Методы оптимизации

«Дихотомия и задача об укладке рюкзака»

Салимли Айзек, гр. 5130201/20101

«____»__________ 20___ г.

Санкт-Петербург, 2025

1 Задача о рюкзаке

Задача о рюкзаке - задача комбинаторной оптимизации и теории алгоритмов.

Проблема состоит в том, что необходимо принимать дискретное решение при наличии непрерывных ограничений. Такое противоречие порождает дихотомию.

Математическая модель задачи:

$$max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W, x_i \in 0, 1$$

где: v_i - ценность объекта, w_i - объем или вес объекта, W - вместимость рюкзака, x_i - бинарная переменная включения объекта.

Сущность дихотомии заключается в следующем:

1. Ограничения на ресурс (вес, объем, пространство) - является непрерывным
2. Решение (включать / не включать объект) - дискретное

это приводит к тому, что оптимальное решение редко полностью заполняет доступное пространство и возникает остаточное (свободное) пространство, которое невозможно эффективно использовать из-за дискретности объекта.

То есть дихотомия задачи заключается между аддитивной модели ограничения и неделимостью объектов.

Формально $W \in \mathbb{R}_+, w_i \in \mathbb{R}_+,$ a $x_i \in 0, 1$.

$\Rightarrow$ останеться пространство.

2 Оценка свободного пространства и связь с задачей

Свободное пространство - разница между вместимостью рюкзака и суммарным объемом уложеных объектов.

$$F_s = W - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

Из-за проблемы из пункта 1, даже при оптимальном выборе объектов, $F_s > 0$.

3 Случай при N = 3

Для задач в трехмерном пространстве (например упаковка параллепипедов в контейнер) доказана, что существует верхняя оценка доли свободного пространства независящая от конфигурации объектов, а зависит только от размерности N.

Связь с задачей о рюкзаке в том, что каждый объект имеет фиксированный объем, контейнер (рюкзак) имеет ограниченный объем и дискретность объектов приводит к остаткам пространства.

4 Хранение данных N = 8, 24

В структурах хранения данных такие как: RAID-массивы, распределенные файловые системы, блоковое хранение в UNIX системах. Данные разбиваются на блоки фиксированного размера, при этом размер файлов не кратен размеру блока.

N = 8, 24 - соответствует размерности адресного пространства/ структурного пространства (число бит в адресном блоке или размер блока).

Пример: 1 байт = 8 бит, адресное пространство кратно байту, минимальный размер блока хранения - 1 байт либо ему кратные. Но если файл имеет размер некратный 8 битам, то возникает внутреняя фрагментация и часть блока остается незаполненной.

Аналогично каждый файл - предмет Блок - ячейка рюкзака Свободные байты - свободное пространство.

N = 24 - в более сложных системах: RGB-цвет, сетевые адреса, хеш-пространства.

5 Связть с линейным программированием (LP)

Если заменить условие $x_i \in 0, 1$ на:

$$0 \leq x_i \leq 1$$

то мы получим линейную релаксацию и задача становиться задачей LP.

Тогда: оптимальное решение полностью заполняет рюкзак $\Rightarrow F_s \geq 0$

при этом решение находится жадным алгоритмом.

Разница между оптимумом линейной релаксации и целочисленной задачей называется - интегральный разрыв.

Этот разрыв отображает количественно:

1. Величину неизбежного свободного пространства
2. Последствие дихотомии (непрерывное - дискретное)

6 Связь задачи о рюкзаке и заполнение пространства

Задача о рюкзаке - одномерный случай более общей задачей заполнения пространства.

То есть:

- 1D - задача о рюкзаке
- 2D - упаковка прямоугольников
- 3D - упаковка параллепипедов
- N - мерное - размещение в абстрактных пространствах

7 Пример заполнения пространства сферами

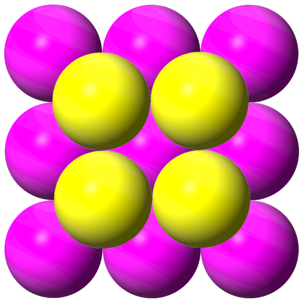

Рис. 1: Упаковка сфер

Задача:

Максимально плотная упаковка одинаковых сфер радиуса r в куб объемом V

контейнер - трехмерный куб $C \subset \mathbb{R}^3$

объекты - сферы объема $V_s = \frac{4}{3}\pi r^3$

Ограничения:

- Сферы нельзя пересикать,
- Нужно максимизировать число сфер n.

Аналогия с задачей о рюкзаке:

- Каждая сфера - дискретный объект фиксированного объема
- Куб - контейнер

Свободное пространство возникает так как:

Сферы не могут идеально заполнить евклидово пространство.

максимальная плотность упаковки сфер в $\mathbb{R}^3$

$$\delta_{max} = \frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0.74$$

$\Rightarrow$ не менее 26% объема пустые даже в оптимальном случае.

Плотность упаковки определяется как:

$$\delta = \lim_{R \to +\infty} \frac{\texttt{Объем сфер внутри шара радиусом R}}{\texttt{Объем шара радиусом R}}$$

δ - показывает какую долю пространства можно заполнить сферами без пересечений.

a - ребро куба в первой ячейки 4 сферы.

Сферы касаются друг друга по диоганалям граней $a\sqrt{2} = d$

По этой диоганали укладывается 4 радиуса r.

$$a\sqrt{2} = 4r \Rightarrow a = 2\sqrt{2}r$$

$$V = a^3 = (2\sqrt(2)r)^3 = 16\sqrt{2}r^3$$

4 сферы:

$$V_{4s} = \frac{16}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{V_{4s}}{V} = \frac{16\pi r^3}{16\sqrt{2}r^3} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{18}}$$

$$\Rightarrow \delta_{max} = \frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0.74$$

Томас Хейлс доказал гипотизу Кеплера, что ни одна упаковка сфер в $\mathbb{R}^3$, не может иметь плотность выше $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$.

8 Практические примеры

- Распределение памяти и дискового пространства
- VRP - задачи
- Планирование ресурсов в вычислительных системах

Но оптимизация выбора объектов не гарантирует оптимального использования пространства.