Lecture 1: The Column Space of A Contains All Vectors Ax

Tags	changhyeon nam

> Gilbert Strang의 18.065 강의 Lecture 1: The Column Space of A Contains All Vectors Ax를 정리한 내용이다. Matrix와 Vector의 multiplication, Matrix와 Matrix의 multiplication을 올바르게 이해하는 것을 다루고, Column space, Row space, basis vector 등을 다룬다.

Multiplying a matrix by vector

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 12 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

위와 같이 행렬 A 와 벡터 x 가 있다고 하자. Ax를 계산하는 방법은 크게 두가지가 있다.

1. A의 각 row와 x를 dot product하는 계산하는 방법
2. vectorwise로 product하여 계산하는 방법

행렬과 벡터를 올바르게 계산하는 방법은 2번 방법이고, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Ax = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Ax는 벡터 x을 선형변환 행렬 A를 통해 계산된 새로운 벡터 x'이라고 할 수 있다. ($Ax = x'$)

Column space, rank

행렬 A의 column의 모든 combination은 행렬 A의 column space와 동일하다. 다시말하면 Ax로 표현될 수 있는 모든 공간이 A의 column space, $C(A)$라고 할 수 있다.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

위의 경우엔 B의 각 column이 모두 서로 dependent하기 때문에 $C(B) = rank(B) = 1$이고, B의 column space는 line으로 표현된다.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

위의 행렬 A의 경우 세번째 column은 첫번째와 두번째 column의 합으로 표현되기 때문에, 세번째 column은 나머지 두개에 linearly dependent하다. 그래서 $C(A) = rank(A) = 2$이고, A의 column space는 plane으로 표현된다.

Row space, rank

Row rank는 row space의 dimension을 의미한다. 즉 Row space of A는 A의 row로 표현할 수 있는 모든 combination이고, 이는 Transpose of A의 column space와 동일하다.

Matrix Factorization of A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

행렬 A를 위와 같이 $A = CR$ 로 factorize해보자.

$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$이고, R은 reduced row echelon form이라고도 불린다.

이때 C는 basis for column space, R은 basis for row space로 이뤄진 행렬이다.

여기서, 각 col 혹은 row가 행렬의 basis이기 위해선 다음 두가지를 확인해야 한다.

1. Check independent
2. Check that combinations of basis produces all rows/columns.

위에서 확인할 수 있는것은 rank = #independent col = #independent row = #basis for col space = #basis for row space가 성립한다는 것을 알 수 있다. Column rank = Row rank 임을 증명하는 법은 여러가지 방법이 있는데, 다음 링크에 잘 설명 되어 있다.

만약 행렬 A가 정방행렬이 아닌, shape이 (m,n)인 매우 큰 행렬 일 경우에는 A의 column space를 어떻게 알수 있을까? 가장 대표적인 방법은 샘플링을 통해 A의 column space를 추정하는 것이다.

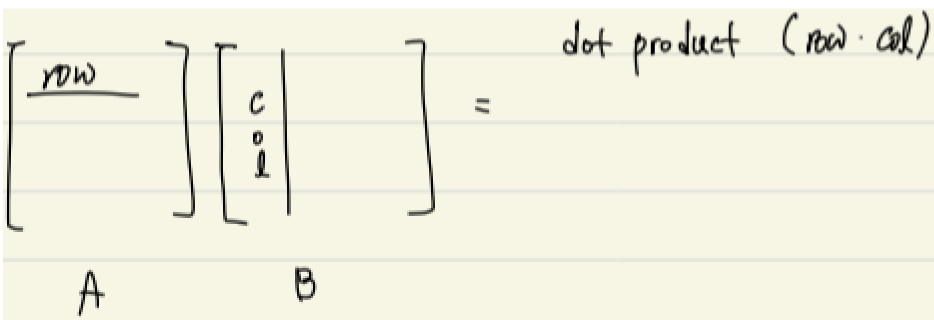
$x = randn(m, 1)$

위와 같은 랜덤 함수를 통해 예를들어 100개의 벡터 x들을 구하고, Ax를 통해 A의 column space를 추정 할 수 있다. 왜냐하면 결국 Ax 또한 A의 column space에 있는 벡터이기 때문이다. 같은 논리로 $ABCx$의 결과 또한 A의 Column space에 있다.

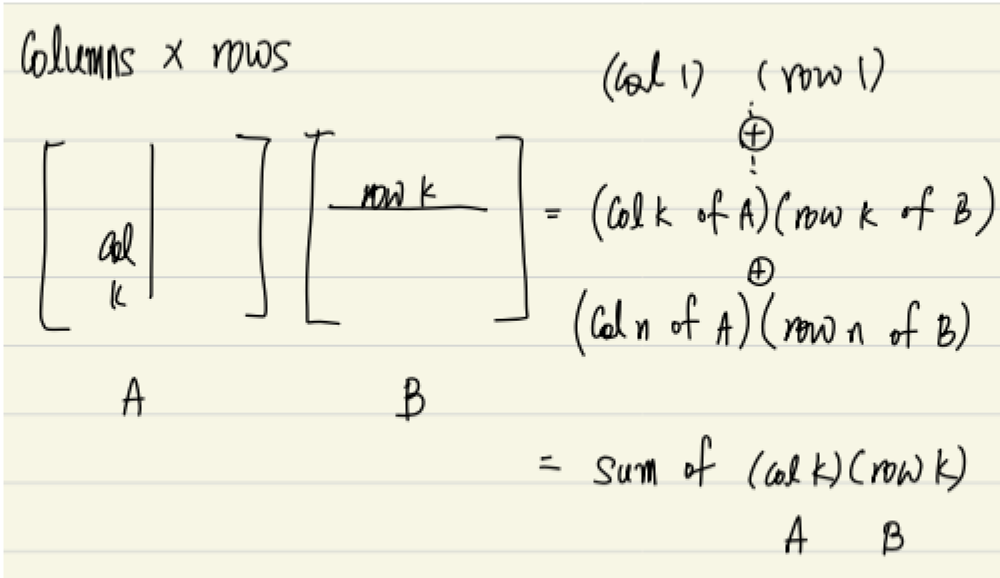
Multiplying a matrix by matrix

Matrix와 matrix의 multiplication을 올바르게 이해하려면 Row와 Col의 Dot product 방식이 아닌, sum of Col * Row의 방식으로 이해해야 한다.

1. dot product



2. Sum of Columns x rows



이때 A의 shape이 (m,n)이고, B의 shape이 (n,p)라고 해보자. 각 방식의 multiplication 횟수를 계산해보면 다음과 같다. (결과 값은 동일하다.)

1. dot product → $m \cdot np$ 번의 multiplication
2. sum of Columns x rows → $n \cdot mp$번의 multiplication