Reguläre Polyeder

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

Version vom 13. Oktober 2021

Reguläre Polyeder

Als *konvexes Polyeder* bezeichnet man einen durch endlich viele ebene Flächen begrenzten Körper, wo zusammen mit je zwei Punkten auch alle Punkte der Verbindungsstrecke zu diesem Körper gehören.

Jede Seitenfläche definiert eine Ebene, die *Stützebene* des Polyeders zu dieser Seitenfläche, so dass das Polyeder vollständig in einem Halbraum bzgl. dieser Ebene liegt. Das Polyeder ist als Punktmenge genau der Durchschnitt all dieser Halbräume.

Wir beschränken uns im Weiteren auf beschränkte konvexe Polyeder, das sind solche mit endlichem Volumen.

Als *reguläres Polyeder* bezeichnet man ein solches beschränktes konvexes Polyeder, dessen Seitenflächen alle zueinander kongruente regelmäßige Vielecke (q-Ecke) sind *und* in jeder Ecke die gleich Anzahl p von Kanten zusammenstößt.

Bekanntlich gibt es fünf solche Körper.

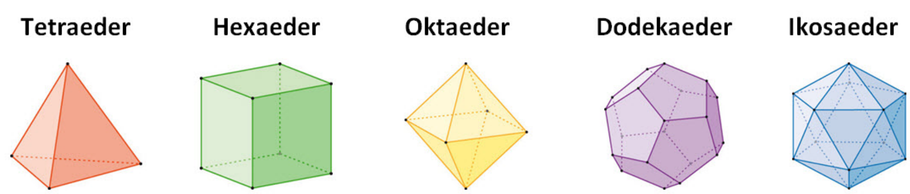

Abbildung 1: Die Platonischen Körper.
Quelle: Webseite von Carl-Friedrich Bödigheimer, Bonn.

Dies war bereits in der Antike bekannt, weshalb diese Körper auch als **Platonische Körper** bezeichnet werden.

Dass reguläre Polyeder nur aus regelmäßigen Dreiecken, Vierecken oder Fünfecken aufgebaut sein können, überlegt man sich zunächst leicht am lokalen Aufbau möglicher Körpernetze, siehe Abbildung 2.

For the KoSemNet project see `http://www.lsgm.de/KoSemNet`.

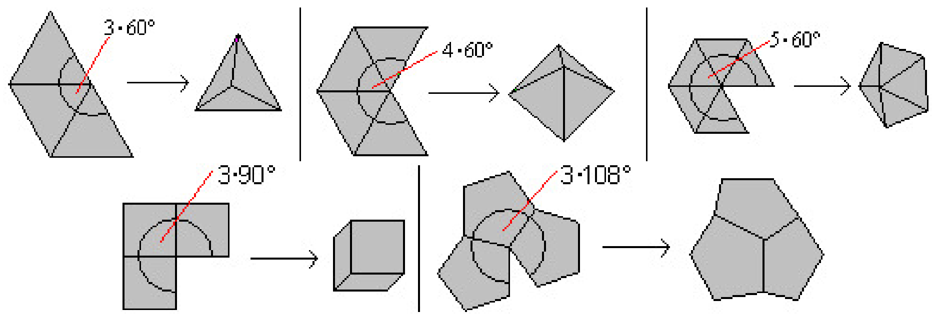

Abbildung 2: Warum nur Dreiecke, Vierecke oder Fünfecke.
Quelle: Jürgen Köller. Mathematische Basteleien. [3]

Die Platonischen Körper erkunden

Wie viele Ecken, Kanten und Flächen?

p	q	e	k	f	Name des Polyeders
3	3	4	6	4	Tetraeder
3	4	8	12	6	Würfel (Hexaeder)
4	3	6	12	8	Oktaeder
3	5	20	30	12	Dodekaeder
5	3	12	30	20	Ikosaeder

Dualität

$e_W = f_O$ und $e_O = f_W$ ist kein Zufall. Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels spannen ein Oktaeder auf, die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Oktaeders einen Würfel.

Ähnlich Dodekaeder und Ikosaeder.

Was aber ist mit dem Tetraeder?

Symmetriegruppen

Reguläre Polyeder haben eine sehr symmetrische Gestalt und lassen damit viele räumliche Bewegungen zu, die das Polyeder in sich überführen. Wir wollen alle herausfinden.

Tetraeder: Jede der vier Seitenflächen kann nach unten gedreht werden, und das in jeweils 3 Lagen. Also gibt es 12 Symmetriebewegungen. Welche?

Dieselbe Frage für die anderen Platonischen Körper.

Größenverhältnisse

Alle fünf Platonischen Körper haben eine Umkugel und eine Inkugel, deren Mittelpunkt jeweils im Zentrum Z des Körpers liegt. Um Größenverhältnisse zu vergleichen, wollen wir für den Radius der Umkugel $R = 1$ annehmen und jeweils Kantenlänge a, Oberfläche O, Volumen V und Inkugelradius r bestimmen und mit den entsprechenden Größen $O = 4\pi \approx 12.57$ und $V = \frac{4}{3}\pi \approx 4.189$ der Umkugel vergleichen.

Dabei wollen wir geeignete Schnitte durch die jeweilige räumliche Figur legen, in denen wir die uns interessierenden Größenverhältnisse in einer ebenen Figur wiederfinden, und dann Ansätze der ebenen Geometrie zur Anwendung bringen.

Tetraeder. Lege eine Ebene durch eine Kante und Z. Die Schnittfigur ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge a und den Schenkellängen h – Höhe im gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge a. Die Höhen der Länge H auf die Schenkel sind zugleich die Höhen des Tetraeders und schneiden sich in Z. Der untere Abschnitt einer solchen Höhe ist der Berührradius der Inkugel.
Zeige, dass Z die Höhe im Verhältnis $3:1$ teilt. Dann gilt

- $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$,
- $H^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}\,h\right)^2 = a^2 - \frac{1}{3}\,a^2 = \frac{2}{3}\,a^2$ (Pythagoras),
- $r = \frac{1}{4}\,H$,
- $O = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2\right) = \sqrt{3}\,a^2$
- $V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2\right) \cdot H = \frac{1}{12}\sqrt{2}\,a^3$ und
- $\frac{3}{4}\,H = 1$ (oberer Höhenabschnitt ist Radius der Umkugel).

Wir erhalten $H = \frac{4}{3}$, $a = \frac{2}{3}\sqrt{6}$ und

	a	O	V	r
Tetraeder	$\frac{2}{3}\sqrt{6} \approx 1.633$	$\frac{8}{3}\sqrt{3} \approx 4.619$	$\frac{8}{27}\sqrt{3} \approx 0.513$	$\frac{1}{3} \approx 0.333$

Würfel. Lege eine Ebene durch eine Kante und Z. Die Schnittfigur ist ein Rechteck mit den Seitenlängen a und $\sqrt{2}\,a$. Die Diagonale ist Durchmesser der Umkugel und hat damit die Länge $2 = \sqrt{3}\,a$. Damit gilt

- $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a = 1$, also $a = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$,
- $r = \frac{1}{2}\,a$ (Berührradius der Inkugel ist Lot auf die Mitte der Seitenfläche und damit die Mitte der längeren Rechteckseite),
- $O = 6\,a^2$ und
- $V = a^3$.

Wir erhalten $a = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ und

	a	O	V	r
Würfel	$\frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1.155$	8	$\frac{8}{9}\sqrt{3} \approx 1.539$	$\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.577$

Oktaeder. Lege eine Ebene durch Z, eine Ecke E und den Mittelpunkt einer dort inzidenten Dreiecksfläche. Die Schnittfigur ist eine Raute aus zwei gleichschenkligen Dreiecken, jedes mit der Basis der Länge a und Schenkeln der Länge $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$ (Höhe in der Seitenfläche). Z ist der Mittelpunkt der Basis, für die Höhe in diesem Dreieck auf die Basis gilt also $H = 1$. Lot aus Z auf den Schenkel trifft diesen im Schwerpunkt S der Seitenfläche – das ist zugleich der Berührradius der Inkugel. Damit gilt

- $1+\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2$ (Pythagoras), also $a=\sqrt{2}$,
- $O = 8\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2 = 4\sqrt{3}$,
- $V = \frac{2}{3}\,a^2 = \frac{4}{3}$ (Doppelpyramide mit Höhe H) und
- $\left(\frac{2}{3}\,h\right)^2 + r^2 = 1$, also $r^2 = \frac{1}{3}$.

Wir erhalten

	a	O	V	r
Oktaeder	$\sqrt{2}\approx 1.414$	$4\sqrt{3}\approx 6.928$	$\frac{4}{3}\approx 1.333$	$\frac{1}{3}\approx 0.333$

Das regelmäßige Fünfeck. In beiden Polyedern kommen regelmäßige Fünfecke vor. Als Vorbereitung wollen wir die Größenverhältnisse in einem solchen regelmäßigen Fünfeck der Seitenlänge a untersuchen und die Länge d einer der fünf gleich langen Diagonalen, die Länge h einer der fünf Höhen von einer Ecke auf die Gegenseite, den Umkreisradius R, den Inkreisradius r sowie den Flächeninhalt A berechnen.

Satz 1 *Für ein regelmäßiges Fünfeck mit der Seitenlänge a gilt*

Diagonalenlänge:	$d = \frac{a}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$
Höhe:	$h = \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
Umkreisradius:	$R = \frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}$
Inkreisradius:	$r = \frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
Flächeninhalt:	$A = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$

Zum Beweis folgen wir [4], berechnen die Größen verschiedener Winkel und finden zwei ähnliche Dreiecke, in denen $d : a = a : (d-a)$ gilt, woraus sich $d = \frac{a}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ ergibt. h kann nun einfach mit Pythagoras berechnet werden: Aus

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = d^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,a^2$$

ergibt sich $h = \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.
Ähnlich ergibt sich die Formel für den Radius R. Im rechtwinkligen Dreieck aus Umkreismittelpunkt, Eckpunkt und Seitenmitte ergibt sich

$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (h-R)^2,$$

daraus

$$2\,h\,R = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{a^2}{4}\left(6+2\sqrt{5}\right)$$

und weiter

$$R = \frac{a}{4}\,\frac{6+2\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} = \frac{a}{2}\,\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5^2-20}} = \frac{a}{2}\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}},$$

wobei im vorletzten Schritt

$$\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)^2\left(5-2\sqrt{5}\right)} = \sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

ausmultipliziert wurde. $r = h - R$ ist der Inkreisradius, für den wir aus derselben Beziehung nun

$$r^2 = R^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{100}\left(50+10\sqrt{5}\right) - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{100}\left(25+10\sqrt{5}\right)$$

erhalten. Der Flächeninhalt A setzt sich aus fünf gleichschenkligen Dreiecke mit Grundseite a und Spitze im Zentrum des regelmäßigen Fünfecks zusammen. Es ergibt sich

$$A = 5\cdot\frac{a}{2}\,r = \frac{a^2}{4}\left(25+10\sqrt{5}\right).$$

Dodekaeder und Ikosaeder. Wir kommen zu Dodekaeder und Ikosaeder zurück und erzeugen eine Schnittfigur durch die Ebene, die durch einen Eckpunkt, den Durchmesser durch diesen Eckpunkt und eine dazu adjazente Kante bestimmt ist. Für beide Körper entsteht als Schnittfigur ein Sechseck $E_1E_2K_3E_4E_5K_6$, wobei E_i Ecken und K_i Kantenmitten des jeweiligen Polyeders sind.

Die Rechnungen hierfür sind in [1, 2] ausgeführt und liefern für das Dodekaeder mit der Seitenlänge a

- $R = \frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}$ für den Umkugelradius,
- $r = \frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$ für den Inkugelradius,
- $O = 12\cdot A = 12\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 3\,a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$,
- $V = 12\cdot\frac{1}{3}\,A\,r = \frac{a^3}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)$ (12 Pyramiden auf den Seitenflächen mit Spitze im Zentrum des Polyeders)

und für das Ikosaeder

- $R = \frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ für den Umkugelradius,
- $r = \frac{a}{12}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)$ für den Inkugelradius,
- $O = 5\,a^2\sqrt{3}$,
- $V = \frac{5}{12}\,a^3\left(3+\sqrt{5}\right)$.

Setzen wir wieder $R = 1$, so ergibt sich $a_D = \frac{1}{3}\sqrt{18-6\sqrt{5}} \approx 0.7136$ für das Dodekaeder und $a_I = \frac{1}{5}\sqrt{10\sqrt{5}-10} \approx 0.3073$ für das Ikosaeder.

Rechnungen mit Maxima für die noch offenen Zeilen der folgenden Tabelle:

```
D:[a,R=a/4*sqrt(18+6*sqrt(5)), r=a/20*sqrt(250+110*sqrt(5)),
  O=3*a^2*sqrt(25+10*sqrt(5)), V=a^3/4*(15+7*sqrt(5))];
I:[a,R=a/4*sqrt(10+2*sqrt(5)), r=a/12*sqrt(3*sqrt(3)+sqrt(15)),
  O=5*a^2*sqrt(3), V=5/12*a^3*(3+sqrt(5))]; da:solve(ev(D[2],R=1),a);
subst(da[1],D);
ia:solve(ev(I[2],R=1),a);
subst(ia[1],I);
```

Zusammenfassung der Ergebnisse

	a	O	V	r
Tetraeder	$\frac{2}{3}\sqrt{6} \approx 1.633$	$\frac{8}{3}\sqrt{3} \approx 4.619$	$\frac{8}{27}\sqrt{3} \approx 0.513$	$\frac{1}{3} \approx 0.333$
Würfel	$\frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1.155$	8	$\frac{8}{9}\sqrt{3} \approx 1.539$	$\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.577$
Oktaeder	$\sqrt{2} \approx 1.414$	$4\sqrt{3} \approx 6.928$	$\frac{4}{3} \approx 1.333$	$\frac{1}{3} \approx 0.333$
Dodekaeder	$a_D \approx 0.7136$	≈ 10.515	≈ 2.785	≈ 0.7947
Ikosaeder	$a_I \approx 1.051$	≈ 9.574	≈ 2.536	≈ 0.2639
Kugel		$4\pi \approx 12.57$	$\frac{4}{3}\pi \approx 4.189$	

Der Eulersche Polyedersatz

Wir haben die fünf Platonischen Körper intensiver untersucht, allerdings bleibt noch ein kleiner Zweifel, ob es nicht doch noch andere reguläre Polyeder gibt. Irgendwie ist zwar klar, dass das nicht sein kann, da wir ja für jedes mögliche Paar (p, q) eine Bauvorschift angeben können – nimm genügend viele kongruente reguläre q-Ecke, baue p von ihnen zu einer Eckenfigur zusammen und klebe die restlichen Schritt für Schritt an, bis der Körper fertig ist. Überraschend ist eher, dass das in jedem Fall gelingt, sich die Konstruktion also zu einem Polyeder schließt, und nicht die mögliche Mehrdeutigkeit.

Euler hat einen Zusammenhang zwischen den Anzahlen der Ecken e, Kanten k und Seitenflächen f gefunden, der für alle konvexen Polyeder gilt und es gestattet, für die Platonischen Körper diese Anzahlen zu berechnen, ohne zu wissen, wie sie aussehen.

Satz 2 (Polyedersatz, Euler 1758) *Hat ein konvexes Polyeder e Ecken, k Kanten und f Seitenflächen, so gilt stets*

$$e - k + f = 2\,.$$

Beweisskizze: Es gibt verschiedene Beweise dieses Satzes. Eine besonders elementare Überlegung verwendet das schrittweise "Aufschneiden" in ein ebenes Körpernetz und untersucht, wie sich dabei die Zahlen e, k, f und $Z = e - k + f$ verändern. Wir bezeichnen die neuen Werte jeweils mit e', k', f', Z'.

Zunächst wird eine Seitenfläche herausgeschnitten: $e' = e, k' = k, f' = f - 1$, also $Z' = Z - 1$.

Danach werden weitere Kanten aufgeschnitten, bis das Körpernetz schließlich ausgebreitet werden kann. Bei jedem Schnitt wird es eine Ecke und eine Kante mehr: $e' = e + 1, k' = k + 1, f' = f, Z' = Z$.

Das Körpernetz ist ein ebener (überschneidungsfreier) Graph mit Ecken und Kanten. Die Seitenflächen nennen wir jetzt "Gebiete". Nun werden in diesem Netz nacheinander die inneren Kanten entfernt:

(1) Trennt die innere Kante zwei Gebiete, so werden diese beiden Gebiete vereinigt: $e' = e, k' = k - 1, f' = f - 1, Z' = Z$.

(2) "Hängt" die innere Kante nur noch an einer Ecke und ragt in ein Gebiet hinein, so wird beim Entfernen der Kante die Anzahl der Gebiete nicht geändert. Die Kante verschwindet zusammen mit dem an ihr "hängenden" Eckpunkt: $e' = e - 1, k' = k - 1, f' = f, Z' = Z$.

Schließlich bleibt nur noch ein einziges Gebiet übrig, das von n Ecken und dann logischerweise auch n Kanten begrenzt wird, die einen Ring bilden $e = k = n, f = Z = 1$. □

Anwendung der Eulerschen Polyedersatzes

Der Eulersche Polyedersatz kann verwendet werden, um die Anzahlen der Ecken e, Kanten k und Seitenflächen f der regulären Polyeder durch rein kombinatorische Rechnungen zu bestimmen, ohne deren genaue Form zu kennen.

Wie oben bestehe das reguläre Polyeder aus regelmäßigen q-Ecken als Seitenflächen und in jeder Ecke stoßen die gleich Anzahl p von Kanten (und damit auch Seitenflächen) zusammen.

Dann ist $p \cdot e$ die Summe der von den Ecken ausgehenden Kanten. Dabei haben wir die Kanten allerdings doppelt gezählt, denn jede Kante hat zwei Endpunkte: $2\,k = p \cdot e$. Genauso bekommen wir $2\,k = q \cdot f$, wenn wir die Anzahlen der Kanten aller Flächen aufsummieren, da jede Kante an zwei Flächen angrenzt. Zusammen mit der Eulerformel $e - k + f = 2$ begrenzt das die Möglichkeiten, denn es muss gelten (warum?):

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$$

Diese Gleichung hat genau die folgenden fünf Lösungen (warum?):

p	q	e	k	f	Name des Polyeders
3	3	4	6	4	Tetraeder
3	4	8	12	6	Würfel (Hexaeder)
4	3	6	12	8	Oktaeder
3	5	20	30	12	Dodekaeder
5	3	12	30	20	Ikosaeder

Das Fußballpolyeder

Kann man auch aus anderen gleichartigen Eckenfiguren Polyeder zusammenbauen? Eine solche Konstruktion mit größtmöglicher Kugelähnlichkeit ergibt sich, wenn in einer Ecke zwei Sechsecke und ein Fünfeck zusammenstoßen. Diese Konstruktion ist als Fußball weithin bekannt. Wir wollen abschließend den Eulerschen Polyedersatz auf diese Situation anwenden.

Das Fußballpolyeder hat e Ecken, k Kanten und $f = f_5 + f_6$ Seitenflächen, wobei f_5 die Zahl der Fünfecke und f_6 die Zahl der Sechsecke bezeichnet. In jeder Ecke stoßen drei Kanten zusammen: $3\,e = 2\,k$. Vergleichen wir Kanten und Seitenflächen, so ergibt sich wie oben $2\,k = 5\,f_5 + 6\,f_6$.

Die Eckenfiguren lassen sich höchstens so zusammenbauen, dass jedes Fünfeck von 5 Sechsecken umgeben und jedes Sechseck von drei Fünfecken und drei Sechsecken umgeben ist. $3\,f_6 = 5\,f_5$: Zählen wir alle Kontakte zwischen Fünf- und Sechsecken, so haben wir jedes Fünfecke fünfmal und jedes Sechseck dreimal gezählt. Wir erhalten $f_6 = \frac{5}{3}\,f_5$, $e = \frac{2}{3}\,k$ und $2\,k = 5\,f_5 + 6\,f_6 = 15\,f_5$, also $f_5 = \frac{2}{15}\,k$, $f_6 = \frac{5}{3}\,f_5 = \frac{2}{9}\,k$ und damit aus dem Eulerschen Polyedersatz

$$2 = e - k + f = \frac{2}{3}\,k - k + \frac{2}{15}\,k + \frac{2}{9}\,k = \frac{1}{45}\,k$$

und damit $k = 90$, $e = 60$, $f_5 = 12$, $f_6 = 20$.

Literatur

[1] Walter Fendt (2005). Das Dodekaeder.
https://www.walter-fendt.de/math/geo/dodekaeder.pdf (12.10.2021)

[2] Walter Fendt (2005). Das Ikosaeder.
https://www.walter-fendt.de/math/geo/ikosaeder.pdf (12.10.2021)

[3] Jürgen Köller. Mathematische Basteleien. Platonische Körper.
http://www.mathematische-basteleien.de/platonisch.htm (10.10.2021)

[4] Jürgen Köller. Mathematische Basteleien. Regelmäßiges Fünfeck.
http://www.mathematische-basteleien.de/fuenfeck.htm (10.10.2021)

[5] Wikipedia. Platonische Körper.
https://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_K%C3%B6rper (10.10.2021)

Attribution Section

graebe (2005-07-24): Eine erste Version dieses Material (Eulerscher Polyedersatz) wurde für die Projektarbeit in Klasse 11/12 fürs Mathelager 2005 in Ilmenau erstellt und dort auch eingesetzt.

graebe (2021-10-13): Modifiziert für einen Workshop über 60 Minuten für Klasse 13 in der Inspirata[1]. Es wurden Platonische Körper aus Klickmaterial zusammengebaut, Ecken, Kanten, Flächen gezählt, invariante Drehbewegungen analysiert und zum Schluss der Eulersche Polyedersatz bewiesen sowie kurz auf das Fußballpolyeder eingegangen.

[1] https://www.inspirata.de/