

Anhang

Zusammenstellung wichtiger Potenzreihen

Funktion und Potenzreihenentwicklung

Gültigkeits-
bereich

Formel-
nummer

$(1+x)^{\alpha} = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots$	α reell	$(-1, 1)$	(4.17)
---	----------------	-----------	--------

Spezialfälle:

$(1+x)^{-k-1} = 1 - \binom{k+1}{1}x + \binom{k+2}{2}x^2 - \binom{k+3}{3}x^3 + \dots, k = 0, 1, 2, \dots$	$(-1, 1)$	Bsp. 4.4
--	-----------	----------

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$	$(-1, 1)$	(2.5)
---	-----------	-------

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$	$[-1, 1]$	(4.19)
--	-----------	--------

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots$	$(-1, 1)$	(4.20)
--	-----------	--------

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$(-\infty, \infty)$	(4.11)
--	---------------------	--------

$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_2}{2!}x^2 + \frac{B_4}{4!}x^4 + \frac{B_6}{6!}x^6 + \dots$	$(-2\pi, 2\pi)$	(4.57)
---	-----------------	--------

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$(-1, 1]$	(4.14)
--	-----------	--------

$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right)$	$(-1, 1)$	(4.16)
--	-----------	--------

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$(-\infty, \infty)$	(4.12)
---	---------------------	--------

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$(-\infty, \infty)$	(4.12)
---	---------------------	--------

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$		
---	--	--

$\dots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} + \dots$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	(4.63)
--	--	--------

$x \cot x = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \dots$	$(-\pi, \pi)$	(4.62)
---	---------------	--------

Funktion und Potenzreihenentwicklung

Gültigkeits-
bereich Formel-
nummer

$\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \dots^1)$	$(-\infty, \infty)$	(4.28)
$\sin^3 x = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{13}{120}x^7 - \dots^1)$	$(-\infty, \infty)$	(4.29)
$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 - \dots^1)$	$(-\infty, \infty)$	(4.69)
$\ln(1 + \sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \dots^1)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	(4.31)
$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \dots$	$(-1, 1)$	(4.24)
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$[-1, 1]$	(4.22)
$(\arctan x)^2 = x^2 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\right)x^4 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)x^6 - \dots$	$(-1, 1)$	Aufg. 4.
$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$	$(-\infty, \infty)$	(4.13)
$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$	$(-\infty, \infty)$	(4.13)
$x \coth x = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + \frac{2}{945}x^6 - \dots + \frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \dots$	$(-\pi, \pi)$	(4.61)
$\operatorname{arsinh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \dots$	$(-1, 1)$	(4.26)
$\operatorname{artanh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$	$(-1, 1)$	(4.25)
$\operatorname{Si} x = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots$	$(-\infty, \infty)$	(4.33)
$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right)$	$(-\infty, \infty)$	(4.35)
$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right)$	$[0, 1)$	(4.48)
$E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right)$	$[0, 1)$	(4.40)

¹⁾ Hier ist aus den Anfangsgliedern kein Bildungsgesetz für das n -te Glied zu erkennen.

Lösungen der Aufgaben

2.1: a) $s = \frac{1}{2}$, b) $s = 3$.

2.2: a) konvergent (Majorante: $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2}$); b) divergent (Minorante: $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v+1}$);

c) divergent (Minorante: $\sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{v}$); d) konvergent (Majorante: $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2}{v^2}$);

e) konvergent (Majorante: $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^3}$); f) divergent (Minorante: $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^{2/3}}$).

2.3: a) konvergent, b) divergent, c) konvergent, d) konvergent,
e) konvergent, f) konvergent, g) divergent, h) konvergent.

2.4: a) konvergent, b) konvergent, c) konvergent, d) konvergent,
e) divergent, f) konvergent.

2.5: a) konvergent, b) konvergent, c) divergent, d) konvergent,
e) divergent, f) divergent.

2.6: Die Beträge der Glieder aller Reihen bilden monotone Nullfolgen.

2.7: a) nicht-absolut konvergent, b) nicht-absolut konvergent, c) absolut konvergent,
d) nicht-absolut konvergent, e) absolut konvergent.

3.1: Es ist $s_n(x) = \sum_{v=0}^n (x^v - x^{v+1}) = (1-x) \sum_{v=0}^n x^v = (1-x) \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1-x^{n+1}$ für $x \neq 1$,
 $s(x) = 1$ für $x \in [0, a]$, und somit $|s(x) - s_n(x)| = x^{n+1} \leq a^{n+1}$. Offenbar gilt $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$,
wenn $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln a} - 1$, unabhängig von x ; die Reihe konvergiert gleichmäßig in $[0, a]$. Da
aber $s_n(1) = 0$ für alle n und daher $s(1) = 0$ gilt, ist die Summenfunktion in $[0, 1]$ unstetig und
somit wegen Satz 3.3 dort ungleichmäßig konvergent.

3.2: Es ist $s_n(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^n}$, $s(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$; $N(\varepsilon, x)$ kann mit $N(\varepsilon, x) = \frac{-\ln \varepsilon}{\ln(1+x^2)}$ gewählt werden. Für $x \rightarrow 0$ strebt dieser Ausdruck (für jedes feste $\varepsilon < 1$) gegen ∞ ;
es existiert also bei vorgegebenem ε keine Zahl N^* , so daß $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in I$ gilt,
sofern $n > N^*$ ist.

3.3: Es ist $\left| \frac{1}{x^2+n+1} - \frac{1}{x^2+n+2} + \dots + \frac{(-1)^{p-1}}{x^2+n+p} \right| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ für
 $x \in [0, \infty]$, und die rechte Seite der Ungleichung wird, unabhängig von x , für jedes feste p bei
hinreichend großem n beliebig klein.

3.4: a) $\left| \frac{\cos vx}{v^3} \right| \leq \frac{1}{v^3}$ für alle x ; b) $\frac{1}{x^2+v^2} \leq \frac{1}{v^2}$ für alle x ;

c) Der Maximalwert von $f_v(x)$ wird bei $x = \frac{1}{v\sqrt[4]{3}}$ angenommen und beträgt

$$a_v = \frac{1}{v\sqrt[4]{3}(1+v^2/\sqrt[4]{3})}; \text{ die Reihe } \sum_{v=1}^{\infty} a_v \text{ konvergiert.}$$

3.5: a) ja, da die Reihe wegen $\left| \frac{\sin v^4 x}{v^2} \right| \leq \frac{1}{v^2}$ für alle x gleichmäßig konvergiert;

b) nein, da die durch formales Differenzieren entstehende Reihe $\cos x + 2^2 \cos 2^4 x + \dots$
z. B. in $x = 0$ divergiert.

4.1: a) $r = 1$, b) $r = \infty$, c) $r = \frac{1}{e}$, d) $r = \infty$, e) $r = 0$, f) $r = \frac{1}{6}$.

4.2: a) $(-4, 4)$, in beiden Randpunkten divergent,
 b) $(-1, 1)$, konvergent für $x = -1$, divergent für $x = 1$,
 c) $(-1, 1)$, in beiden Randpunkten konvergent, d) $(-1, 1)$, in beiden Randpunkten divergent.

4.3: a) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{\nu!}$, $(-\infty, \infty)$, b) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{\nu+2}}{\nu!}$, $(-\infty, \infty)$; c) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(3x)^{2\nu}}{(2\nu)!}$, $(-\infty, \infty)$;

d) $a^\alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} \left(\frac{x}{a}\right)^\nu$, $(-a, a)$, $a > 0$; e) $1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1 \cdot 4 \dots (3\nu - 2)}{3 \cdot 6 \dots 3\nu} x^{3\nu}$, $(-1, 1)$;

f) $1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu x^{2\nu}$, $(-1, 1)$; g) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{2^{2\nu+1}}{2\nu+1} x^{2\nu}$, $(-1, 1)$;

h) $\frac{1-x}{1-x^3} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (1-x)x^{3\nu} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \dots$, $(-1, 1)$.

4.4: a) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu (x-1)^\nu$, $(0, 2)$; b) $\sqrt{2} \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2\nu-3)}{2 \cdot 4 \dots 2\nu} \frac{(x-2)^\nu}{2^\nu} \right]$, $(0, 4)$;

c) $e^{-3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x+3)^\nu}{\nu!}$, $(-\infty, \infty)$; d) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{(x-1)^\nu}{\nu}$, $(0, 2)$.

4.5: a) $s'(x) = \frac{1}{1-x^2}$, $s(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{artanh} x$,

b) $s'(x) = x \sin x$, $s(x) = \sin x - x \cos x$.

4.6: $f'(x) = \frac{4+2x^2}{4+x^4}$, $\arctan \frac{2x}{2-x^2} = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} - \frac{x^5}{2^2 \cdot 5} + \frac{x^7}{2^3 \cdot 7} + \frac{x^9}{2^4 \cdot 9} + \dots$,
 $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

4.7: $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2\nu-1} \right) x^{2\nu}$
 $= x^2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \right) x^4 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) x^6 - \dots$, $x \in (-1, 1)$.

4.8: a) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{12} \approx 0,822$; b) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1}{(2\nu+1)\nu!} \approx 0,747$;

c) $90 + \ln 10 - \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{10^2} - \frac{1}{10} \right) - \frac{1}{2 \cdot 3!} \left(\frac{1}{10^4} - \frac{1}{10^2} \right) - \dots \approx 92,348$;

d) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)^2 4^{2\nu-1}} \approx 0,248$.

4.9: $\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x} \, dx = \int_0^\pi \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 x - \frac{1}{2 \cdot 4} \cos^4 x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos^6 x - \dots \right) dx$
 $= \pi \left(1 + \frac{1}{2^2} - \frac{3}{2^6} + \frac{5}{2^8} - \frac{175}{2^{14}} + \dots \right) \approx 3,82$.

4.10: $x + \frac{1}{2} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^9}{9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^{13}}{13} + \dots$, $x \in [-1, 1]$.

$$4.11: -1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \dots \quad x \in (-1, 1).$$

$$4.12: \frac{E_{2\nu}}{(2\nu)!} - \frac{E_{2\nu-2}}{2!(2\nu-2)!} + \dots + (-1)^\nu \frac{E_0}{(2\nu)!} = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots;$$

$$E_0 = 1, \quad E_2 = 1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = 61.$$

$$4.13: \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{13}{192}x^4 + \frac{31}{480}x^5 - \dots$$

(Verwendung der Beziehungen zwischen den b_ν und c_ν , wobei die c_ν gegeben sind.)

$$4.14: \text{a) } -2, \quad \text{b) } -\frac{1}{2}, \quad \text{c) } 3, \quad \text{d) } 0.$$

$$5.1: f(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \frac{1}{\pi} \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$$

$$5.2: f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right);$$

$$\text{für } x = 0: \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)} = \frac{1}{2}, \quad \text{für } x = \frac{\pi}{2}: \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)(2\nu+1)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

$$5.3: f(x) = \frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots \right);$$

die periodische Fortsetzung von $f(x)$ – mit 2π – ist eine stetig-differenzierbare Funktion.

$$5.4: a_\nu = 0 \text{ für alle } \nu, \quad b_\nu = 0 \text{ für } \nu = 2, 4, 6, \dots, \quad b_\nu = \frac{4}{\pi\nu} \cos \frac{\nu\pi}{3} \text{ für } \nu = 1, 3, 5, \dots$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{14} \sin 7x - \dots \right].$$

$$5.5: f(x) = 3 - \frac{4}{\pi} \left[\sin \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{2} \sin \pi x + \frac{1}{3} \sin \frac{3}{2} \pi x - \dots \right].$$

$$5.6: f(x) = \frac{8}{\pi^2} \left[\sin \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3}{2} \pi x + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5}{2} \pi x - \dots \right];$$

das Bild der Funktion $f(x) \sin \frac{\nu}{2} \pi x$ ist axialsymmetrisch bezüglich der Geraden $x = 1$.

$$5.7: f(t) = \frac{\tau}{2T} + \frac{4T}{\pi^2\tau} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \sin^2 \frac{\nu\pi\tau}{2T} \cos \frac{2\nu\pi t}{T}.$$

$$6.1: F_c(\omega) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2 \frac{T\omega}{2}}{T\omega^2}, \quad F(\omega) = 4 \frac{\sin^2 \frac{T\omega}{2}}{T\omega^2}.$$

$$6.2: F_s(\omega) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2 T\omega}{\omega}, \quad F(\omega) = -4i \frac{\sin^2 T\omega}{\omega}.$$

$$6.3: F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}.$$

$$6.4: F(\omega) = 2i \frac{\sin \pi\omega}{\omega^2 - 1} \text{ für } |\omega| \neq 1 \text{ (für } \omega = \pm 1 \text{ ist } F(\omega) \text{ durch den Grenzwert der rechten Seite für } \omega \rightarrow \pm 1 \text{ zu definieren)}.$$

Namen- und Sachregister

- Abelscher Grenzwertsatz 38
- absolut konvergent 21, 33
- Additionstheoreme der Exponentialfunktion 55
- alternierende Reihe 19
 - –, Reihenrest 20
- Amplitudendichte 101
- Analyse, harmonische 73
 - , numerische harmonische 88
- Approximation im quadratischen Mittel 95, 96
- Arkustangensreihe 43, 110
- asymptotisch gleich 64
- asymptotische Potenzreihe 64

- bedingt konvergent 23
- Bernoullische Zahlen 56, 68
- Besselfunktion 63
- Besselsche Differentialgleichung 61
 - Ungleichung 97
- beständig konvergent 35
- bestimmte Divergenz 10
- binomische Reihe 43, 63, 109

- Cauchysches Konvergenzkriterium 13
 - Produkt 24

- Differentialgleichung, Besselsche 61
 - , hypergeometrische 63
- Differentiation, gliedweise 32
- Dirichletsche Bedingungen 78, 101
- divergent 9
- Divergenz, bestimmte 10
- , unbestimmte 10
- Division von Potenzreihen 45, 55

- Einsetzen einer Potenzreihe in eine andere 47, 57
- Ellipsenumfang 50
- elliptisches Integral 53
 - – 1. Gattung 53
 - – 2. Gattung 51
- Eulersche Formel 87
 - Zahlen 69
- Exponentialfunktion, Additionstheoreme der 55
- Exponentialreihe 41, 109

- Fehler, mittlerer quadratischer 96
- Fehlerintegral 50, 110
- Fortsetzung, gerade 103
 - , periodische 79
 - , ungerade 103
- Fourierintegral 100
 - , komplexe Form 103
- Fourierkoeffizient, komplexer 88
- Fourierkoeffizienten 76, 81
 - , Größenordnung der 90
 - , verallgemeinerte 96
- Fourierreihe 76
 - , komplexe 87
 - periodischer Funktionen 81
 - , verallgemeinerte 96
- Fouriersche Kosinustransformation 107
 - Sinustransformation 107
- Fouriersches Integraltheorem 100
 - –, Kosinus- bzw. Sinusform 103
- Fourier-Transformation 105
- Fourier-Transformierte 105
- Frequenzspektrum 102
- Funktion, gerade 80, 102
 - , ungerade 80, 102
- Funktionenfolge 26
- Funktionenreihe 26

- geometrische Reihe 9, 26, 63
- gerade Funktion 80, 102
 - –, Potenzreihenentwicklung 41
- gewöhnliche Differentialgleichungen, Lösung
 - mit Reihenansatz 60
- Gibbssches Phänomen 91
- gleichmäßig konvergent 30
- Gleichmäßigkeit der Konvergenz einer Potenzreihe 37
- Glieder 9
- gliedweise Differentiation 32
 - – einer Potenzreihe 38
- Integration 31, 49
 - – einer Potenzreihe 38
- Grenzwertsatz, Abelscher 38
- Größenordnung der Fourierkoeffizienten 90
- Groß- O 64

- harmonische Analyse 73
- Harmonische, n -te 72
- harmonische Reihe 14
 - Schwingungen 71, 88
- hypergeometrische Differentialgleichung 63
 - Reihe 63

- Identitätssatz für Potenzreihen 39
- Integral, elliptisches 53
 - –, 2. Gattung 51
 - , vollständiges elliptisches, 1. Gattung 53, 110
 - –, 2. Gattung 52, 110
- Integralkriterium 19
- Integralsinus 50, 110
- Integraltheorem, Fouriersches 100
- Integration, gliedweise 31, 49
- integrierbar, quadratisch 95

- Klein- o 64
- komplexe Form der Fourierreihe 87
- komplexer Fourierkoeffizient 88
- konvergent 9
 - , absolut 21, 23
 - , bedingt 23
 - , beständig 35
 - , gleichmäßig 30
 - , nirgends 35
 - , unbedingt 23
 - , ungleichmäßig 28
- Konvergenzbereich 26
- Konvergenzintervall der Potenzreihe 36
- Konvergenzkriterium, Cauchysches 13
 - , Leibnizsches 20
 - , notwendiges 14
- Konvergenzradius 36
- Konvergenzverhalten einer Potenzreihe 34
- Kosinusform des Fourierschen Integraltheorems 103
- Kosinusreihe 41, 109
 - , reine 80
- Kosinustransformation, Fouriersche 107
- Kriterium von Weierstraß für gleichmäßige Konvergenz 29
- Legendresche Polynome 59
- Leibnizsche Reihe 20
- Leibnizsches Konvergenzkriterium 20
- Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Reihenansatz 60
- logarithmische Reihe 42, 109
- Majorantenkriterium 22
- Methode der unbestimmten Koeffizienten 46, 48, 58
- Minorante 15
- Minorantenkriterium 15
- mittlerer quadratischer Fehler 96
- Multiplikation von Potenzreihen 45, 55
 - – Reihen 23
- nirgends konvergent 35
- Norm 95
- notwendiges Konvergenzkriterium 14
- n -te Harmonische 72
- numerische harmonische Analyse 88
- orthogonales Funktionensystem 95
- Orthogonalitätsrelation 75
- Orthonormalsystem 95
- Parsevalsche Gleichung 97
- Pendel, physikalisches 52
- periodische Fortsetzung 79
- Polynom, trigonometrisches 90
- Polynome, Legendresche 59
- Potenzreihe 34
 - , asymptotische 64
 - , Einsetzen einer in eine andere 47, 57
 - , Gleichmäßigkeit der Konvergenz einer 37
 - , gliedweise Differentiation einer 38
 - , Integration einer 38
 - , Konvergenzintervall der 36
 - , Konvergenzverhalten einer 34
- Potenzreihen, Division von 45, 55
 - , Identitätssatz für 39
 - , Multiplikation von 45, 55
 - , Umkehrung von 48
- Potenzreihenentwicklung einer Funktion 39
 - – geraden bzw. ungeraden Funktion 41
- Produkt, Cauchysches 24
- Produktreihe 24
- quadratisch integrierbar 96
- Quotientenkriterium 16
 - in Limesform 17, 22
- Reihe 9
 - , alternierende 19
 - , binomische 43, 63, 109
 - , geometrische 9, 26, 63
 - , harmonische 14
 - , hypergeometrische 63
 - , Leibnizsche 20
 - , logarithmische 42, 109
 - , Stirlingsche 68
 - , unendliche 9
- Reihen mit positiven Gliedern 14
 - , Multiplikation von 23
 - , Umordnung von 22
- Reihenrest 11, 65
 - der alternierenden Reihe 20
- Restglied 40
- Restgliedabschätzung 42, 44
- Riemann, Umordnungssatz von 23
- Riemannsche Zetafunktion 26
- Rücktransformation 105, 107
- Satz von Taylor 34, 40
- Schwingungen, harmonische 71, 88
- Sinusform des Fourierschen Integraltheorems 103
- Sinusreihe 41, 109
 - , reine 80
- Sinustransformation, Fouriersche 107
- Skalarprodukt 95
- Spektraldichtefunktion 106
- Spektralfolge 88
- Stetigkeit der Summenfunktion 30, 37
- Stirlingsche Formel 65
 - Reihe 68

- Summe 9
- Summenfunktion 26
- , Stetigkeit der 30, 37

- Taylor, Satz von 34, 40
- Taylorreihe 40
- Teilsumme 9
- trigonometrisches Polynom 90

- Umkehrformel 105
- Umkehrung von Potenzreihen 48
- Umordnung von Reihen 22
- Umordnungssatz von Riemann 23
- unbedingt konvergent 23
- unbestimmte Divergenz 10
- unendliche Reihe 9

- ungerade Funktion 80, 102
- –, Potenzreihenentwicklung 41
- ungleichmäßig konvergent 28
- Ungleichung, Besselsche 97

- vollständiges elliptisches Integral 1. Gattung 53, 110
- – – 2. Gattung 52, 110

- Weierstraßsches Kriterium 29
- Wurzelkriterium 17
- in Limesform 17, 22

- Zahlen, Bernoullische 56, 68
- , Eulersche 69
- Zahlenfolge 9
- Zetafunktion, Riemannsche 26

Literatur

- [1] *Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.*: Taschenbuch der Mathematik, 23. Aufl., Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1987.
- [2] *Dallmann, H.; Elster, K.-H.*: Einführung in die höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Band I, 2. Aufl. Jena 1987.
- [3] *Duschek, A.*: Vorlesungen über höhere Mathematik, Band I, 3. Aufl. Wien 1960.
- [4] *Fichtenholz, G. M.*: Differential- und Integralrechnung, Bände II, III (Übers. a. d. Russ.), 10., 11. Aufl., Berlin 1982.
- [5] *Jahnke, E.; Emde, F.*: Tafeln höherer Funktionen, 5. Aufl. Leipzig 1960.
- [6] *Knopp, K.*: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 5. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1964.
- [7] *v. Mangoldt, H.; Knopp, K.*: Einführung in die höhere Mathematik, Band II, 15. Aufl. Leipzig 1978.
- [8] *Schröder, K.* (Herausg.): Mathematik für die Praxis, Band II, 3. Aufl. Berlin 1966.
- [9] *Smirnow, W. I.*: Lehrgang der höheren Mathematik, Band II (Übers. a. d. Russ.), 15. Aufl. Berlin 1981.
- [10] *Tolstow, G. P.*: Fourierreihen, Berlin 1955.

Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte

Vorbereitungsband *Schäfer/Georgi*: Vorbereitung auf das Hochschulstudium

- Band 1 *Sieber/Sebastian/Zeidler*: Grundlagen der Mathematik, Abbildungen, Funktionen, Folgen
- Band 2 *Pfarr/Schirotzek*: Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen
- Band 3 *Schell*: Unendliche Reihen
- Band 4 *Harbarth/Riedrich/Schirotzek*: Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen
- Band 5 *Körber/Pfarr*: Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen
- Band 6 *Schöne*: Differentialgeometrie
- Band 7/1 *Wenzel*: Gewöhnliche Differentialgleichungen 1
- Band 7/2 *Wenzel*: Gewöhnliche Differentialgleichungen 2
- Band 8 *Meinhold/Wagner*: Partielle Differentialgleichungen
- Band 9 *Greuel/Kadner*: Komplexe Funktionen und konforme Abbildungen
- Band 10 *Stopp*: Operatorenrechnung
- Band 11 *Schultz-Piszachich*: Tensoralgebra und -analysis
- Band 12 *Sieber/Sebastian*: Spezielle Funktionen
- Band 13 *Manteuffel/Seiffart/Vetters*: Lineare Algebra
- Band 14 *Seiffart/Manteuffel*: Lineare Optimierung
- Band 15 *Elster*: Nichtlineare Optimierung
- Band 16 *Bieß/Erfurth/Zeidler*: Optimale Prozesse und Systeme
- Band 17 *Beyer/Hackel/Pieper/Tiedge*: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik
- Band 18 *Oelschlägel/Matthäus*: Numerische Methoden
- Band 19/1 *Beyer/Girlich/Zschiesche*: Stochastische Prozesse und Modelle
- Band 19/2 *Bandemer/Bellmann*: Statistische Versuchsplanung
- Band 20 *Piehl/Zschiesche*: Simulationsmethoden
- Band 21/1 *Manteuffel/Stumpe*: Spieltheorie
- Band 21/2 *Bieß*: Graphentheorie
- Band 22 *Göpfert/Riedrich*: Funktionalanalysis
- Band 23 *Belger/Ehrenberg*: Theorie und Anwendung der Symmetriegruppen
- Band Ü1 *Wenzel/Heinrich*: Übungsaufgaben zur Analysis 1
- Band Ü2 *Wenzel/Heinrich*: Übungsaufgaben zur Analysis 2
- Band Ü3 *Pfarr/Oehlschlaegel/Seltmann*: Übungsaufgaben zur linearen Algebra und linearen Optimierung
- Band Ü4 *Gillert/Nollau*: Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik