Das Dirichletsche Schubfachprinzip
Arbeitsmaterial für Klasse 8

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

Version vom 29. September 2025

1 Das Schubfachprinzip

> Felix behauptet am ersten Tag im Ferienlager: „In unserer Gruppe gibt es unter den 15 Kindern zwei, die im selben Monat Geburtstag haben.“ Hat Felix recht?

Wie kann Felix so sicher sein, wo er doch die Kinder noch gar nicht kennt und demzufolge bestimmt auch nicht weiß, in welchem Monat jeder einzelne Geburtstag hat?

Felix' Überlegung ist denkbar einfach: Denke ich mir 12 Schubfächer, auf denen die verschiedenen Monatsnamen stehen, ließe die 15 Kinder ihre Namen auf kleine Zettel schreiben und jedes Kind dann seinen Zettel in das Fach legen, auf dem sein Geburtsmonat steht, dann liegen in einem der Kästen mehr als ein Zettel, denn es gibt mehr Kinder in der Gruppe als Monate im Jahr.

Auf eine solche Überlegung, die man das *Dirichletsche Schubfachprinzip* nennt, kann man manche Aufgaben zurückführen. Dabei ist es egal, welcher Natur die Fächer und die verteilten Objekte sind und natürlich auch, ob sie wirklich verteilt worden sind oder (wie hier) man sich die Verteilung nur vorgestellt hat.

Zur Verdeutlichung spricht man deshalb oft von Kugeln und Fächern. In obiger Aufgabe haben wir die Aussage

> *Hat man mehr Kugeln zum Verteilen als Fächer, wo sie hineinkommen, so liegen nach dem Verteilen in wenigstens einem Fach mehrere Kugeln.*

verwendet.

Man kann genauer folgende Aussage treffen:

> *Hat man (wenigstens) $k \cdot n + 1$ Kugeln zum Verteilen auf n Fächer, so liegen nach dem Verteilen in einem Fach mindestens $k + 1$ Kugeln.*

Im Englischen spricht man auch vom *pigeonhole principle* (dem „Prinzip des Taubenschlags“); Wenn 10 Tauben in drei Taubenschlägen sitzen, dann müssen in einem der Schläge (mindestens) vier Tauben sitzen.

---

2 Aufgaben

Aufgabe 1 Gibt es an Eurer Schule zwei Schüler, die am gleichen Tag Geburtstag haben?

Lösung: Da das Jahr höchstens 366 Tage hat, müssen an Deiner Schule also mindestens 367 Schüler sein, um die Frage mit „ja“ zu beantworten. Gibt es wenigstens $2 \cdot 366 + 1 = 733$ Schüler, so gibt es sogar ein „Fach, in dem drei Schüler liegen“, wie man manchmal etwas salopp sagt, dass also 3 Schüler am gleichen Tag Geburtstag haben.

Aufgabe 2 Was kann man über ein fünfzügiges Gymnasium mit durchschnittlich 28 Schülern pro Klasse aussagen?

Aufgabe 3 Wie viele Schüler muss eine Schule mindestens haben, damit mit Sicherheit mindestens fünf von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben?

Lösung: Es gilt hier $n = 365$ (Anzahl der Tage eines Jahres) sowie $k + 1 = 5$, also $k = 4$ und somit $nk + 1 = 1461$. Folglich muss die Schule mindestens 1461 Schüler haben, damit die genannte Bedingung erfüllt ist.

Aufgabe 4 Gibt es in Deutschland 100 Menschen, die (keine Glatze haben und dennoch alle gleich viele Haare auf dem Kopf haben?

Aufgabe 5 Gibt es eine (hinreichend große) Schüleranzahl, für die man behaupten kann, dass mit Sicherheit an *zwei* verschiedenen Tagen jeweils mehr als ein Schüler Geburtstag hat?

Lösung: Nein, es könnten alle am selben Tag Geburtstag haben.

Aufgabe 6 Beweise: Unter $n + 1$ ganzen Zahlen kann man stets mindestens zwei finden, deren Differenz durch n teilbar ist ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$).

(Hinweis: Betrachte die Reste der $n + 1$ Zahlen bei Division durch die Zahl n).

Aufgabe 7 Eine Schießscheibe habe die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 2. Sie werde fünfmal getroffen. Zeige, dass es dann stets mindestens zwei Einschusslöcher gibt, deren Abstand kleiner oder gleich 1 ist.

(Hinweis: Zerlege das Dreieck in vier kongruente Dreiecke mit der Seitenlänge 1.)
Wir betrachten nun zwei etwas schwerere Aufgaben:

Aufgabe 8 In einem Saal seien $n \geq 2$ Personen anwesend. Zeige, dass es unter ihnen stets mindestens zwei Personen gibt, die im Saal dieselbe Anzahl von Bekannten haben.

Lösung: Wir ordnen einer Person, die im Saal genau i Bekannte hat, das Schubfach mit der Nummer i zu.
Die n Personen verteilen sich also auf die n Schubfächer $0, 1, \ldots, n - 1$. Eines der beiden Schubfächer mit der Nummer 0 oder der Nummer $n - 1$ muss aber frei bleiben, weil es nicht möglich ist, dass eine Person niemanden im Saal kennt, eine andere dagegen alle. Folglich werden die n Personen auf nur $n - 1$ Schubfächer verteilt und es gibt ein Schubfach mit (mindestens) zwei Personen.

Aufgabe 9 Gegeben seien n nicht notwendig verschiedene ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Zeige, dass es stets eine Teilmenge dieser Zahlen gibt, deren Summe durch n teilbar ist ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$).

Lösung: Wir betrachten die n Zahlen $a_1, (a_1 + a_2), (a_1 + a_2 + a_3), \ldots, (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$. Falls eine dieser Zahlen durch n teilbar ist, gilt die Behauptung. Anderenfalls lassen mindestens zwei dieser Zahlen bei Division durch n den gleichen Rest. Man wähle dazu die $n - 1$ Reste $1, 2, \ldots, n - 1$ als Schubfächer. Dann ist aber die Differenz dieser beiden Zahlen durch n teilbar. Daraus folgt leicht die Behauptung.

3 Für welche Aufgaben eignet sich das Schubfachprinzip?

Wenn man weiß, dass eine Aufgabe mit dem Schubfachprinzip lösbar ist, dann kommt es nur darauf an, die „Elemente“ und die „Schubfächer“ geschickt zu bestimmen. Hierin kann die Hauptschwierigkeit einer solchen Aufgabe liegen.

Wie sieht man einer Aufgabe an, dass sie mit dem Schubfachprinzip lösbar ist? Hier kann man folgende Faustregel benutzen: Eine Aufgabe lässt sich mit dem Schubfachprinzip lösen, wenn in der Aufgabenstellung eine Menge beschrieben wird, in der zwei oder mehr Elemente gleich sein oder eine gewisse Bedingung erfüllen sollen. Dabei kommt in der Aufgabenstellung häufig die Formulierung „mindestens“ vor. Im allgemeinen sind Existenzaussagen über endliche Mengen mit dem Schubfachprinzip beweisbar. Häufig kann der Aufgabentext so umformuliert werden, dass diese äußeren Merkmale sichtbar werden.

Attribution Section

graebe (2004-09-03): Begleitmaterial für den LSGM-Korrespondenzzirkel in der Klasse 8.

graebe (2025-09-29): Um Material des BK Chemnitz ergänzt.