МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

Институт компьютерных наук и кибербезопасности

Высшая школа технологий искусственного интеллекта

Отчёт по дисциплине «Математическая статистика»

ИДЗ №2
«Оценивание параметра»
Вариант **№25**

Студент: ____________ Салимли Айзек Мухтар Оглы

Преподаватель: ____________ Малов Сергей Васильевич

«____»__________ 20__ г.

Санкт-Петербург, 2025

Содержание

Введение

В отчете, решения задач №1, №2, №3.

1 Задача 1

Построить оценку максимального правдоподобия параметра $\theta = \sqrt{a}$ по выборке $X_1, \ldots, X_n$ из распределения с плотностью:

$$p(x;\theta) = 2a^2 x \cdot \mathbb{1}_{x\in[0,1/a]},$$

где $\mathbb{1}$ - индикаторная функция.

1.1 Решение

- Выборка $X_1, \ldots, X_n$
- $\theta = \sqrt{a} \Longrightarrow a = \theta^2$
- $p(x,\theta) = 2a^2 x \mathbb{1}_{x\in[0,1/a]} = 2\theta^4 x \mathbb{1}_{x\in[0,1/\theta^2]}$

Функиця правдоподобия: $L(X,\theta) = \prod_{i=1}^{n} 2\theta^4 x_i \mathbb{1}_{x_i\in[0,1/\theta^2]} \ominus \triangle$

$\triangle$:

1. $x_i \leq 1/\theta^2 \Longrightarrow \max(x_i) \leq 1/\theta^2$
2. $X_{(n)} = \max(X_i)$ - порядковая статистика.

$$\ominus \quad 2^n \theta^{4n} \prod_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{x_{(n)} \leq 1/\theta^2} = \underbrace{2^n \theta^{4n} \mathbb{1}_{x_{(n)} \leq 1/\theta^2}}_{g_\theta(T(x))} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n} x_i}_{h(x)}$$

МДС: $T = X_{(n)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^n \theta^{4n} \prod_{i=1}^{n} x_i \\ x_{(n)} \leq 1/\theta^2 \end{array} \right\} \quad \to \quad \max$$

1. $$\left\{ X_{(n)} \leq 1/\theta^2 \theta^2 \leq 1/X_{(n)} \theta \leq \frac{1}{\sqrt{X_{(n)}}} \right.$$

2. $$lL(x,\theta) = n\ln 2 + 4n\ln\theta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

3. $$\frac{\partial lL(x,\theta)}{\partial\theta} = \frac{4n}{\theta} \Longrightarrow \theta > 0$$

   Производная положительна и монотонно возрастает ($4n\ln\theta$), максимум на верхней границе.

Ответ:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{x_{(n)}}}$$

2 Задача 2

Построить оценку параметра $\theta = b^2$ по выборке $X_1, \ldots, X_n$ из распределения с плотностью:

$$p_\theta(x) = \frac{x^{p-1}e^{-x/b}}{b^p\Gamma(p)}\mathbb{1}_{x>0}$$

2.1 Решение

- Выборка: $X_1, \ldots, X_n$
- $\theta = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{\theta}$
- Подставим в плотность:

$$\frac{x^{p-1}e^{-x/b}}{b^p\Gamma(p)} = \frac{x^{p-1}e^{-x/\sqrt{\theta}}}{\theta^{p/2}\Gamma(p)}$$

$$L(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{p-1}e^{-x_i/\sqrt{\theta}}}{\theta^{p/2}\Gamma(p)} = \frac{1}{\theta^{np/2}[\Gamma(p)]^n}\prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1} \cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^n x_i}$$

1. $g(T(x)) = \dfrac{e^{-\frac{1}{\sqrt{\theta}}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}}{\theta^{\frac{np}{2}}}$
2. $L(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{p-1} \cdot \dfrac{1}{[\Gamma(p)]^n}$

МДС: $T(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$

$$\ell(x,\theta) = (p-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{1}{\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{np}{2}\ln\theta - n\ln\Gamma(p)$$

$$\frac{\partial \ell(x,\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{2\theta\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{np}{2\theta}$$

$$\frac{1}{2\theta}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\sqrt{\theta}} - np\right) = 0$$

$$\sqrt{\theta} = \frac{1}{np}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{\theta} = \left(\frac{\bar{x}}{p}\right)^2 \quad \text{— ОМП}$$

Ответ: $\hat{\theta} = \left(\dfrac{\bar{x}}{p}\right)^2$ — ОМП

3 Задача 3

Даны две независимые выборки $X_1, \ldots, X_n$ из $\mathcal{N}(a, 1)$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ из $\mathcal{N}(b, 8)$. Построить доверительный интервал для $3a - 2b$.

3.1 Решение

Независимые выборки:

$$\begin{bmatrix} X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(a, 1) \\ Y_1, \ldots, Y_m \sim \mathcal{N}(b, 8) \end{bmatrix}$$

По лемме Фишера:

- $\sqrt{n}\dfrac{\bar{x} - 1}{1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

  $$\frac{n(S_x)^2}{1} \sim \chi^2_{n-1}$$

- $\sqrt{m}\dfrac{\bar{y} - 1}{\sqrt{8}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

1. $\bar{x} - a \sim \mathcal{N}(0, 1)$

   $$3\bar{x} - 3a \sim \mathcal{N}(0, 9/n)$$

2. $\bar{y} - b \sim \mathcal{N}(0, 1/m)$

   $$2\bar{y} - 2b \sim \mathcal{N}(0, 32/m)$$

$$3\bar{x} - 3a - 2\bar{y} + 2b = (3\bar{x} - 2\bar{y}) - (3a - 2b) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{9}{n} + \frac{32}{m}\right), \text{ т.е. } \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{9m + 32n}{nm}\right)$$

$$\frac{(3\bar{x} - 2\bar{y} - \theta)}{\sqrt{\frac{9m+32n}{nm}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

3. $\dfrac{n(S_x)^2}{1} + \dfrac{m(S_y)^2}{8} \sim \chi^2_{n+m-2}$

$$p_\theta\Big(-X_\alpha \ \le \ \frac{(3\bar{x} - 2\bar{y} - \theta)\, C_{(n,m)}}{\sqrt{(nS_x)^2 + \frac{(mS_y)^2}{8}}} \ \le \ X_\alpha\Big) \ = \ 1 - \alpha$$

$$\Longrightarrow \quad p_\theta\Big(3\bar{x}-2\bar{y} \;-\; X_\alpha\,\frac{\sqrt{(nS_x)^2+\frac{(mS_y)^2}{8}}}{C_{n,m}} \;\le\; \theta \;\le\; 3\bar{x}-2\bar{y} \;+\; X_\alpha\,\frac{\sqrt{(nS_x)^2+\frac{(mS_y)^2}{8}}}{C_{n,m}}\Big) \;=\; 1-\alpha \;\Longrightarrow$$

$$\frac{\dfrac{3\bar{x}-2\bar{y}-\theta}{\sqrt{\frac{9m+32n}{nm}}}}{\sqrt{\dfrac{1}{n+m-2}\Big(\dfrac{n(S_x)^2}{1}+\dfrac{m(S_y)^2}{8}\Big)}} \sim t_{n+m-2}.$$

$$\sqrt{\frac{9m+32n}{nm(n+m-2)}\Big((nS_x)^2+\frac{(mS_y)^2}{8}\Big)}\frac{3\bar{x}-2\bar{y}-\theta}{\sqrt{(nS_x)^2+\frac{(mS_y)^2}{8}}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{9m+32n}} \sim S_{n+m-2}$$

$$p_\theta(-X_\alpha \le \frac{(3\bar{x}-2\bar{y}-\theta)C_{(n,m)}}{\sqrt{(nS_x)^2+\frac{(mS_y)^2}{8}}} \le X_\alpha) = 1-\alpha \Longrightarrow p_\theta(3\bar{x}-2\bar{y}-X_\alpha\frac{\sqrt{(nS_x)^2+\frac{(mS_y)^2}{8}}}{C_{n,m}} \le \theta \le 3\bar{x}-2\bar{y}+X_\alpha$$

Ответ:

$$(3\bar{x}-2\bar{y}-X_\alpha\frac{\sqrt{(nS_x)^2+\frac{(mS_y)^2}{8}}}{C_{n,m}} \quad\le\quad \theta \quad\le\quad 3\bar{x}-2\bar{y}+X_\alpha\frac{\sqrt{(nS_x)^2+\frac{(mS_y)^2}{8}}}{C_{n,m}})$$

Заключеине

1. Ответ:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{x_{(n)}}}$$

2. Ответ:

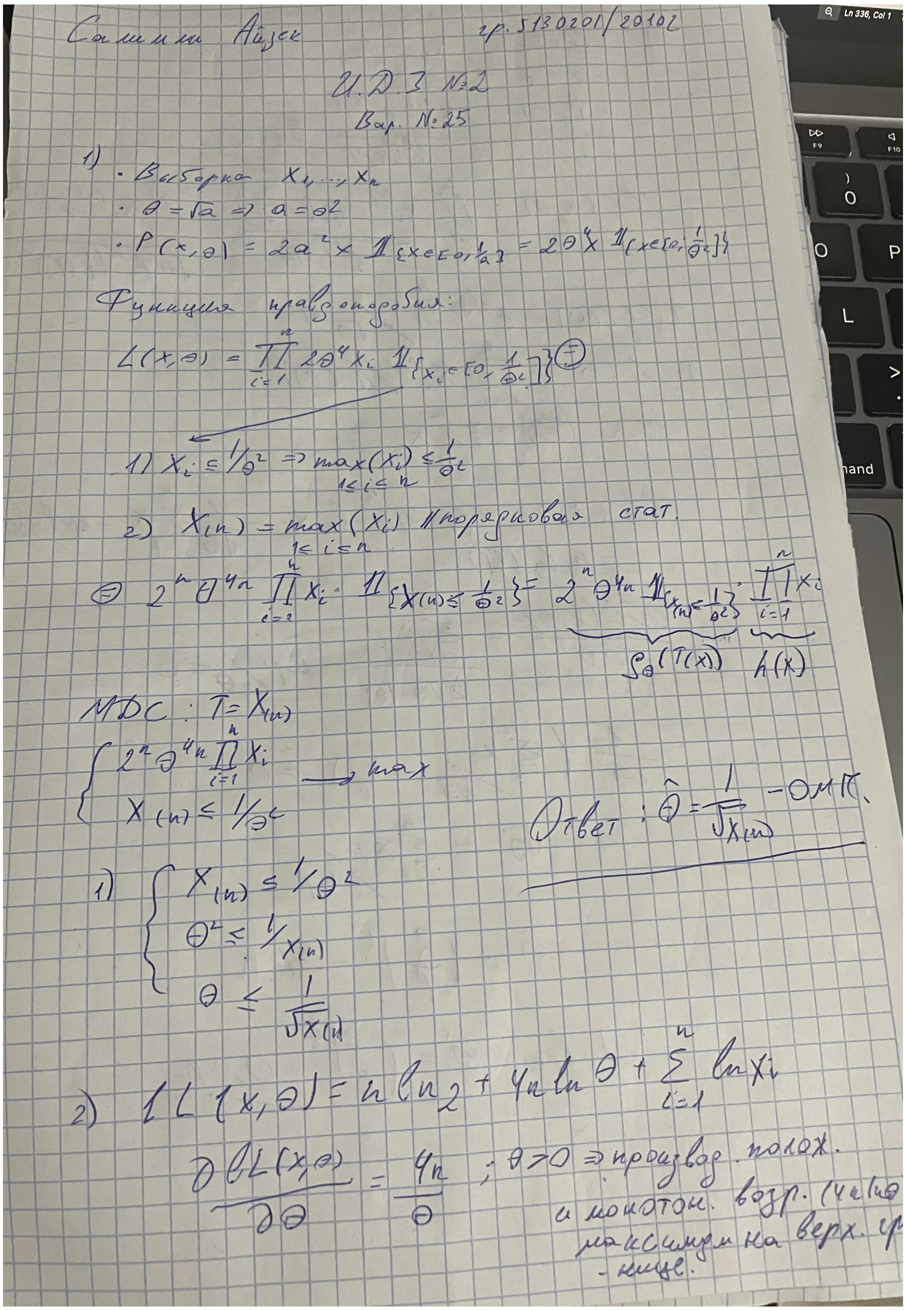
$$\hat{\theta} = \left(\frac{\bar{x}}{p}\right)^2 \quad \text{— ОМП}$$

3. Ответ:

$$(3\bar{x} - 2\bar{y} - X_\alpha \frac{\sqrt{(nS_x)^2 + \frac{(mS_y)^2}{8}}}{C_{n,m}} \quad \leq \quad \theta \quad \leq \quad 3\bar{x} - 2\bar{y} + X_\alpha \frac{\sqrt{(nS_x)^2 + \frac{(mS_y)^2}{8}}}{C_{n,m}})$$

Приложение А

Фото: Решение задачи 1


Самими Айзек гр. 5130201/20102

И.Д.З №2

Вар. №25

1)

- Выборка $X_1, \dots, X_n$
- $\theta = \sqrt{a} \Rightarrow a = \theta^2$
- $P(x, \theta) = 2a^2 x \, \mathbb{1}_{\{x \in [0, \frac{1}{a}]\}} = 2\theta^4 x \, \mathbb{1}_{\{x \in [0, \frac{1}{\theta^2}]\}}$

Функция правдоподобия:

$$L(x, \theta) = \prod_{i=1}^{n} 2\theta^4 x_i \, \mathbb{1}_{\{x_i \in [0, \frac{1}{\theta^2}]\}} \ominus$$

1) $X_i \le 1/\theta^2 \Rightarrow \max\limits_{1 \le i \le n}(X_i) \le \frac{1}{\theta^2}$

2) $X_{(n)} = \max\limits_{1 \le i \le n}(X_i)$ // порядковая стат.

$$\ominus \; 2^n \theta^{4n} \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbb{1}_{\{X_{(n)} \le \frac{1}{\theta^2}\}} = \underbrace{2^n \theta^{4n} \mathbb{1}_{\{X_{(n)} \le \frac{1}{\theta^2}\}}}_{g_\theta(T(x))} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n} x_i}_{h(x)}$$

МДС: $T = X_{(n)}$

$$\begin{cases} 2^n \theta^{4n} \prod_{i=1}^{n} x_i \longrightarrow \max \\ X_{(n)} \le 1/\theta^2 \end{cases}$$

Ответ: $\hat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{X_{(n)}}}$ – ОМП.

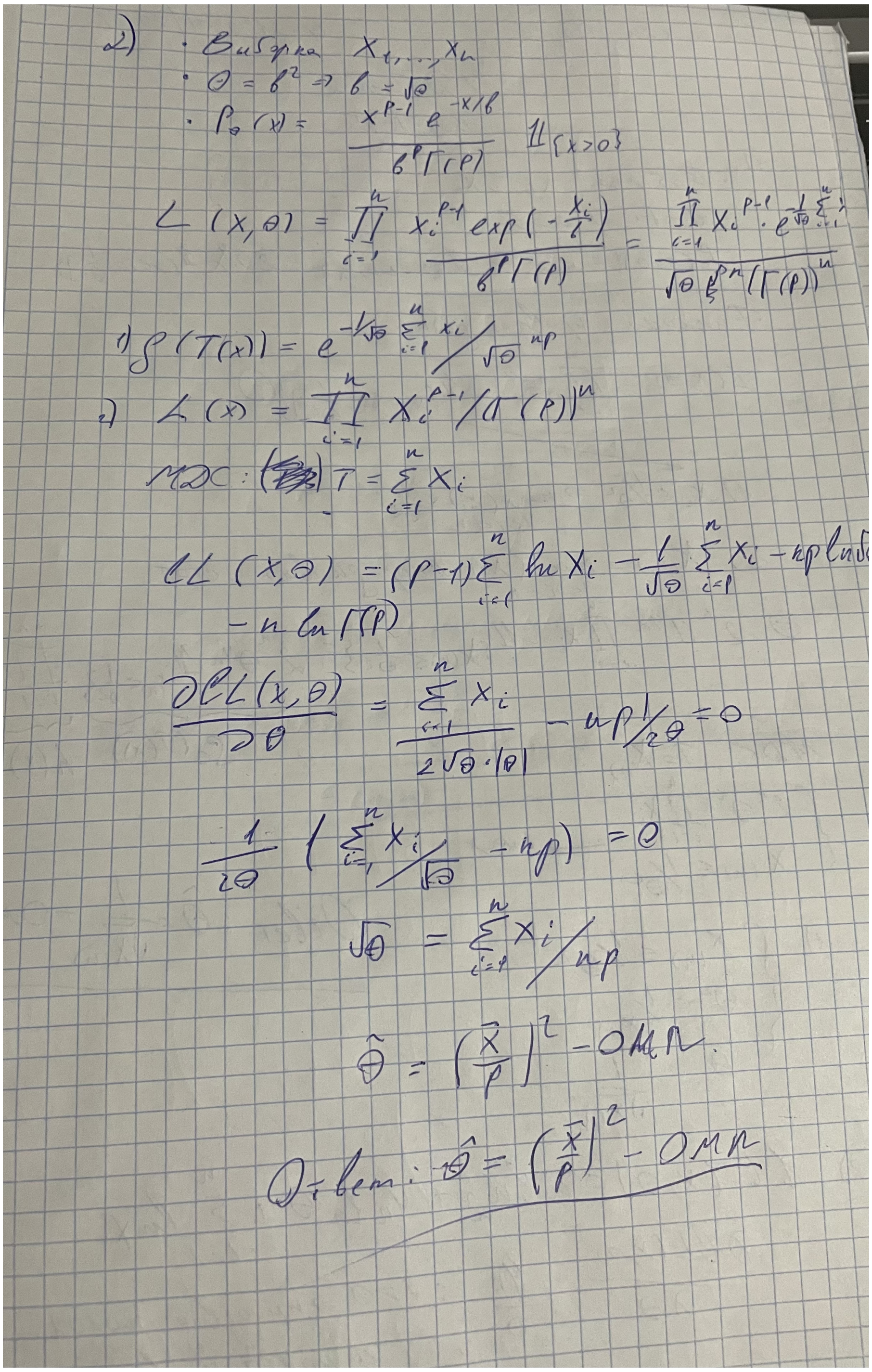
1) $\begin{cases} X_{(n)} \le 1/\theta^2 \\ \theta^2 \le 1/X_{(n)} \\ \theta \le \frac{1}{\sqrt{X_{(n)}}} \end{cases}$

2) $lL(x, \theta) = n \ln 2 + 4n \ln \theta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$

$\frac{\partial lL(x, \theta)}{\partial \theta} = \frac{4n}{\theta}$; $\theta > 0 \Rightarrow$ производ. полож. и монотон. возр. $(4n \ln \theta$ максимум на верх. гр-нице.

Рис. 1: Задача 1

Фото: Решение задачи 2



2) · Выборка $X_1, \dots, X_n$

· $\theta = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{\theta}$

· $p_\theta(x) = \dfrac{x^{p-1} e^{-x/b}}{b^p \Gamma(p)} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$

$$L(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{p-1} \exp\left(-\frac{x_i}{b}\right)}{b^p \Gamma(p)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1} \cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{i=1}^{n} x_i}}{\sqrt{\theta}^{np} (\Gamma(p))^n}$$

1) $g(T(x)) = e^{-1/\sqrt{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i} / \sqrt{\theta}^{np}$

2) $h(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1} / (\Gamma(p))^n$

МДС: $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\ell L(x,\theta) = (p-1)\sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{i=1}^{n} X_i - np \ln\sqrt{\theta} - n \ln \Gamma(p)$$

$$\frac{\partial \ell L(x,\theta)}{\partial \theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2\sqrt{\theta} \cdot |\theta|} - np \frac{1}{2\theta} = 0$$

$$\frac{1}{2\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i / \sqrt{\theta} - np\right) = 0$$

$$\sqrt{\theta} = \sum_{i=1}^{n} X_i / np$$

$$\hat{\theta} = \left(\frac{\bar{X}}{p}\right)^2 \text{ — ОМП.}$$

Ответ: $\hat{\theta} = \left(\frac{\bar{X}}{p}\right)^2$ — ОМП

Рис. 2: Задача 2

Фото: Решение задачи 3

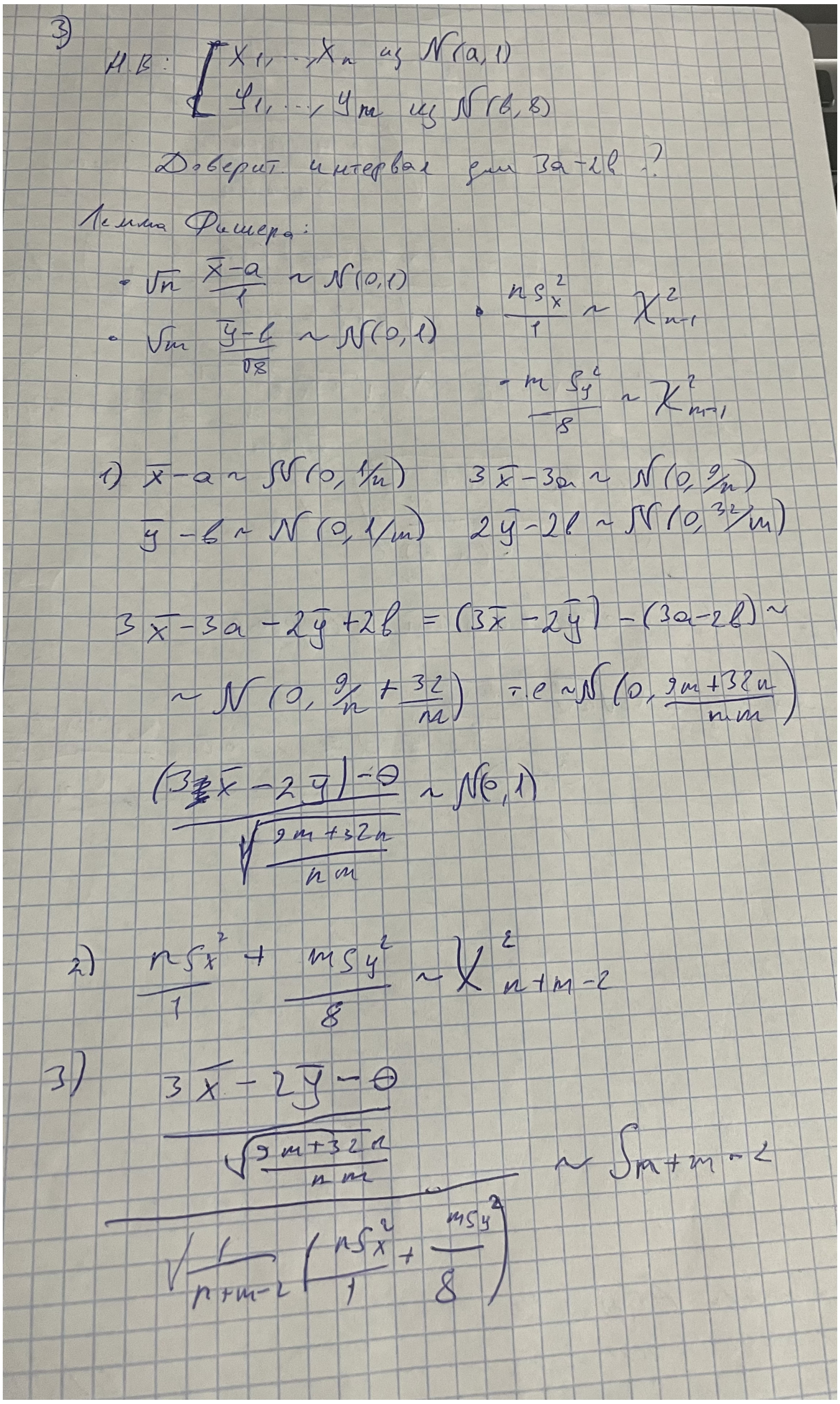
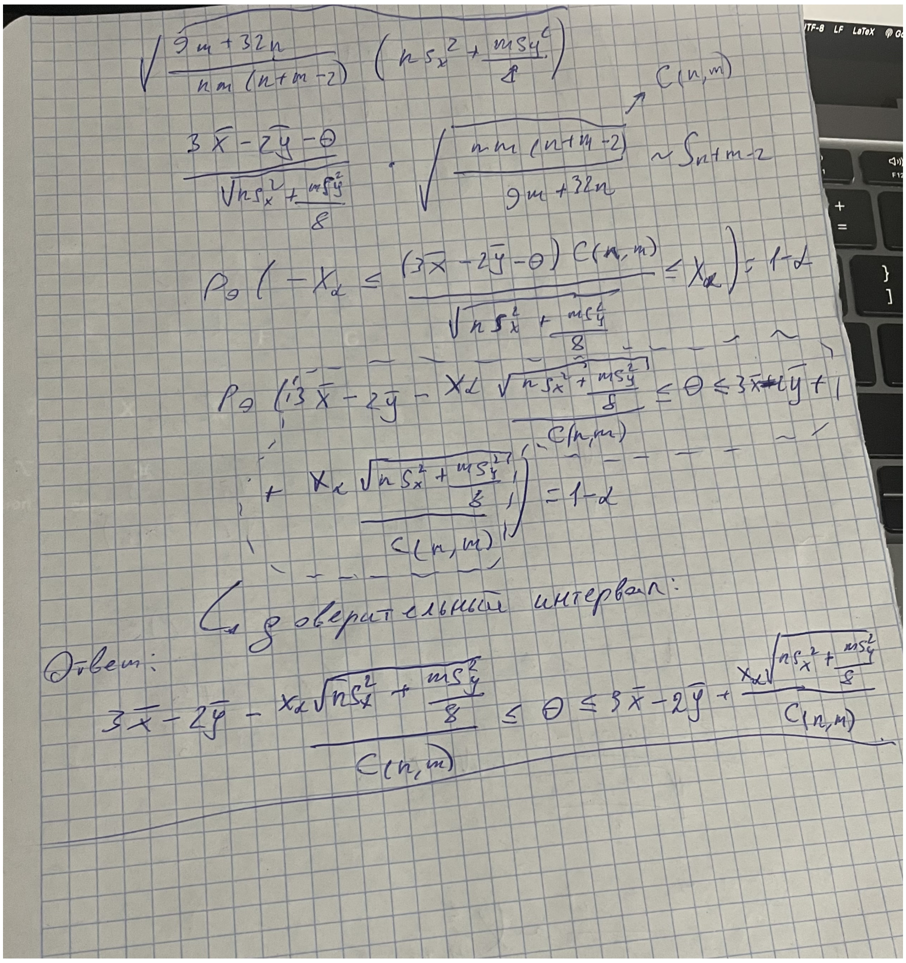


Рис. 3: Задача 3 начало



$$\sqrt{\frac{9m+32n}{nm(n+m-2)}\left(nS_x^2+\frac{mS_y^2}{8}\right)}$$

$C(n,m)$

$$\frac{3\bar{x}-2\bar{y}-\theta}{\sqrt{nS_x^2+\frac{mS_y^2}{8}}}\cdot\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{9m+32n}} \sim S_{n+m-2}$$

$$P_\theta\left(-x_\alpha \le \frac{(3\bar{x}-2\bar{y}-\theta)\,C(n,m)}{\sqrt{nS_x^2+\frac{mS_y^2}{8}}} \le x_\alpha\right) = 1-\alpha$$

$$P_\theta\left(3\bar{x}-2\bar{y}-\frac{x_\alpha\sqrt{nS_x^2+\frac{mS_y^2}{8}}}{C(n,m)} \le \theta \le 3\bar{x}-2\bar{y}+\frac{x_\alpha\sqrt{nS_x^2+\frac{mS_y^2}{8}}}{C(n,m)}\right) = 1-\alpha$$

Доверительный интервал:

Ответ:

$$3\bar{x}-2\bar{y}-\frac{x_\alpha\sqrt{nS_x^2+\frac{mS_y^2}{8}}}{C(n,m)} \le \theta \le 3\bar{x}-2\bar{y}+\frac{x_\alpha\sqrt{nS_x^2+\frac{mS_y^2}{8}}}{C(n,m)}$$

Рис. 4: Задача 3 продолжение