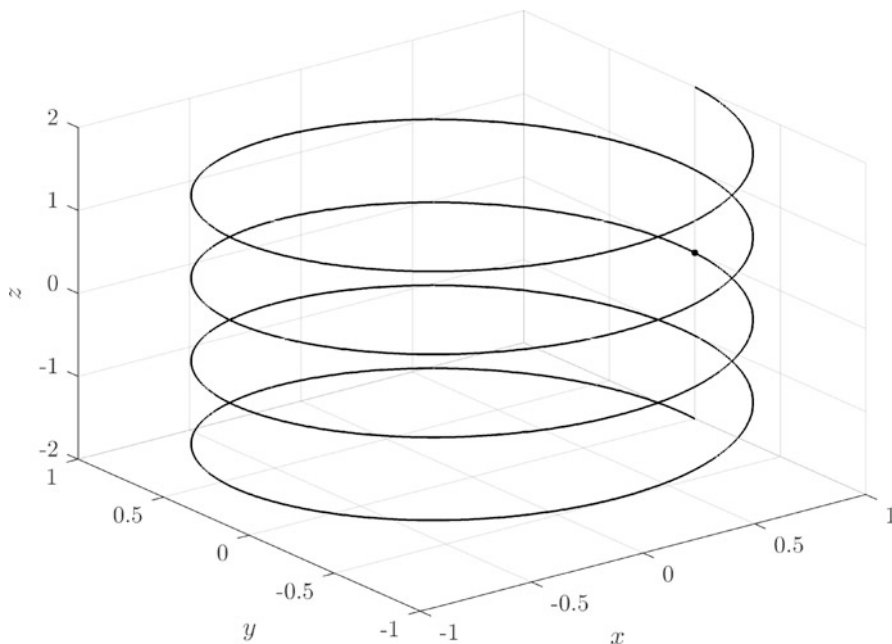


Abb. 6.2 Bei der Kurve $t \mapsto (r \cos t, r \sin t, vt)$ mit $r > 0$ und $v \neq 0$ handelt es sich um eine Schraubenlinie. Dargestellt ist die Kurve in einem xyz -Koordinatensystem. Für $t = 0$ schneidet die Kurve die x -Achse. Der Parameter v gibt die Steigung der Schraube an

- **Zwischenfrage (4)** Kann der Graph einer beliebigen stetigen Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auch der Graph einer ebenen Kurve sein? Falls ja, welcher Kurve? Und umgekehrt: Lässt sich der Graph einer ebenen Kurve stets auch als Graph einer Funktion erhalten?

6.4.1 Tangentenvektor

Die Ableitung einer Kurve ergibt den Tangentenvektor:

Definition 6.9 Es sei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Für $t \in I$ heißt

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

der Tangentenvektor der Kurve zum Parameterwert t .

Lesehilfe

Wir verwenden hier die Schreibweise $\dot{\mathbf{x}}$ für die Ableitung nach dem Kurvenparameter, der in der Regel mit t bezeichnet wird.

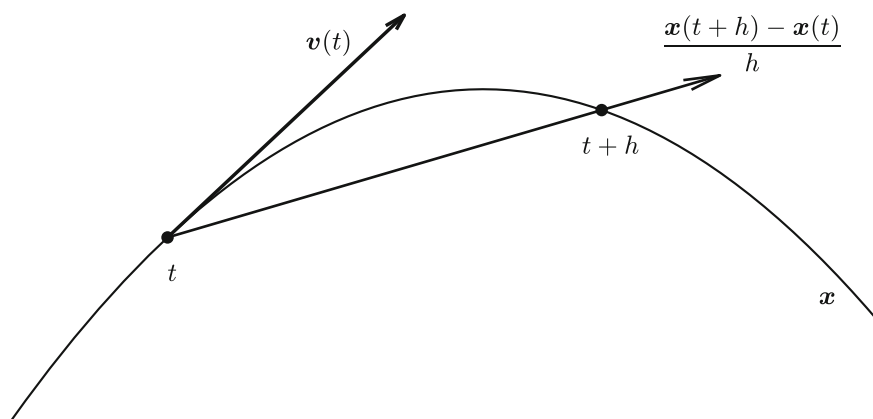


Abb. 6.3 Der Tangentenvektor $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t)$ einer Kurve \mathbf{x} ergibt sich als Grenzwert von Sekantenvektoren. Er liegt tangential zur Kurve. Seine Länge gibt die „Geschwindigkeit“ an, mit der die Kurve durchlaufen wird

Der Tangentenvektor lässt sich als Grenzwert von Sekantenvektoren auffassen, denn es gilt offenbar

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h}, \quad (6.15)$$

wie man sich leicht klarmacht, wenn man die entsprechenden Differenzialquotienten für die einzelnen Komponenten aufschreibt. Der Tangentenvektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ liegt somit im Punkt $\mathbf{x}(t)$ tangential an der Kurve, siehe Abb. 6.3.

Lesehilfe

Die Ableitung der einzelnen Komponenten x_i der Kurve sind gewöhnliche Ableitungen:

$$\dot{x}_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_i(t+h) - x_i(t)}{h}.$$

Sie lassen sich vektoriell zu (6.15) zusammenfassen. Nun ist $\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)$ der Verbindungsvektor vom Kurvenpunkt $\mathbf{x}(t)$ zum Kurvenpunkt $\mathbf{x}(t+h)$, er gibt also die Richtung der entsprechenden Kurvensekante an. Mit dem Grenzwert $h \rightarrow 0$ erhält man dann die Tangentenrichtung im Kurvenpunkt $\mathbf{x}(t)$.

Fasst man die Kurve \mathbf{x} als die zeitliche Bewegung eines Punkts und t als die Zeit auf, so ist $\dot{\mathbf{x}}(t)$ der Geschwindigkeitsvektor der Bewegung, und der Betrag der Ge-

schwindigkeit wird gegeben durch

$$|\dot{\mathbf{x}}(t)| = \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dots + \dot{x}_n^2(t)}. \quad (6.16)$$

Ein eindeutiger Tangentenvektor liegt nur dann vor, wenn die Ableitung nicht verschwindet:

Definition 6.10 *Es sei $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Die Kurve heißt regulär, falls gilt $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in I$. Gibt es einen Parameterwert t mit $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$, so heißt die Kurve dort singulär.*

In einem singulären Punkt ist die Kurve zwar differenzierbar, aber mit der Ableitung $\mathbf{0}$. Ein solcher Punkt mit der „Geschwindigkeit“ $\mathbf{0}$ muss sich nicht im Graphen der Kurve bemerkbar machen, es kann aber beispielsweise auch ein „Knick“ vorliegen.

► **Antwort auf Zwischenfrage (4)** Gefragt war nach den Graphen stetiger Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und ebener Kurven.

Der Graph einer stetigen Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ entspricht dem Graphen der Kurve $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))$. Ihr Parameter t ist dann gleich der x -Koordinate des Kurvenpunkts.

Umgekehrt kann der Graph einer Kurve aber i. Allg. nicht durch einen Funktionsgraphen wiedergegeben werden. So gehören beispielsweise beim Kreis (6.10) zu einem $x \in]-1, 1[$ zwei verschiedene y -Werte, was bei Funktionen nicht möglich ist.

Beispiele

(1) Der Graph der ebenen Kurve

$$\mathbf{x} = (x, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, t^2)$$

ist die Normalparabel. Ihre Ableitung ist

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (1, 2t) \neq (0, 0).$$

Die Kurve \mathbf{x} ist somit regulär. Sie wird in x -Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit $\dot{x} = 1$ durchlaufen. Der variable Wert von \dot{y} sorgt dafür, dass die Vektoren $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}, \dot{y}) = (1, \dot{y})$ in jedem Kurvenpunkt tangential an der Parabel liegen.

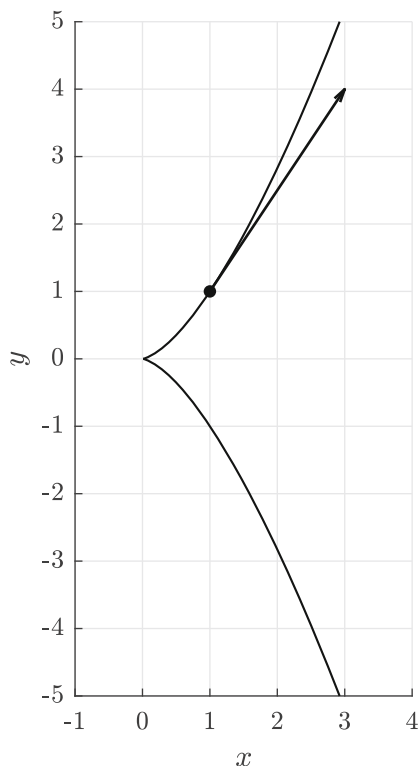
Auch die Kurve

$$\tilde{\mathbf{x}} = (x, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad s \mapsto (s^3, s^6)$$

besitzt die Normalparabel als Graphen. Ihre Ableitung ist

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) = (3s^2, 6s^5).$$

Abb. 6.4 Das Bild der Kurve $t \mapsto (t^2, t^3)$ entspricht den zwei Zweigen $y = \pm x^{3/2}$. Die Kurve ist für $t = 0$ im Punkt $(0, 0)$ singulär. Hier kann keine Tangentenrichtung angegeben werden und die Kurve weist einen Knick auf. Für $t = 1$ ist die Kurve im Punkt $(1, 1)$ mit dem Tangentenvektor $(2, 3)$



Sie ist somit für den Parameterwert $s = 0$ singulär. Die Parabel wird mit einer anderen Geschwindigkeit als bei der obigen Kurve x durchlaufen und besitzt jetzt im Scheitelpunkt die Geschwindigkeit $\mathbf{0}$.

(2) Wir betrachten nun mit der Kurve

$$\mathbf{x} = (x, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t^2, t^3)$$

eine andere Parabel. Zunächst ermitteln wir das Bild der Kurve in einem xy -Koordinatensystem: Aus $x = t^2$ folgt $t = \pm\sqrt{x}$ (es ist offenbar $x \geq 0$) und damit $y = t^3 = (\pm\sqrt{x})^3 = \pm x^{3/2}$. Das Bild der Kurve ist also

$$\mathbf{x}(\mathbb{R}) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y = \pm x^{3/2} \right\}.$$

Positive t liegen auf dem positiven Zweig und negative t auf dem negativen, siehe Abb. 6.4.

Die Tangentenvektoren ergeben sich aus

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (2t, 3t^2).$$

Es ist daher $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$: Es handelt sich um einen singulären Punkt, der sich hier durch einen Knick im Graphen bemerkbar macht. An einem Knick kann offenbar keine Tangente angegeben werden.

6.4.2 Schnittwinkel zwischen Kurven

Wir betrachten zwei reguläre Kurven $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf den Intervallen $I, J \subseteq \mathbb{R}$. Für $t \in I, s \in J$ gelte $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(s)$, d. h., die Kurven schneiden sich. Unter dem *Schnittwinkel* α der Kurven bei den Parameterwerten t bzw. s versteht man nun den *Winkel zwischen den Tangentenvektoren* $\dot{\mathbf{x}}(t)$ und $\dot{\mathbf{y}}(s)$. Er wird somit gegeben durch die Gleichung

$$\cos \alpha = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(s)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)| |\dot{\mathbf{y}}(s)|}. \quad (6.17)$$

Lesehilfe

Es ist hier wichtig, die Parameter der Kurve unterschiedlich zu benennen. Der Parameter der einen Kurve, t , hat mit dem Parameter der anderen Kurve, s , nichts zu tun.

Und (6.17) kennst du bestimmt. Das ist die „normale“ Gleichung für den Winkel zwischen zwei Vektoren. Sie wird oft auch geschrieben in der Form

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Beispiel

Wir betrachten die zwei Kurven

$$\mathbf{x} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t^2, t^3) \quad (6.18)$$

$$\mathbf{y} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad s \mapsto \left(\frac{s}{2}, \frac{2}{s} \right). \quad (6.19)$$

Es ist $\mathbf{x}(1) = (1, 1) = \mathbf{y}(2)$, die Kurven schneiden sich also im Punkt $(1, 1)$, siehe Abb. 6.5. Die entsprechenden Parameterwerte lauten $t = 1$ und $s = 2$.

- **Zwischenfrage (5)** Wir haben den Schnittpunkt der Kurven (6.18) und (6.19) durch „Hinsehen“ gefunden. Wie müsste man ihn berechnen, wenn man ihn nicht sieht? Und gibt es noch weitere Schnittpunkte?

Wir berechnen den Schnittwinkel: Die Tangentenvektoren lauten

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) \Big|_{t=1} &= (2t, 3t^2) \Big|_{t=1} = (2, 3) \\ \dot{\mathbf{y}}(s) \Big|_{s=2} &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{s^2} \right) \Big|_{s=2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

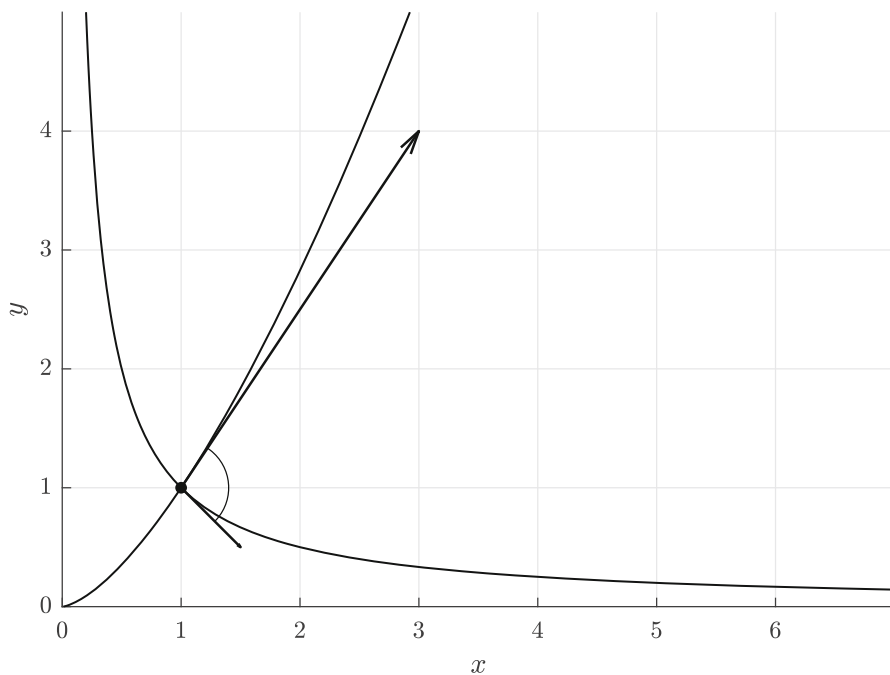


Abb. 6.5 Die Kurven $t \mapsto (t^2, t^3)$ und $s \mapsto (s/2, 2/s)$ schneiden sich im Punkt $(1, 1)$. Der Schnittwinkel entspricht dem Winkel zwischen den beiden Tangentenvektoren in diesem Punkt, d. h. zwischen den Vektoren $(2, 3)$ und $(1/2, -1/2)$. Er beträgt etwa 101°

also ist

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(s) &= (2, 3) \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \\ |\dot{\mathbf{x}}(t)| &= |(2, 3)| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \\ |\dot{\mathbf{y}}(s)| &= \left|\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

und (6.17) ergibt

$$\cos \alpha = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{13} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{26}} = -\frac{1}{26}\sqrt{26}.$$

Dies entspricht einem geometrischen Winkel von

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{26}\sqrt{26}\right) \approx 101.3^\circ,$$

siehe Abb. 6.5.

- **Antwort auf Zwischenfrage (5)** Gefragt war nach den Schnittpunkten der Kurven (6.18) und (6.19).

Den Schnittpunkt zweier Kurven \mathbf{x} und \mathbf{y} erhält man durch Gleichsetzen der Kurven, d. h. durch die Gleichung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(s).$$

Diese Vektorgleichung entspricht im allgemeinen Fall einem Gleichungssystem aus n Komponentengleichungen. Hier haben wir es mit zwei Gleichungen zu tun:

$$t^2 = \frac{s}{2} \quad \wedge \quad t^3 = \frac{2}{s}.$$

Wir lösen die erste Gleichung nach s auf und setzen sie in die zweite Gleichung ein. Dies ergibt

$$t^3 = \frac{2}{2t^2} = \frac{1}{t^2} \quad \text{oder} \quad t^5 = 1.$$

Die einzige Lösung ist daher $t = 1$ und $s = 2t^2 = 2$. Die Kurven schneiden sich nur einmal.

6.4.3 Kurvenlänge

Wir betrachten eine Kurve $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf dem endlichen Parameterintervall $[a, b]$ und stellen uns die Frage nach der Länge dieser Kurve. Dazu wollen wir die Kurve durch einen *Polygonzug* approximieren: Wir unterteilen das Intervall gemäß

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b \quad (6.20)$$

und verbinden für $i = 1, \dots, k$ die Punkte $\mathbf{x}(t_{i-1})$ und $\mathbf{x}(t_i)$ jeweils durch gerade Strecken, siehe Abb. 6.6. Die geometrische Länge des Polygonzugs kann als Summe seiner Teilstreckenlängen angegeben werden:

$$p_{\mathbf{x}}(t_0, \dots, t_k) = \sum_{i=1}^k |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})|. \quad (6.21)$$

Lesehilfe

Einen Polygonzug kann man auch als Streckenzug bezeichnen. Wie du gesehen hast, handelt sich dabei einfach um die Vereinigung der Verbindungsstrecken der Folge von Punkten $\mathbf{x}(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, k$.

Je feiner die Unterteilung ist, umso besser nähert die Länge des Polygonzugs die Länge der Kurve an. Lässt sich auf diese Weise ihre Länge beliebig genau festlegen, nennt man die Kurve *rektifizierbar*:

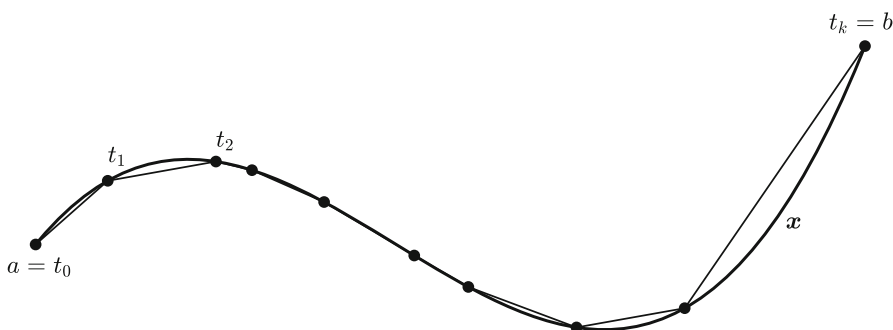


Abb. 6.6 Das Intervall $[a, b]$, auf dem eine Kurve x definiert ist, kann durch eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ aufgeteilt werden. Verbindet man die entsprechenden Kurvenpunkte, so erhält man einen Polygonzug, dessen Länge als Summe der einzelnen Streckenlängen leicht berechnet werden kann. Je feiner man die Unterteilung wählt, umso besser approximiert man damit die Länge der Kurve

Definition 6.11 Eine Kurve $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt rektifizierbar mit der Länge $s \in \mathbb{R}_+$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für jede Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ der Feinheit $\leq \delta$ gilt

$$|p_x(t_0, \dots, t_k) - s| \leq \varepsilon.$$

Die Feinheit einer Unterteilung ist dabei definiert als $\max \{t_i - t_{i-1} | i = 1, \dots, k\}$.

Eine Kurve ist also rektifizierbar, wenn sich die Längen der Polygonzüge mit größer werdender Feinheit dem Grenzwert s annähern. Dieser Grenzwert heißt dann die Länge oder auch *Bogenlänge* der Kurve. Mit dieser Vorschrift lässt sich die Länge einer Kurve dann ohne Weiteres näherungsweise bestimmen. Allerdings sind nicht alle Kurven rektifizierbar.

- **Zwischenfrage (6)** Jemand sagt: „Mit der näherungsweisen Bestimmung der Länge einer Kurve durch einen Polygonzug aus endlich vielen Kurvenpunkten wird die tatsächliche Kurvenlänge stets unterschätzt, d. h., der Polygonzug ist kürzer als die Kurve.“ Stimmt seine Aussage? Wie kann ein Polygonzug, der beispielsweise vier Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 verbindet, selbst als Kurve dargestellt werden?

Für die Rektifizierbarkeit einer Kurve ist es *nicht* erforderlich, dass sie differenzierbar ist. Beispielsweise kann ja ein Polygonzug selbst auch als Kurve dargestellt werden, die rektifizierbar ist; ein Polygonzug ist aber an seinen Knicken nicht differenzierbar. Ist jedoch umgekehrt eine Kurve stetig differenzierbar, so ist sie auch rektifizierbar:

Satz 6.5 Jede stetig differenzierbare Kurve $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar und für ihre Länge s gilt

$$s = \int_a^b |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt.$$

Beweis Die Formel kann wie folgt begründet werden: Statt des Parameters t können andere Parameter zur Charakterisierung der Kurve verwendet werden. Ein solcher Parameter ist auch die durchlaufene Bogenlänge \tilde{s} (bei $t = a$ ist $\tilde{s} = 0$, mit wachsendem t nimmt auch \tilde{s} zu). Für die Differenz zweier benachbarter Kurvenpunkte,

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(\tilde{s} + \Delta \tilde{s}) - \mathbf{x}(\tilde{s}),$$

gilt mit diesem Parameter $|\Delta \mathbf{x}| \approx \Delta \tilde{s}$. Folglich geht der Differenzenquotient $|\Delta \mathbf{x}|/\Delta \tilde{s}$ für $\Delta \tilde{s} \rightarrow 0$ gegen 1, d. h., der Tangentenvektor $d\mathbf{x}/d\tilde{s}$ hat die Länge 1. Mit dem Kurvenparameter \tilde{s} sind also alle Tangentenvektoren gleichzeitig Einheitsvektoren. Nun folgt aus

$$\left| \frac{d\mathbf{x}(t(\tilde{s}))}{d\tilde{s}} \right| = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \left| \frac{dt}{d\tilde{s}} \right| \right| = 1$$

die Gleichung

$$\left| \frac{d\tilde{s}}{dt} \right| = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = |\dot{\mathbf{x}}(t)|$$

und das Integral $\int_a^b \left| \frac{d\tilde{s}}{dt} \right| dt = \int_a^b |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt$ ergibt die Länge der Kurve. \circ

Für stetig differenzierbare Kurven kann also die angegebene Formel zur Berechnung der Länge verwendet werden. Und besitzt eine Kurve endlich viele Knicke, ist aber ansonsten stetig differenzierbar, kann ihre Länge zumindest stückweise mithilfe von Satz 6.5 berechnet werden.

- **Antwort auf Zwischenfrage (6)** Gefragt war, ob die Kurvenlänge durch einen näherungsweisen Polygonzug stets unterschätzt wird, und nach der Darstellung eines Polygonzugs durch die Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ als Kurve.

Die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist die Gerade. Der Polygonzug ist daher die kürzeste Verbindung seiner Zwischenpunkte. Eine Kurve, die er approximiert, kann allenfalls länger sein. Sie ist sicher länger, wenn sie „gekrümmt“ ist bzw. ein gekrümmtes Kurvenstück enthält. Ist die Kurve allerdings ein Geradenstück, so ist jeder ihrer Polygonzüge gleich lang und gleich der exakten Kurvenlänge.

Nun zur Darstellung des Polygonzugs als Kurve: Die Strecke von \mathbf{x}_1 nach \mathbf{x}_2 entspricht beispielsweise der Kurve

$$\mathbf{x}_{12} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_{12}(t) := \mathbf{x}_1 + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)t.$$

Ebenso lassen sich die anderen Verbindungsstrecken darstellen. Um sie zu einer Gesamtkurve zusammenzufügen, müssen lediglich noch die Parameter angepasst werden. So erhält man den Polygonzug in folgender Form:

$$\mathbf{x}_{14} : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_{14}(t) := \begin{cases} \mathbf{x}_1 + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)t & \text{für } t \in [0, 1[\\ \mathbf{x}_2 + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2)(t - 1) & \text{für } t \in [1, 2[\\ \mathbf{x}_3 + (\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3)(t - 2) & \text{für } t \in [2, 3]. \end{cases}$$

Beispiele

(1) Als Beispiel für eine nicht rektifizierbare Kurve betrachten wir $\mathbf{x} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t)) := \begin{cases} (0, 0) & \text{für } t = 0 \\ (t, t \cos(\pi/t)) & \text{für } t \in]0, 1]. \end{cases} \quad (6.22)$$

Die Kurve ist auch an der Stelle $t = 0$ stetig, denn es ist $\lim_{t \rightarrow 0} (t \cos(\pi/t)) = 0$. Aber die Kurve ist nicht rektifizierbar: Das Argument des Cosinus wird mit Annäherung an $t = 0$ unendlich groß und der Cosinusterm „oszilliert daher unendlich oft“. Zwar wird seine Amplitude gleichzeitig immer kleiner, aber die Länge der Kurve wächst dennoch über alle Grenzen. Um das zu sehen, betrachten wir die Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ mit

$$t_1 = \frac{1}{k}, \quad t_2 = \frac{1}{k-1}, \quad t_3 = \frac{1}{k-2}, \quad \dots, \quad t_{k-1} = \frac{1}{2} \quad (6.23)$$

und schätzen die Länge des zugehörigen Polygonzugs ab: Zunächst haben wir

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{x}}(t_0, \dots, t_k) &= \sum_{i=1}^k |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})| \geq \sum_{i=1}^k |y(t_i) - y(t_{i-1})| \\ &\geq \sum_{i=2}^k |y(t_i) - y(t_{i-1})| = |y(t_k) - y(t_{k-1})| + \dots + |y(t_2) - y(t_1)|. \end{aligned}$$

Lesehilfe

Die Länge eines Differenzvektors ist offenbar \geq der Differenz der y -Koordinaten, also $|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})| \geq |y(t_i) - y(t_{i-1})|$. Dann wird der Summand mit t_0 weggelassen, weil sich $t_0 = 0$ nicht wie die anderen t_i als $1/j$ schreiben lässt, was wir gleich tun wollen. Schließlich sind die Summanden der Summe in umgekehrter Richtung aufgeschrieben – was gleich nützlich ist ;)

Wegen $t_k = 1 = \frac{1}{1}, t_{k-1} = \frac{1}{2}, \dots, t_1 = \frac{1}{k}$ lässt sich unser Ergebnis auch schreiben als

$$p_x(t_0, \dots, t_k) \geq \sum_{j=1}^{k-1} \left| y\left(\frac{1}{j}\right) - y\left(\frac{1}{j+1}\right) \right|.$$

Wir können nun die Summanden berechnen: Aus $y\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} \cos(\pi m) = \frac{(-1)^m}{m}$ folgt

$$\left| y\left(\frac{1}{j}\right) - y\left(\frac{1}{j+1}\right) \right| = \frac{1}{j} + \frac{1}{j+1}.$$

Lesehilfe

Die Vorzeichen $(-1)^j$ und $(-1)^{j+1}$ sind ungleich. Aufgrund des Minuszeichens in $|y(\frac{1}{j}) - y(\frac{1}{j+1})|$ haben daher beide Summanden dasselbe Vorzeichen und der Betrag wird zu $\frac{1}{j} + \frac{1}{j+1}$.

Und vorweg zur Erinnerung: Die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ ist die harmonische Reihe. Ihr Reihenwert ist unendlich groß.

Dies ergibt schließlich

$$p_x(t_0, \dots, t_k) \geq \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{j+1} \right) \geq \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \rightarrow \infty \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \quad (6.24)$$

Da für diese Unterteilungen mit wachsendem k die Länge der Polygonzüge unendlich groß wird, ist auch die Kurve unendlich lang. Sie ist somit nicht rektifizierbar.

(2) Kreis und Ellipse: Für $\varphi > 0$ betrachten wir den Kreisbogen $\mathbf{x} : [0, \varphi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Die Kurve ist stetig differenzierbar mit

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (-\sin t, \cos t), \quad \text{also} \quad |\dot{\mathbf{x}}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1,$$

und ihre Bogenlänge ergibt sich daher zu

$$s = \int_0^{\varphi} |\dot{\mathbf{x}}(t)| \, dt = \int_0^{\varphi} 1 \, dt = \varphi.$$

Für $\varphi = 2\pi$ hat man es mit dem vollständigen Einheitskreis zu tun (und seinem Umfang 2π).

Eine Ellipse mit der großen Halbachse a und der kleinen Halbachse b wird gegeben durch die Kurve $\mathbf{x} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{x}(t) = (b \cos t, a \sin t). \quad (6.25)$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 &= (-b \sin t)^2 + (a \cos t)^2 = a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t \\ &= a^2(1 - \sin^2 t) + b^2 \sin^2 t = a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t \\ &= a^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t \right). \end{aligned}$$

Die Brennpunkte der Ellipse liegen auf der großen Halbachse und haben den Abstand c vom Mittelpunkt der Ellipse. Da die Abstandssumme eines Ellipsenpunkts von den Brennpunkten gleich $2a$ ist, gilt $a^2 - b^2 = c^2$, siehe Abb. 6.7. Die Exzentrizität e einer Ellipse ist definiert als $e := c/a$. Die Länge der Ellipse ist daher

$$s = \int_0^{2\pi} |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt = \int_0^{2\pi} dt a \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t} = a \int_0^{2\pi} dt \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t}.$$

Da sich der Umfang der Ellipse aus vier gleichen Vierteln zusammensetzt, ist dies gleichbedeutend mit

$$s = 4a \int_0^{\pi/2} dt \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t}. \quad (6.26)$$

Das verbleibende Integral ist nicht elementar lösbar. Es handelt sich um ein *elliptisches Integral*, siehe (3.48). Sein Wert kann für gegebenes e nachgeschlagen oder numerisch berechnet werden.

Lesehilfe

Die Ellipse (6.25) hat ihre kleine Halbachse in x -Richtung und die große Halbachse in y -Richtung. Auf diese Weise ergibt sich das elliptische Integral zur Ermittlung ihrer Länge sofort in der üblichen Form mit \sin^2 . Andersherum erhielte man das Integral zunächst mit \cos^2 und müsste es dann mittels der Substitution $\frac{\pi}{2} - t = \tilde{t}$ auf die übliche Form bringen.

In der Regel wird eine Ellipse allerdings wie in Abb. 6.7 „liegend“ dargestellt.

(3) Zykloide: Eine Zykloide ist eine Kurve, die entsteht, wenn zusammen mit einem Kreis ein Punkt markiert wird und man die Bewegung dieses Punkts beim Abrollen des Kreises betrachtet. Der Punkt kann dabei im Inneren des Kreises liegen, auf dem Kreis selbst oder außerhalb des Kreises.

Für einen Punkt auf einem Kreis mit dem Radius 1, der bei $t = 0$ im Ursprung liegt, ergibt sich aus dem Abrollen des Kreises auf der Rechtsachse die Kurve

$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad (6.27)$$

siehe Abb. 6.8.

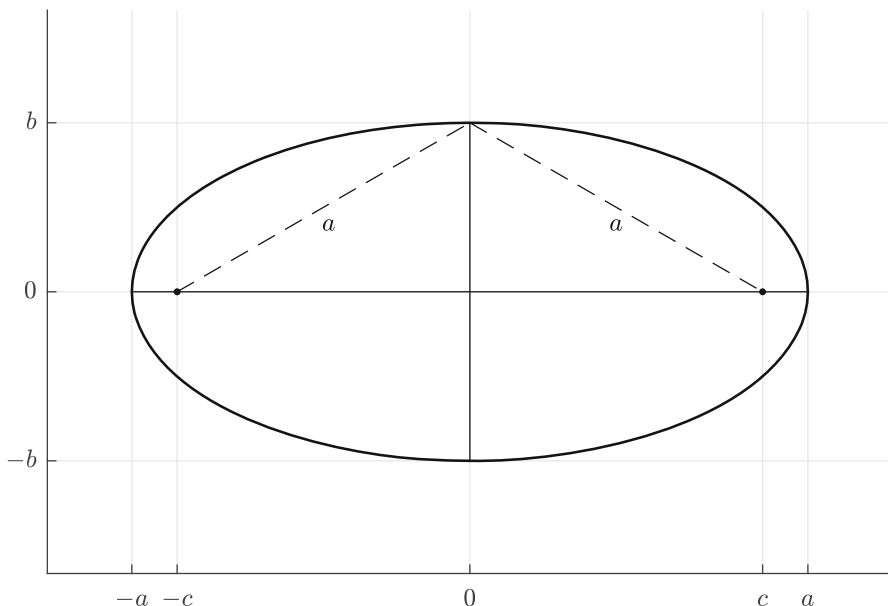


Abb. 6.7 Eine Ellipse ist die Ortskurve aller Punkte, die von den zwei Brennpunkten die gleiche Abstandssumme haben. Besitzt die Ellipse die große Halbachse a , so ist diese Abstandssumme gleich $2a$, wie man sofort erkennt, wenn man einen Ellipsenpunkt am Ende einer großen Halbachse betrachtet. Ist b die kleine Halbachse, so gilt für den Abstand c der Brennpunkte vom Mittelpunkt offenbar $c^2 + b^2 = a^2$. Die Exzentrizität e der Ellipse ist definiert als $e = c/a$. Für $e = 0$ hat man einen Kreis und für $e = 1$ eine zu einer Linie entartete Ellipse

Wir berechnen die Länge s des Teils der Zykloide, der einem Umlauf des Punkts entspricht, also zwischen den Parameterwerten 0 und 2π :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= (1 - \cos t, \sin t), \\ |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 &= (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} = 2 - 2\cos t.\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis schreiben wir mit

$$\cos t = \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}$$

besser als

$$|\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 = 2 - 2\cos t = 4\sin^2 \frac{t}{2},$$

denn auf diese Weise ergibt sich

$$|\dot{\mathbf{x}}(t)| = 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| = 2 \sin \frac{t}{2} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

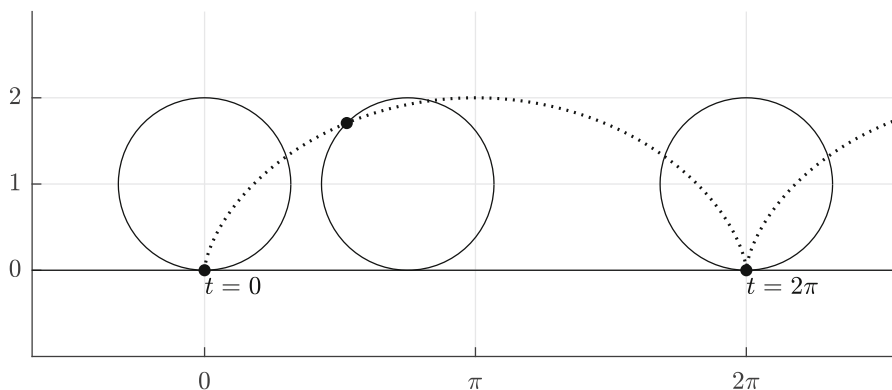


Abb. 6.8 Auf einem Kreis mit dem Radius 1 werde der Fußpunkt markiert, der im Ursprung des Koordinatensystems liege. Rollt der Kreis auf der Rechtsachse ab, so beschreibt der Punkt eine Zykloide. Sie wird beschrieben durch die Kurve $t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$

Die Integration kann nun leicht ausgeführt werden:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} |\dot{\mathbf{x}}(t)| \, dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \, dt = 4 \int_0^{\pi} \sin z \, dz \\ &= 4(-\cos z) \Big|_0^{\pi} = 4(-(-1) - (-1)) = 8. \end{aligned}$$

Der Zykloidenbogen hat also die Länge 8.

6.4.4 Krümmung einer ebenen Kurve

Die „Krümmung“ einer ebenen Kurve ist gleichbedeutend mit einer Richtungsänderung δ beim Durchlaufen eines Kurvenstücks Δs . Diese Richtungsänderung hängt i. Allg. natürlich von der Länge des Kurvenstücks ab. Die (mittlere) *Krümmung* der Kurve wird daher definiert als

$$\bar{K} := \frac{\delta}{\Delta s}. \quad (6.28)$$

Die Krümmung in einem Punkt erhält man – bei dessen Existenz – über den Grenzwert

$$K := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\delta}{\Delta s}. \quad (6.29)$$

Ein positives Vorzeichen von K bedeutet, dass man sich beim „Durchfahren“ des Kurvenstücks von dessen Anfang zu dessen Ende in einer Linkskurve befindet, und negative K entsprechen einer Rechtskurve.

Lesehilfe

Du hast sicher gemerkt, dass wir hier nur über die Krümmung *ebener* Kurven reden, d. h. von Kurven $\mathbf{x} : I \mapsto \mathbb{R}^2$. Für sie lässt sich die Krümmung beispielsweise in den Lenkeinschlag eines Autos übersetzen, das die Kurve durchfährt.

Aber natürlich weisen auch Raumkurven eine Krümmung auf, allerdings komplizierter: Hier muss der Kurve ein Flugzeug folgen, dessen Steuerung nicht nur eine Rechts-Links-Richtung kennt, sondern auch oben und unten.

- **Zwischenfrage (7)** Warum ist $K > 0$ gleichbedeutend mit einer Linkskurve?

Zur Berechnung der Krümmung einer zweimal differenzierbaren Kurve $\mathbf{x} = (x, y) : t \mapsto \mathbf{x}(t)$ beim Parameterwert t gibt es eine Formel, die wir hier ohne Beweis angeben wollen: Es ist

$$K(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{[\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)]^{3/2}}. \quad (6.30)$$

Krümmungsradius und Krümmungskreis

Bei einem *Kreis* mit dem Radius $r > 0$ handelt es sich um eine Kurve mit *konstanter Krümmung*: Die Richtungsänderung beim Durchlaufen eines Kreisbogens der Länge b entspricht dem überstrichenen Zentriwinkel α und es gilt

$$b = r\alpha. \quad (6.31)$$

Schreibt man dies in der Form

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{b}, \quad (6.32)$$

so erkennt man, dass die *Krümmung des Kreises* gleich $1/r$ ist:

$$K = \frac{1}{r}. \quad (6.33)$$

Lesehilfe

Die Richtung einer Kurve ergibt sich aus ihrem Tangentenvektor. Beim Kreis sind nun die Tangenten immer senkrecht auf den Radiusvektoren der Kreispunkte. Überstreicht der Radiusvektor daher den Winkel α , so ist auch die Winkeländerung der Tangenten gleich α . Dabei wird das Bogenstück $b = r\alpha$ abgelaufen.

Die Beziehung $K = 1/r$ kann auf andere Kurven übertragen werden. Sie erlaubt es, beliebigen Kurvenpunkten $P(x(t), y(t))$ abhängig von deren Krümmung K einen *Krümmungsradius* r zuzuordnen. Der zugehörige *Krümmungskreis*, also der Kreis, der sich im betrachteten Kurvenpunkt P mit der entsprechenden Krümmung an die Kurve anschmiegt, kann konstruiert werden, indem man noch zwei weitere Kurvenpunkte P_v und P_h betrachtet, von denen einer dicht vor und der andere dicht hinter dem Punkt P liegt. Durch diese drei Punkte wird ein Kreis festgelegt. Im Grenzwert $P_v \rightarrow P$ und $P_h \rightarrow P$ ergibt sich daraus der exakte Krümmungskreis im Punkt P .

Analog zu (6.30) gibt es für die Koordinaten $(x_M(t), y_M(t))$ des Mittelpunkts des Krümmungskreises am Kurvenpunkt $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ Formeln, die wir ohne Beweis angeben wollen: Es ist

$$x_M(t) = x(t) - \frac{\dot{y}(t)[\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)]}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)} \quad (6.34)$$

$$y_M(t) = y(t) + \frac{\dot{x}(t)[\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)]}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}. \quad (6.35)$$

Zusammen mit dem Krümmungsradius $r(t) = 1/K(t)$ ist der Krümmungskreis dann eindeutig bestimmt.

Lesehilfe

Die Formeln (6.30), (6.34) und (6.35) für den Krümmungskreis sind natürlich keine Formeln, die man auswendig kennt. Hier ist eher wichtig, dass du weißt, dass es solche Formeln gibt, und dann werden sie bei Bedarf nachgeschlagen ;-)

- **Antwort auf Zwischenfrage (7)** Gefragt war, warum $K > 0$ einer Linkskurve entspricht.

Die Krümmung ist der Quotient aus Richtungsänderung und durchlaufenem Kurvenstück. Die Richtungsänderung ist ein Winkel. Ein Winkel ist mathematisch positiv, wenn er gegen den Uhrzeigersinn läuft. Um eine Richtungsänderung gegen den Uhrzeigersinn zu erreichen, ist eine Linkskurve notwendig.

6.4.5 Beispiel: Klotoide

Eine *Klotoide* ist eine Kurve, bei der die *Krümmung linear mit der durchlaufenen Bogenlänge* s zunimmt. Für sie gilt daher

$$K = \frac{1}{r} = \frac{s}{a^2}, \quad \text{d. h.} \quad r = \frac{a^2}{s} \quad (6.36)$$

mit einer Konstanten $a > 0$; die Proportionalitätskonstante zwischen K und der Bogenlänge s hat also bei dieser Festlegung den Wert $1/a^2$. Gibt man einen Anfangspunkt und eine Anfangsrichtung vor, so ist die Klotoid durch die Bedingung (6.36) bereits eindeutig bestimmt. Soll sie mit der Steigung null durch den Punkt $(0, 0)$ gehen, so wird sie gegeben durch $\mathbf{x} = (x, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} x(t) &= a\sqrt{\pi} \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \\ y(t) &= a\sqrt{\pi} \int_0^t \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Lesehilfe

Die Parameterdarstellung der Klotoid fällt hier vom Himmel. Wir werden uns aber im Folgenden davon überzeugen können, dass tatsächlich gerade diese Kurve die spezielle Eigenschaft der Klotoid besitzt.

Diese Gleichungen der Klotoid sind insofern etwas unhandlich, als dass die darin auftretenden Integrale nicht elementar lösbar sind. Sie müssen vielmehr numerisch berechnet werden und die Klotoid kann dann punktweise gezeichnet werden: Es ergibt sich eine „spiralförmige“, punktsymmetrische Kurve, die für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen die beiden asymptotischen Punkte $(a\sqrt{\pi}/2, a\sqrt{\pi}/2)$ bzw. $(-a\sqrt{\pi}/2, -a\sqrt{\pi}/2)$ läuft, siehe Abb. 6.9.

Lesehilfe

Es ist nicht überraschend, dass die Integrale der Klotoidendarstellung nicht elementar lösbar sind. Wir wissen aus der Euler-Formel, dass Cosinus und Sinus mit der Exponentialfunktion verwandt sind. Nun ist $\exp(x^2)$ nicht elementar integrierbar und $\cos(x^2)$ oder $\sin(x^2)$ sind es ebenso wenig.

Wir wollen nun nachweisen, dass die durch (6.37) definierte Kurve tatsächlich die geforderte Eigenschaft (6.36) erfüllt:

Wir berechnen zunächst die **Länge** der Kurve zwischen den Parameterwerten 0 und t :

$$s = s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{x}}(u)| du = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(u) + \dot{y}^2(u)} du. \quad (6.38)$$

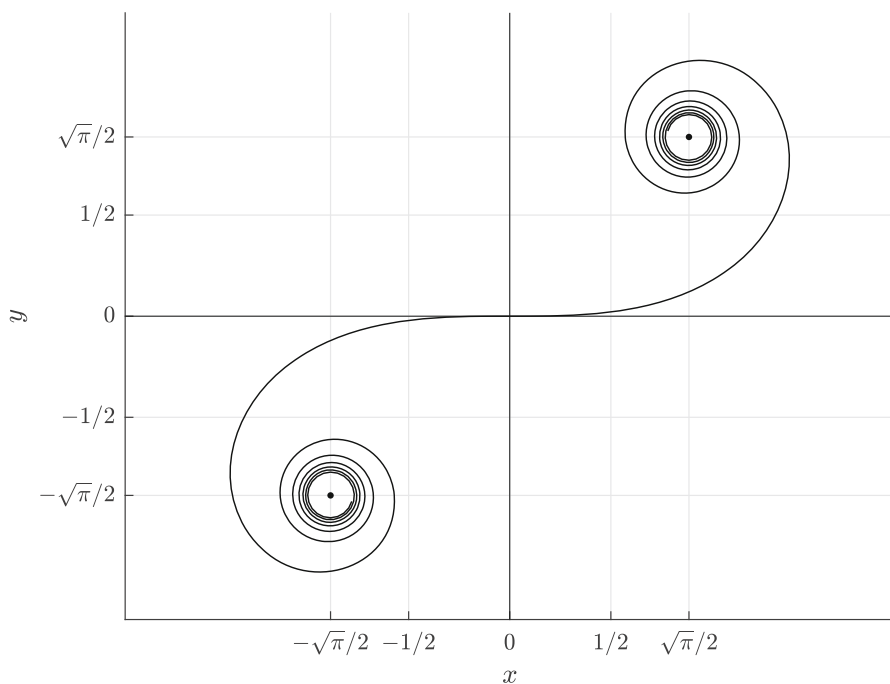


Abb. 6.9 Eine Klothoide ist eine Kurve, bei der die Krümmung mit der Länge der Kurve linear zunimmt. Dargestellt ist die Klothoide (6.37), die mit der Steigung 0 durch den Ursprung des Koordinatensystems läuft. Bezeichnet man die von hier aus gemessene Kurvenlänge mit s , so besitzt die Krümmung an einer Stelle s den Wert $K = s$ (es ist also $a = 1$ gewählt, siehe (6.36)). Die Klothoide läuft damit gegen die asymptotischen Punkte $(\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/2)$ und $(-\sqrt{\pi}/2, -\sqrt{\pi}/2)$

Wie sich sofort aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung und der Definition der Stammfunktion ergibt, ist darin

$$\dot{x}(u) = a\sqrt{\pi} \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right), \quad \dot{y}(u) = a\sqrt{\pi} \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right), \quad (6.39)$$

sodass wir erhalten:

$$s(t) = a\sqrt{\pi} \int_0^t \underbrace{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi u^2}{2}\right)}}_{=1} du = a\sqrt{\pi} t. \quad (6.40)$$

Die Länge des bis zum Parameterwert t durchlaufenen Bogens ist also gleich $a\sqrt{\pi} t$.

Lesehilfe

So unschön die Form (6.37) der Klotoiden auch erscheinen mag, lässt sich ihre Länge doch einfach berechnen: Man benötigt die Ableitungen der Komponenten und die Ableitung eines Integrals ist dessen Integrand :-)

Wir verwenden nun Formel (6.30), um die **Krümmung** $K(t)$ beim Parameterwert t zu berechnen. Dazu benötigen wir neben $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$, siehe (6.39), noch die zweiten Ableitungen:

$$\ddot{x}(t) = -a\pi\sqrt{\pi}t \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right), \quad \ddot{y}(t) = a\pi\sqrt{\pi}t \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right). \quad (6.41)$$

Einsetzen in (6.30) ergibt

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{[\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)]^{3/2}} \\ &= \frac{a^2\pi^2 t \cos^2\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) + a^2\pi^2 t \sin^2\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)}{\left[a^2\pi \cos^2\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) + a^2\pi \sin^2\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)\right]^{3/2}} = \frac{a^2\pi^2 t}{(a^2\pi)^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} t. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Die Krümmung beim Parameterwert t ist also gleich $\sqrt{\pi} t/a$.

Bilden wir schließlich das Verhältnis von Krümmung und durchlaufener Bogenlänge, so ergibt sich

$$\frac{K(t)}{s(t)} = \frac{\sqrt{\pi} t/a}{a\sqrt{\pi} t} = \frac{1}{a^2}, \quad (6.43)$$

in Übereinstimmung mit der Klotoidenbedingung (6.36).

Eine **praktische Anwendung** eines Klotoidenbogens findet sich im Straßen- und Gleisbau. Hier wird der Übergang von einem geraden Streckenstück in eine Kurve mit einem gegebenen Krümmungsradius nach Möglichkeit gemäß einer Klotoiden gestaltet. Auf diese Weise wird erreicht, dass die Krümmung nicht sprunghaft von 0 auf den Kurvenwert ansteigt, sondern sich im Übergangsbereich linear erhöht. So wird ein Seitenruck des Fahrzeugs (und der Passagiere) vermieden, da die Seitenbeschleunigung kontinuierlich auf den letztendlichen Kurvenwert angehoben wird.

6.5 Partielle Ableitungen

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit reellwertigen Funktionen, die von mehreren Variablen abhängen. Wir haben es also mit Ausdrücken der Form $f = f(x_1, \dots, x_n)$ zu tun. Fragt man nach der „Ableitung“ einer solchen Funktion, so

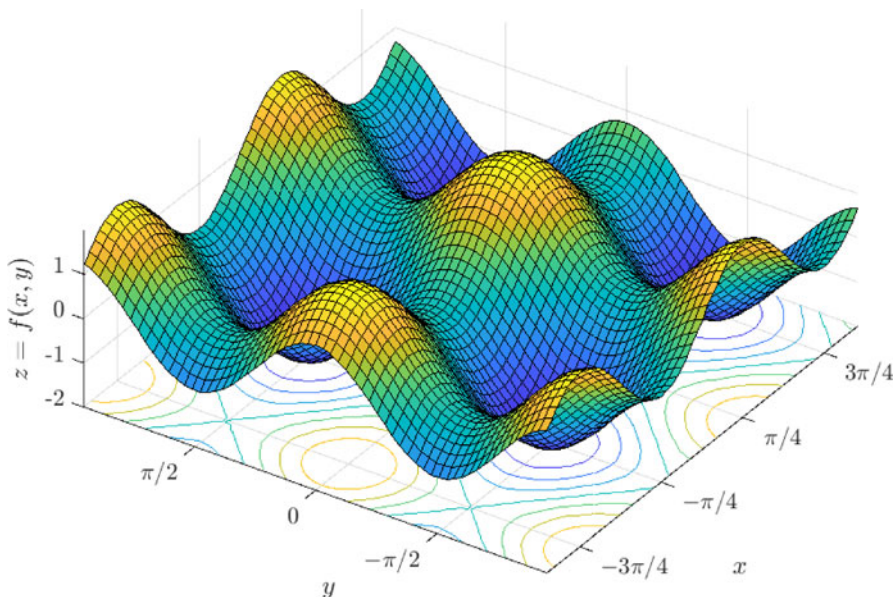


Abb. 6.10 Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ kann man sich als dreidimensionale Fläche vorstellen, die ein „Gebirge“ darstellt. Hier ist als Beispiel $f(x, y) = \sin(2x) + \cos(2y)$ gewählt. Höhenlinien geben die Orte gleicher Höhe an. Sie sind Teil der Menge U und können parallel zur xy -Ebene dargestellt werden

muss man angeben, hinsichtlich welcher Variablen bzw. in welche Richtung diese Ableitung erfolgen soll.

Wir betrachten also Abbildungen von Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nach \mathbb{R} :

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n).$$

Der Graph von f ist die Menge

$$\Gamma_f := \{(\mathbf{x}, y) \in U \times \mathbb{R} \mid y = f(\mathbf{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}. \quad (6.44)$$

Für $n = 2$ ist der Graph von f eine Fläche im dreidimensionalen Raum, siehe Abb. 6.10.

Lesehilfe

Eine „zweidimensionale Funktion“ $f = f(x_1, x_2)$ ordnet einem Punkt (x_1, x_2) der Ebene einen Funktionswert f zu, der als „Höhe“ über dem Koordinatenpunkt dargestellt werden kann. Den Graphen kannst du dir somit als „Gebirge“ vorstellen :-)

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ kann auch beschrieben werden durch die Schar ihrer Niveaumengen $N_f(c)$, $c \in \mathbb{R}$: Die Menge

$$N_f(c) := \{\mathbf{x} \in U \mid f(\mathbf{x}) = c\} \quad (6.45)$$

ist die Menge aller Punkte, in denen f den Wert c annimmt. Für $n = 2$ können die Niveaumengen *Höhenlinien* entsprechen, siehe Abb. 6.10. Aber natürlich können die Niveaumengen auch Flächen sein oder einzelne Punkte oder eine Kombination aus all dem.

Wir kommen nun zum Begriff der *partiellen Ableitung*:

Definition 6.12 Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Funktion f heißt in $\mathbf{x} \in U$ partiell differenzierbar bzgl. der i -ten Koordinatenrichtung, falls der Grenzwert

$$\partial_i f(\mathbf{x}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h}$$

existiert. Dabei ist \mathbf{e}_i , $i = 1, \dots, n$, der i -te kanonische Einheitsvektor und man hat sich auf solche $h \neq 0$ zu beschränken, für die gilt $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i \in U$.

Die partiellen Ableitungen kann man als gewöhnliche Ableitungen von Funktionen einer Veränderlichen interpretieren: Sei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$ vorgegeben. Für $i = 1, \dots, n$ betrachten wir die Funktionen

$$\tilde{x} \mapsto f_i(\tilde{x}) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, \tilde{x}, x_{i+1}, \dots, x_n);$$

es ist also hier nur das i -te Argument von f variabel und die anderen fest. Die Graphen dieser Funktionen f_i erhält man als Schnitte durch den Graphen von f in der jeweiligen Koordinatenrichtung, siehe Abb. 6.11.

Lesehilfe

Mit den Funktionen $\tilde{x} \mapsto f_i(\tilde{x}) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, \tilde{x}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ bewegt man sich mit der Variable \tilde{x} nur längs der i -ten Koordinate und dies entspricht dem Schnitt durch den Gesamtgraphen von f längs der i -ten Koordinatenrichtung. Die Stelle \mathbf{x} , die betrachtet wird, gibt den Wert der übrigen $n - 1$ Koordinaten vor. Die n Schnitte laufen somit allesamt durch den Punkt $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ auf dem Graphen von f .

Aufgrund der Definition der partiellen Ableitung gilt nun

$$\partial_i f(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x_i + h) - f_i(x_i)}{h} = f'_i(x_i). \quad (6.46)$$

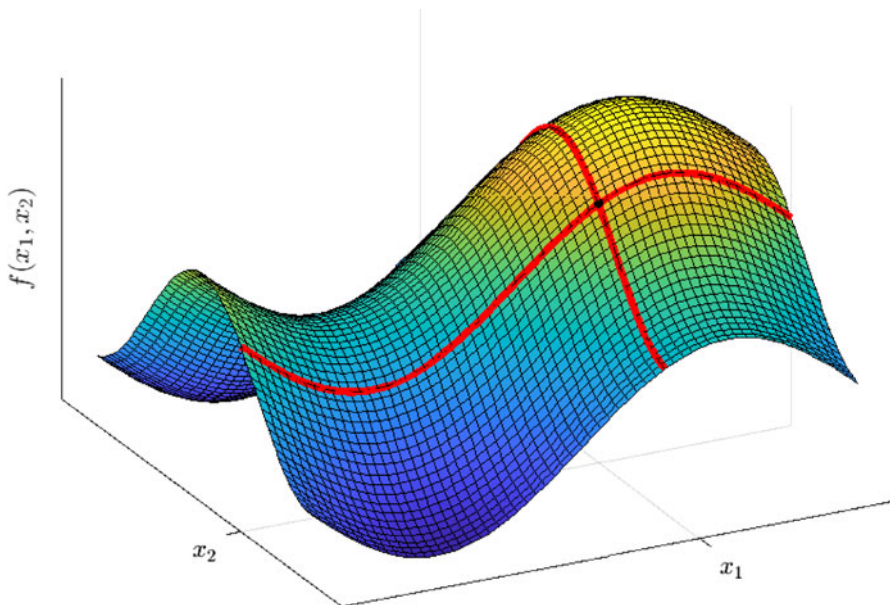


Abb. 6.11 Die partielle Ableitung ∂_i einer Funktion f entspricht der Steigung von f längs der i -ten Koordinatenrichtung

Die partielle Ableitung bzgl. der i -ten Koordinatenrichtung ist also nichts anderes als die gewöhnliche Ableitung bzgl. der i -ten Variablen, wobei die übrigen $n - 1$ Veränderlichen wie Konstante behandelt werden. Man schreibt daher die partiellen Ableitungen oft auch in folgender Form:

$$\partial_i f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Insbesondere bei Funktionen $f = f(x, y, z, t)$ ist auch die besonders kurze Schreibweise

$$\partial_x f = f_x, \quad \partial_y f = f_y, \quad \partial_z f = f_z, \quad \partial_t f = f_t$$

gebräuchlich.

Definition 6.13 Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt partiell differenzierbar, falls die partiellen Ableitungen $\partial_i f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in U$ und $i = 1, \dots, n$ existieren. Sie heißt stetig partiell differenzierbar, falls zusätzlich alle partiellen Ableitungen $\partial_i f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.

Bei Funktionen *einer* Veränderlichen folgt aus der Differenzierbarkeit die Stetigkeit. Aus der partiellen Differenzierbarkeit einer Funktion mehrerer Veränderlicher

folgt nur die Stetigkeit in Richtung der Koordinatenachsen und *nicht* die vollständige Stetigkeit der Funktion.

Lesehilfe

Tatsächlich sind Funktionen mehrerer Veränderlicher auch hinsichtlich ihrer Eigenschaften komplizierter als Funktionen, die nur von einer Variablen abhängen. Das ist aber nicht sonderlich überraschend – es sind eben mehrere Variable ;-)

Beispiele

(1) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 3x^2 - 2xy + 6y \sin z,$$

wobei wir statt x_1, x_2, x_3 hier x, y, z schreiben, was bei drei (oder zwei) Veränderlichen manchmal praktischer ist. Die Funktion ist als Komposition stetiger Funktionen selbst stetig. Ihre partiellen Ableitungen lauten

$$\partial_x f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) = 6x - 2y$$

$$\partial_y f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) = -2x + 6 \sin z$$

$$\partial_z f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}) = 6y \cos z.$$

Auch die partiellen Ableitungen sind offenbar stetig. Die Funktion ist daher stetig partiell differenzierbar.

(2) Der euklidische Abstand eines Punkts $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vom Ursprung wird gegeben durch die Funktion $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$r(\mathbf{x}) := |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \quad (6.47)$$

Die Niveaumengen dieser Funktion, $N_r(c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid r(\mathbf{x}) = c\}$, sind für $c > 0$ die Oberflächen n -dimensionaler Kugeln mit Radius c .

Die Funktion ist in $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ partiell differenzierbar. Da die partielle Ableitung der gewöhnlichen Ableitung hinsichtlich der i -ten Variablen entspricht, ergibt sich aufgrund der Kettenregel für Funktionen einer Veränderlichen:

$$\partial_i r(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{r(\mathbf{x})}. \quad (6.48)$$

Es sei nun $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige differenzierbare Funktion. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $\mathbf{x} \mapsto f(r) = f(r(\mathbf{x}))$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ definiert und partiell differenzierbar. Es handelt sich dabei also um eine Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, die nur vom Abstand r des Punkts \mathbf{x} vom Ursprung abhängt. Die Ableitung einer solchen Funktion ergibt sich mithilfe der Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(r(\mathbf{x})) = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} \stackrel{(6.48)}{=} f'(r) \frac{x_i}{r}. \quad (6.49)$$

6.5.1 Gradient

Die partiellen Ableitungen einer Funktion können zu einem Vektor zusammengefasst werden:

Definition 6.14 Die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei partiell differenzierbar. Der Vektor

$$\nabla f(\mathbf{x}) := (\partial_1 f(\mathbf{x}), \dots, \partial_n f(\mathbf{x}))$$

heißt der Gradient von f in $\mathbf{x} \in U$.

Wir verwenden hier den *Nabla-Operator*

$$\nabla := (\partial_1, \dots, \partial_n), \quad (6.50)$$

bei dem es sich um einen „vektoriellen Differenzialoperator“ handelt. Ohne Verwendung von ∇ wird der Gradient von f oft auch geschrieben als $\text{grad } f$,

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}). \quad (6.51)$$

Lesehilfe

Der Ausdruck ∇f wird als „Nabla f“ ausgesprochen.

Beispiele

(1) Für die Funktion $\mathbf{x} \mapsto r(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$, siehe (6.47), gilt

$$\nabla r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r}. \quad (6.52)$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus (6.48). Der Vektor \mathbf{x}/r ist übrigens nichts anderes als der Einheitsvektor in Richtung von \mathbf{x} .

Analog gilt für eine beliebige Funktion $\mathbf{x} \mapsto f(r(\mathbf{x}))$, siehe (6.49),

$$\nabla f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{x}}{r}. \quad (6.53)$$

(2) Die gewöhnlichen Ableitungsregeln gelten auch für partielle Ableitungen und damit auch für den Gradienten. So gilt für zwei partiell differenzierbare Funktionen f, g

$$\partial_i(fg) = (\partial_i f)g + f(\partial_i g)$$

und damit

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g). \quad (6.54)$$

6.5.2 Beispiel: Kraft im Zentralfeld

Lesehilfe

Dieses Beispiel enthält viel Physik. Die eigentliche Rechenaufgabe ist in (6.56) enthalten und wir haben sie eigentlich schon gelöst. Sofern Physik und Potenzialtheorie für dich keine Rolle spielen, kannst du dieses Beispiel daher einfach überspringen ;-)

Bei der Gravitation handelt es sich um eine Zentralkraft. Solche Kräfte lassen sich durch ein *Potenzial* V beschreiben, das nur vom Abstand r vom Kraftzentrum abhängt. Befindet sich ein Körper mit der Masse M im Zentrum eines Koordinatensystems, so wird sein Gravitationspotenzial gegeben durch

$$V(x, y, z) = V(r) = -\frac{GM}{r}. \quad (6.55)$$

Darin steht G für die Gravitationskonstante. Da nur Potenzialdifferenzen physikalisch messbar sind, kann das Potenzial beliebig „normiert“ werden. Bei der Festlegung gemäß (6.55) besitzt ein Punkt im Unendlichen das Potenzial 0: Er ist dort „frei“, d. h. nicht unter dem Einfluss des Gravitationsfelds.

Die *Äquipotenzialflächen* entsprechen den Niveaumengen der Funktion $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Bei ihnen handelt es sich um Kugeloberflächen mit Mittelpunkt im Ursprung.

Das Gravitationspotenzial führt zu einer *Gravitationsbeschleunigung* \mathbf{g} ; man könnte hier von der „Feldstärke“ des Gravitationsfelds sprechen. Sie ergibt sich aus dem Potenzial nach der Formel

$$\mathbf{g} = -\nabla V. \quad (6.56)$$

Es ist also

$$\mathbf{g} = GM \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \stackrel{(6.53)}{=} -\frac{GM}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r}. \quad (6.57)$$

Der Vektor \mathbf{x}/r ist ein Einheitsvektor, der radial nach außen zeigt; $-\mathbf{x}/r$ ist also auf das Kraftzentrum hin gerichtet. Dies bedeutet: *Die Gravitationsbeschleunigung besitzt den Betrag GM/r^2 und ist stets auf das Kraftzentrum hin gerichtet.*

Die Gravitationskraft, die auf eine Masse m im Punkt $\mathbf{x} = (x, y, z)$ im Abstand r vom Zentrum ausgeübt wird, ergibt durch Multiplikation mit m :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = m\mathbf{g} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r}. \quad (6.58)$$

Der Betrag dieser Kraft ist

$$F = G \frac{mM}{r^2}.$$

Dies ist das berühmte *Newton-Gravitationsgesetz*, das die Kraft angibt, mit der sich zwei Punktmassen m und M im Abstand r voneinander gegenseitig anziehen.

6.5.3 Höhere Ableitungen

Ähnlich wie bei gewöhnlichen Ableitungen lassen sich natürlich auch partielle Ableitungen mehrfach nacheinander ausführen:

Sind bei einer partiell differenzierbaren Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ alle partiellen Ableitungen $\partial_i f : U \rightarrow \mathbb{R}$ selbst wieder partiell differenzierbar, so heißt f *zweimal partiell differenzierbar*, und man kann die *partiellen Ableitungen zweiter Ordnung* $\partial_j \partial_i f := \partial_j(\partial_i f)$ mit $i, j = 1, \dots, n$ bilden. Durch Wiederholung dieses Vorgangs definiert man *partielle Ableitungen k -ter Ordnung* $\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f$. Die Schreibweise ist dabei grundsätzlich so zu verstehen, dass die Ableitungen von hinten nach vorne durchzuführen sind: Es ist also zunächst nach x_{i_1} abzuleiten, das Ergebnis nach x_{i_2} usw.

Folgende Schreibweisen sind üblich:

$$\partial_j \partial_i f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \partial_i \partial_i f = \partial_i^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}$$

und für Funktionen $f = f(x, y, z, t)$ auch

$$\partial_x \partial_y f = (f_y)_x = f_{yx}, \quad \partial_t^2 f = f_{tt} \quad \text{usw.}$$

Lesehilfe

Bei Funktionen mit n Variablen gibt es also „viele“ zweite Ableitungen, eben n^2 , wie du dir leicht überlegst. Für $n = 3$ haben wir z.B. die neun zweiten Ableitungen

$$\partial_1 \partial_1 f, \partial_2 \partial_1 f, \partial_3 \partial_1 f, \partial_1 \partial_2 f, \partial_2 \partial_2 f, \partial_3 \partial_2 f, \partial_1 \partial_3 f, \partial_2 \partial_3 f, \partial_3 \partial_3 f.$$

Dritte Ableitungen gibt es dann schon n^3 usw.

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt k -mal stetig partiell differenzierbar, wenn sie k -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig sind.

Die Reihenfolge partieller Ableitungen spielt in der Regel keine Rolle, wie der folgende Satz von Schwarz⁴ besagt:

Satz 6.6 Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $\mathbf{x} \in U$ und alle $i, j = 1, \dots, n$

$$\partial_j \partial_i f(\mathbf{x}) = \partial_i \partial_j f(\mathbf{x}),$$

d. h., die Reihenfolge der partiellen Ableitungen kann vertauscht werden.

Beweis Der Beweis dieses Satzes ist recht aufwendig und wird nicht ausgeführt. ◦

Die meisten Funktionen, mit denen wir es zu tun haben, sind unendlich oft stetig partiell differenzierbar. Die Reihenfolge partieller Ableitungen ist dann ohne Bedeutung.

- **Zwischenfrage (8)** Wie viele verschiedene zweite Ableitungen müssen bei einer zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktion mit n Variablen gebildet werden, damit die zweiten partiellen Ableitungen vollständig vorliegen?

Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 3x^2 - 2xy + 6y \sin(3z). \quad (6.59)$$

Die Funktion ist beliebig oft stetig partiell differenzierbar. Es ist:

$$\begin{aligned} \partial_x f(\mathbf{x}) &= 6x - 2y, \\ \partial_x \partial_x f(\mathbf{x}) &= \partial_x (\partial_x f(\mathbf{x})) = 6, & \partial_y \partial_x f(\mathbf{x}) &= -2, & \partial_z \partial_x f(\mathbf{x}) &= 0, \\ \partial_y f(\mathbf{x}) &= -2x + 6 \sin(3z), \\ \partial_x \partial_y f(\mathbf{x}) &= -2, & \partial_y \partial_y f(\mathbf{x}) &= 0, & \partial_z \partial_y f(\mathbf{x}) &= 18 \cos(3z), \\ \partial_z f(\mathbf{x}) &= 18y \cos(3z), \\ \partial_x \partial_z f(\mathbf{x}) &= 0, & \partial_y \partial_z f(\mathbf{x}) &= 18 \cos(3z), & \partial_z \partial_z f(\mathbf{x}) &= -54y \sin(3z). \end{aligned}$$

6.5.4 Hesse-Matrix

Die zweiten Ableitungen $\partial_i \partial_j f$ einer Funktion f werden zweckmäßigerweise zu einer Matrix zusammengefasst:

⁴ Benannt nach dem deutschen Mathematiker Hermann Amandus Schwarz, 1843–1921.

Definition 6.15 Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Unter der Hesse-Matrix von f in $\mathbf{x} \in U$ versteht man die $n \times n$ -Matrix

$$H_f(\mathbf{x}) := \left(\partial_i \partial_j f(\mathbf{x}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Aufgrund des Satzes von Schwarz gilt dabei $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$, sodass die Hesse-Matrix grundsätzlich *symmetrisch* ist,

$$H_f = H_f^T. \quad (6.60)$$

Lesehilfe

Zur Erinnerung: Für eine Matrix A steht A^T für die transponierte Matrix. Transposition bedeutet, dass die Zeilen der alten Matrix A die Spalten der neuen Matrix A^T bilden. Für quadratische Matrizen ist dies gleichbedeutend damit, dass die Matrixelemente an der Hauptdiagonale gespiegelt werden. Und die Gleichung $A = A^T$ bedeutet dann, dass die Matrixelemente oberhalb und unterhalb ihrer Hauptdiagonale gleich sind, die Matrix also „symmetrisch“ zur Hauptdiagonale ist.

Für $U \subseteq \mathbb{R}^2$ lautet die Hesse-Matrix beispielsweise

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(\mathbf{x}) & \partial_1 \partial_2 f(\mathbf{x}) \\ \partial_2 \partial_1 f(\mathbf{x}) & \partial_2^2 f(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (6.61)$$

Im Allgemeinen hängt die Hesse-Matrix einer Funktion f vom Argument \mathbf{x} ab.

Beispiel

Die Hesse-Matrix der Funktion (6.59) des obigen Beispiels lautet

$$H_f(\mathbf{x}) = H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 18 \cos(3z) \\ 0 & 18 \cos(3z) & -54y \sin(3z) \end{pmatrix}.$$

Sie hängt von \mathbf{x} ab. An einer gegebenen Stelle \mathbf{x} ist es nur noch eine „Zahlenmatrix“. So ist etwa für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$H_f(\mathbf{0}) = H_f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **Antwort auf Zwischenfrage (8)** Gefragt war nach der Anzahl der unterschiedlichen zweiten Ableitungen einer zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktion mit n Variablen.

Zunächst gibt es n^2 zweite Ableitungen $\partial_i \partial_j f$. Da die Voraussetzungen des Satzes von Schwarz erfüllt sind, sind die Ableitungen aber teilweise gleich, so ist etwa $\partial_1 \partial_2 f = \partial_2 \partial_1 f$. Um die Anzahl der verschiedenen Ableitungen anzugeben, wollen wir die zweiten Ableitungen als Elemente einer $n \times n$ -Matrix $(\partial_i \partial_j f)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ auffassen. Aufgrund des Satzes von Schwarz ist diese Matrix nun symmetrisch unter Spiegelung an der Hauptdiagonalen: „Das untere Dreieck ergibt sich aus dem oberen Dreieck.“ Wir benötigen also die Anzahl der Hauptdiagonalelemente und des oberen Dreiecks: Sie ist zeilenweise betrachtet offenbar gleich $n + (n - 1) + \dots + 1$. Die gesuchte Anzahl der unterschiedlichen zweiten Ableitungen ist also $\sum_{k=1}^n k$. Der Wert dieser Summe ist bekanntlich gleich $n(n + 1)/2$. Für $n = 3$ haben wir also sechs Ableitungen zu bilden, für $n = 4$ sind es zehn usw.

Laplace-Operator*

Der Laplace-Operator spielt in der Physik eine große Rolle: Für zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ setzt man

$$\Delta f := \nabla \cdot \nabla f = \partial_1^2 f + \dots + \partial_n^2 f \quad (6.62)$$

und nennt

$$\Delta := \nabla \cdot \nabla = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2 \quad (6.63)$$

den *Laplace-Operator*. Die Gleichung

$$\Delta f = 0 \quad (6.64)$$

heißt *Potenzialgleichung* oder *Laplace-Gleichung*. Bei ihr handelt es sich um eine partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung. Potenziale wie das Gravitationspotenzial in (6.55) erfüllen diese Gleichung.

6.6 Totale Differenzierbarkeit

Bei Funktionen, die von mehreren reellen Variablen abhängen, muss man zwischen verschiedenen Arten der „Differenzierbarkeit“ unterscheiden. Den Begriff der partiellen Differenzierbarkeit haben wir bereits kennengelernt: Sie erlaubt lediglich die lokale Approximierbarkeit auf Geraden in den Koordinatenachsrichtungen. Ist die Funktion aber darüber hinaus lokal vollständig linear approximierbar, so nennt man sie *total differenzierbar*:

Definition 6.16 Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Funktion f heißt in $\mathbf{x} \in U$ total differenzierbar oder linear approximierbar, falls es einen Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass in einer Umgebung von \mathbf{x} gilt

$$f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{a} \cdot \Delta\mathbf{x} + \varphi(\Delta\mathbf{x}).$$

Dabei ist φ eine in einer Umgebung von $\mathbf{0}$ definierte reelle Funktion mit

$$\lim_{\Delta\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\varphi(\Delta\mathbf{x})}{|\Delta\mathbf{x}|} = 0.$$

Lineare Approximierbarkeit bedeutet also, dass die Funktion f in der Nähe von \mathbf{x} durch ihre „Tangente“ approximiert werden kann,

$$f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) + \mathbf{a} \cdot \Delta\mathbf{x} = f(\mathbf{x}) + a_1 \Delta x_1 + \dots + a_n \Delta x_n, \quad (6.65)$$

wobei die Tangente jetzt eine Tangentialebene ist. Der Fehler $\varphi(\Delta\mathbf{x})$, der hierbei gemacht wird, ist „klein“ im Sinn von $\lim_{\Delta\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \varphi(\Delta\mathbf{x})/|\Delta\mathbf{x}| = 0$. Unter Verwendung des Landau-Symbols o („klein o “) drückt man dies auch aus durch die symbolische Schreibweise

$$\varphi(\Delta\mathbf{x}) = o(|\Delta\mathbf{x}|). \quad (6.66)$$

Es ist also

$$f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{a} \cdot \Delta\mathbf{x} + o(|\Delta\mathbf{x}|). \quad (6.67)$$

Wir werden nun sehen, dass der Vektor \mathbf{a} bei der linearen Approximation dem Gradienten entspricht:

Satz 6.7 Die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei in $\mathbf{x} \in U$ total differenzierbar, d. h., es gelte in einer Umgebung von \mathbf{x}

$$f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{a} \cdot \Delta\mathbf{x} + \varphi(\Delta\mathbf{x})$$

mit einem Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ und $\varphi(\Delta\mathbf{x}) = o(|\Delta\mathbf{x}|)$. Dann ist f in \mathbf{x} stetig. Außerdem ist f in \mathbf{x} partiell differenzierbar und es ist $\mathbf{a} = \nabla f(\mathbf{x})$.

Beweis Zunächst zur Stetigkeit: Aus $\lim_{\Delta\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} (\mathbf{a} \cdot \Delta\mathbf{x}) = 0$ und $\lim_{\Delta\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \varphi(\Delta\mathbf{x}) = 0$ folgt

$$\lim_{\Delta\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \lim_{\Delta\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} (f(\mathbf{x}) + \mathbf{a} \cdot \Delta\mathbf{x} + \varphi(\Delta\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}).$$

Es ist $f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{a} \cdot \Delta\mathbf{x} + \varphi(\Delta\mathbf{x})$ für beliebige $\Delta\mathbf{x}$. Also gilt auch

$$f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{a} \cdot h\mathbf{e}_i + \varphi(h\mathbf{e}_i) = f(\mathbf{x}) + ha_i + \varphi(h\mathbf{e}_i).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\partial_i f(\mathbf{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ha_i + \varphi(h\mathbf{e}_i)}{h} = a_i + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h\mathbf{e}_i)}{h}}_{=0} = a_i,\end{aligned}$$

also $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$. •

Lesehilfe zum Beweis

Es ist offenbar $\lim_{\Delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} (\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{x}) = 0$, weil \mathbf{a} konstant ist. Die Bedingung $\varphi(\Delta \mathbf{x}) = o(|\Delta \mathbf{x}|)$ ist gleichbedeutend mit $\lim_{\Delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \varphi(\Delta \mathbf{x})/|\Delta \mathbf{x}| = 0$ und damit ist erst recht $\lim_{\Delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \varphi(\Delta \mathbf{x}) = 0$. Und wie du siehst, folgt die partielle Differenzierbarkeit ebenso praktisch unmittelbar aus der totalen Differenzierbarkeit.

Ohne Beweis halten wir fest, dass aus der *stetigen* partiellen Differenzierbarkeit die totale Differenzierbarkeit folgt. Zusammen mit dem obigen Satz ergeben sich insgesamt die folgenden Implikationen:

$$\begin{array}{ccccc}\text{stetig partiell diff''bar} & \Rightarrow & \text{total diff''bar} & \Rightarrow & \text{partiell diff''bar} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \text{stetig.} & & \end{array}$$

6.6.1 Näherung einer Funktion

Wir haben gesehen, dass sich eine in \mathbf{x} total differenzierbare Funktion f in der Umgebung von \mathbf{x} linear approximieren lässt:

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) &\approx f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \Delta \mathbf{x} \\ &= f(\mathbf{x}) + \partial_1 f(\mathbf{x}) \Delta x_1 + \dots + \partial_n f(\mathbf{x}) \Delta x_n.\end{aligned} \quad (6.68)$$

Es wird f somit angenähert durch die Werte auf der Tangentialebene an f im Punkt \mathbf{x} , siehe Abb. 6.12. Über die „Güte“ dieser Näherung können wir dabei keine weitergehende Aussage treffen. Im Allgemeinen wird man aber zumindest davon ausgehen können, dass die Näherung umso besser wird, je näher man sich am Entwicklungspunkt \mathbf{x} befindet, je kleiner also $|\Delta \mathbf{x}|$ ist.

Die lineare Näherung lässt sich alternativ auch in folgender Form schreiben: Mit $\mathbf{z} := \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$ ist $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$, es gilt also für Werte \mathbf{z} in der Nähe von \mathbf{x} :

$$\begin{aligned}f(\mathbf{z}) &\approx f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{x}) + \partial_1 f(\mathbf{x})(z_1 - x_1) + \dots + \partial_n f(\mathbf{x})(z_n - x_n).\end{aligned} \quad (6.69)$$

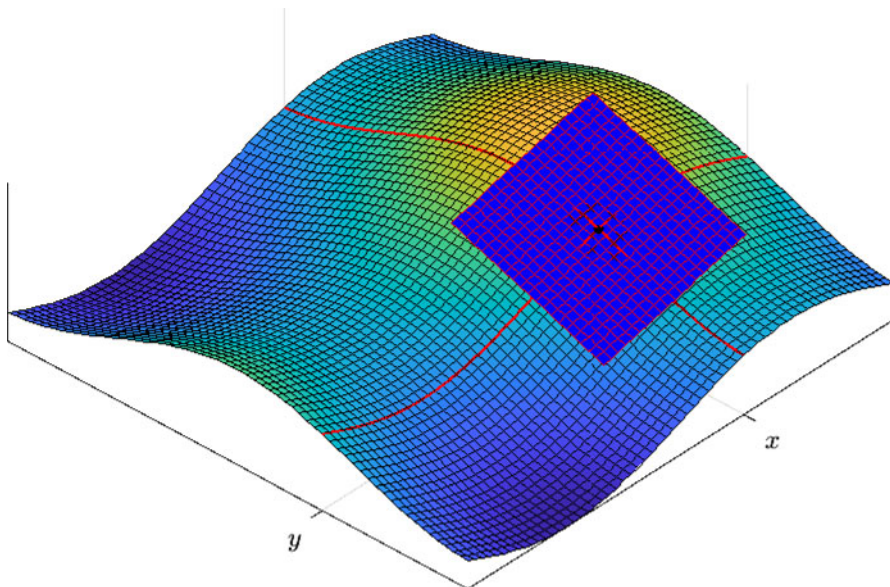


Abb. 6.12 Die lineare Näherung einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, im Punkt $\mathbf{x} = (x, y) \in U$ entspricht der Tangentialebene an die Funktion f in diesem Punkt. Statt der tatsächlichen Funktionswerte betrachtet man also die Werte dieser Ebene. In der Nähe des Entwicklungspunkts \mathbf{x} führt dies zu guten Näherungswerten; sie werden i. Allg. schlechter, wenn man sich weiter vom Entwicklungspunkt entfernt

Lesehilfe

Beachte die Ähnlichkeit der linearen Näherung mit der Gleichung der Tangente einer gewöhnlichen Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in I$: $t(z) = f(x) + f'(x)(z - x)$. Natürlich ist das nicht überraschend: Dieser Fall ist mit $n = 1$ in der hier angegebenen allgemeinen Form der linearen Näherung enthalten.

Für $n = 2$ lautet die Gleichung der Tangente

$$t(z_1, z_2) = f(x_1, x_2) + \underbrace{\partial_1 f(x_1, x_2)}_{m_1} (z_1 - x_1) + \underbrace{\partial_2 f(x_1, x_2)}_{m_2} (z_2 - x_2).$$

Tragen wir den Wert $t(z_1, z_2)$ als Höhe z_3 über der $z_1 z_2$ -Ebene auf, so haben wir eine Gleichung

$$z_3 - m_1 z_1 - m_2 z_2 = f(x_1, x_2) - m_1 x_1 - m_2 x_2 = \text{const.}$$

und damit eine Ebenengleichung der Form $n_1 z_1 + n_2 z_2 + n_3 z_3 = c$. Wir haben es also mit einer Tangentialebene im dreidimensionalen Raum zu tun, die natürlich den Punkt $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ enthält.

Für $n = 3, 4, \dots$ hat man höherdimensionale Tangentialebenen – man kann auch von „Hyperebenen“ sprechen –, die man sich allerdings nicht mehr geometrisch vorstellen kann. Das Rechnen mit ihnen erfolgt aber genauso wie für $n = 2$:-)

Quadratische Näherung*

Mithilfe der Hesse-Matrix kann die über die lineare Approximation der Funktion f hinausgehende „quadratische“ Näherung angegeben werden: Sie entspricht dem nächsten Glied in der Taylor-Entwicklung für Funktionen mehrerer Veränderlicher. Wir geben sie ohne Beweis an:

Satz 6.8 *Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{x} \in U$. Dann gilt*

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x} \cdot H_f(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + o(|\Delta \mathbf{x}|^2).$$

Lesehilfe

Die quadratische Näherung sieht genauso aus wie die entsprechende Taylor-Entwicklung für eine gewöhnliche Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ einer Veränderlichen um den Punkt $x \in I$, wenn man sie etwas komisch aufschreibt:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &\approx f(x) + f'(x) \Delta x + \frac{1}{2} f''(x) (\Delta x)^2 \\ &= f(x) + f'(x) \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x f''(x) \Delta x. \end{aligned}$$

Es sind dann nur noch die Argumente und die Ableitungen durch ihre mehrdimensionalen Verallgemeinerungen zu ersetzen: Die erste Ableitung entspricht dem Gradienten und die zweite Ableitung der Hesse-Matrix.

Beispiel

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - \sqrt{x_1x_2}.$$

Sie soll in der Nähe des Punkts $\mathbf{x} = (1, 4)$ linear approximiert werden. Es ist $f(\mathbf{x}) = f(1, 4) = 9$. Des Weiteren haben wir

$$\partial_1 f = 6x_1 + 2x_2 - \frac{x_2}{2\sqrt{x_1x_2}}, \quad \partial_2 f = 2x_1 - \frac{x_1}{2\sqrt{x_1x_2}}$$

und damit

$$\partial_1 f(\mathbf{x}) = 13, \quad \partial_2 f(\mathbf{x}) = \frac{7}{4}.$$

Für Werte \mathbf{z} in der Nähe von $\mathbf{x} = (1, 4)$ gilt also

$$f(\mathbf{z}) \approx 9 + 13(z_1 - 1) + \frac{7}{4}(z_2 - 4).$$

Sehen wir uns schließlich ein Zahlenbeispiel an: Für $\mathbf{z} = (1.10, 4.05)$ ergibt die Näherung

$$f(1.10, 4.05) \approx 9 + 13 \cdot 0.10 + \frac{7}{4} \cdot 0.05 = 10.39.$$

Der exakte Wert lautet mit seinen ersten zwei Nachkommastellen $f(1.10, 4.05) = 10.43$.

6.6.2 Beispiel: Fehlerrechnung

Wir betrachten eine Funktion f , die von n Messgrößen x_1, \dots, x_n abhängt. Diese Messgrößen seien fehlerbehaftet: Statt der unbekannten wahren Werte $(x_1^0, \dots, x_n^0) = \mathbf{x}^0$ werden die Näherungswerte $(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}$ gemessen. Mithilfe der linearen Approximation haben wir

$$f(\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}) + o(|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}|),$$

und damit

$$\underbrace{f(\mathbf{x}^0) - f(\mathbf{x})}_{\Delta f} = \partial_1 f(\mathbf{x}) \underbrace{(x_1^0 - x_1)}_{\Delta x_1} + \dots + \partial_n f(\mathbf{x}) \underbrace{(x_n^0 - x_n)}_{\Delta x_n} + o(|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}|).$$

Lesehilfe

Hier wird die Funktion f um die bekannte Stelle \mathbf{x} entwickelt, damit der Gradient ausgewertet werden kann; \mathbf{x}^0 übernimmt dann die Rolle des \mathbf{z} in (6.69).

Dies bedeutet für die Beträge und unter Verwendung der Dreiecksungleichung

$$|\Delta f| = \left| \sum_{i=1}^n \partial_i f(\mathbf{x}) \Delta x_i + o(|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}|) \right| \leq \sum_{i=1}^n |\partial_i f(\mathbf{x})| |\Delta x_i| + o(|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}|).$$

Sind nun für die einzelnen Messungen der x_i Fehlerschranken $|\Delta x_i|$ bekannt, so erhält man daher als *ungefähre* obere Fehlerschranke $|\Delta f|$ der Funktionswerte:

$$|\Delta f| \leq \sum_{i=1}^n |\partial_i f(\mathbf{x})| |\Delta x_i|. \quad (6.70)$$

Lesehilfe

Man spricht hier von Fehlerfortpflanzung, da es um die Frage geht, wie sich Fehler in den Eingangsgrößen, die $|\Delta x_i|$, auf die aus ihnen berechnete Endgröße auswirken, welchen Fehler $|\Delta f|$ sie also erzeugen. Wir haben soeben eine zwar grobe, aber einfache Variante der Fehlerfortpflanzung gesehen, die sich unmittelbar aus der linearen Näherung ergibt. Du kennst aber vielleicht auch das Gauß-Fehlerfortpflanzungsgesetz. Es lautet in der obigen Notation

$$|\Delta f| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\partial_i f(\mathbf{x})|^2 |\Delta x_i|^2}$$

und ergibt eine kleinere Fehlerschranke.

6.6.3 Richtungsableitung

Mit den partiellen Ableitungen lassen sich die Steigungen einer Funktion in den Koordinatenachrichtungen ermitteln. Man kann aber auch nach der Steigung in beliebig vorgegebene Richtung fragen. Dies führt auf den allgemeinen Begriff der *Richtungsableitung*:

Definition 6.17 Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Ferner sei $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor. Unter der Richtungsableitung von f an der Stelle $\mathbf{x} \in U$ in Richtung von \mathbf{e} versteht man – sofern er existiert – den Differenzialquotienten

$$\partial_{\mathbf{e}} f(\mathbf{x}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

Für $\mathbf{e} = \mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n$, entspricht $\partial_{\mathbf{e}} f$ offenbar der i -ten partiellen Ableitung $\partial_i f$, siehe Definition 6.12.

Die Richtungsableitungen müssen ebenso wenig existieren wie die partiellen Ableitungen. Auch kann es sein, dass sie nur für einen Teil der Richtungen existieren. Ist die Funktion aber stetig partiell differenzierbar, so gibt es auch sämtliche Richtungsableitungen, und sie können mithilfe des Gradienten auf einfache Weise berechnet werden:

Satz 6.9 Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt für jedes $\mathbf{x} \in U$ und jeden Einheitsvektor $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_{\mathbf{e}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{e} \cdot \nabla f(\mathbf{x}).$$

Beweis Für Punkte auf der Geraden $\mathbf{x} + t\mathbf{e}$ folgt aus der totalen Differenzierbarkeit von f in \mathbf{x} für hinreichend kleine t

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot t\mathbf{e} + \varphi(t\mathbf{e}).$$

Daraus folgt

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot t\mathbf{e} + \varphi(t\mathbf{e})$$

und damit

$$\frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x})}{t} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e} + \frac{\varphi(t\mathbf{e})}{t}.$$

Für $t \rightarrow 0$ ergibt dies die Behauptung, denn es ist aufgrund der totalen Differenzierbarkeit $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t\mathbf{e})/t = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t\mathbf{e})/|t\mathbf{e}| = 0$. •

Lesehilfe

Die Formel $\partial_{\mathbf{e}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{e} \cdot \nabla f(\mathbf{x})$ ist sehr nützlich. Ist der Gradientenvektor im Punkt \mathbf{x} bekannt, so kannst du mit dem Skalarprodukt leicht jede Richtungsableitung berechnen. Zu beachten ist allerdings, dass der Richtungsvektor \mathbf{e} normiert sein muss. Sollte die Richtung nicht normiert angegeben sein, muss der Vektor zunächst durch seinen Betrag geteilt werden.

Aus der Formel $\partial_{\mathbf{e}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{e} \cdot \nabla f(\mathbf{x})$ ergibt sich eine wichtige Folgerung: Betrachten wir eine Stelle \mathbf{x} mit ihrem Gradientenvektor $\nabla f(\mathbf{x})$. Die Richtungsvektoren \mathbf{e} besitzen allesamt dieselbe Länge 1. Daher wird die Richtungsableitung in diesem Punkt offenbar maximal, wenn \mathbf{e} in dieselbe Richtung wie $\nabla f(\mathbf{x})$ zeigt. Das heißt:

Der Gradient einer Funktion in einem Punkt gibt die Richtung des stärksten Anstiegs an und der Betrag des Gradienten entspricht der maximalen Steigung in dem Punkt.

Die Verhältnisse sind in Abb. 6.13 graphisch dargestellt.

- **Zwischenfrage (9)** Stimmen die folgenden Aussagen für eine stetig partiell differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{x} \in U$?
- (1) Die größte Steigung der Funktion an der Stelle \mathbf{x} ist stets ≥ 0 .
 - (2) In jedem Punkt \mathbf{x} gibt es eine Richtungsableitung mit dem Wert 0.
 - (3) Mit einer Richtungsableitung m im Punkt \mathbf{x} gibt es immer auch eine andere Richtung mit der Richtungsableitung $-m$.

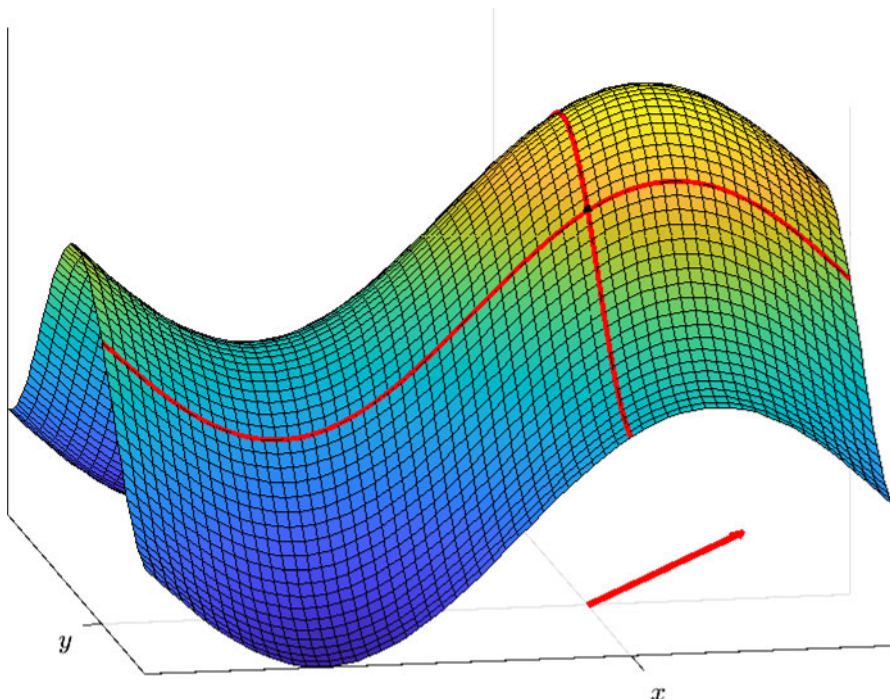


Abb. 6.13 Der Gradient einer Funktion in einem Punkt gibt die Richtung des stärksten Anstiegs in diesem Punkt an. Bei einer Funktion auf einer Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ liegt er in der Koordinatenfläche der Funktion. Der Betrag des Gradienten, d. h. die Länge des Gradientenvektors, gibt den Wert der maximalen Steigung an

Beispiele

(1) Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + 2xy + 2y^2$, und ermitteln die Richtung und den Betrag des stärksten Anstiegs von f im Punkt $(1/2, -1)$: Es ist

$$\nabla f = (2x + 2y, 2x + 4y), \quad \text{also} \quad \nabla f(1/2, -1) = (-1, -3).$$

In dieser Richtung also steigt die Funktion maximal an, und zwar mit der Steigung $m = |\nabla f| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$.

(2) Wir kommen noch einmal auf das Beispiel in Abschn. 6.5.2 zurück. Dort haben wir festgestellt, dass sich die Feldstärke in einem Kraftfeld aus dem zugehörigen Potenzial V ableiten lässt,

$$\mathbf{a} = -\nabla V, \tag{6.71}$$

siehe (6.56). Wir können nun festhalten:

Die Feldstärke in einem Punkt eines Potenzialfelds ist stets in Richtung des stärksten Abfalls des Potenzials gerichtet.

6.7 Lokale Extrema

„Hoch-“ und „Tiefpunkte“ einer Funktion spielen insbesondere auch im Hinblick auf praktische Anwendungen eine wichtige Rolle. Für eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein Punkt $\mathbf{x} \in U$ ein *lokales Maximum* (bzw. ein *lokales Minimum*) von f , falls es eine Umgebung $V \subseteq U$ von \mathbf{x} gibt, sodass gilt

$$f(\tilde{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in V \quad (\text{bzw. } f(\tilde{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in V).$$

Gilt dabei $f(\tilde{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x})$ nur für $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$, so spricht man von einem *isolierten* lokalen Maximum (bzw. Minimum). Ein *lokales Extremum* ist ein lokales Maximum oder Minimum.

Machen wir uns die Begriffe am Beispiel $U \subseteq \mathbb{R}^2$ anschaulich klar. Den Graphen der Funktion f kann man sich dann als „Gebirge“ vorstellen. Ein lokales Maximum ist eine Stelle, die lokal – d. h. in einer Umgebung – der höchste Punkt ist. Dies könnte ein „Berggipfel“ sein, oder auch ein „Grat“ auf konstanter Höhe. Am Berggipfel wäre das Maximum isoliert, auf dem Grat nicht. Aber auch ein Punkt in einer horizontalen Fläche wäre ein lokales Extremum, und zwar gleichzeitig ein lokales Maximum und ein lokales Minimum.

- **Antwort auf Zwischenfrage (9)** Gefragt war nach den Aussagen: (1) Die größte Steigung der Funktion f an der Stelle \mathbf{x} ist stets ≥ 0 . (2) In jedem Punkt \mathbf{x} gibt es eine Richtungsableitung mit dem Wert 0. (3) Mit einer Richtungsableitung m im Punkt \mathbf{x} gibt es immer auch eine andere Richtung mit der Richtungsableitung $-m$.

(1) Richtig. Die größte Steigung ist gleich $|\nabla f(\mathbf{x})|$ und damit ≥ 0 . Und tatsächlich kann eine Tangentialebene offenbar nicht zu allen Seiten hin abfallen, gleichbedeutend damit, dass alle Richtungsableitungen < 0 wären.

(2) Richtig. Dazu wählt man einen Richtungsvektor \mathbf{e} orthogonal zum Gradienten $\nabla f(\mathbf{x})$. Dann ist die Richtungsableitung $\mathbf{e} \cdot \nabla f(\mathbf{x})$ gleich 0.

(3) Richtig. Liegt die Steigung m in Richtung $\tilde{\mathbf{e}}$ vor, gilt also $\tilde{\mathbf{e}} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = m$, so haben wir in der Gegenrichtung $-\tilde{\mathbf{e}}$ die Steigung $-m$.

Noch einmal zusammenfassend das gesamte Bild: In Richtung des Gradienten liegt die maximale Steigung $m_{\max} \geq 0$ vor. Die Gegenrichtung besitzt die minimale Steigung $-m_{\max}$. Senkrecht zur Gradientenrichtung ist die Steigung 0. Dazwischen kommen alle Steigungen zwischen $-m_{\max}$ und m_{\max} vor. Anders geht es auf einer Tangentialebene nicht.

6.7.1 Stationäre Punkte

Bei differenzierbaren Funktionen hängen lokale Extrema eng mit der Ableitung zusammen:

Satz 6.10 Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Besitzt f in $\mathbf{x} \in U$ ein lokales Extremum, so gilt $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Beweis Für $i = 1, \dots, n$ betrachten wir die Funktionen $f_i(t) := f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i)$. Aufgrund der partiellen Differenzierbarkeit von f sind diese Funktionen auf einem gewissen Intervall $] -\varepsilon, \varepsilon[$ definiert und differenzierbar. Besitzt f in \mathbf{x} ein lokales Extremum, so besitzen die f_i in 0 lokale Extrema, es gilt also $f'_i(0) = 0$. Wegen $f'_i(0) = \partial_i f(\mathbf{x})$ ist dies die Behauptung. •

Lesehilfe zum Beweis

Wie du siehst, ergibt sich der Beweis einfach aus dem entsprechenden Zusammenhang für Funktionen mit einer Veränderlichen.

Ein Punkt mit $\nabla f = \mathbf{0}$ heißt ein *stationärer Punkt* von f . Der obige Satz besagt also, dass bei *differenzierbaren Funktionen lokale Extrema höchstens an stationären Punkten* vorliegen können. Ein stationärer Punkt ist somit die *notwendige Bedingung* für das Vorliegen eines Extremums.

Generell ist zu beachten, dass Satz 6.10 nur für differenzierbare Funktionen gilt. Aber natürlich können *lokale Extrema auch an nicht differenzierbaren Stellen* vorliegen (z. B. an einer „Bergspitze“, die eine echte Spitze und somit nicht differenzierbar ist).

Die Bestimmung der stationären Punkte einer Funktion f ist durchaus nicht immer leicht oder ohne Weiteres möglich, denn dazu ist ja das aus n Gleichungen bestehende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial_1 f(\mathbf{x}) &= 0 \\ &\vdots \\ \partial_n f(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \tag{6.72}$$

zu lösen. Die Form dieser Gleichungen hängt natürlich von der Funktion f ab.

Lesehilfe

Das Gleichungssystem (6.72) ist ein Gleichungssystem aus n Gleichungen für die n Unbekannten x_1, \dots, x_n . Zwar weißt du sicher, was bei linearen Gleichungssystemen zu tun ist. Aber hier haben wir normalerweise *keine* linearen Gleichungen. Man weiß dann auch insbesondere nicht, ob und wie viele Lösungen es gibt. Es gibt kein Standardverfahren, man muss vielmehr überlegen: Vielleicht sind manche der Gleichungen besonders einfach und erlauben, einzelne Lösungen abzulesen? Vielleicht lassen sich Gleichungen nach einer Variablen auflösen und dann in andere Gleichungen einsetzen? Wichtig ist, zu beachten, dass alle Gleichungen simultan gelöst sein müssen.

Beispiel

Wir bestimmen die stationären Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 2x^2y - 6xy + x, \quad (6.73)$$

also die Lösungen der Gleichung

$$\nabla f(x, y) = (0, 0)$$

bzw. des Gleichungssystems

$$4xy - 6y + 1 = 0 \quad \wedge \quad 2x^2 - 6x = 0.$$

Die zweite Gleichung ist erfüllt für $x = 0$ oder $x = 3$. Wir setzen die beiden Werte in die erste Gleichung ein:

- $x = 0$ ergibt $-6y + 1 = 0$, also $y = 1/6$ und damit den stationären Punkt $(0, 1/6)$.
- $x = 3$ ergibt $12y - 6y + 1 = 0$, also $y = -1/6$ und damit den stationären Punkt $(3, -1/6)$.

6.7.2 Definitheit symmetrischer Matrizen

Die Hesse-Matrix der zweiten Ableitungen kann hilfreich sein bei der Entscheidung, ob an einem stationären Punkt ein lokales Extremum vorliegt. Die Situation ist hier vergleichbar mit derjenigen bei gewöhnlichen Funktionen einer Veränderlichen: Ein Maximum (Minimum) liegt dort vor, wenn die erste Ableitung verschwindet und die zweite Ableitung kleiner (größer) als 0 ist. Zwar gibt es für Matrizen die Begriffe „kleiner 0“ oder „größer 0“ nicht, aber es gibt den Begriff der *Definitheit*, die positiv oder negativ sein kann:

Definition 6.18 *Es sei A eine symmetrische reelle $n \times n$ -Matrix.*

- (1) *Die Matrix A heißt positiv definit, falls gilt $\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.*
- (2) *Die Matrix A heißt positiv semidefinit, falls gilt $\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*
- (3) *Die Matrix A heißt negativ definit (bzw. negativ semidefinit), falls die Matrix $-A$ positiv definit (bzw. positiv semidefinit) ist.*
- (4) *Die Matrix A heißt indefinit, falls es $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} > 0$ und $\mathbf{y} \cdot A\mathbf{y} < 0$.*

Anhand dieser Definition lässt sich nicht immer ohne Weiteres erkennen, welche Form der Definitheit eine Matrix aufweist. Daher ist folgende Überlegung hilfreich:

Im Rahmen der linearen Algebra kann gezeigt werden, dass es zu jeder symmetrischen $n \times n$ -Matrix A eine Orthonormalbasis $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren gibt:

$$A\mathbf{a}_i = t_i \mathbf{a}_i, \quad t_i \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Lesehilfe

Zur Erinnerung einige Grundtatsachen aus der linearen Algebra: Eine Orthonormalbasis ist eine Basis aus normierten Vektoren \mathbf{a}_i , die wechselseitig orthogonal zueinander sind. Dies kann man ausdrücken durch $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$. Ein Eigenvektor ist ein Vektor, der durch die Multiplikation mit einer Matrix auf ein Vielfaches von sich abgebildet wird. Dieses Vielfache ist sein Eigenwert t_i . Es ist dann also $A\mathbf{a}_i = t_i\mathbf{a}_i$.

Entwickelt man nun einen beliebigen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ hinsichtlich dieser Orthonormalbasis, $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i$, so ergibt sich

$$\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n t_i x_i^2. \quad (6.74)$$

Daraus folgt der

Satz 6.11 Für eine reelle symmetrische $n \times n$ -Matrix A gilt:

- (1) A ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind.
- (2) A ist genau dann negativ definit, wenn alle Eigenwerte negativ sind.
- (3) A ist genau dann positiv (negativ) semidefinit, wenn alle Eigenwerte ≥ 0 sind (≤ 0 sind).
- (4) A ist genau dann indefinit, wenn es einen positiven und einen negativen Eigenwert gibt.

Mithilfe dieses Kriteriums wird die Bestimmung der Definitheit einer Matrix also auf die Berechnung ihrer Eigenwerte zurückgeführt.

► **Zwischenfrage (10)** Wie kommt man auf (6.74)? Und inwiefern folgt daraus Satz 6.11?

Ein weiteres nützliches Kriterium ist das folgende *Hurwitz-Kriterium*⁵, das wir ohne Beweis angeben wollen:

Satz 6.12 Eine reelle symmetrische $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ ist genau dann positiv definit, wenn für $k = 1, \dots, n$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0.$$

⁵ Benannt nach dem deutschen Mathematiker Adolf Hurwitz, 1859–1919.

Das Hurwitz-Kriterium besagt also, dass eine Matrix positiv definit ist, wenn sämtliche „nordwestlichen“ Unterdeterminanten positiv sind.

Lesehilfe

Das Hurwitz-Kriterium ist leicht anzuwenden. Ist $a_{11} > 0$, so prüft man die weiteren Unterdeterminanten. Ist $a_{11} < 0$, so betrachtet man die Matrix $-A$. In beiden Fällen mag es sein, dass die Matrix anhand des Hurwitz-Kriteriums als positiv definit erkannt wird. Ist das Kriterium nicht erfolgreich, so weiß man zumindest, dass die Matrix nicht positiv oder negativ definit ist. Ob sie dann semidefinit oder indefinit ist, lässt sich allerdings mit dem Hurwitz-Kriterium nicht entscheiden.

Beispiele

(1) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit (zwei positive Eigenwerte, bei einer Diagonalmatrix auf der Hauptdiagonalen abzulesen), die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist negativ definit, die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist positiv semidefinit und die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist indefinit.

(2) Wir betrachten die Hesse-Matrix der Funktion (6.73): Es ist

$$\partial_x^2 f = 4y, \quad \partial_y^2 f = 0, \quad \partial_x \partial_y f = 4x - 6$$

und damit

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x - 6 \\ 4x - 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir untersuchen die Hesse-Matrizen an den stationären Punkten auf ihre Definitheit: Aus dem Hurwitz-Kriterium folgt für

$$H_f(0, 1/6) = A = \begin{pmatrix} 2/3 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix},$$

dass die Matrix nicht positiv definit sein kann (erste Unterdeterminante positiv, zweite negativ). Wir ermitteln die Eigenwerte, d. h., wir berechnen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix:

$$f(t) = \det(A - tE_2) = (2/3 - t)(-t) - 36 = t^2 - \frac{2}{3}t - 36 = 0,$$

$$\text{also } t_{1/2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + 36}.$$

Wir erhalten einen positiven und einen negativen Eigenwert, sodass die Matrix indefinit ist.

Auch die Matrix $H_f(3, -1/6) = -A$ ist indefinit.

- **Antwort auf Zwischenfrage (10)** Gefragt war nach (6.74), $\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n t_i x_i^2$, und nach dem Beweis von Satz 6.11.
 Aus $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i$ und $A\mathbf{a}_i = t_i \mathbf{a}_i$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i \right) \cdot A \left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j \right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n x_j A\mathbf{a}_j \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n x_j t_j \mathbf{a}_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j t_j \underbrace{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j}_{=\delta_{ij}} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i x_i t_i = \sum_{i=1}^n t_i x_i^2. \end{aligned}$$

Diese letzte Summe enthält die Quadrate x_i^2 , die ≥ 0 sind, und nur für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sind alle $x_i = 0$. Außerdem haben wir die Eigenwerte t_i als zusätzliche Faktoren. Daraus folgt:

- (1) Sind alle Eigenwerte $t_i > 0$, so ist die Summe nur für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ gleich 0 und ansonsten > 0 , die Matrix A ist also positiv definit.
- (2) Sind alle Eigenwerte $t_i < 0$, so besitzt die Matrix $-A$ die Eigenwerte $-t_i$ und ist somit positiv definit, die Matrix A ist daher negativ definit.
- (3) Semidefinit erfolgt analog.
- (4) Es sei $t_1 > 0$ und $t_2 < 0$. Dann ist für $\mathbf{x} = (1, 0, \dots, 0)$ der Ausdruck $\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} = t_1 > 0$ und für $\mathbf{x} = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ist $\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} = t_2 < 0$. Die Matrix A ist somit indefinit.

6.7.3 Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema

Wir können nun das *hinreichende Kriterium* für das Vorliegen eines lokalen Extremums formulieren:

Satz 6.13 Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{x} \in U$ sei ein stationärer Punkt, d. h., $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Dann gilt:

- (1) $H_f(\mathbf{x})$ positiv definit \Rightarrow isoliertes Minimum in \mathbf{x}
- (2) $H_f(\mathbf{x})$ negativ definit \Rightarrow isoliertes Maximum in \mathbf{x}
- (3) $H_f(\mathbf{x})$ indefinit \Rightarrow kein lokales Extremum in \mathbf{x} .

Der **Beweis** dieses Satzes ist vergleichsweise aufwendig und wird hier nicht ausgeführt. Er greift auf die quadratische Näherung der Taylor-Formel zurück. ◻

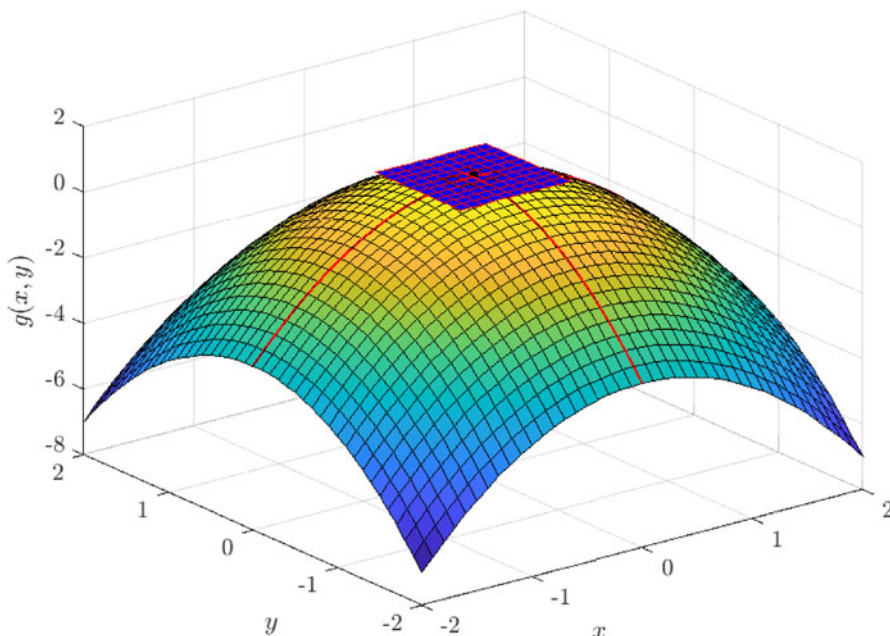


Abb. 6.14 Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ besitzt an der Stelle $(0, 0)$ einen stationären Punkt – gleichbedeutend mit einer horizontalen Tangentialebene –, an dem ein lokales Maximum vorliegt. Sie besitzt keine weiteren stationären Punkte

Lesehilfe

Dieses Kriterium kannst du dir leicht merken, da es dieselbe Form wie bei Funktionen einer Veränderlichen aufweist: Zweite Ableitung „ > 0 “ – entspricht „positiv definit“ – bedeutet Minimum, zweite Ableitung „ < 0 “ – entspricht „negativ definit“ – bedeutet Maximum.

Um festzustellen, ob an einem stationären Punkt ein lokales Extremum vorliegt, ist somit die Hesse-Matrix an diesem Punkt zu berechnen und ihre Definitheit zu ermitteln. Dabei ist allerdings zu beachten, dass dieses Kriterium für eine semidefinite Hesse-Matrix keine Aussage über die Art der Stelle zulässt. Tatsächlich ist hier beides möglich, d. h., es kann ein lokales Extremum vorliegen oder auch nicht. Bei einer indefiniten Hesse-Matrix hingegen ist ein Extremum ausgeschlossen.

Beispiele

(1) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$. Es ist $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, sodass bei $(0, 0)$ der einzige stationäre Punkt vorliegt. Die

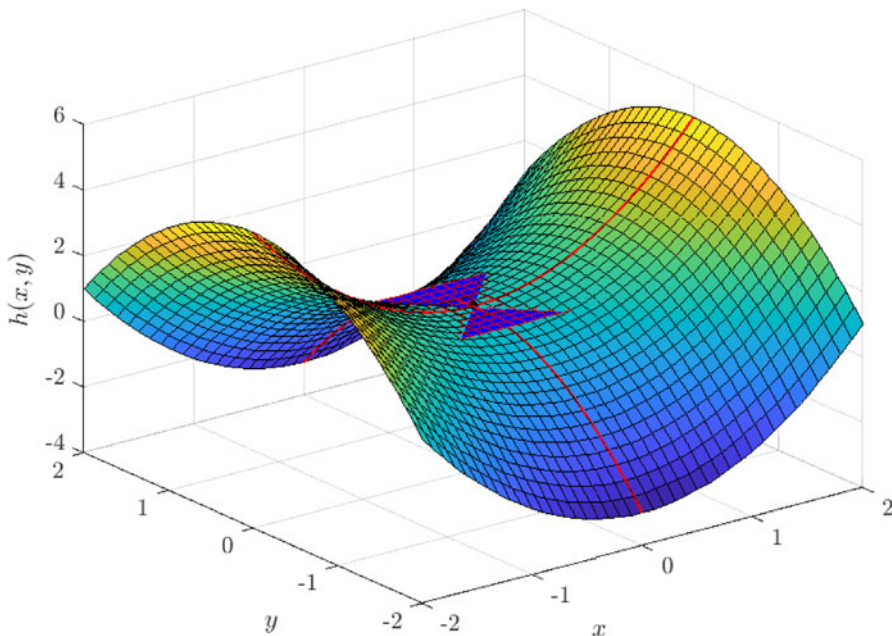


Abb. 6.15 Die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y) = 1 + x^2 - y^2$ besitzt an der Stelle $(0, 0)$ einen stationären Punkt. Sie besitzt hier also eine horizontale Tangentialebene, aber es liegt kein lokales Extremum, sondern ein Sattelpunkt vor

Hesse-Matrix

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist in diesem Beispiel konstant, hängt also gar nicht mehr von \mathbf{x} ab. Sie ist offenbar positiv definit, also liegt bei $(0, 0)$ ein lokales Minimum vor.

(2) Wir betrachten nun $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Es ist $\nabla g(x, y) = (-2x, -2y)$, also haben wir erneut einen stationären Punkt bei $(0, 0)$. Die Hesse-Matrix

$$H_g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ist negativ definit, also liegt bei $(0, 0)$ ein lokales Maximum vor, siehe Abb. 6.14.

(3) Schließlich betrachten wir $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = 1 + x^2 - y^2$. Es ist $\nabla h(x, y) = (2x, -2y)$ und $(0, 0)$ ist ein stationärer Punkt. Die Hesse-Matrix

$$H_h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ist indefinit, sodass bei $(0, 0)$ kein lokales Maximum vorliegt, sondern ein Sattelpunkt, siehe Abb. 6.15.

Das Wichtigste in Kürze

- Einer beliebigen Menge wird durch eine **Metrik** ein Abstandsbegriff hinzugefügt, der es erlaubt, vom **Abstand** zweier Elemente zu reden.
- Die **euklidische Metrik** des \mathbb{R}^n ergibt sich aus dem kanonischen Skalarprodukt. Euklidische Abstände entsprechen den geometrischen Abständen längs der geradlinigen Verbindung.
- Eine **offene Menge** ist Umgebung eines jeden ihrer Punkte. Eine offene Menge hat daher keinen Rand.
- Eine Menge heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement offen ist. Ist eine Teilmenge des \mathbb{R}^n abgeschlossen und beschränkt, so heißt sie **kompakt**.
- Im \mathbb{R}^n können die Grenzwerte **komponentenweise** betrachtet werden.
- Eine **Kurve** ist eine stetige Abbildung von einem reellen Intervall nach \mathbb{R}^n . Man kann sie auffassen als einen **Ortsvektor**, der von einem reellen **Parameter** abhängt.
- Der **Tangentenvektor** liegt tangential an der Kurve. Er gibt die Richtung der Kurve in einem bestimmten Kurvenpunkt an. Eine Kurve heißt **regulär**, wenn der Tangentenvektor ungleich $\mathbf{0}$ ist.
- Die **Länge** einer Kurve entspricht dem Grenzwert eines die Kurve approximierenden Polygonzugs. Bei stetig differenzierbaren Kurven lässt sie sich mithilfe einer Integralformel berechnen.
- Die **Krümmung** einer ebenen Kurve ist definiert als die Richtungsänderung pro durchlaufenem Kurvenstück.
- Die **partielle Ableitung** einer Funktion, die von mehreren Variablen abhängt, entspricht der Ableitung in eine bestimmte Koordinatenrichtung. Sie kann in gewöhnlicher Weise ausgeführt werden, indem sämtliche anderen Variablen als konstant betrachtet werden.
- Der **Gradient** einer Funktion ist der Vektor, der aus den einzelnen partiellen Ableitungen gebildet wird.
- Die zweiten partiellen Ableitungen werden zur **Hesse-Matrix** zusammengefasst. Bei ihr handelt es sich um eine symmetrische $n \times n$ -Matrix.
- Die **totale Differenzierbarkeit** einer Funktion ist gleichbedeutend damit, dass sie lokal durch eine Tangentialebene approximiert werden kann.
- Mit der **Richtungsableitung** kann die Steigung einer Funktion in einer beliebig vorgegebenen Richtung angegeben werden. Der Gradient gibt die **Richtung des stärksten Anstiegs** einer Funktion an.
- Einen Punkt, in dem der Gradient einer Funktion verschwindet, nennt man einen **stationären Punkt**. Lokale Extrema einer partiell differenzierbaren Funktion können **höchstens an einem stationären Punkt** vorliegen.
- Einer symmetrischen Matrix kann eine **Definitheit** zugeordnet werden. Sie kann positiv oder negativ definit, positiv oder negativ semidefinit oder indefinit sein.
- Wenn die Hesse-Matrix in einem stationären Punkt positiv oder negativ definit ist, so liegt dort ein **isoliertes Extremum** vor. Ist die Hesse-Matrix indefinit, so liegt **kein Extremum**, sondern ein Sattelpunkt vor. ◀

Und was bedeuten die Formeln?

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

$$K_r(\mathbf{a}) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r \right\}, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] = \{0\},$$

$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r \cos t, r \sin t, vt), \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h},$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(s), \quad \cos \alpha = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(s)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)| |\dot{\mathbf{y}}(s)|},$$

$$p_{\mathbf{x}}(t_0, \dots, t_k) = \sum_{i=1}^k |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})|, \quad s = \int_a^b |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt,$$

$$K := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\delta}{\Delta s}, \quad K(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)\ddot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{y}}(t)\ddot{\mathbf{x}}(t)}{[\dot{\mathbf{x}}^2(t) + \dot{\mathbf{y}}^2(t)]^{3/2}}, \quad K = \frac{1}{r},$$

$$U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma_f := \{(\mathbf{x}, y) \in U \times \mathbb{R} \mid y = f(\mathbf{x})\},$$

$$\partial_i f(\mathbf{x}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h}, \quad \partial_i f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}),$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) := (\partial_1 f(\mathbf{x}), \dots, \partial_n f(\mathbf{x})), \quad \nabla f(|\mathbf{x}|) = f'(|\mathbf{x}|) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|},$$

$$\partial_j \partial_i f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \partial_i \partial_j f, \quad H_f(\mathbf{x}) := \left(\partial_i \partial_j f(\mathbf{x}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad H_f = H_f^T,$$

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \Delta \mathbf{x} + \varphi(\Delta \mathbf{x}), \quad \varphi(\Delta \mathbf{x}) = o(|\Delta \mathbf{x}|),$$

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) + \partial_1 f(\mathbf{x}) \Delta x_1 + \dots + \partial_n f(\mathbf{x}) \Delta x_n,$$

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x} \cdot H_f(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + o(|\Delta \mathbf{x}|^2),$$

$$\partial_e f(\mathbf{x}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x})}{t} = \mathbf{e} \cdot \nabla f(\mathbf{x}), \quad |\mathbf{e}| = 1,$$

$$f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{y} \in Y, \quad \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n t_i x_i^2, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Übungsaufgaben

A6.1 Wir betrachten den Raum \mathbb{R}^3 mit dem gewöhnlichen euklidischen Abstand, d. h., für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}.$$

Gegeben sind die Punkte $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{b}_1 = (1, -1, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 0, 2)$, $\mathbf{b}_3 = (1.1, -1.1, 2.1)$ und $\mathbf{b}_4 = (1.001, -1.001, 2.001)$.

- Wie groß sind die Abstände des Punktes \mathbf{a} von den Punkten \mathbf{b}_i , $i = 1, 2, 3, 4$?
- Welche der Punkte \mathbf{b}_i liegen in der offenen Kugel $K_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$ mit dem Radius $r = 0.1$?
- Gib zwei punktfremde Umgebungen der Punkte \mathbf{a} und \mathbf{b}_4 an.

A6.2 a) Gib in den Räumen \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 jeweils ein Beispiel für eine offene Teilmenge und ein Beispiel für eine abgeschlossene Teilmenge an.

b) Ist die Menge $[0, 1[\subset \mathbb{R}$ offen? Ist sie abgeschlossen? Ist sie beschränkt? Ist sie kompakt? Warum (nicht)?

c) Gib eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^3$ an, die weder offen noch abgeschlossen ist.

A6.3 Gegeben sind die folgenden beiden Kurven:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad t \mapsto (2t, t^2 - 1) \\ \mathbf{y} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad s \mapsto (16s^2, s - 1). \end{aligned}$$

a) Welcher Kurvenpunkt wird von \mathbf{x} und \mathbf{y} jeweils für den Parameterwert 1 angenommen?

b) Berechne die Lage der Schnittpunkte der Kurven \mathbf{x} und \mathbf{y} . Wie lauten dort die Parameterwerte t und s der beiden Kurven?

c) Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven? Zur Beantwortung der Frage reicht es aus, den Cosinus des Schnittwinkels anzugeben.

A6.4 Wir betrachten die *logarithmische Spirale*

$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad t \mapsto (x, y) = (e^{t/2\pi} \cos t, e^{t/2\pi} \sin t).$$

a) Welche Punkte der xy -Ebene sind den Parameterwerten $t_1 = 0$ und $t_2 = \pi$ zugeordnet? Wie lauten die Tangentenvektoren in diesen Punkten?

b) Skizziere den Verlauf der Spirale für $t \in [-2\pi, 2\pi]$ und berechne ihre Länge für diesen Parameterbereich.

A6.5 Ein Satellit umkreise die Erde (Erdradius $R_E = 6370$ km) auf einer kreisförmigen Umlaufbahn in 1720 km Höhe und benötige für einen Umlauf 2 h. Seine Bahn befinde sich in der Äquatorebene.

a) Gib den Ort des Satelliten in Abhängigkeit von der Zeit an, d. h., ermittle seine Ortskurve $\mathbf{x}(t)$. Wähle dazu ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung im Erdmittelpunkt, dessen z -Achse mit der Erdachse übereinstimmt, und nimm an, dass der Satellit zur Zeit $t = 0$ die x -Achse passiert.

b) Wie schnell ist der Satellit auf seiner Bahn? Wie lautet sein Geschwindigkeitsvektor?

c) Ein zweiter Satellit befinde sich auf derselben Umlaufbahn und folge dem ersten Satelliten in einem zeitlichen Abstand von 10 min. Wie lautet die Ortskurve $\mathbf{x}_2(t)$ dieses zweiten Satelliten?

d) Beide Satelliten stehen über Funk miteinander in Verbindung (Lichtgeschwindigkeit $c = 300\,000$ km/s). Wie groß ist die Laufzeit eines Signals von einem Satelliten zum anderen? (Gehe der Einfachheit halber davon aus, dass die Satelliten während der Signallaufzeit ihre Position nicht ändern. Verwende zur Ermittlung des Endergebnisses einen Taschenrechner.)

A6.6 Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe jeweils deine Antwort.

- (I) Da eine Kurve im \mathbb{R}^n per Definition stetig ist, besitzt sie in jedem Punkt eine eindeutige Tangente.
- (II) Eine Kurve im \mathbb{R}^3 kann als ein zeitabhängiger Ortsvektor aufgefasst werden.
- (III) Im Schnittpunkt zweier Kurven müssen die Kurvenparameter denselben Wert besitzen.
- (IV) Besitzt eine Kurve im \mathbb{R}^n einen singulären Punkt, so ist sie dort nicht differenzierbar.
- (V) Eine Kurve im \mathbb{R}^n kann auch eine Gerade sein.
- (VI) Ein Kreis ist die einzige Kurve, die eine konstante Krümmung besitzt.

A6.7 Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x, y, z) = 3z \exp\left(-\sqrt{x^2 + y^2}\right) \sin(kx).$$

a) Berechne die Funktionswerte $f(1, 2, -3)$ und $f\left(\frac{\pi}{2k}, 0, 1\right)$.

b) Bilde die folgenden partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}.$$

A6.8 Zeige, dass die Funktion u mit

$$u(t, \mathbf{x}) = u(t, x, y, z) = u_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \varphi_0) \quad \text{und} \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = \text{const.}$$

eine Gleichung der Form

$$\Delta u = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \right) u = a \partial_t^2 u$$

erfüllt. Welchen Wert hat die Konstante a ?

A6.9 Gegeben ist die von den Ortskoordinaten abhängende Funktionsvorschrift

$$V(\mathbf{x}) = V(x, y, z) = \frac{c}{|\mathbf{x}|} \quad \text{mit } c = \text{const.}$$

Berechne die folgenden aus partiellen Ableitungen gebildeten Ausdrücke:

- a) den Vektor $\mathbf{F} = -\nabla V = -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V)$.
- b) den Skalar $\varrho = \Delta V = \partial_x^2 V + \partial_y^2 V + \partial_z^2 V$.

A6.10 Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x, y, z) = \sin(xy) e^{1-z^2} (y^2 + z^2).$$

- a) Berechne den Gradienten der Funktion an der Stelle $\mathbf{x}_0 = (\frac{\pi}{6}, 1, -1)$.
- b) Verwende das Ergebnis von Aufgabenteil a), um die lineare Näherung der Funktion f um den Punkt \mathbf{x}_0 anzugeben.
- c) Ermittle unter Verwendung eines Taschenrechners den Funktionswert von f an der Stelle $\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}$ mit $\Delta \mathbf{x} = (0.1, 0.1, 0.1)$ und vergleiche ihn mit dem Wert, den die lineare Näherung für diese Stelle ergibt.

A6.11 Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x, y) = \frac{e^{x+y}}{x^2 + 2}.$$

- a) In welcher Richtung steigt die Funktion f im Punkt $(2, -1)$ am stärksten an? Welche maximale Steigung erreicht sie hier?
- b) Wie groß ist die Steigung im Punkt $(2, -1)$ mit Blickrichtung auf den Ursprung der xy -Ebene?

A6.12 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6.$$

- a) Wie lautet der Funktionswert von f an der Stelle $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$?
- b) Ermittle sämtliche stationären Punkte der Funktion f .
- c) Besitzt die Funktion f ein lokales Minimum oder Maximum? Wenn ja, wie groß ist der Funktionswert an dieser extremalen Stelle?

A6.13 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}.$$

- a) Bestimme die fünf stationären Punkte der Funktion f .
- b) Ermittle die lokalen Extrema der Funktion f .

A6.14 Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe jeweils deine Antwort.

- (I) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2)/2$ besitzt keine Nullstellen.
- (II) Besitzt eine Funktion keine stationären Punkte, so kann sie auch keine isolierten lokalen Extrema besitzen.
- (III) Die Hesse-Matrix einer Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen und besitzt n Spalten.
- (IV) Die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = xy$ besitzt unendlich viele Nullstellen.
- (V) Die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = xy$ besitzt unendlich viele stationäre Punkte.
- (VI) Die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = xy$ besitzt im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Extremum.

L1.1

- (I) Falsch. Eine Treppenfunktion ist i. Allg. nicht stetig, weil sie Sprünge von einer Treppenstufe auf die nächste aufweist. Natürlich gibt es aber auch stetige Treppenfunktionen, etwa die 0.
- (II) Richtig. Die Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, die einer Treppenfunktion $\varphi \in T[a, b]$ zugrunde liegt, ist endlich. Daher ergibt sich das Integral aus endlich vielen endlichen Rechteckflächen.
- (III) Richtig. Mit $\varphi > 0$ müssen die Höhen der Treppenstufen allesamt positiv sein. Daher sind alle Rechteckflächen und auch das Gesamtintegral positiv.
- (IV) Falsch. Sofern die Summe der oberhalb der x -Achse liegenden Rechteckflächen gleich der Summe der unterhalb liegenden ist, ist das Gesamtintegral gleich 0. Ein Beispiel wäre die Treppenfunktion $\varphi : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi|_{[0, 1[} = -1, \quad \varphi|_{[1, 2]} = 1.$$

L1.2 Nein, man kann in der Definition des Unterintegrals nicht einfach \max statt \sup verwenden. Das *Maximum* einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist per Definition das größte Element der Menge, es muss also selbst Element der Menge sein. Endliche Mengen besitzen stets ein größtes Element, bei unendlichen Mengen muss dies aber nicht der Fall sein.

Das *Supremum* einer Menge ist die kleinste obere Schranke und muss selbst nicht Element der Menge sein (darf es aber – sofern die Menge ein Maximum besitzt, ist es gleich dem Supremum).

Betrachtet man nun die (unendliche) Menge der Integralwerte $\int_a^b \varphi(x) \, dx$ aller Treppenfunktion mit $\varphi \leq f$, so besitzt diese Menge nur dann ein Maximum, wenn f selbst eine Treppenfunktion ist. Andernfalls nähert man sich mit den Treppenfunktionen nur von unten der Funktion f an. Das Supremum der Integralwerte entspricht dann dem „Grenzwert“ dieses Annäherungsprozesses.

L1.3 Nein, aus der Stetigkeit einer Funktion folgt nicht die Differenzierbarkeit. Die Funktion f ist stetig, wenn ihr Graph gezeichnet werden kann, ohne den Stift

abzusetzen – die Funktion darf also keine Sprünge machen. Für die Differenzierbarkeit ist darüber hinaus notwendig, dass der Graph keine Knicke aufweist. Die Differenzierbarkeit ist somit die „stärkere“ Eigenschaft: Differenzierbarkeit setzt Stetigkeit voraus und damit folgt aus Differenzierbarkeit auch die Integrierbarkeit. Aus der Integrierbarkeit folgt allerdings weder die Stetigkeit – auch Treppenfunktionen sind integrierbar – und erst recht nicht die Differenzierbarkeit.

L1.4 Die Treppenfunktion φ stimmt am Beginn ihrer Treppenstufen mit der Funktion \sin überein. Daher ergibt sich der näherungsweise Wert des Integrals aus folgender Summe von Rechteckflächen:

$$\begin{aligned} I_{10} &= \frac{\pi}{10} \sin 0 + \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{10} \sin \frac{2\pi}{10} + \dots + \frac{\pi}{10} \sin \frac{9\pi}{10} \\ &= \frac{\pi}{10} \left(\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{2\pi}{10} + \dots + \sin \frac{9\pi}{10} \right). \end{aligned}$$

Um nicht unnötig viele Summanden in den Taschenrechner eingeben zu müssen, nutzen wir die Symmetrie des Sinus aus: Wegen $\sin \frac{\pi}{10} = \sin \frac{9\pi}{10}$, $\sin \frac{2\pi}{10} = \sin \frac{8\pi}{10}$ usw. haben wir dann nur noch

$$\begin{aligned} I_{10} &= \frac{\pi}{10} \left(2 \sin \frac{\pi}{10} + 2 \sin \frac{2\pi}{10} + 2 \sin \frac{3\pi}{10} + 2 \sin \frac{4\pi}{10} + \sin \frac{5\pi}{10} \right) \\ &= \frac{\pi}{10} \left(2 \sin \frac{\pi}{10} + 2 \sin \frac{\pi}{5} + 2 \sin \frac{3\pi}{10} + 2 \sin \frac{2\pi}{5} + 1 \right) \end{aligned}$$

zu berechnen und erhalten $I_{10} = 1.9835$, sind also schon recht dicht am exakten Wert 2. (Taschenrechner auf rad einstellen nicht vergessen ;-)

L1.5 Nein, die Aussage stimmt nicht. Ebenso wie auf dem Intervall $[0, b]$ wird zwar auch auf dem Intervall $[b, 2b]$ ein Fehler entstehen. Da die Abweichungen jedoch unterschiedliche Vorzeichen haben können, können sich die Fehler auch gegenseitig kompensieren, und der Gesamtfehler kann kleiner werden. So wird beispielsweise der Wert des Integrals $\int_0^\pi \sin x \, dx$ mit der Trapezregel systematisch unterschätzt. Beim Integral $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$ kommt jetzt noch der Fehler auf dem Intervall $[\pi, 2\pi]$ hinzu, der hier aber entgegengesetzt gleich ist. Die Fehler gleichen sich in diesem Beispiel somit vollständig aus und der näherungsweise Integralwert von 0 bis 2π ergibt den exakten Wert 0.

L1.6 Wir können die Integralgrenzen vertauschen,

$$\int_0^{-a} f(x) \, dx = - \int_{-a}^0 f(x) \, dx.$$

Im zweiten Integral ist dann die untere Grenze kleiner als die obere Grenze, wir haben also ein „normales“ Integral, bei dem Flächen oberhalb (unterhalb) der x -Achse positiv (negativ) gezählt werden.

Für achsensymmetrische Funktionen soll also gelten

$$\int_0^a f(x) \, dx = \int_{-a}^0 f(x) \, dx.$$

Das ist aber offensichtlich richtig, da Flächenanteile rechts der y -Achse auf entsprechende Flächenanteile links der y -Achse gespiegelt werden.

Punktsymmetrische Funktionen hingegen sollen die Gleichung

$$\int_0^a f(x) \, dx = - \int_{-a}^0 f(x) \, dx$$

erfüllen. Und auch das stimmt, weil Flächen, die rechts oberhalb (unterhalb) der x -Achse liegen, durch die Punktsymmetrie auf entsprechende Flächen links unterhalb (oberhalb) der x -Achse führen. Dieser Vorzeichenwechsel der Flächen wird durch das Minuszeichen vor dem Integral kompensiert.

L1.7 Die Funktion \sin^3 ist wie \sin punktsymmetrisch zur Intervallmitte, also zum Punkt $(\pi, 0)$. Ihr Integral von 0 bis 2π und damit auch ihr Mittelwert sind daher gleich 0.

Der Mittelwert von \sin^4 ergibt sich aus

$$M(\sin^4) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^4 x \, dx.$$

Mit der Trapezregel und $n = 100$ ist dies näherungsweise gleich

$$M_{100}(\sin^4) = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{100} \left[0 + 0 + 2 \sum_{k=1}^{99} \sin^4 \left(\frac{2\pi k}{100} \right) \right] = \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{99} \sin^4 \left(\frac{\pi k}{50} \right).$$

Diese Summe kann mit einem modernen Taschenrechner oder einem Computerprogramm ausgeführt werden: In MATLAB¹ beispielsweise führt die Eingabe von

```
syms k
M=symsum((sin(pi*k/50))^4,k,1,99)/100
digits(10)
vpa(M)
```

zur Ausgabe des Zahlwerts von 0.375 (der auf zehn Stellen genau nicht von diesem Wert abweicht). Dies lässt für \sin^4 den exakten Mittelwert von $3/8$ erraten.

¹ Mit GNU Octave steht alternativ eine kostenlose wissenschaftliche Programmiersprache zur Verfügung, deren Syntax weitgehend mit MATLAB kompatibel ist.

L2.1 Für die Stammfunktionen suchen wir jeweils nach einer Funktion, deren Ableitung den Integranden ergibt.

$$F_1(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}.$$

Für F_2 verwenden wir die Linearität des Integrals:

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int (x-3)^2 dx = \int (x^2 - 6x + 9) dx = \int x^2 dx - 6 \int x dx + 9 \int dx \\ &= \frac{x^3}{3} - 6 \frac{x^2}{2} + 9x = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x. \end{aligned}$$

F_3 enthält nur eine Konstante:

$$\begin{aligned} F_3(x) &= \int \frac{dx}{\pi e^2} = \frac{1}{\pi e^2} \int dx = \frac{x}{\pi e^2}. \\ F_4(x) &= \int \sin(x+2) dx = -\cos(x+2), \end{aligned}$$

wie du dir durch Ableiten leicht klarmachst. Die innere Ableitung ist $(x+2)' = 1$.

Es ist $(e^x)' = e^x$. Allerdings müssen wir für F_5 noch die innere Ableitung kompensieren und erhalten somit

$$F_5(x) = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x}.$$

Es ist $\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$. Daraus folgt mit Kompensation der inneren Ableitung

$$\begin{aligned} F_6(x) &= \int \pi^2 \sqrt{8x} dx = \frac{\pi^2}{8} \frac{2}{3} \sqrt{(8x)^3} = \frac{\pi^2}{12} \sqrt{512x^3}. \\ F_7(x) &= \int \left(\frac{x}{3}\right)^{-3} dx = 27 \int x^{-3} dx = 27 \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{27}{2x^2}. \end{aligned}$$

F_8 müssen wir nur vernünftig aufschreiben:

$$\begin{aligned} F_8(x) &= \int \left(\frac{1}{x^2 - 2x - 1} \right)^{-2} dx = \int (x^2 - 2x - 1)^2 dx \\ &= \int (x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1) dx \\ &= \frac{x^5}{5} - 4 \frac{x^4}{4} + 2 \frac{x^3}{3} + 4 \frac{x^2}{2} + x = \frac{1}{5} x^5 - x^4 + \frac{2}{3} x^3 + 2x^2 + x. \end{aligned}$$

L2.2 Wir berechnen die jeweiligen bestimmten Integrale. Sofern die Graphen der Funktionen nicht unterhalb der x -Achse verlaufen, ergeben sie unmittelbar den gesuchten Flächeninhalt.

$$\int_0^5 1 \, dx = x \Big|_0^5 = 5 - 0 = 5,$$

was aber auch geometrisch klar ist (Rechteck mit der Höhe 1 und der Breite 5). Also ist $F_1 = 5$.

$$\int_{-2}^2 x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = \frac{8}{3} - \frac{-8}{3} = \frac{16}{3}.$$

Da die Fläche vollständig oberhalb der x -Achse liegt, ist somit $F_2 = 16/3 = 5\frac{1}{3}$.

$$\int_0^3 \sqrt{x} \, dx = \int_0^3 x^{1/2} \, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_0^3 = \frac{\sqrt{27}}{3/2} - 0 = 2\sqrt{3}.$$

Die Fläche liegt vollständig oberhalb der x -Achse und wir haben $F_3 = 2\sqrt{3} \approx 3.5$.

$$\int_{-8}^8 \sqrt[3]{x} \, dx = \int_{-8}^8 x^{1/3} \, dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} \Big|_{-8}^8 = \frac{16}{4/3} - \frac{16}{4/3} = 0.$$

Der Graph der Funktion $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Für $x < 0$ verläuft er unterhalb der x -Achse und für $x > 0$ oberhalb. Diese beiden Flächenanteile kompensieren sich im Integral $\int_{-8}^8 \sqrt[3]{x} \, dx$ daher vollständig. Der Flächeninhalt, den der Graph mit der x -Achse einschließt, ergibt sich als

$$F_4 = 2 \int_0^8 \sqrt[3]{x} \, dx = 2 \cdot \frac{16}{4/3} = 24.$$

$$\int_1^{10} \left(\frac{1}{x^2} + x \right) dx = \left[-\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} \right]_1^{10} = -\frac{1}{10} + 50 - \left(-1 + \frac{1}{2} \right) = 50\frac{2}{5}.$$

Die Fläche liegt vollständig oberhalb der x -Achse, also $F_5 = 50\frac{2}{5}$.

$$\int_0^{13\pi/2} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{13\pi/2} = \sin \frac{13\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Im Intervall von 0 bis $13\pi/2$ besitzt die Cosinusfunktion etliche Flächenanteile oberhalb und etliche unterhalb der x -Achse, die sich im Integral gegenseitig kompensieren. Da die Fläche unter einem Cosinushalbbogen mit der Breite $\pi/2$ gleich 1 ist, ist $F_6 = 13$.

L2.3 Nein, er hat nicht vollständig recht. Zwar gilt für eine nichtnegative Funktion f die Gleichung $f(x) = |f(x)|$ und damit ist das erste Gleichheitszeichen erfüllt. Aber für $a > b$ ist das Integral $\int_a^b f(x) dx$ negativ (oder allenfalls gleich 0). Das zweite Gleichheitszeichen stimmt daher nur für $a \leq b$. Die Aussage stimmt also nur mit dieser Einschränkung oder auch dann, wenn man von einem Intervall $[a, b]$ spricht, da bei einem Intervall die erste Grenze immer \leq der zweiten Grenze sein muss.

L2.4 Wir ermitteln zunächst die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen: $f(x) = g(x)$ ist gleichbedeutend mit

$$x^2 + x + 1 = 3x + 4 \quad \text{bzw.} \quad x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x = 1 \pm 2$, also -1 und 3 . Da die Parabel nach oben geöffnet ist, liegt die Gerade zwischen den Schnittpunkten oberhalb der Parabel. Für die eingeschlossene Fläche F gilt daher

$$\begin{aligned} F &= \int_{-1}^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^3 (g(x) - f(x)) dx \\ &= \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 \\ &= -\frac{27}{3} + 9 + 9 - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) = 9 - \left(-\frac{5}{3} \right) = 10\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall einer Parabel und einer Geraden ist zunächst zu ermitteln, ob Schnittpunkte vorliegen. Nur dann, wenn zwei Schnittpunkte bei x_1 und x_2 mit $x_1 \neq x_2$ vorliegen, wird eine Fläche eingeschlossen. Das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x)) dx$$

führt dann stets auf die richtige Fläche, ggf. mit negativem Vorzeichen (bei nach unten geöffneter Parabel). Allerdings kann die Ermittlung des exakten Ergebnisses durchaus ungemütlich sein, wenn in den $x_{1,2}$ Wurzeln enthalten sind.

Für eine kubische Parabel \tilde{f} können bis zu drei verschiedene Schnittpunkte $x_{1,2,3}$ vorliegen. Dann liegt die Parabel teilweise oberhalb der Geraden und teilweise unterhalb, und die beiden Teilflächen müssen separat berechnet werden. Die gesamte

eingeschlossene Fläche ist dann

$$F = \left| \int_{x_1}^{x_2} (\tilde{f}(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} (\tilde{f}(x) - g(x)) dx \right|.$$

L2.5 Wir modellieren den Kanalboden durch eine quadratische Funktion für $x \in [-4, 4]$: Die Parabel $f : x \mapsto x^2/8$ besitzt die Funktionswerte $f(\pm 4) = 2$ und gibt daher die Form des Kanalbodens wieder. Wir betrachten nun die Funktion $f_m : x \mapsto x^2/8 - 2$. Sie besitzt die Nullstellen ± 4 und wir berechnen das Integral

$$\begin{aligned} I_m &= \int_{-4}^4 \left(\frac{x^2}{8} - 2 \right) dx = \left[\frac{x^3}{24} - 2x \right]_{-4}^4 = \frac{64}{24} - 8 + \frac{64}{24} - 8 \\ &= \frac{64}{12} - 16 = 5\frac{1}{3} - 16 = -10\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Der Kanal hat somit eine Querschnittsfläche von $10\frac{2}{3} \text{ m}^2$ und daher auf einer Länge von 1 km ein Volumen von $10\,667 \text{ m}^3$.

Für den bis zur halben Höhe gefüllten Kanal betrachten wir die Funktion $f_h : x \mapsto x^2/8 - 1$. Sie besitzt die Nullstellen $\pm\sqrt{8}$ und wir bilden das Integral

$$I_h = \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\frac{x^2}{8} - 1 \right) dx = \left[\frac{x^3}{24} - x \right]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} = 2 \left(\frac{8\sqrt{8}}{24} - \sqrt{8} \right) = -\frac{4}{3}\sqrt{8} = -\frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

Die mit Wasser gefüllte Querschnittsfläche ist nun also gleich $\frac{8}{3}\sqrt{2} \text{ m}^2 \approx 3.771 \text{ m}^2$ und ergibt die Wassermenge $3\,771 \text{ m}^3$.

L2.6 a) Es ist $1/\sqrt[3]{x^4} = x^{-4/3}$. Wir haben daher

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \left(1/\sqrt[3]{x^4} \right) dx &= \int_1^\infty x^{-4/3} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r x^{-4/3} dx \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-1/3}}{-1/3} \right]_1^r = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{\sqrt[3]{r}} - (-3) \right) = 3, \end{aligned}$$

da $\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt[3]{r} = \infty$ ist. Es wird somit der Flächeninhalt 3 eingeschlossen.

b) Bei der Funktion $x \mapsto e^{-ax}$, $a > 0$, handelt es sich um eine fallende Exponentialfunktion. Eine solche Funktion fällt für $x \rightarrow \infty$ schneller ab als jede Potenzfunktion, also auch schneller als $x^{-2} = 1/x^2$. Daher bleibt ihr Flächeninhalt endlich. Wir können auch einfach nachrechnen:

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-ax} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{a} e^{-ax} \right]_0^r = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{a} e^{-ar} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a}.$$

Für $a = 0$ „funktioniert“ der obige Rechenweg offenbar nicht. Wir haben dann wegen $e^{0 \cdot x} = 1$ die konstante 1-Funktion, die mit der positiven x -Achse offenbar einen unendlich großen Flächeninhalt einschließt. Für $a < 0$ schließlich ist e^{-ax} ein steigender Exponentialausdruck mit erst recht unendlich großem Flächeninhalt.

L3.1 Für $F_1(x)$ substituieren wir $\omega t + \varphi_0 =: z$. Damit ist $dz/dt = \omega$ bzw. $dt = dz/\omega$ und wir erhalten

$$F_1(x) = \int \cos(\omega t + \varphi_0) dt = \int \cos z \frac{dz}{\omega} = \frac{1}{\omega} \sin z = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Die Substitution eines linearen Ausdrucks ist immer problemlos und ergibt hier den Faktor $1/\omega$, der beim Rückwärtsrechnen (Ableiten) die innere Ableitung kompensiert.

Den Integranden von $F_2(x)$ schreiben wir auf als

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

(Additionstheorem des Sinus). Damit ist das Integral leicht auszuführen:

$$F_2(x) = \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{4} \cos(2x).$$

In $F_3(x)$ steht im Zähler des Integranden die Ableitung des Nenners. Daher ergibt die logarithmische Integration sofort

$$F_3(x) = \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \ln(1 + e^x).$$

$$F_4(x) = \int \sqrt{7x+3} dx = \int (7x+3)^{1/2} dx = \frac{1}{7} \frac{(7x+3)^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{21} \sqrt{(7x+3)^3}.$$

In $F_5(x)$ substituieren wir $5x^3 + 1 =: z$, damit ist $dz/dx = 15x^2$ und $dx = dz/15x^2$. Dies ergibt

$$F_5(x) = \int x^2 \sqrt[5]{5x^3+1} dx = \int x^2 \sqrt[5]{z} \frac{dz}{15x^2}.$$

Die Substitution führt also aufgrund des Faktors x^2 im Integranden in gewünschter Weise zum Ergebnis:

$$F_5(x) = \frac{1}{15} \int z^{1/5} dz = \frac{1}{15} \frac{z^{6/5}}{6/5} = \frac{1}{18} \sqrt[5]{(5x^3+1)^6}.$$

Aus $(a^x)' = a^x \ln a$ für $a > 0$ folgt $\int a^x dx = a^x / \ln a$. Dies ergibt

$$F_6(x) = \int 2^{2x+2} dx = \frac{1}{2 \ln 2} 2^{2x+2} = \frac{2^{2x+1}}{\ln 2}.$$

Für $F_7(x)$ verwenden wir die logarithmische Integration:

$$F_7(x) = \int \frac{x}{3x^2 + 7} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{3x^2 + 7} dx = \frac{1}{6} \ln(3x^2 + 7).$$

$F_8(x)$ schreiben wir etwas anders auf und verwenden das „Arcustangens-Integral“:

$$F_8(x) = \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = x - \arctan x.$$

L3.2 Wir ermitteln eine Stammfunktion von f , indem wir das Integral auf das Grundintegral $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$ zurückführen:

$$\int f(x) dx = c \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = c \int \frac{dx}{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{c}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Die Substitution $x/a =: z$ führt nun auf

$$\int f(x) dx = \frac{c}{a} \arctan z.$$

Mit $x \rightarrow \pm\infty$ geht auch $z \rightarrow \pm\infty$, sodass wir auch ohne die Rücksubstitution

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{c}{a} \arctan z \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{c\pi}{a}$$

erhalten. Die Forderung $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ wird somit erfüllt mit der Wahl $c = a/\pi$.

L3.3 Auch wenn das nicht unbedingt notwendig ist, so ist es doch praktisch, zunächst den quadratischen Nenner zu „normieren“ und im Zähler das x nach vorne zu schreiben:

$$I_a = \int \frac{2-x}{a+x+\frac{1}{4}x^2} dx = \int \frac{2-x}{\frac{1}{4}(x^2+4x+4a)} dx = -4 \int \frac{x-2}{x^2+4x+4a} dx.$$

Wir schreiben den Zähler so um, dass er die Ableitung des Nenners enthält:

$$x-2 = \frac{1}{2}(2x+4-4) - 2 = \frac{1}{2}(2x+4) - 4.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} I_a &= -4 \int \frac{\frac{1}{2}(2x+4) - 4}{x^2 + 4x + 4a} dx = -2 \int \frac{2x+4}{x^2 + 4x + 4a} dx + 16 \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4a} \\ &= -2 \ln|x^2 + 4x + 4a| + 16 \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4a}. \end{aligned}$$

Es bleibt das Integral

$$I_a^* = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4a}$$

zu lösen. Wir ermitteln die Nullstellen des Nenners:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 4a} = -2 \pm 2\sqrt{1-a}.$$

Für $a < 1$ besitzt der Nenner somit zwei Nullstellen, für $a = 1$ eine (doppelte) Nullstelle und für $a > 1$ keine Nullstelle. Für die weitere Lösung müssen wir eine entsprechende Fallunterscheidung vornehmen:

(1) $a < 1$: Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch,

$$\frac{1}{x^2 + 4x + 4a} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} = \frac{A(x - x_2) + B(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Es muss somit gelten

$$A(x - x_2) + B(x - x_1) = x(A + B) - Ax_2 - Bx_1 = 1,$$

also

$$A + B = 0 \quad \text{und} \quad -Ax_2 - Bx_1 = 1.$$

Dies ergibt

$$A = -B \quad \text{und} \quad A = \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{4\sqrt{1-a}}$$

und wir haben

$$\begin{aligned} I_{a < 1}^* &= \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4a} = A \int \frac{dx}{x - x_1} + B \int \frac{dx}{x - x_2} \\ &= A(\ln|x - x_1| - \ln|x - x_2|) = A \ln \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right| \\ &= \frac{1}{4\sqrt{1-a}} \ln \left| \frac{x + 2 - 2\sqrt{1-a}}{x + 2 + 2\sqrt{1-a}} \right|. \end{aligned}$$

Speziell erhalten wir für $a = 0$ die Lösung $I_0^* = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{x+4} \right|$ und damit insgesamt

$$I_0 = -2 \ln |x^2 + 4x| + 4 \ln \left| \frac{x}{x+4} \right| = 2 \ln |x| - 6 \ln |x+4|.$$

(2) $a = 1$: Für $a = 1$ haben wir einfach

$$I_1^* = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x+2}$$

und damit insgesamt

$$I_1 = -2 \ln |x^2 + 4x + 4| - \frac{16}{x+2} = -4 \ln |x+2| - \frac{16}{x+2}.$$

(3) $a > 1$: Wir schreiben den Nenner um:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4a &= (x+2)^2 + 4a - 4 = 4(a-1) \left[\frac{1}{4(a-1)}(x+2)^2 + 1 \right] \\ &= 4(a-1) \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{a-1}}(x+2) \right)^2 + 1 \right]. \end{aligned}$$

Das Integral

$$I_{a>1}^* = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4a} = \frac{1}{4(a-1)} \int \frac{dx}{\left(\frac{1}{2\sqrt{a-1}}(x+2) \right)^2 + 1}$$

kann nun mittels der Substitution $\frac{1}{2\sqrt{a-1}}(x+2) =: z$ leicht gelöst werden:

$$\begin{aligned} I_{a>1}^* &= \frac{1}{4(a-1)} \int \frac{2\sqrt{a-1} dz}{z^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a-1}} \arctan z = \frac{1}{2\sqrt{a-1}} \arctan \frac{x+2}{2\sqrt{a-1}} \end{aligned}$$

und wir haben insgesamt

$$I_{a>1} = -2 \ln |x^2 + 4x + 4a| + \frac{8}{\sqrt{a-1}} \arctan \frac{x+2}{2\sqrt{a-1}}.$$

Speziell ist

$$I_2 = -2 \ln |x^2 + 4x + 8| + 8 \arctan \frac{x+2}{2}.$$

L3.4 Für $F_1(x)$ müssen wir zweimal partiell integrieren:

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= \int x^2 e^{-2x} dx = x^2 \frac{e^{-2x}}{-2} - \int 2x \frac{e^{-2x}}{-2} dx \\
 &= -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx \\
 &= -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \left[x \frac{e^{-2x}}{-2} - \int \frac{e^{-2x}}{-2} dx \right] \\
 &= -\frac{x^2}{2} e^{-2x} - \frac{x}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} = -e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right).
 \end{aligned}$$

Es ist $(\ln x)' = 1/x = (\ln(2x))'$ und wir fügen bei $F_2(x)$ eine 1 als Faktor hinzu:

$$\begin{aligned}
 F_2(x) &= \int 1 \cdot \ln(2x) dx = x \ln(2x) - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln(2x) - x. \\
 F_3(x) &= \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Es ist $\int \ln x dx = x \ln x - x$. Also haben wir

$$\begin{aligned}
 F_4(x) &= \int \ln^2 x dx = \int (\ln x)(\ln x) dx \\
 &= (x \ln x - x) \ln x - \int (x \ln x - x) \frac{1}{x} dx \\
 &= x \ln^2 x - x \ln x - \int \ln x dx + \int dx \\
 &= x \ln^2 x - x \ln x - x \ln x + x + x = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x. \\
 F_5(x) &= \int \frac{x-1}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx - \int e^{-x} dx \\
 &= x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) dx - \int e^{-x} dx = -x e^{-x}. \\
 F_6(x) &= \int \cos^3 x dx = \int \cos x \cos^2 x dx \\
 &= \sin x \cos^2 x - \int \sin x \cdot 2 \cos x (-\sin x) dx \\
 &= \sin x \cos^2 x + 2 \int \sin^2 x \cos x dx \\
 &= \sin x \cos^2 x + 2 \int (1 - \cos^2 x) \cos x dx \\
 &= \sin x \cos^2 x + 2 \sin x - 2 \int \cos^3 x dx = \sin x \cos^2 x + 2 \sin x - 2F_6(x).
 \end{aligned}$$

Auflösen nach $F_6(x)$ ergibt nun

$$F_6(x) = \frac{1}{3} \sin x \cos^2 x + \frac{2}{3} \sin x.$$

Es ist $\arcsin' x = 1/\sqrt{1-x^2}$. Damit erhalten wir

$$F_7(x) = \int \arcsin x \, dx = \int 1 \cdot \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Im verbleibenden Integral substituieren wir $1-x^2 =: z$,

$$\begin{aligned} F_7(x) &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{z}} \frac{dz}{-2x} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int z^{-1/2} \, dz \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \frac{z^{1/2}}{1/2} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_8(x) &= \int x \arctan x \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x. \end{aligned}$$

L3.5 Wir versuchen die naheliegende Substitution von $t^2 =: s$,

$$\int t^3 e^{-t^2} \, dt = \int t s e^{-s} \frac{ds}{2t} = \frac{1}{2} \int s e^{-s} \, ds.$$

Das verbleibende Integral lösen wir mittels partieller Integration:

$$\int s e^{-s} \, ds = s(-e^{-s}) - \int (-e^{-s}) \, ds = -s e^{-s} - e^{-s}.$$

Rücksubstitution und Einsetzen der Grenzen ergibt nun

$$F(x) = \int_0^x t^3 e^{-t^2} \, dt = -\frac{1}{2} \left[e^{-t^2} (t^2 + 1) \right]_0^x = -\frac{1}{2} \left(e^{-x^2} (x^2 + 1) - 1 \right).$$

L3.6

- (I) Falsch. Eine stetige Funktion f ist integrierbar, sie besitzt ein unbestimmtes Integral $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ und damit auch eine Stammfunktion. Nur kann diese Stammfunktion nicht „besser“ aufgeschrieben werden.

- (II) Falsch. Das „+c“ steckt in der unteren Grenze a des unbestimmten Integrals. Beispielsweise kann man für die Normalverteilung g die Stammfunktion

$$G(x) := \int_{-\infty}^x g(t) dt \quad \text{bilden oder auch} \quad G_{\mu}(x) := \int_{\mu}^x g(t) dt$$

mit dem Mittelwert μ . Beide unterscheiden sich dann um $1/2$, d. h., es ist $G(x) = G_{\mu}(x) + 1/2$.

- (III) Richtig. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Messwert ist $P(X = \mu) = \int_{\mu}^{\mu} g(t) dt = 0$. Allerdings muss man sich klarmachen, dass es sich bei dieser formalen Antwort um eine exakte Übereinstimmung handelt, d. h. für unendlich viele Nachkommastellen. Tatsächlich hat ein Messverfahren aber eine endliche Ablesegenauigkeit, sodass ein Messwert letztlich einem Intervall und damit einer Wahrscheinlichkeit > 0 entspricht.
- (IV) Richtig. Bei einer kleineren Standardabweichung weichen die Messwerte im Mittel weniger vom Mittelwert ab. Tatsächlich „besser“ ist die Messmethode natürlich nur dann, wenn der statistische Fehler auch der reale Fehler ist. Weicht eine Messmethode systematisch ab, besitzt aber eine kleine Standardabweichung, so ist sie nicht besser als eine andere Messmethode, die auf den ersten Blick weniger genau ist im Sinn einer größeren Streuung der Messwerte, die aber keinen oder einen wesentlich kleineren systematischen Fehler besitzt.

L3.7 a) Es ist

$$P_{q\sigma} = \Phi(q) - \Phi(-q) = \Phi_0(q) - \Phi_0(-q) = 2\Phi_0(q) = \operatorname{erf}(q/\sqrt{2}).$$

Des Weiteren haben wir

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!(2k+1)}$$

und

$$(q/\sqrt{2})^{2k+1} = \frac{q^{2k+1}}{(\sqrt{2})^{2k} \sqrt{2}} = \frac{q^{2k+1}}{2^k \sqrt{2}}.$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} P_{q\sigma} = \operatorname{erf}(q/\sqrt{2}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{2k+1}}{k!(2k+1)2^k} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[q - \frac{q^3}{6} + \frac{q^5}{40} - \frac{q^7}{336} \pm \dots \right]. \end{aligned}$$

Je größer q ist, umso mehr Glieder der Summe müssen berücksichtigt werden, um ein numerisch genaues Ergebnis zu erhalten. Für $q = 2$ etwa ist $q^7/336 = 128/336 \approx 1/3$, die Summe muss daher offenbar noch weiter ausgeführt werden, bis die höheren Korrekturen numerisch irrelevant werden.

b) Die Wahrscheinlichkeit, ein Messergebnis innerhalb der einfachen Standardabweichung σ zu erhalten, ist $P_\sigma \approx 68.3\%$. Die Wahrscheinlichkeit für ein Messergebnis außerhalb ist gleich $1 - P_\sigma$, wovon die Hälfte nach unten und die Hälfte nach oben abweicht. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$P_{>\mu+\sigma} = P_{>105} = \frac{1}{2}(1 - P_\sigma) \approx 15.9\%.$$

Die Standardabweichung des Mittelwerts ist $\bar{\sigma} = \sigma/\sqrt{n} = \sigma/\sqrt{10}$. Eine Abweichung um $\pm\sigma = \pm 5$ entspricht daher einer Abweichung von $\pm\sqrt{10}\bar{\sigma}$. Die Wahrscheinlichkeit für einen Mittelwert in diesem Bereich ist somit gleich $P_{\sqrt{10}\sigma}$ im Sinn unserer ansonsten verwendeten Notation ($P_\sigma, P_{2\sigma}, P_{q\sigma}$ usw.). Für sie gilt nach Aufgabenteil a)

$$P_{\sqrt{10}\sigma} = \operatorname{erf}\left(\sqrt{10}/\sqrt{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{10})^{2k+1}}{k!(2k+1)2^k}.$$

Wir berechnen die Summe probierhalber für die ersten fünf, zehn usw. Glieder, um festzustellen, ab wann sie ein verlässliches Ergebnis liefert. Beispielsweise ergibt in MATLAB die Eingabe

```
syms k
P=sqrt(2./pi)*symsum((-1)^k*sqrt(10)^(2*k+1) /
    (factorial(k)*(2*k+1)*2.^k), k,0,19 )
digits(10)
vpa(P)
```

die Summe der ersten 20 Summanden. Im Einzelnen erhält man:

$$\begin{aligned} P_{\sqrt{10}\sigma}^5 &= 4.417 \\ P_{\sqrt{10}\sigma}^{10} &= 0.7715 \\ P_{\sqrt{10}\sigma}^{15} &= 0.9998986 \\ P_{\sqrt{10}\sigma}^{20} &= 0.9984326 \\ P_{\sqrt{10}\sigma}^{25} &= 0.9984346 \\ P_{\sqrt{10}\sigma}^{30} &= 0.9984346. \end{aligned}$$

Die Summe benötigt also für $q = \sqrt{10}$ zumindest 20 Glieder und ergibt einen Wert von $P_{\sqrt{10}\sigma} \approx 0.99843$. Die Wahrscheinlichkeit für einen Mittelwert außerhalb von

100 ± 5 ist gleich $1 - P_{\sqrt{10}\sigma} \approx 0.00157$ und die Wahrscheinlichkeit für einen Mittelwert > 105 gleich $0.00079 = 0.079\%$. Dabei spielt es keine Rolle, aus wie vielen Messungen eine neue Messkampagne besteht. Die Standardabweichung des Mittelwerts der ursprünglichen Messkampagne gilt für den Mittelwert, ganz egal, wie dieser erneut gemessen wird.

L4.1

- (I) Richtig. Gilt für eine Funktion $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle x , so gilt auch $f(x + 4\pi) = f((x + 2\pi) + 2\pi) = f(x + 2\pi) = f(x)$.
- (II) Falsch. Beispielsweise ist der Sinus periodisch mit 2π , aber nicht periodisch mit π . Vielmehr gilt $\sin(x + \pi) = -\sin x$.
- (III) Falsch. Der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz spielt nur im Zusammenhang mit Grenzwerten eine Rolle. Bei einem trigonometrischen Polynom handelt es sich aber um eine „ganz normale“ endliche Summe. Erst bei den unendlichen Summen einer Fourier-Reihe kann/muss man von Grenzwerten sprechen.
- (IV) Richtig. Ohne konstanten Term hat ein trigonometrisches Polynom die Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)],$$

besteht also aus einer endlichen Summe von Cosinus- und Sinusfunktionen, die allesamt den Mittelwert 0 besitzen.

L4.2 a) Wir verwenden das Additionstheorem für den Cosinus:

$$\cos(x + k\pi) = \cos x \cos(k\pi) - \sin x \sin(k\pi).$$

Für natürliche Zahlen k ist $\sin(k\pi) = 0$ und $\cos(k\pi) = (-1)^k$.

b) Die Integralformeln lassen sich mit zweimaliger partieller Integration ohne Weiteres „vorwärts“ nachrechnen. Wir zeigen sie aber durch Differenziation:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2x}{k^2} \cos(kx) + \left(\frac{x^2}{k} - \frac{2}{k^3} \right) \sin(kx) + c_1 \right)' \\ &= \frac{2}{k^2} \cos(kx) + \frac{2x}{k^2} \sin(kx)(-k) + \frac{2x}{k} \sin(kx) + \left(\frac{x^2}{k} - \frac{2}{k^3} \right) \cos(kx)k \\ &= \frac{2}{k^2} \cos(kx) + x^2 \cos(kx) - \frac{2}{k^2} \cos(kx) = x^2 \cos(kx). \end{aligned}$$

Die zweite Formel rechnest du ganz analog nach :-)

L4.3 a) Das Integral $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ ist offenbar gleich 0, also ist $a_0 = 0$. Für a_k , $k \neq 0$, haben wir:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos(kx) dx - \int_{\pi}^{2\pi} \cos(kx) dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{k} \sin kx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi k} (\sin(k\pi) - \sin 0 - \sin(2k\pi) + \sin(k\pi)) = \frac{1}{\pi k} (0 - 0 - 0 + 0) = 0. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist nicht überraschend: Die Funktion f ist bis auf die Werte an den Sprungstellen punktsymmetrisch zum Ursprung. Kommen wir zu b_k :

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(kx) dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(kx) dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{k} \cos kx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \cos kx \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi k} (-\cos(k\pi) + \cos 0 + \cos(2k\pi) - \cos(k\pi)) \\ &= \frac{1}{\pi k} (2 - 2\cos(k\pi)) = \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k). \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also

$$\mathcal{F}[f](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k) \sin(kx) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^k)}{k} \sin(kx).$$

Der Ausdruck $1 - (-1)^k$ bewirkt, dass Summanden mit geradem k verschwinden, während Summanden mit ungeradem k den Faktor 2 erhalten. Die Summe lässt sich daher auch schreiben als

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin((2l-1)x)}{2l-1}.$$

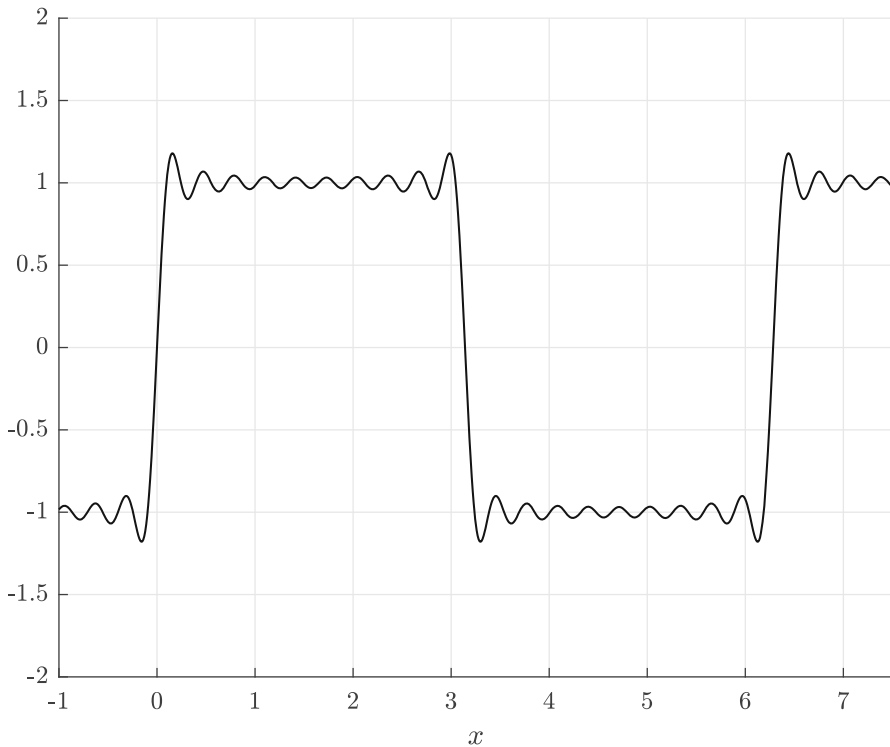


Abb. 7.1 Dargestellt ist die Partialsumme der ersten zehn Glieder der Fourier-Reihe $\mathcal{F}[f](x) = \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \sin((2l-1)x)/(2l-1)$. Sie gibt offenbar näherungsweise die gewünschte Funktion wieder: Im Bereich von 0 bis $\pi \approx 3.14$ liegen Werte in der Nähe von 1 vor und zwischen π und 2π Werte in der Nähe von -1

Die Darstellung der Partialsumme der ersten zehn Glieder lässt sich in MATLAB beispielsweise durch folgende Eingabe erreichen:

```
x=-1:0.01:7.5;
syms k;
y=4/pi*symsum(sin((2*k-1)*x)/(2*k-1),k,1,10);
hold on;
plot(x,y,'k-','LineWidth',0.8);
axis([-1 7.5 -2 2]); grid on;
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex');
xlabel('$x$', 'Interpreter','latex')
```

Das Ergebnis dieser Eingabe ist in Abb. 7.1 dargestellt. Offenbar wird die gewünschte Funktion in korrekter Weise angenähert :-)

b) Die Vollständigkeitsrelation lautet

$$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Dabei haben wir $a_0 = 0$, $a_k = 0$ und $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi$, insgesamt also

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \frac{(1 - (-1)^k)}{k} \right)^2 = \frac{4}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2l-1} \right)^2 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} = 2.$$

Aus diesem Beispiel einer Fourier-Entwicklung haben wir somit die Summenformel

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

gewonnen.

L4.4 a) Ja, die Funktion ist stetig. Der erste Parabelbogen von 0 bis 2π besitzt seinen Scheitelpunkt bei π – also in der Mitte des Intervalls – und die weiteren Parabelbögen schließen sich stetig daran an.

b) Da f nichtnegativ ist, haben wir ein $a_0 > 0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 dx = \frac{1}{\pi} \left. \frac{(x - \pi)^3}{3} \right|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi^2.$$

Da f gerade ist, sind die $b_k = 0$. Die a_k müssen berechnet werden:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x^2 - 2\pi x + \pi^2) \cos(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} x^2 \cos(kx) dx}_{I_1} - 2\pi \underbrace{\int_0^{2\pi} x \cos(kx) dx}_{I_2} + \pi^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(kx) dx}_{=0} \right). \end{aligned}$$

Es bleiben die Integrale I_1 und I_2 zu berechnen. Für I_1 verwenden wir die Formel

$$\int x^2 \cos(kx) dx = \frac{2x}{k^2} \cos(kx) + \left(\frac{x^2}{k} - \frac{2}{k^3} \right) \sin(kx)$$

und erhalten

$$I_1 = \left[\frac{2x}{k^2} \cos(kx) + \left(\frac{x^2}{k} - \frac{2}{k^3} \right) \sin(kx) \right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{k^2} + 0 - 0 = \frac{4\pi}{k^2}.$$

Ferner haben wir

$$I_2 = \int_0^{2\pi} x \cos(kx) \, dx = \underbrace{x \frac{\sin(kx)}{k} \Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\sin(kx)}{k} \, dx}_{=0} = 0$$

und damit insgesamt $a_k = 4/k^2$ und die Fourier-Reihe

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}.$$

c) Da die Funktion f stetig ist, konvergiert ihre Fourier-Reihe gleichmäßig. Mit gleichmäßiger Konvergenz ist natürlich auch ihre punktweise Konvergenz gegeben. Und erst recht konvergiert sie im quadratischen Mittel – das tun alle Fourier-Reihen.

L4.5 a) Wir leiten ab und verwenden das Additionstheorem für den Sinus:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} - \frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} + c \right)' \\ &= \frac{1}{2} \sin((a+b)x) + \frac{1}{2} \sin((a-b)x) \\ &= \frac{1}{2} (\sin(ax) \cos(bx) + \cos(ax) \sin(bx) + \sin(ax) \cos(bx) - \cos(ax) \sin(bx)) \\ &= \sin(ax) \cos(bx). \end{aligned}$$

b) Die Funktion $x \mapsto |\sin x|$ ist gerade. Ihre Fourier-Reihe besitzt daher nur die Koeffizienten a_k , die sich berechnen lassen als

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx.$$

Zunächst ist

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}.$$

Für $k = 1$ haben wir

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = 0,$$

wie aus den Symmetrien von Sinus und Cosinus auf dem Intervall von 0 bis π sofort klar wird. Für $k \geq 2$ können wir die Formel aus Aufgabenteil a) verwenden:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(kx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos((1+k)x)}{2(1+k)} - \frac{\cos((1-k)x)}{2(1-k)} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos((1+k)\pi)}{2(1+k)} - \frac{\cos((1-k)\pi)}{2(1-k)} + \frac{1}{2(1+k)} + \frac{1}{2(1-k)} \right]. \end{aligned}$$

Nun ist $\cos((1 \pm k)\pi) = (-1)^{1 \pm k} = (-1)(-1)^{\pm k} = -(-1)^k$ und wir erhalten weiter

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^k}{2(1+k)} + \frac{(-1)^k}{2(1-k)} + \frac{1}{2(1+k)} + \frac{1}{2(1-k)} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^k}{k+1} - \frac{(-1)^k}{k-1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^k((k-1) - (k+1)) + k-1 - (k+1)}{(k-1)(k+1)} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^k(-2) - 2}{(k-1)(k+1)} = -\frac{2}{\pi} \frac{1 + (-1)^k}{(k-1)(k+1)}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck im Zähler ist für gerade k gleich 2 und für ungerade k gleich 0. Die Fourier-Reihe lautet somit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](x) &= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k}{(k-1)(k+1)} \cos(kx) \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{2}{(k-1)(k+1)} \cos(kx) \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos(2x)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4x)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6x)}{5 \cdot 7} + \dots \right]. \end{aligned}$$

L4.6 a) Die Fourier-Transformierte ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt e^{-i\omega t} e^{-at} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt e^{(-i\omega-a)t} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{(-i\omega-a)t}}{-i\omega-a} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega t} e^{-at}}{-i\omega-a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(0 - \frac{1}{-i\omega-a} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2}.
 \end{aligned}$$

b) Es ist

$$g(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & \text{für } t \geq 0 \\ e^{at} & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 G(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} g(t) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 dt e^{-i\omega t} e^{at}}_{=I} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt e^{-i\omega t} e^{-at}}_{=F(\omega) \text{ aus a)}.
 \end{aligned}$$

Es bleibt das Integral I zu betrachten:

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\infty} dt e^{-i\omega t} e^{at} \stackrel{-t \equiv \tilde{t}}{=} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (-d\tilde{t}) e^{i\omega \tilde{t}} e^{-a\tilde{t}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} d\tilde{t} e^{(i\omega-a)\tilde{t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} d\tilde{t} e^{i\omega \tilde{t}} e^{-a\tilde{t}}.
 \end{aligned}$$

Wegen $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist nun I nichts anderes als $\overline{F(\omega)}$ und wir haben

$$G(\omega) = F(\omega) + \overline{F(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \omega^2}.$$

Für größer werdende Werte a fällt die exponentielle Funktion g schneller gegen 0 ab – sie wird also „schmäler“, während die Funktion G für größere a breiter wird.

L5.1 a) Die gesuchte Fläche ist

$$F = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^a = \lim_{a \rightarrow \infty} [-e^{-a} - (-1)] = 1.$$

b) Das gesuchte Volumen entspricht dem Integral

$$V = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy e^{-(x+y)}.$$

Wegen $e^{-(x+y)} = e^{-x} e^{-y}$ zerfällt dieses Doppelintegral einfach in ein Produkt aus zwei Einfachintegralen:

$$V = \left(\int_0^{\infty} dx e^{-x} \right) \left(\int_0^{\infty} dy e^{-y} \right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

c) Nein, bei b) handelt es sich nicht um das Viertel-Rotationsvolumen des Graphen von $x \mapsto e^{-x}$. Dieses wird vielmehr gegeben durch

$$V_R = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy e^{-\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Dieses Integral kann mit einem Wechsel zu Polarkoordinaten berechnet werden:

$$V_R = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} dr r e^{-r} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} dr r e^{-r}.$$

Mit partieller Integration haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dr r e^{-r} &= r(-e^{-r}) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-r}) dr = [-r e^{-r} - e^{-r}]_0^{\infty} \\ &= 0 - (-1) = 1 \end{aligned}$$

und damit insgesamt $V_R = \pi/2$.

L5.2

- (I) Falsch. Aus Stetigkeit folgt keine Differenzierbarkeit, auch nicht die partielle Differenzierbarkeit. Denkt man an Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, so können stetige Funktionsgraphen ohne Weiteres „Knicke“ oder „Spitzen“ aufweisen, die keine Ableitung erlauben.

- (II) Falsch. Aus der partiellen Differenzierbarkeit folgt noch keine Stetigkeit. Das ist erst bei totaler Differenzierbarkeit oder stetiger partieller Differenzierbarkeit gegeben.
- (III) Richtig. Der \mathbb{R}^n ist abgeschlossen, weil sein Komplement \emptyset offen ist.
- (IV) Falsch. Der \mathbb{R}^n ist nicht kompakt, weil er nicht beschränkt ist.
- (V) Richtig. Der Quader kann zu einem Rechteck „entartet“ sein (oder auch zu einer Strecke oder einem Punkt). Beispielsweise ist der Quader $Q = [0, 1] \times [0, 1] \times [1, 1]$ nicht leer, da $(1, 1, 1) \in Q$, und besitzt das Volumen 0.
- (VI) Richtig. Da ein kompakter Quader beschränkt ist, müssen seine Kantenlängen endlich sein. Damit bleibt auch sein Volumen, das gleich dem Produkt seiner drei Kantenlängen ist, endlich.

L5.3 a) Ja, χ_M besitzt einen kompakten Träger. Der kleinste abgeschlossene Quader Q , für den $\text{supp}(\chi_M) \subseteq Q$ gilt, ist der Würfel

$$Q = [a_1 - R, a_1 + R] \times [a_2 - R, a_2 + R] \times [a_3 - R, a_3 + R].$$

b) Die Funktion χ_M ist nicht stetig. Sie springt am Rand der Menge $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < R\}$ vom Funktionswert 0 zum Wert 1. Die Funktion ist somit halbstetig von unten. Sie ist nicht halbstetig von oben.

c) Die Menge M ist eine dreidimensionale Kugel mit dem Radius R . Sie besitzt das Volumen $\frac{4}{3}\pi R^3$.

L5.4 a) Es ist $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ und $z = z$. Die Funktionaldeterminante lautet daher

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

und das Volumenelement

$$dx \, dy \, dz = r \, dr \, d\varphi \, dz.$$

b) Das Volumen des Zylinders ist

$$V = \int_{\substack{x^2+y^2 \leq R^2 \\ 0 \leq z \leq h}} dx \, dy \, dz = \int_0^R r \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi \cdot h = \pi R^2 h.$$

L5.5 Wir haben

$$V_H(\mathbf{a}) = G \int_H d^3x \frac{\varrho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|}$$

zu berechnen. Aufgrund der Radialsymmetrie können wir $\mathbf{a} = (0, 0, a)$ mit $a < R_1$ annehmen. Für den Abstand eines Punkts $\mathbf{x} \in H$ mit den Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) vom Punkt \mathbf{a} gilt

$$|\mathbf{x} - (0, 0, a)|^2 = r^2 \sin^2 \vartheta + (r \cos \vartheta - a)^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta$$

(diese Gleichung bleibt tatsächlich für sämtliche Lagen von \mathbf{x} richtig – prüfe das einmal nach und beachte dabei auch das Vorzeichen von $\cos \vartheta$ für $\vartheta > \pi/2$). Das Volumenintegral lautet daher in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} V_H(a) &= G \int_{R_1}^{R_2} dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{r^2 \sin \vartheta \varrho(r)}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta}} \\ &= 2\pi G \int_{R_1}^{R_2} dr r^2 \varrho(r) \int_0^\pi d\vartheta \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta}}. \end{aligned}$$

Für die ϑ -Integration verwenden wir die Substitution $t = -\cos \vartheta$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta}} &= \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2art}} = \frac{1}{ar} \sqrt{a^2 + r^2 + 2art} \Big|_{t=-1}^1 \\ &= \frac{1}{ar} \left(\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar} - \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar} \right) \\ &= \frac{1}{ar} \left(\sqrt{(a+r)^2} - \sqrt{(a-r)^2} \right) \\ &= \frac{1}{ar} (a+r - (r-a)) = \frac{2a}{ar} = \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

Hier ist zu beachten, dass wir $a < R_1$ und $R_1 \leq r \leq R_2$ haben. Daher ist $\sqrt{(a-r)^2} = |a-r| = r-a$. Insgesamt haben wir damit das Ergebnis

$$V_H(a) = 4\pi G \int_{R_1}^{R_2} dr r \varrho(r).$$

Das r -Integral kann nur bei bekanntem Dichteverlauf ausgeführt werden, z. B. wenn man ϱ als konstant annimmt. Entscheidend ist aber, dass das Potenzial im Inneren einer radialsymmetrischen Hohlkugel nicht von a abhängt: Es ist konstant. Da die Gravitationsbeschleunigung der Ableitung des Potenzials entspricht (es ist $\mathbf{g} = -\nabla V$), bedeutet dies, dass eine radialsymmetrische Hohlkugel im Inneren keine Gravitationskraft erzeugt.

L6.1 a)

$$|a - b_1| = \sqrt{0 + 0 + 1} = 1$$

$$|a - b_2| = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$$

$$|a - b_3| = \sqrt{0.01 + 0.01 + 0.01} = \sqrt{0.03} = 0.1\sqrt{3}$$

$$|a - b_4| = \sqrt{3 \cdot 10^{-6}} = 0.001\sqrt{3}.$$

b) Wie man Aufgabenteil a) entnimmt, liegt nur der Punkt b_4 in der Kugel, da alle anderen Abstände ≥ 0.1 sind.

c) Wir können beispielsweise zwei offene Kugeln um a bzw. um b_4 wählen, für die die Summe ihrer Radien $\leq 0.001\sqrt{3}$ ist. Also etwa $K_{0.001}(a)$ und $K_{0.0005}(b_4)$.

L6.2 a)

\mathbb{R} : $]0, 1[$ ist offen, $[0, 1]$ ist abgeschlossen

\mathbb{R}^2 : $]0, 1[\times]0, 1[$ ist offen, $[0, 1] \times [0, 1]$ ist abgeschlossen

\mathbb{R}^3 : $]0, 1[\times]0, 1[\times]0, 1[$ ist offen, $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ ist abgeschlossen.

Natürlich gibt es unzählige andere einfache Beispiele.

b) Die Menge $]0, 1[$ ist nicht offen, weil sie keine Umgebung ihres Punkts 0 ist. Die Menge ist nicht abgeschlossen, weil ihr Komplement $] -\infty, 0[\cup]1, \infty[$ nicht offen ist (keine Umgebung des Punkts 1). Die Menge ist beschränkt, weil sie vollständig in $K_2(0)$ liegt. Die Menge ist nicht kompakt, weil sie nicht abgeschlossen ist.

c) Die Menge $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1[$ ist weder offen noch abgeschlossen.

L6.3 a) Es ist $x(1) = (2, 0)$ und $y(1) = (16, 0)$.

b) Wir setzen die Kurven gleich: $x(t) = y(s)$ heißt

$$2t = 16s^2$$

$$t^2 - 1 = s - 1.$$

Wir setzen die zweite Gleichung $s = t^2$ in die erste ein:

$$2t = 16t^4$$

besitzt die Lösungen $t_1 = 0$ und $t_2^3 = 1/8$, also $t_2 = 1/2$. Dies entspricht den Parameterwerten $s_1 = t_1^2 = 0$ und $s_2 = t_2^2 = 1/4$ der Kurve y . Die Schnittpunkte liegen bei $(0, -1)$ und $(1, -3/4)$.

c) Für die Schnittwinkel benötigen wir die Tangentenvektoren: Zunächst haben wir

$$\dot{x}(t) = (2, 2t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(s) = (32s, 1).$$

Am ersten Schnittpunkt lauten die Tangentenvektoren somit $\dot{\mathbf{x}}(0) = (2, 0)$ und $\dot{\mathbf{y}}(0) = (0, 1)$. Diese Vektoren sind orthogonal zueinander, sie schließen einen Winkel von 90° ein. Am zweiten Schnittpunkt haben wir $\dot{\mathbf{x}}(1/2) = (2, 1)$ und $\dot{\mathbf{y}}(1/4) = (8, 1)$ und

$$\cos \alpha = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(s)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)| |\dot{\mathbf{y}}(s)|} = \frac{17}{\sqrt{5} \sqrt{65}}.$$

Der Taschenrechner ergibt den Winkel $\alpha \approx 19.44^\circ$.

L6.4 a) Es ist

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \left(\frac{e^{t/2\pi}}{2\pi} \cos t - e^{t/2\pi} \sin t, \frac{e^{t/2\pi}}{2\pi} \sin t + e^{t/2\pi} \cos t \right) \\ &= e^{t/2\pi} \left(\frac{\cos t}{2\pi} - \sin t, \frac{\sin t}{2\pi} + \cos t \right). \end{aligned}$$

Wir haben daher

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= (1, 0), & \dot{\mathbf{x}}(0) &= (1/2\pi, 1), \\ \mathbf{x}(\pi) &= (-\sqrt{e}, 0), & \dot{\mathbf{x}}(\pi) &= \sqrt{e}(-1/2\pi, -1). \end{aligned}$$

b) Der Verlauf der Spirale lässt sich ohne Weiteres mit Bleistift auf Papier skizzieren. Es handelt sich um einen „Kreis mit anwachsendem Radius“, der bei $1/e \approx 1/3$ beginnt und nach zwei Umläufen den Wert $e \approx 3$ erreicht hat. In MATLAB kann die Kurve durch folgende Eingabe geplottet werden:

```
t=-2*pi:0.01:2*pi;
x=exp(t/(2*pi)).*cos(t);
y=exp(t/(2*pi)).*sin(t);
hold on;
plot(x,y,'k-','LineWidth',0.8);
axis([-3 3 -3 3]);
axis equal, grid on;
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex');
xlabel('\$x\$','Interpreter','latex');
ylabel('\$y\$','Interpreter','latex')
```

Siehe Abb. 7.2.

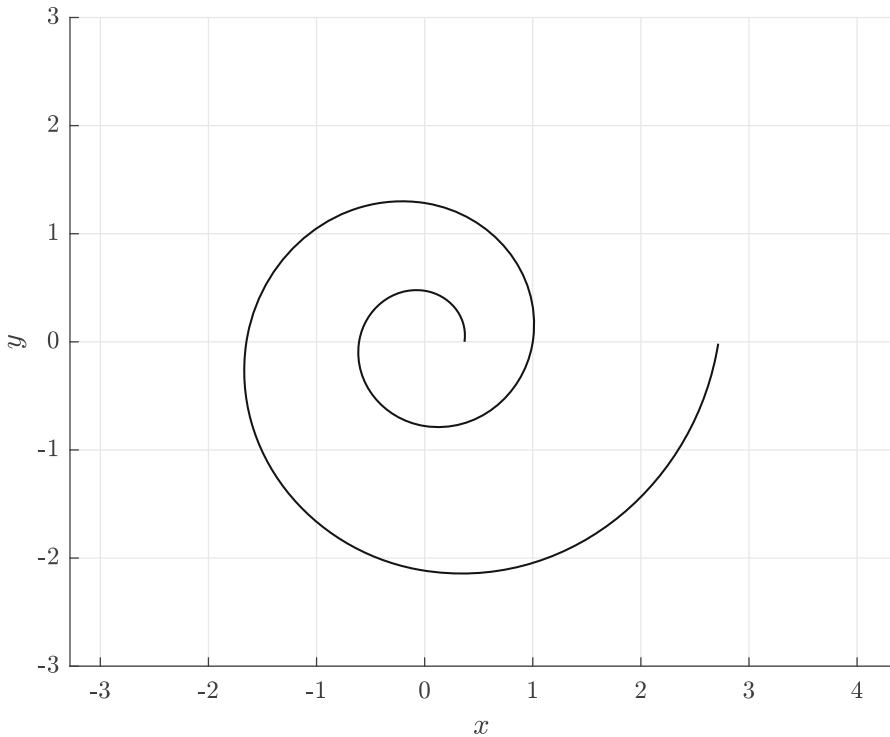


Abb. 7.2 Die logarithmische Spirale $t \mapsto (x, y) = (e^{t/2\pi} \cos t, e^{t/2\pi} \sin t)$ für $t \in [-2\pi, 2\pi]$. Sie hat etwa die Länge 15

Da es sich bei der Spirale um eine stetig differenzierbare Kurve handelt, ergibt sich ihre Länge aus

$$s = \int_{-2\pi}^{2\pi} |\dot{\mathbf{x}}(t)| \, dt.$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 &= \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= e^{t/\pi} \left(\frac{\cos t}{2\pi} - \sin t, \frac{\sin t}{2\pi} + \cos t \right) \cdot \left(\frac{\cos t}{2\pi} - \sin t, \frac{\sin t}{2\pi} + \cos t \right) \\ &= e^{t/\pi} \left[\frac{\cos^2 t}{4\pi^2} + \sin^2 t - \frac{\cos t \sin t}{\pi} + \frac{\sin^2 t}{4\pi^2} + \cos^2 t + \frac{\sin t \cos t}{\pi} \right] \\ &= e^{t/\pi} \left[\frac{1}{4\pi^2} + 1 \right], \end{aligned}$$

wobei wir zweimal $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ verwendet haben. Es ist also

$$\begin{aligned}
 s &= \int_{-2\pi}^{2\pi} |\dot{\mathbf{x}}(t)| \, dt \\
 &= \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{t/2\pi} \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}} \, dt = \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}} \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{t/2\pi} \, dt \\
 &= \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}} [2\pi e^{t/2\pi}]_{-2\pi}^{2\pi} = 2\pi \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}} (e - e^{-1}) \\
 &= \sqrt{4\pi^2 + 1} \left(e - \frac{1}{e} \right) \approx 15.
 \end{aligned}$$

L6.5 a) Der Radius der Kreisbahn des Satelliten ist $r = 6370 \text{ km} + 1720 \text{ km} = 8090 \text{ km}$ und seine Umlaufzeit beträgt 2 h. Das heißt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= r \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \omega = 2\pi/2 \text{ h} = \pi/\text{h} \\
 &= 8090 \text{ km} \begin{pmatrix} \cos(\pi t/\text{h}) \\ \sin(\pi t/\text{h}) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

b) Der Vektor der Geschwindigkeit des Satelliten ergibt sich aus der Ableitung seines Orts:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = r\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix} = 8090\pi \text{ km/h} \begin{pmatrix} -\sin(\pi t/\text{h}) \\ \cos(\pi t/\text{h}) \end{pmatrix}.$$

Sein Betrag

$$|\mathbf{v}(t)| = 8090\pi \text{ km/h} \sqrt{(-\cos \omega t)^2 + (\sin \omega t)^2} = 8090\pi \text{ km/h}$$

ist unabhängig von t .

c) Der zweite Satellit ist auf der Bahn

$$\mathbf{x}_2(t) = r \begin{pmatrix} \cos(\omega(t - \text{h}/6)) \\ \sin(\omega(t - \text{h}/6)) \end{pmatrix} = 8090 \text{ km} \begin{pmatrix} \cos(\pi(\frac{t}{\text{h}} - \frac{1}{6})) \\ \sin(\pi(\frac{t}{\text{h}} - \frac{1}{6})) \end{pmatrix}.$$

d) Der Abstand der beiden Satelliten ist zeitlich konstant. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ergibt er sich aus

$$\begin{aligned} s &= |\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_2(0)| = 8090 \text{ km} \left| \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(-\pi/6) \\ \sin(-\pi/6) \end{pmatrix} \right| \\ &= 8090 \text{ km} \left| \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right| = 8090 \text{ km} \sqrt{1 + 3/4 - \sqrt{3} + 1/4} \\ &= 8090 \text{ km} \sqrt{2 - \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Die Laufzeit des Signals ist daher

$$t = \frac{s}{c} = \frac{8090 \text{ km} \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{300\,000 \text{ km/s}} = \frac{8090 \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{300\,000} \text{ s} = 0.01396 \text{ s}.$$

L6.6

- (I) Falsch. Die Stetigkeit schließt nicht aus, dass es Punkte gibt, in denen die Kurve nicht differenzierbar ist oder die Ableitung $\mathbf{0}$ besitzt. Dort besitzt sie keine eindeutige Tangente.
- (II) Richtig. Der Kurvenpunkt $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ kann als Ortsvektor eines Punkts aufgefasst werden. Er hängt von dem Kurvenparameter t ab, der als Zeit interpretiert werden kann.
- (III) Falsch. Die Kurvenpunkte müssen gleich sein, unabhängig davon, welchen Wert die Kurvenparameter an dieser Stelle besitzen. Die Parameter müssen keineswegs gleich sein und sind es in der Regel auch nicht.
- (IV) Falsch. In einem singulären Punkt besitzt eine Kurve per Definition die Ableitung $\mathbf{0}$. Sie ist also sehr wohl differenzierbar.
- (V) Richtig. Natürlich kann eine „Kurve“, also ein zeitabhängiger Ortsvektor, auch eine Gerade darstellen.
- (VI) Falsch. Auch eine Gerade besitzt eine konstante Krümmung, nämlich die Krümmung 0.

L6.7 a)

$$\begin{aligned} f(1, 2, -3) &= 3 \cdot (-3) \cdot \exp(-\sqrt{1+4}) \sin k = -9 e^{-\sqrt{5}} \sin k \\ f\left(\frac{\pi}{2k}, 0, 1\right) &= 3 \exp(-\pi/2k) \sin(\pi/2) = 3 e^{-\pi/2k}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3z \left(e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin(kx) + e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \cos(kx) k \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3z e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin(kx) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 3 e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \sin(kx) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= 3 \left(e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin(kx) + e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \cos(kx) k \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2} &= 0.\end{aligned}$$

L6.8 Es ist $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_x x + k_y y + k_z z$. Wir leiten ab:

$$\begin{aligned}\partial_x u &= u_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \varphi_0) (-k_x) \\ \partial_x^2 u &= -u_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \varphi_0) k_x^2 = -k_x^2 u \\ \partial_t u &= u_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \varphi_0) \omega \\ \partial_x^2 u &= -u_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \varphi_0) \omega^2 = -\omega^2 u.\end{aligned}$$

Die y - und z -Ableitungen erfolgen analog. Somit haben wir

$$\Delta u = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \right) u = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \right) u = -\mathbf{k}^2 u = a(-\omega^2) u$$

und die Gleichung ist erfüllt für $a = \mathbf{k}^2 / \omega^2$.**L6.9 a)** Die Funktionsvorschrift $V(\mathbf{x}) = c/|\mathbf{x}|$ hängt nur von $|\mathbf{x}| = r$ ab. Daher haben wir

$$\mathbf{F} = -\nabla V(r) = -V'(r) \frac{\mathbf{x}}{r} = \frac{c}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r} = c \frac{\mathbf{x}}{r^3} = c \frac{\mathbf{x}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

b) Wie wir in a) gesehen haben, ist

$$\partial_x V = -c \frac{x}{r^3} = -c \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Wir leiten erneut nach x ab:

$$\partial_x^2 V = -c \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - x(3/2)(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(2x)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = -c \frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6}.$$

Analog ist

$$\partial_y^2 V = -c \frac{r^3 - 3y^2 r}{r^6} \quad \text{und} \quad \partial_z^2 V = -c \frac{r^3 - 3z^2 r}{r^6}.$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \varrho &= \partial_x^2 V + \partial_y^2 V + \partial_z^2 V = -c \frac{r^3 - 3x^2 r + r^3 - 3y^2 r + r^3 - 3z^2 r}{r^6} \\ &= -c \frac{3r^3 - 3r(x^2 + y^2 + z^2)}{r^6} \\ &= -c \frac{3r^3 - 3r \cdot r^2}{r^6} = 0. \end{aligned}$$

Ein Potenzial der Form $V(r) = c/r$ erfüllt also die Laplace-Gleichung $\Delta V = 0$.

L6.10 a) Es ist

$$\begin{aligned} \partial_x f &= \cos(xy) y e^{1-z^2} (y^2 + z^2) \\ \partial_y f &= e^{1-z^2} (\cos(xy) x (y^2 + z^2) + \sin(xy) \cdot 2y) \\ \partial_z f &= \sin(xy) (e^{1-z^2} (-2z) (y^2 + z^2) + e^{1-z^2} \cdot 2z) \\ &= 2z \sin(xy) e^{1-z^2} (1 - y^2 - z^2), \end{aligned}$$

also

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 2 \\ \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 2 + 1 \\ -2 \cdot \frac{1}{2} (1 - 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{\pi}{6} \sqrt{3} + 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wir haben $f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ und damit die lineare Näherung

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) &\approx f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \Delta \mathbf{x} \\ &= 1 + \sqrt{3} \Delta x + \left(\frac{\pi}{6} \sqrt{3} + 1 \right) \Delta y + \Delta z. \end{aligned}$$

c) Der exakte Funktionswert ist

$$f\left(\frac{\pi}{6} + 0.1, 1.1, -0.9\right) = 1.5472.$$

Die nullte Näherung ist 1, die lineare Näherung ist

$$f\left(\frac{\pi}{6} + 0.1, 1.1, -0.9\right) \approx 1 + \sqrt{3} \cdot 0.1 + \left(\frac{\pi}{6} \sqrt{3} + 1\right) \cdot 0.1 + 0.1 = 1.4639.$$

L6.11 a) Wir ermitteln den Gradienten von f im Punkt $(2, -1)$:

$$\nabla f = \left(\frac{e^{x+y}(x^2+2) - e^{x+y} \cdot 2x}{\left(\frac{e^{x+y}}{x^2+2}\right)^2} \right) = \frac{e^{x+y}}{x^2+2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{2x}{x^2+2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

also

$$\nabla f(2, -1) = \frac{e}{6} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion f steigt im Punkt $(2, -1)$ also in Richtung $(1, 3)$ maximal an mit der Steigung

$$m = |\nabla f(2, -1)| = \frac{e}{6} \sqrt{\frac{1}{9} + 1} = \frac{e\sqrt{10}}{18} \approx 0.4776.$$

b) Vom Punkt $(2, -1)$ in Richtung auf den Ursprung ist die entgegengesetzte Richtung $(-2, 1)$. Wir haben also den normierten Richtungsvektor

$$e = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Richtungsableitung

$$\begin{aligned} \partial_e f(2, -1) &= e \cdot \nabla f(2, -1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{e}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e}{6\sqrt{5}} \cdot (-2/3 + 1) = \frac{e}{18\sqrt{5}} \approx 0.0675. \end{aligned}$$

L6.12 a) Wir haben hier letztlich eine Bruchrechenaufgabe:

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - 3 + \frac{2}{3} + 6 = \frac{145}{36}.$$

b) Es ist

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 6 \\ 2y + 2 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ ist daher erfüllt für $x = 3$ und $y = -1$ und wir haben genau einen stationären Punkt an der Stelle $(3, -1)$.

c) Da die Funktion f partiell differenzierbar ist, kann ein lokales Extremum höchstens an ihrem stationären Punkt vorliegen. Die Hesse-Matrix

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist in diesem Beispiel konstant und sie ist positiv definit. Daher liegt im Punkt $(3, -1)$ ein lokales Minimum mit dem Funktionswert $f(3, -1) = -4$ vor.

L6.13 a) Wir haben

$$\begin{aligned}\partial_x f &= e^{-x^2-4y^2} (8x + (4x^2 + y^2)(-2x)) = e^{-x^2-4y^2} (8x - 8x^3 - 2xy^2) \\ \partial_y f &= e^{-x^2-4y^2} (2y + (4x^2 + y^2)(-8y)) = e^{-x^2-4y^2} (2y - 32x^2y - 8y^3).\end{aligned}$$

Da Exponentialausdrücke stets ungleich 0 sind, ist die Bedingung $\nabla f = \mathbf{0}$ gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}8x - 8x^3 - 2xy^2 &= 2x(4 - 4x^2 - y^2) = 0 \\ 2y - 32x^2y - 8y^3 &= 2y(1 - 16x^2 - 4y^2) = 0.\end{aligned}$$

Der erste stationäre Punkt ist daher $S_1 = (0, 0)$. Für $x = 0$ bleibt die erste Gleichung erfüllt: Einsetzen von $x = 0$ in die zweite Gleichung führt auf $1 - 4y^2 = 0$ und damit auf die zwei weiteren stationären Punkte $S_{2,3} = (0, \pm 1/2)$. Die zweite Gleichung bleibt mit $y = 0$ erfüllt: In der ersten Gleichung führt dies auf $4 - 4x^2 = 0$ und zwei weitere stationäre Punkte $S_{4,5} = (\pm 1, 0)$. Die verbleibende Möglichkeit

$$4 - 4x^2 - y^2 = 0 \quad \text{und} \quad 1 - 16x^2 - 4y^2 = 0$$

ist nicht lösbar und ergibt keinen weiteren stationären Punkt.

b) Wir benötigen die Hesse-Matrix, also die zweiten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}\partial_{xx} f &= e^{-x^2-4y^2} ((-2x)(8x - 8x^3 - 2xy^2) + 8 - 24x^2 - 2y^2) \\ &= e^{-x^2-4y^2} (8x^4 - 40x^2 + 4x^2y^2 - 2y^2 + 8) \\ \partial_{xy} f &= e^{-x^2-4y^2} ((-8y)(8x - 8x^3 - 2xy^2) - 4xy) \\ &= e^{-x^2-4y^2} (64x^3y - 68xy + 16xy^3) \\ \partial_{yy} f &= e^{-x^2-4y^2} ((-8y)(2y - 32x^2y - 8y^3) + 2 - 32x^2 - 24y^2) \\ &= e^{-x^2-4y^2} (256x^2y^2 - 32x^2 + 64y^4 - 40y^2 + 2).\end{aligned}$$

Dies ergibt für die stationären Punkte:

- $S_1 = (0, 0)$: Die Hesse-Matrix lautet

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sie ist positiv definit und wir haben ein isoliertes lokales Minimum.

- $S_{2,3} = (0, \pm 1/2)$: Die Hesse-Matrix

$$H_f(0, \pm 1/2) = \begin{pmatrix} \frac{15}{2}e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{pmatrix}$$

ist indefinit. Somit liegen hier keine lokalen Extrema, sondern Sattelpunkte vor.

- $S_{4,5} = (\pm 1, 0)$: Auch die Hesse-Matrix

$$H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -24e^{-1} & 0 \\ 0 & 30e^{-1} \end{pmatrix}$$

ist indefinit.

Somit haben wir nur an der Stelle $(0, 0)$ ein lokales Minimum mit dem Funktionswert $f(0, 0) = 0$.

L6.14

- (I) Falsch. Es ist $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2)/2 = 0$ für $x^2 + y^2 = 2$, also auf dem Kreis mit dem Radius $\sqrt{2}$ um $(0, 0)$.
- (II) Falsch. Zwar stimmt das für partiell differenzierbare Funktionen. Ansonsten kann eine Funktion aber auch „Spitzen“ besitzen, an denen sie nicht differenzierbar ist und an denen ein isoliertes Extremum vorliegt.
- (III) Richtig. Die Hesse-Matrix ist die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen,

$$H_g(\mathbf{x}) := \left(\partial_i \partial_j g(\mathbf{x}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Es handelt sich um eine $n \times n$ -Matrix.

- (IV) Richtig. Beispielsweise ist $h(x, y) = 0$ für $x = 0$ und beliebige $y \in \mathbb{R}$.
- (V) Falsch. Es ist $\nabla h = (y, x) = \mathbf{0}$ nur für $y = 0$ und $x = 0$.
- (VI) Falsch. Zunächst ist die Hesse-Matrix gleich der Nullmatrix und damit weder positiv noch negativ definit noch indefinit, sie erlaubt also keine Entscheidung. Bewegt man sich jedoch von der Stelle $(0, 0)$ mit dem Funktionswert 0 weg, so bleiben die Funktionswerte für $x = 0$ oder $y = 0$ gleich 0. Ein isoliertes Extremum kann daher nicht vorliegen. Da die Funktionswerte in der Umgebung von $(0, 0)$ darüber hinaus für $xy > 0$ positiv sind und für $xy < 0$ negativ, liegt auch kein nicht isoliertes Extremum vor.

Stichwortverzeichnis

A

abgeschlossene Menge, 185
Ableitung der Umkehrfunktion
Satz zur, 37
Abstand, 178
Äquidistante Unterteilung, 13

B

beschränkte Menge, 185
bestimmtes Integral, 32

C

charakteristische Funktion, 154

D

Definitheit, 231
differenzierbar
partiell, 212
total, 220

Dini

Satz von, 146

Dirichlet-Funktion, 12

E

Ellipse, 202
Ellipsoid, 169
elliptisches Integral, 75
erf, 83
Euler-Formel, 104

F

fast alle, 187
fast überall gleich, 161
Fehlerfortpflanzung, 226
Flächenelement, 163
Fourier-Integral, 127
Fourier-Koeffizienten, 110
Fourier-Reihe, 110
für beliebige Periodenlänge, 126
Fourier-Transformierte, 128
französische Metrik, 180
Fundamentalbeispiel, 113
Funktion
beschränkte, 8
differenzierbare, 8, 212, 220
halbstetige, 151
konkave, 20
konvexe, 20
monotone, 8
periodische, 96
stetige, 8, 151, 189
Funktionaldeterminante, 164, 165

G

Gauß-Verteilung, 77
Geschwindigkeit, 194
Gibbs-Phänomen, 121
Gradient, 215
Graph, 211
Gravitationsbeschleunigung, 216
Gravitationsgesetz, 217
Gravitationspotenzial, 171, 216
Grenzwert, 187

H

halbstetig, 151
 Hauptsatz
 der Differenzial- und Integralrechnung, 34
 für Fourier-Reihen, 111
 Heine-Borel
 Satz von, 186
 Hesse-Matrix, 218
 hinreichendes Kriterium, 234
 Histogramm, 88
 Höhenlinie, 211
 Hurwitz-Kriterium, 232
 Hyperbel, 41
 Hyperebene, 160

I

indefinit, 231
 Indikatorfunktion, 154
 Integral, 3
 bestimmtes, 32
 Fläche, 4
 unbestimmtes, 32
 uneigentliches, 39
 von Treppenfunktionen, 3
 Integral von
 $1/x$, 36
 $1/(1+x^2)$, 38, 43
 $1/\sqrt{1-x^2}$, 38
 $\arcsin x$, 255
 $\arctan x$, 69
 $\cos^2 x$, 60
 $\cos^n x$, 72
 $\cos x$, 37
 $e^{ax} \cos(kx)$, 70
 $e^{ax} \sin(kx)$, 70
 e^{ikx} , 107
 $\exp(x)$, 37, 49
 $\ln^2 x$, 254
 $\ln x$, 68
 $(mx+n)/(ax^2+bx+c)$, 62
 $\sin^2 x$, 27
 $\sin(kx) \cos(lx)$, 72
 $\sin^n x$, 71
 $\sin x$, 37
 $\tan x$, 59
 $\sqrt{1-x^2}$, 60
 \sqrt{x} , 36
 $x^3 e^{-x^2}$, 255
 $x^n \cos(kx)$, 68
 $x \arctan x$, 255
 $x e^{x^2}$, 57
 $x^n \exp(kx)$, 68

x^s , 36

integraler Mittelwert, 26

J

Jacobi-Matrix, 164

K

kanonisches Skalarprodukt, 180
 Kettenregel, 55
 klein o , 221
 Klotoide, 207
 kompakte Menge, 185
 Komplement, 185
 konkav, 20
 konvergente Folge, 187
 Konvergenz
 gleichmäßige, 44, 111
 im quadratischen Mittel, 110
 punktweise, 111
 konvex, 20
 Koordinatentransformation
 lineare, 166
 Krümmung, 205
 Krümmungskreis, 207
 Kugelkoordinaten, 168
 Kurve, 190
 ebene, 206
 reguläre, 194
 rektifizierbare, 198
 singuläre, 194
 Kurvenlänge, 198

L

Landau-Symbol, 221
 Laplace-Gleichung, 220, 274
 Laplace-Operator, 220
 Lebesgue-Integral, 155
 linear approximierbar, 220
 lineare Näherung, 163, 222
 Linearität, 4, 23, 54
 logarithmische Integration, 59
 logarithmische Spirale, 270
 lokales Extremum, 229
 isoliertes, 229

M

MATLAB, 245, 257, 260, 269
 Mehrfachintegral, 137

Menge

- abgeschlossene, 185
- beschränkte, 185
- kompakte, 185
- offene, 183

Messprozess, 84

Metrik, 178

metrischer Raum, 178

Mittelwert, 85

- integraler, 26

Mittelwerteigenschaft, 120

Mittelwertsatz

- der Differenzialrechnung, 8
- der Integralrechnung, 24

mittlere quadratische Abweichung, 84

Monotonie, 4, 23

N

negativ definit, 231

Niveaumenge, 212

Norm

- euklidische, 181

Normalverteilung, 77

notwendige Bedingung, 230

Nullmenge, 160

numerische Integration, 12, 141

O

oberhalbstetig, *siehe* halbstetig

Oberintegral, 5, 155

Octave, VII, 245

offene Kugel, 182

offene Menge, 183

Orthogonalitätsrelationen, 72, 102

P

Parameterintegral, 137

Partialbruchzerlegung, 65

partiell differenzierbar, 212

partielle Integration, 67

periodische Funktion, 96

Phönix-Effekt, 70

Polarkoordinaten, 166

Polygonzug, 198

positiv definit, 231

Potenzialgleichung, 220

Produktregel, 67

Q

Quader

- kompakter, 136

quadratische Ergänzung, 64

quadratische Näherung, 224

R

Raumkurve, 190

Rechteckimpuls, 128

Reihe

- Integration einer, 46

Rekursionsformel für \sin^n , 71

Richtungsableitung, 226

Riemann-Integral, 5

Riemann-integrierbar, 6

S

Sägezahnkurve, *siehe* Fundamentalbeispiel

Sattelpunkt, 236

Schnittwinkel, 196

Schwarz

- Satz von, 218

Stabdiagramm, 116

Stammfunktion, 33

Standardabweichung, 77, 86

- des Mittelwerts, 90

Standardnormalverteilung, 80

stationärer Punkt, 230

Stetigkeit, 189

Streuung von Messwerten, 84

Substitutionsregel, 54

T

Tangentenvektor, 192

total differenzierbar, 220

Träger, 142

- kompakter, 142

Transformationsformel, 165

translationsinvariant, 143

Trapezregel, 19, 245

Treppenfunktion, 2

trigonometrisches Polynom, 101

- komplexes, 105

U

Überschwinger, *siehe* Gibbs-Phänomen

Umgebung, 182

unbestimmtes Integral, 32

uneigentliches Integral, [39](#)
unterhalbstetig, *siehe* halbstetig
Unterintegral, [5](#), [155](#)
Unterteilung, [2](#)

V

Varianz, [87](#)
des Mittelwerts, [88](#)
Vektorraum \mathbb{R}^n , [180](#)

(0,1)-Verteilung, [80](#)
Verteilungsfunktion, [80](#)
Volumen einer Menge, [159](#)

Z

Zwischenwertsatz, [8](#)
Zykloide, [203](#)
Zylinderkoordinaten, [266](#)



Willkommen zu den Springer Alerts

Jetzt
anmelden!

- Unser Neuerscheinungs-Service für Sie:
aktuell *** kostenlos *** passgenau *** flexibel

Springer veröffentlicht mehr als 5.500 wissenschaftliche Bücher jährlich in gedruckter Form. Mehr als 2.200 englischsprachige Zeitschriften und mehr als 120.000 eBooks und Referenzwerke sind auf unserer Online Plattform SpringerLink verfügbar. Seit seiner Gründung 1842 arbeitet Springer weltweit mit den hervorragendsten und anerkanntesten Wissenschaftlern zusammen, eine Partnerschaft, die auf Offenheit und gegenseitigem Vertrauen beruht.

Die SpringerAlerts sind der beste Weg, um über Neuentwicklungen im eigenen Fachgebiet auf dem Laufenden zu sein. Sie sind der/die Erste, der/der über neu erschienene Bücher informiert ist oder das Inhaltsverzeichnis des neuesten Zeitschriftenheftes erhält. Unser Service ist kostenlos, schnell und vor allem flexibel. Passen Sie die SpringerAlerts genau an Ihre Interessen und Ihren Bedarf an, um nur diejenigen Information zu erhalten, die Sie wirklich benötigen.

Mehr Infos unter: springer.com/alert