LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Lars Diening
Dr. Sebastian Schwarzacher, Maximilian Wank

Wintersemester 2013/14
22.2.2014

Analysis einer Veränderlichen

Klausur

Nachname: ________________ Vorname: ________________

Matrikelnr.: ________________ Fachsemester: ________________

Abschluss: Bachelor, PO ❑ 2007 ❑ 2010 ❑ 2011 Master, PO ❑ 2010 ❑ 2011

Lehramt Gymnasium: ❑ modularisiert ❑ nicht modularisiert

❑ Diplom ❑ Anderes: ________________

Hauptfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch. Es ist erlaubt, eine selbst erstellte, einseitig per Hand beschriebene A4 Seite in der Klausur zu benutzen. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, vermerken Sie dies am unteren Ende des Angabenblattes der entsprechenden Aufgabe und schreiben den Rest auf die Rückseite oder auf eine von uns ausgehändigte leere Seite. Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Da wir keine Aushänge mit Namen oder Matrikelnummern machen dürfen, notieren Sie sich bitte die nebenstehende Zahl unter der wir Ihr Klausurergebnis veröffentlichen werden.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
max. Punkte	**5**	**3**	**5,5**	**8,5**	**3**	**3,5**	**3,5**
Punkte							

Σ Gesamt (max. 32)	

Viel Erfolg !

Name: ____________________

Aufgabe 1 **3+2 Punkte**

(a) Zeigen Sie per Induktion, dass für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ (mit Konvention $q^0 = 1$) gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

(b) Sei $(a_k)_k$ eine Folge reeller Zahlen mit $|a_{k+1} - a_k| \leq 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(a_k)_k$ eine Cauchyfolge ist.

Lösung zu Aufgabe 1

(a) Induktionsanfang:

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{1 - q^1}{1 - q} = 1.$$

Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \\
&= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{(1 - q)q^{n+1}}{1 - q} \qquad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
&= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}
\end{aligned}$$

(b) Es sei $m > k > 1$, dann gilt

$$\begin{aligned}
|a_m - a_k| &= \Big|\sum_{l=k}^{m-1} (a_{l+1} - a_l)\Big| \\
&\leq \sum_{l=k}^{m-1} |a_{l+1} - a_l| \\
&\leq \sum_{l=k}^{m-1} 2^{-l} = 2^{-k} \sum_{l=0}^{m-k-1} 2^{-l} \\
&= 2^{-k} \frac{1 - 2^{-m+k}}{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2^{-k-1}.
\end{aligned}$$

Da $2^{-k-1} \to 0$ folgt, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein n_ε existiert, dass alle $m > n > n_\varepsilon$

$$|a_m - a_k| \leq \varepsilon$$

also ist (a_k) eine Cauchy-folge ist.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ________________________________

Aufgabe 2 **3 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $c > 0$ und sei $c := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < \infty$. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass f gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

Lösung zu Aufgabe 2

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f'(\xi)||x - y| \\ &\leq c\,|x - y| \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass f gleichmäßig stetig ist. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Es ist zu zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass aus $|x - y| < \delta$ schon $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ folgt.

Mit der Wahl $\delta := \frac{\varepsilon}{c}$ folgt

$$|f(x) - f(y)| \leq c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Damit ist f gleichmäßig stetig.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 3 **1,5+1,5+2,5 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to\infty}\left(x\Big(1-\cos(\tfrac{1}{x})\Big)\right)$$

$$\text{(b)}\quad \lim_{x\searrow 0}\left(\sqrt{x}\,\log x\right)$$

$$\text{(c)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x\sin x}$$

Falls Sie die Regeln von L'Hospital benutzen, so machen Sie dies hierbei deutlich.

Lösung zu Aufgabe 3

(a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \qquad \text{mit L'Hospital } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \qquad .$$

Alternativ kann man erst substituieren und dann L'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\searrow 0}\frac{1-\cos(y)}{y}$$

$$= \lim_{y\searrow 0}\frac{\sin(y)}{1} \qquad \text{mit L'Hospital } \frac{0}{0}$$

$$= 0$$

(b)

$$\lim_{x\searrow 0}\left(\sqrt{x}\,\log x\right) = \lim_{x\searrow 0}\frac{\log(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{mit L'Hospital } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\searrow 0}(-2\sqrt{x}) = 0.$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\sin x + x\cos x} \qquad \text{mit L'Hospital } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} \qquad \text{mit L'Hospital } \frac{0}{0}$$

$$= \frac{-1}{2}.$$

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

Aufgabe 4 **2+2+2,5+1+1 Punkte**

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto xe^{-x} = x\exp(-x)$.

(a) Bestimmen Sie f' und f''.

(b) Auf welchen Intervallen ist f monoton steigend bzw. monoton fallend.

(c) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von f.

(d) Zeigen Sie, dass f auf $[2,\infty)$ konvex ist.

(e) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 von f an der Stelle $x = 1$.

Lösung zu Aufgabe 4

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1-x)e^{-x} \\ f''(x) &= (x-2)e^{-x} \end{aligned}$$

(b) f ist monoton steigend, wenn $f' > 0$, d.h. in $[0,1]$. f ist monoton fallend, wenn $f' < 0$, d.h. in $[1,\infty)$.

(c) Für ein Extremum im Inneren muss gelten $f'(x) = 0$. Damit kann nur bei $x = 1$ eine Extremstelle sein.

Da $f''(1) = -1 < 0$, hat f an der Stelle $x = 1$ ein lokales Maximum.

Da f wachsend auf [0,1] und fallend auf $[1,\infty)$ hat f bei $x = 1$ ein globales(!) Maximum . (Für dieses Argument sind die beiden vorherigen Schritte nicht nötig.)

Es gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,\infty)$ und $f(0) = 0$. Damit hat f ein globales Minimum bei $x = 0$.

(d) Es gilt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in [2,\infty)$. Damit ist f dort konvex.

(e) Es gilt

$$\begin{aligned} T_2(f,1)(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k \\ &= e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1}(x-1)^2. \end{aligned}$$

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

Aufgabe 5 **3 Punkte**

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h. es gibt ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \xi$.

Lösung zu Aufgabe 5

Betrachte $g(x) := f(x) - x$. Es gilt $g(a) = f(a) - a \geq a - a \geq 0$ und $g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$. Da g stetig gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a, b]$ mit $g(\xi) = 0$. Dies ist gleichbedeutend mit $f(\xi) = \xi$.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

Aufgabe 6 **1+2,5 Punkte**

Wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\,3^k} x^k.$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

(b) Bestimmen Sie die Mengen

$$M_1 := \{x \in \mathbb{R} : \text{die Reihe konvergiert}\} \text{ und } M_2 := \{x \in \mathbb{R} : \text{die Reihe konvergiert absolut}\}.$$

Lösung zu Aufgabe 6

(a) Sei $a_n := \frac{(-1)^n}{n\,3^n}$.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{3\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3}.$$

Das ergibt den Konvergenzradius 3.

(b) Da der Konvergenzradius $R = 3$, konvergiert die Reihe absolut für $|x| < 3$ und divergiert für $|x| > 3$

Randbetrachtung: Es bleiben die Fälle $x = -3$ und $x = 3$.

Fall $x = 3$. Die Reihe ist dann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Die Reihe konvergiert, aber nicht absolut.

Fall $x = -3$. Die Reihe ist dann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Die Reihe konvergiert nicht.

Damit folgt $M_1 = (-3, 3]$ und $M_2 = (-3, 3)$.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 7 **2,5+1 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = 1$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass f ein globales Maximum hat.

(b) Bestätigen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass f kein globales Minimum haben muss.

Lösung zu Aufgabe 7

(a) Da $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ existiert ein $R > 0$, so dass $f(x) < 1$ für alle $|x| > R$.

Da $[-R, R]$ kompakt, nimmt f als stetige Funktion ihr Maximum auf $[-R, R]$ an, d.h. es existiert $x_0 \in [-R, R]$ so dass $f(x) \le f(x_0)$ für alle $x \in [-R, R]$.

Da weiterhin $f(x_0) \ge f(0) = 1$ und $f(x) < 1$ für alle $|x| > R$, hat f bei x_0 sogar ein globales Maximum.

(b) Beispiel: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.