Краткая теория множеств

Салимли Айзек

MathLang

29 июля 2025 г.

Содержание

1. Универсум
   - Парадокс Рассела
2. Операции над множествами
   - Дополнение множесвта
   - Свойства дополнения
   - Объединение множеств
3. Пересечение множеств
4. Разность множеств
5. Симметрическая разность

Универсум

Определение

Универсум Универсум $\mathbb{U}$ - множество, содержащее все возможные множества рассматриваемой теории:

$$\mathbb{U} = \{x \mid x \text{ - множество}\}$$

Пример

Примеры универсумов

- В теории чисел: $\mathbb{U} = \mathbb{Z}$
- В теории множеств: $\mathbb{U}$ содержит все множества

Проблема

Наивное определение универсума приводит к парадоксам, таким как **парадокс Рассела**

Парадокс Рассела

Определение

Формулировка Рассмотрим множество R всех множеств, которые **не** содержат себя в качестве элемента:

$$R = \{x \mid x \notin x\}$$

Пример

Иллюстрация

- Множество всех книг $\notin$ самому себе
- Множество всех множеств $\in$ самому себе

Парадокс

Если $R \in R$, то по определению $R \notin R$.
Если $R \notin R$, то по определению $R \in R$.
Получаем противоречие.

Разрешение парадокса

Определение

Аксиоматическое решение Теория множеств Цермело-Френкеля (ZFC) запрещает:

- Создание множества всех множеств
- Использование неограниченного принципа свертки

Пример

Альтернативы

- Теория типов (Рассел)
- NBG-теория (классы вместо множеств)

Значение

Парадокс показал необходимость строгой аксиоматизации теории множеств

Содержание

1 Универсум
- Парадокс Рассела

2 Операции над множествами
- Дополнение множесвта
- Свойства дополнения
- Объединение множеств

3 Пересечение множеств

4 Разность множеств

5 Симметрическая разность

Операции над множествами

Обычно говорят о бинарных и унарных операциях над множествами. Пусть даны множестав X, Y.

- Дополнение $\bar{X}$
- Объединение $X \cup Y$
- Пересечение $X \cap Y$
- Разность $X \setminus Y$
- Симметрическая разность $X \oplus Y$

Дополнение множества

Определение

Дополнение $\overline{X}$ - множество элементов, **не** принадлежащих X в рамках универсального множества U.

Пример

Пусть $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $X = \{1, 2\}$
Тогда $\overline{X} = \{3, 4, 5\}$

Свойства дополнения

Основные свойства

- $\overline{\overline{X}} = X$ (инволютивность)
- $X \cap \overline{X} = \varnothing$ (непересекаемость)
- $X \cup \overline{X} = U$ (полнота)

Важное следствие

Законы де Моргана:

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Объединение множеств

Определение

$X \cup Y$ - множество всех элементов, принадлежащих **хотя бы одному** из множеств X или Y.

Пример

$X = \{1, 2, 3\},\ \ Y = \{3, 4, 5\}$
$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Свойства объединения

- Коммутативность: $X \cup Y = Y \cup X$
- Ассоциативность: $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

Содержание

1. Универсум
   - Парадокс Рассела
2. Операции над множествами
   - Дополнение множесвта
   - Свойства дополнения
   - Объединение множеств
3. Пересечение множеств
4. Разность множеств
5. Симметрическая разность

Пересечение множеств

Определение

$X \cap Y$ — множество элементов, принадлежащих **одновременно** и X, и Y.

Пример

$X = \{1, 2, 3\}, \;\; Y = \{2, 3, 4\}$
$X \cap Y = \{2, 3\}$

Свойства пересечения

- $X \cap \varnothing = \varnothing$
- Дистрибутивность: $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

Содержание

1. Универсум
   - Парадокс Рассела
2. Операции над множествами
   - Дополнение множесвта
   - Свойства дополнения
   - Объединение множеств
3. Пересечение множеств
4. Разность множеств
5. Симметрическая разность

Разность множеств

Определение

Разность $X \setminus Y$ — множество элементов, принадлежащих X, но **не** принадлежащих Y.

Пример

$X = \{1, 2, 3, 4\}, \ \ Y = \{3, 4, 5\}$
$X \setminus Y = \{1, 2\}$

Ключевые свойства

- Не коммутативна: $X \setminus Y \neq Y \setminus X$
- Связь с дополнением: $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$

Содержание

1 Универсум
- Парадокс Рассела

2 Операции над множествами
- Дополнение множесвта
- Свойства дополнения
- Объединение множеств

3 Пересечение множеств

4 Разность множеств

5 Симметрическая разность

Симметрическая разность

Определение

Симметрическая разность $X \oplus Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ — множество элементов, принадлежащих **ровно одному** из множеств X или Y.

Наглядный пример

- $X = \{1, 2, 3\}$
- $Y = \{3, 4, 5\}$
- $X \oplus Y = \{1, 2, 4, 5\}$

Характеристики

- **Коммутативность**: $X \oplus Y = Y \oplus X$
- **Самообратимость**: $X \oplus X = \varnothing$
- **Ассоциативность**: $(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$

Спасибо за внимание!

Пишите вопросы в комментариях!!!