微积分初步

Saturday, June 17, 2023   8:38 PM

微分

初等函数微分表

1. $y = c$ $dy = 0$
2. $y = x^{\mu}$ $dy = \mu x^{\mu-1} \cdot dx$
   $y = \dfrac{1}{x}$ $dy = -\dfrac{dx}{x^2}$
   $y = \sqrt{x}$ $dy = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$
3. $y = a^x$ $dy = a^x \cdot \ln a \cdot dx$
   $y = e^x$ $dy = e^x \cdot dx$
4. $y = \log_a x$ $dy = \dfrac{\log_a e \cdot dx}{x} = \dfrac{dx}{x \ln a}$
   $y = \ln x$ $dy = \dfrac{dx}{x}$
5. $y = \sin x$ $dy = \cos x \cdot dx$
6. $y = \cos x$ $dy = -\sin x \cdot dx$
7. $y = \mathrm{tg} x$ $dy = \sec^2 x \cdot dx = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$
8. $y = \mathrm{ctg} x$ $dy = -\csc^2 x dx = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$
9. $y = \arcsin x$ $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $y = \arccos x$ $dy = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $y = \mathrm{arctg} x$ $dy = \dfrac{dx}{1+x^2}$
12. $y = \mathrm{arcctg} x$ $dy = -\dfrac{dx}{1+x^2}$

$y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ $dy = -\cos x \csc^2 x \, dx = -\csc x \cot x \, dx$

$y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $dy = \sin x \sec^2 x \, dx = \sec x \tan x \, dx$

$$[\sinh(x)]' = \cosh(x)$$
$$[\cosh(x)]' = \sinh(x)$$
$$[\tanh(x)]' = \mathrm{sech}^2(x)$$
$$[\coth(x)]' = -\mathrm{csch}^2(x)$$
$$[\mathrm{sech}(x)]' = -\mathrm{sech}(x)\tanh(x)$$
$$[\mathrm{csch}(x)]' = -\mathrm{csch}(x)\coth(x)$$
$$[\mathrm{ar}\sinh(x)]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$[\mathrm{ar}\cosh(x)]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$$
$$[\mathrm{ar}\tanh(x)]' = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)$$
$$[\mathrm{ar}\coth(x)]' = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| > 1)$$

微分法则

$$\text{I. } d(cu) = c \cdot du,$$

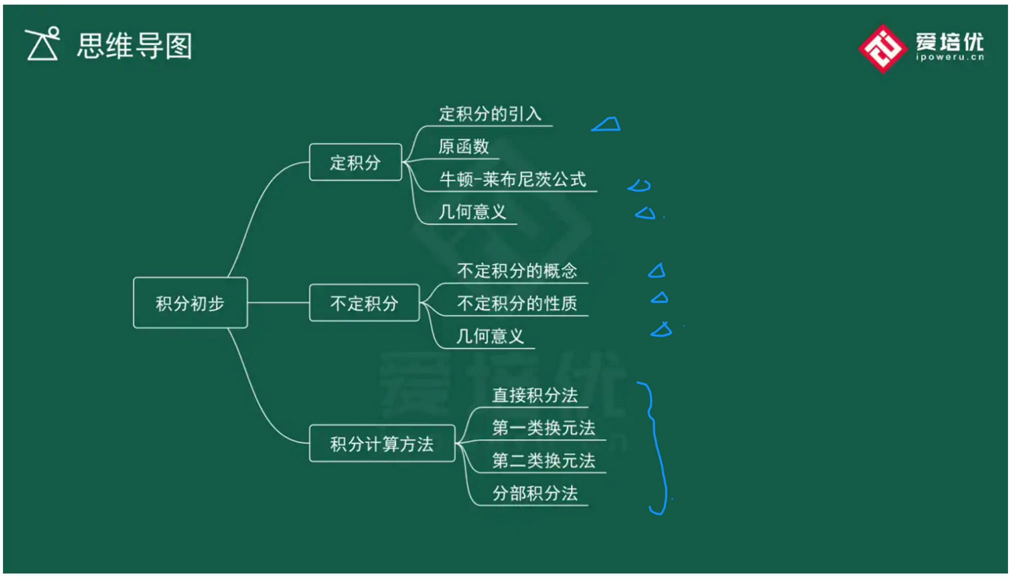
$$\text{II. } d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$\text{III. } d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du,$$

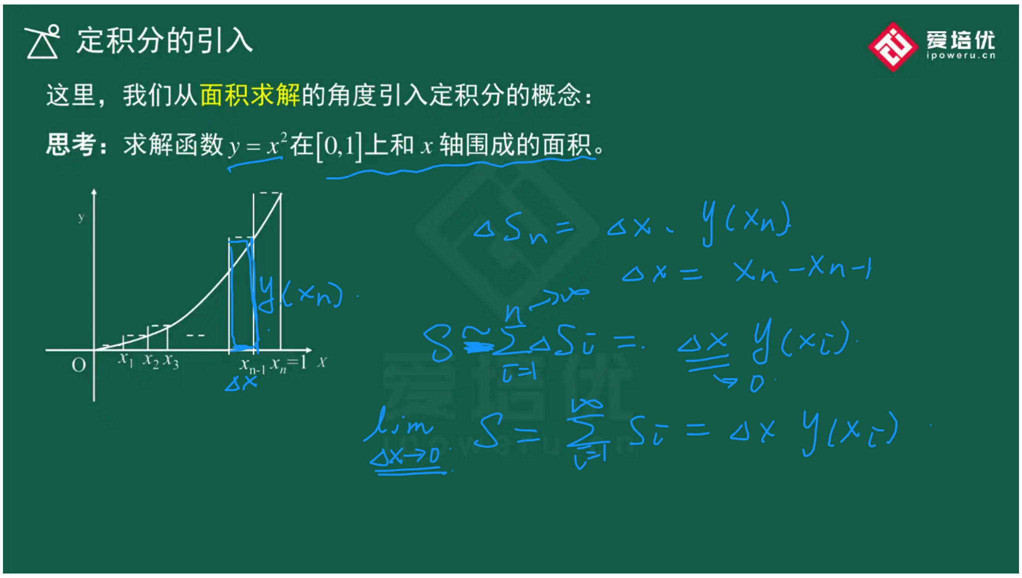
$$\text{IV. } d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$$

积分

爱培优
ipoweru.cn
Physics
物理主线课程
积分初步



思维导图
爱培优
ipoweru.cn
积分初步
定积分
定积分的引入
原函数
牛顿-莱布尼茨公式
几何意义
不定积分
不定积分的概念
不定积分的性质
几何意义
积分计算方法
直接积分法
第一类换元法
第二类换元法
分部积分法



定积分的引入
爱培优
ipoweru.cn
这里，我们从面积求解的角度引入定积分的概念：
思考：求解函数 $y=x^2$ 在 $[0,1]$ 上和 x 轴围成的面积。
y
O
x_1 x_2 x_3
x_{n-1} $x_n=1$ x
Δx
$y(x_n)$
$\Delta S_n = \Delta x \cdot y(x_n)$
$\Delta x = x_n - x_{n-1}$
$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \Delta x \, y(x_i)$
$n \to \infty$
$\Delta x \to 0$
$\lim_{\Delta x \to 0} S = \sum_{i=1}^{\infty} S_i = \Delta x \, y(x_i)$

经典例题

例 5：已知 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x>0)$，求解函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的不定积分。

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

经典例题

例 6：求解函数 $f(x)=(1+2x)^2+\sin x$ 的不定积分

$$\int (1+2x)^2+\sin x \, dx \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$= \int (1+2x)^2 dx + \int \sin x \, dx$$

$$\text{①}: \int 1+4x+4x^2 \, dx \qquad -\cos x \qquad + C$$

$$\int dx + \int 4x\,dx + \int 4x^2 dx \qquad \boxed{d(2x+1) = 2dx = (2x+1)'dx}$$

$$\triangle\ x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 \qquad y = 1+2x$$

$$\text{②} \int (1+2x)^2 dx \longleftrightarrow \int y^2 dy = \int (1+2x)^2 d(2x+1)$$

积分方法：

直接积分法

直接积分法也叫查表法，是利用求导时的“记忆”来直接反推或查表（见附录），再运用前面所学的基本运算法则来直接获得导函数的原函数。

基本积分表:

1. $\int k dx = kx + C$

2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq 1)$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

10. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

11. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

12. $\int e^x dx = e^x + C$

13. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

14. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$

15. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$

16. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

17. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

展开为 $\frac{\sin x}{\cos x}$

18. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

19. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

20. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

21. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

$$\int \sinh(x)dx = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x)dx = \sinh(x) + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \tanh(x) + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2(x)\,dx = -\coth(x) + C$$

$$\int \operatorname{sech}(x)\tanh(x)dx = -\operatorname{sech}(x) + C$$

$$\int \operatorname{csch}(x)\coth(x)dx = -\operatorname{csch}(x) + C$$

$$\int \tanh(x)dx = \ln[\cosh(x)] + C$$

$$\int \coth(x)dx = \ln|\sinh(x)| + C$$

$x = a\tan\theta$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{\cancel{a}\sec^2\theta}{\cancel{a}\,\cancel{\sec\theta}}\cdot d\theta = \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C' = \ln\left|\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a}\right| + C' + \ln a = \ln\left|\sqrt{x^2+1} + x\right|$$

$x = a\cos\theta$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{-\cancel{a}\sin\theta}{\cancel{a}\sin\theta}\,d\theta = -\arccos\frac{x}{a} + C = \arcsin\frac{x}{a}.$$

$\frac{\pi}{2}$

Tips :

① $\int \sec^3\theta = \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta.$

推导：$\int \sec^3\theta \, d\theta = \int \sec\theta \, d\tan\theta.$

$= \sec\theta\tan\theta - \int \tan\theta \, d\sec\theta$

$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta\tan^2\theta \, d\theta$

$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta(\sec^2\theta - 1)$

$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta + \int \sec\theta.$

② $\int \tan x \, dx = \int \frac{sx}{cx} dx = -\int \frac{d\,cx}{cx} = -\ln|cx| + C$

$\int t^2x \, dx = \int \frac{s^2x}{c^2x} dx = \int \frac{1-c^2x}{c^2x} dx = \int (\sec^2x - 1) \, dx = \tan x - x + C.$

$\int \tan^3x \, dx = \int (\sec^2x - 1)\tan x = \int (\sec^2x\tan x - \tan x) \, dx = \int tx \, dtx - \int tx \, dx = \frac{1}{2}t^2x - \ln|cx|$

$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\int \sec^2x \, dx = \tan x + C$

$\int \sec^3x \, dx = \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + \frac{1}{2}\sec x\tan x + C$

③

第一类换元法

复合函数的链式求导规则：

$$(F[g(x)])' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$\frac{dF(g(x))}{dx} = \frac{dF(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx}$

$= f(g(x)) \cdot g'(x)$

其中 $f(u)$ 是 $F(u)$ 的导函数

因此，如果你能看出积分式 $\int h(x)\mathrm{d}x$ 中，被积函数 $h(x)$ 能拆成一个复合函数 $f[g(x)]$ 与其内导函数 $g'(x)$ 的乘积，且 $f(y)$ 的原函数较为简单，则可使用第一类换元法：

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{u=g(x)} \int f(u)\mathrm{d}u$$

1. 整体复合型：
   求dg(x)/dx =h(x)
   故 ∫ F(g(x))dx = ∫ F(g(x))dg(x)/h(x)
   = 1/h(x) • ∫F(g(x))dg(x)
2. 部分凑微分
   求∫ f(x)g(x)dx ,
   由dG(x)

没有所谓积分的乘除法法则

第二类换元法

第二类换元法主要是对被积函数换元，令 $x = q(t)$，则积分式变为：

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{x=q(t)} \int f[q(t)]q'(t)\mathrm{d}t$$

记得把设的新元还原

若 $f[q(t)]q'(t)$ 的形式较为简单，则达到了化简积分的目的。

三角换元

$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $\sqrt{x^2-a^2}$

令 $x = a\sin t$, $\boxed{(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})}$

$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a \cdot \cos t$

有根号不会积. 令 $u = \sqrt{x-1}$

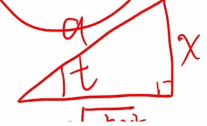
二、第二换元法

（2）$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \ (a > 0)$. 令 $x = a\sin t, (-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$, $dx = a\cos t\,dt$

$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a \cdot \cos t$

$= \int a^2 \cos^2 t\,dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{4}\int \cos 2t\,d(2t)$

$= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$



$\sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

二、第二换元法

（2）$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \ (a>0)$.

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$t=\frac{x}{2},\quad x=2t$

$dx = 2dt$

（3）$\int \frac{dx}{\sin x} \cdot = \int \frac{dt}{\sin t \cos t}$

$= \int \frac{dt}{\tan t \cdot \cos^2 t}$

$= \int \frac{\sec^2 t\, dt}{\tan t}$

$= \int \frac{d(\tan t)}{\tan t} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

$dy = \sec^2 x \cdot dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$

分部积分法

学完两种换元积分法以后，我发现学数学一定要有逆向思维的过程，也就是从某个过程的逆过程入手来研究某种运算。分部积分法就是这样得出的。

首先假设存在两个可导的函数 $u=u(x)$ 、 $v=v(x)$ ，那么可以得到

$$[uv]' = u'v + uv' \tag{1}$$

对（1）式两边同时求积分，根据求导与积分互逆的关系，容易得到

$$uv = \int u'v dx + \int uv' dx \tag{2}$$

利用前面学过的凑微分法，可以把（2）式中右侧两项中的导函数凑进微分符号，得

$$uv = \int u dv + \int v du \tag{3}$$

对（3）式变形就可以得到分部积分法的公式

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{*}$$

稍加注意就能发现，分部积分法实际上式通过交换被积表达式和积分变量的方式来简化了积分。注意到，（*）式左侧的部分是由 $\int uv' dx$ 变来的，也就是说，使用分部积分法的第一步便是“凑”，即凑微分。从这里我们也可以看出，**当被积表达式是两个函数相乘的时候可以考虑使用分部积分法**，当然，前提是凑微分法不好用。

通常情况下，我们要使用分部积分法的积分都是这种形式的： $\int f(x)g(x)dx$ ，而我们要选择一个函数，把它凑进微分里，然后应用分部积分法。怎么选取凑进微分里的函数才是重点所在。

为了方便做题，人们总结出了这样一句口诀：“**反对幂指三**”。口诀中的五个字分别对应了**反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数**和**三角函数。这个顺序正着就是不凑入微分符号的函数类型，逆着读就是优先凑入微分符号的函数类型。**

或者这样理解：

由函数乘积的微分公式

$$d(uv) = v\,d(u) + u\,d(v),$$

移项得 $\quad u\,d(v) = d(uv) - v\,d(u)$，

对上式两端同时积分，得

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{1}$$

或 $$\int uv' dx = uv - \int u' v dx \tag{2}$$

公式(1)或公式(2)称为分部积分公式 .

还是用例题来说明吧。

例 1 求 $\int x^2 e^x dx$

解： 这道题的被积表达式是两个函数相乘，我们首先考虑凑微分法。

但尝试后发现，无论把那个函数凑入微分符号中，积分都不会变简单。这时候，可以考虑使用分部积分法了。

根据“反对**幂指**三”的顺序，我们优先选择把指数函数 e^x 凑入微分符号，得 $\int x^2 d(e^x)$.

由分部积分公式得，原式= $x^2 e^x - \int e^x d(x^2) = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$.

这时候剩下的这个积分的被积表达式又是两个函数相乘的形式，而且与一开始的积分形式是一样的，所以对这个积分再次使用分部积分。即 $\int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C$.

容易计算出最后的结果是 $\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$.

例2 求 $\int \ln x dx$.

解： 这道题乍一看似乎可以直接用积分公式，但一想，不对啊，没有对应的积分公式可以用啊。而被积表达式就只有一个函数光溜溜地站在那里，既不能换元，也不能凑微分，那么这时候就又可以考虑分部积分法了。

我们把 $\ln x$ 看作 $1 \cdot \ln x$ ，那么 1 就是一个幂函数（ x^0 ）。

现在根据“反对**幂**指三”的顺序，我们选择把幂函数凑入微分符号，得到和原式一样的 $\int \ln x dx$ 。

下一步就是分部积分了，根据公式，容易得到：$x\ln x - \int x d(\ln x)$.

计算易得，原式= $x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1) + C$.

从上面两个例题我们便可以总结出分部积分法的基本步骤了：

①凑微分， $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dG(x)$ ， 其中$g(x)$ 的类型是“反对幂指三”中靠后的类型；

②带入分部积分公式， $\int f(x)dG(x) = f(x)G(x) - \int G(x)df(x)$

③计算微分 $df(x)$ ；

④计算积分 $\int G(x)f'(x)dx$ ，可能还需要再用一次分部积分法；

⑤整理、化简。

【例 3】求积分 $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx$. $= \int \ln(\cos x)\sec^2 x\, dx = \int \ln\cos x\, d\tan x$

$= \tan x \ln\cos x + \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$= \tan x \ln\cos x + \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$

$= \tan x \ln\cos x + \tan x - x + C$

【例 4】设 $f(x)$ 是单调连续函数，$f^{-1}(x)$ 是它的反函数，且已知 $\int f(x)dx = F(x)+C$，求 $\int f^{-1}(x)dx$.

$x = f[f^{-1}(x)]$.

$$x = f[f^{-1}(x)] = F'[f^{-1}(x)]$$

$$\therefore \int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int x\,d f^{-1}(x)$$

$$= xf^{-1}(x) - \int F'[f^{-1}(x)]\,d[f^{-1}(x)]$$

$$= xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.$$