Reguläre Polyeder

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

Der Eulersche Polyedersatz

Als *konvexes Polyeder* bezeichnet man einen durch endlich viele ebene Flächen begrenzten Körper, wo zusammen mit je zwei Punkten auch alle Punkte der Verbindungsstrecke zu diesem Körper gehören.
Jede Seitenfläche definiert eine Ebene, die *Stützebene* des Polyeders zu dieser Seitenfläche, so dass das Polyeder vollständig in einem Halbraum bzgl. dieser Ebene liegt. Das Polyeder ist als Punktmenge genau der Durchschnitt all dieser Halbräume.

Satz 1 (Polyedersatz, Euler 1758) *Hat ein konvexes Polyeder e Ecken, k Kanten und f Seitenflächen, so gilt stets*

$$e - k + f = 2\,.$$

Beweisskizze: Es gibt verschiedene Beweise dieses Satzes. Eine besonders elementare Überlegung verwendet das schrittweise "Aufschneiden" in ein ebenes Körpernetz und untersucht, wie sich dabei die Zahlen e, k, f und $Z = e - k + f$ verändern. Wir bezeichnen die neuen Werte jeweils mit e', k', f', Z'.
Zunächst wird eine Seitenfläche herausgeschnitten: $e' = e, k' = k, f' = f - 1$, also $Z' = Z - 1$.
Danach werden weitere Kanten aufgeschnitten, bis das Körpernetz schließlich ausgebreitet werden kann. Bei jedem Schnitt wird es eine Ecke und eine Kante mehr: $e' = e + 1, k' = k + 1, f' = f, Z' = Z$.
Das Körpernetz ist ein ebener (überschneidungsfreier) Graph mit Ecken und Kanten. Die Seitenflächen nennen wir jetzt "Gebiete". Nun werden in diesem Netz nacheinander die inneren Kanten entfernt:

(1) Trennt die innere Kante zwei Gebiete, so werden diese beiden Gebiete vereinigt: $e' = e, k' = k - 1, f' = f - 1, Z' = Z$.

(2) "Hängt" die innere Kante nur noch an einer Ecke und ragt in ein Gebiet hinein, so wird beim Entfernen der Kante die Anzahl der Gebiete nicht geändert. Die Kante verschwindet zusammen mit dem an ihr "hängenden" Eckpunkt: $e' = e - 1, k' = k - 1, f' = f, Z' = Z$.

Schließlich bleibt nur noch ein einziges Gebiet übrig, das von n Ecken und dann logischerweise auch n Kanten begrenzt wird, die einen Ring bilden $e = k = n, f = Z = 1$. □

Klassifikation der regulären Polyeder im Raum

Als *reguläres Polyeder* bezeichnet man ein Polyeder, dessen Seitenflächen alle zueinander kongruente regelmäßige Vielecke (q-Ecke) sind und in jeder Ecke die gleich Anzahl p von Kanten zusammenstößt.

$p \cdot e$ ist die Summe der von den Ecken ausgehenden Kanten. Dabei haben wir jede Kante doppelt gezählt, denn jede Kante hat zwei Endpunkte: $2\,k = p \cdot e$. Genauso bekommen wir $2\,k = q \cdot f$, wenn wir die Anzahlen der Kanten aller Flächen aufsummieren, da jede Kante an zwei Flächen angrenzt. Zusammen mit der Eulerformel $e - k + f = 2$ begrenzt das die Möglichkeiten, denn es muss gelten (warum?):

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$$

Diese Gleichung hat genau die folgenden fünf Lösungen (warum?):

p	q	e	k	f	Name des Polyeders
3	3	4	6	4	Tetraeder
3	4	8	12	6	Würfel (Hexaeder)
4	3	6	12	8	Oktaeder
3	5	20	30	12	Dodekaeder
5	3	12	30	20	Ikosaeder

Attribution Section

graebe (2005-07-24):
Dieses Material wurde für die Projektarbeit in Klasse 11/12 fürs Mathelager 2005 in Ilmenau erstellt und dort auch eingesetzt.