Reguläre Polyeder

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

Version vom 28. Oktober 2023

Reguläre Polyeder

Als *konvexes Polyeder* bezeichnet man einen durch endlich viele ebene Flächen begrenzten Körper, wo zusammen mit je zwei Punkten auch alle Punkte der Verbindungsstrecke zu diesem Körper gehören.

Jede Seitenfläche definiert eine Ebene, die *Stützebene* des Polyeders zu dieser Seitenfläche, so dass das Polyeder vollständig in einem Halbraum bzgl. dieser Ebene liegt. Das Polyeder ist als Punktmenge genau der Durchschnitt all dieser Halbräume.

Wir beschränken uns im Weiteren auf beschränkte konvexe Polyeder, das sind solche mit endlichem Volumen.

Als *reguläres Polyeder* bezeichnet man ein solches beschränktes konvexes Polyeder, dessen Seitenflächen alle zueinander kongruente regelmäßige Vielecke (q-Ecke) sind *und* in jeder Ecke die gleich Anzahl p von Kanten zusammenstößt.

Bekanntlich gibt es fünf solche Körper.

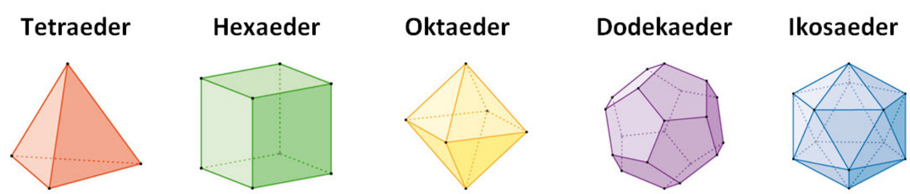

Abbildung 1: Die Platonischen Körper.
Quelle: Webseite von Carl-Friedrich Bödigheimer, Bonn.

Dies war bereits in der Antike bekannt, weshalb diese Körper auch als **Platonische Körper** bezeichnet werden.

Dass reguläre Polyeder nur aus regelmäßigen Dreiecken, Vierecken oder Fünfecken aufgebaut sein können, überlegt man sich zunächst leicht am Aufbau möglicher Eckenfiguren, siehe Abbildung 2.

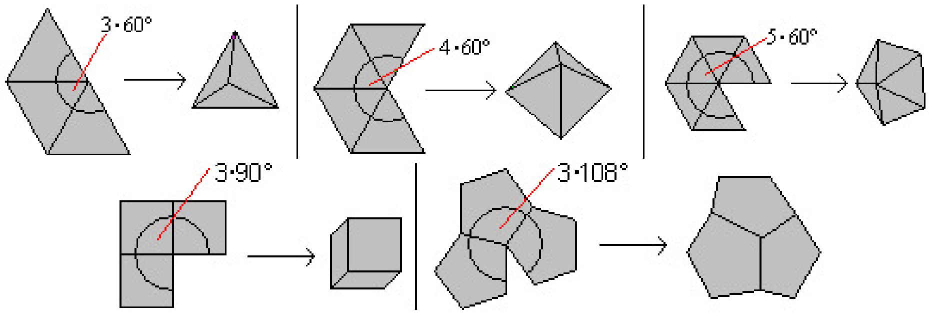

Abbildung 2: Warum nur Dreiecke, Vierecke oder Fünfecke.
Quelle: Jürgen Köller. Mathematische Basteleien. [4]

Es ist nicht selbstverständlich, aber diese fünf Arten von Eckenfiguren lassen sich jede zu einem regulären Polyeder zusammensetzen. Jedes solche regulräe Polyeder hat eine Umkugel (durch die Ecken), eine Inkugel (diese berührt die Seitenflächen in deren Zentrum) und eine Kantenkugel (diese berührt die Kanten in deren Mitten). Die Kantenkugel ist die Inkugel des Kantengerüsts.

In der folgenden Tabelle sind die Zahl der Ecken e, Kanten k und Flächen f der regulären Polyeder aufgelistet, in denen p regelmäßige q-Ecke eine Eckenfigur bilden.

p	q	e	k	f	Name des Polyeders
3	3	4	6	4	Tetraeder
3	4	8	12	6	Würfel (Hexaeder)
4	3	6	12	8	Oktaeder
3	5	20	30	12	Dodekaeder
5	3	12	30	20	Ikosaeder

Tabelle 1: Kombinatorische Charakteristika der Platonischen Körper

Einfache Eigenschaften der Platonischen Körper

Dualität

$e_W = f_O$ und $e_O = f_W$ ist kein Zufall. Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels spannen ein Oktaeder auf, die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Oktaeders einen Würfel. Im ersten Fall ist die Inkugel des Würfels die Umkugel des Oktaeders, die Mittelpunkte M beider Kugeln fallen zusammen.

Streckt man das Oktaeder mit Zentrum M so, dass die Kantenkugeln von Oktaeder und Würfel zusammenfallen, so durchdringen sich die beiden zueinander dualen Polyeder. Genauer: Relevante Kanten schneiden sich in der Mitte und stehen senkrecht aufeinander.

Ähnlich sind Dodekaeder und Ikosaeder zueinander dual. Das Tetraeder ist zu sich selbst dual.

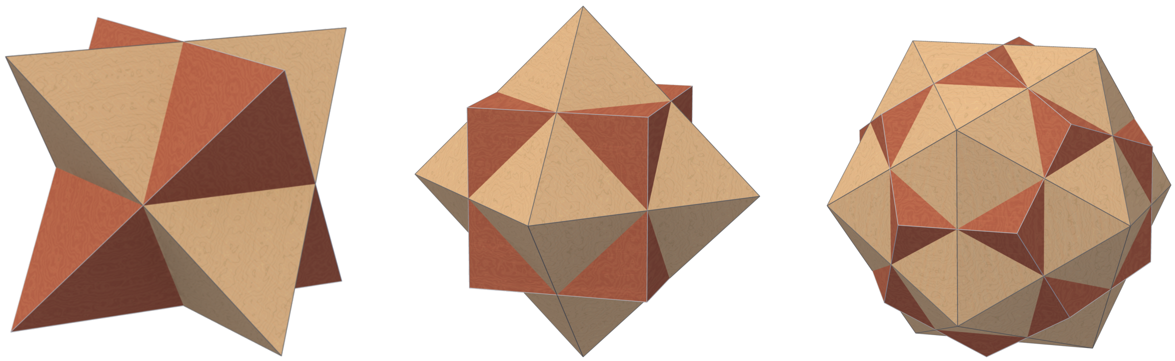

Abbildung 3: Dualität der Platonischen Körper. Quelle: Wikipedia, T. Piesk, CC-BY 4.0

Symmetriegruppen

Reguläre Polyeder haben eine sehr symmetrische Gestalt und lassen damit viele räumliche Bewegungen zu, die das Polyeder in sich überführen. Wir wollen alle herausfinden.

Tetraeder: Jede der vier Seitenflächen kann nach unten gedreht werden, und das in jeweils 3 Lagen. Also gibt es 12 Symmetriebewegungen. Welche?

Dieselbe Frage für die anderen Platonischen Körper.

Größenverhältnisse

Für jeden der Platonischen Körper fallen die Mittelpunkte von Umkugel, Kantenkugel und Inkugel zusammen mit dem Zentrum M des Körpers. Um Größenverhältnisse zu vergleichen und als Referenz, berechnen wir im Weiteren die Radien r_U der Umkugel, r_K der Kantenkugel und r_I der Inkugel sowie Oberfläche O und Volumen V in Abhängigkeit von der Kantenlänge a des jeweiligen Polyeders. Da sich jedes der regulären Polyeder aus einer Anzahl kongruenter Pyramiden mit einer der Seitenflächen als Grundfläche und M als Spitze zusammensetzt, besteht der Zusammenhang $V = \frac{1}{3} \cdot O \cdot r_I$. Außerdem bestimmen wir die Größe des Winkels zwischen zwei benachbarten Seitenflächen.

Dabei wollen wir geeignete Schnitte durch die jeweilige räumliche Figur legen, in denen wir die uns interessierenden Größenverhältnisse in einer ebenen Figur wiederfinden, und dann Ansätze der ebenen Geometrie zur Anwendung bringen.

Tetraeder. Lege eine Ebene durch eine Kante und M. Diese schneidet die gegenüberliegende Kante in deren Mitte K. Die Schnittfigur ist damit ein gleichschenkliges Dreieck. Dessen Basis ist eine Kante des Tetraeders der Länge a, die Schenkel sind Höhen in den Seitenflächen der Länge $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Die Höhen der Länge H auf die Schenkel sind zugleich die Höhen des Tetraeders und schneiden sich in M. M teilt diese im Verhältnis $3:1$ (warum?).

Der untere Abschnitt einer solchen Höhe ist der Berührradius der Inkugel, der obere Abschnitt der Radius der Umkugel. Da es eine Bewegung gibt, welche die beiden gegenüberliegenden Kanten vertauscht, ist M der Mittelpunkt der dritten Höhe, die die Mitten zweier gegenüberliegender Kanten verbindet, und deren Länge h_K lässt sich aus $h_K^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ bestimmen. Daraus ergibt sich $r_K = \frac{1}{2}\, h_K = \frac{a}{4}\sqrt{2}$.

Auch den Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen finden wir in der ebenen Figur. Er kann über den Kosinussatz berechnet werden. Aus $a^2 = 2h^2(1 - \cos(\alpha)$ ergibt sich wegen $2h^2 = \frac{3}{2}\,a^2$

$$\cos(\alpha) = 1 - \frac{a^2}{2h^2} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Zusammengefasst gilt

- $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$,
- $H^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}\,h\right)^2 = a^2 - \frac{1}{3}\,a^2 = \frac{2}{3}\,a^2$ (Pythagoras), also $H = \frac{a}{3}\sqrt{6}$,
- $r_U = \frac{3}{4}\,H = \frac{a}{4}\sqrt{6}$,
- $r_K = \frac{a}{4}\sqrt{2}$,
- $r_I = \frac{1}{4}\,H = \frac{a}{12}\sqrt{6}$,
- $O = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2\right) = \sqrt{3}\,a^2$,
- $V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2\right) \cdot H = \frac{1}{12}\sqrt{2}\,a^3$ und
- $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$ und damit $\alpha \approx 70.52878°$.

Würfel. Lege eine Ebene durch eine Kante und M. Die Schnittfigur ist ein Rechteck mit den Seitenlängen a und $\sqrt{2}\,a$. Die Diagonale ist Durchmesser der Umkugel und hat damit die Länge $2 = \sqrt{3}\,a$. Der Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen hat die Größe $\alpha = 90°$.
Zusammengefasst gilt

- $r_U = \frac{a}{2}\sqrt{3}$,
- $r_K = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ (Hälfte der Entfernung zwischen zwei gegenüberliegenden Kantenmitten),
- $r_I = \frac{a}{2}$ (Lot auf die Mitte der Seitenfläche),
- $O = 6\,a^2$,
- $V = a^3$ und
- $\cos(\alpha) = 0$ wegen $\alpha = 90°$.

Oktaeder. Lege eine Ebene durch M, eine Ecke E und den Mittelpunkt einer dort inzidenten Dreiecksfläche. Die Schnittfigur ist eine Raute aus zwei gleichschenkligen Dreiecken, jedes mit der Basis der Länge a und Schenkeln der Länge $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (Höhe in der Seitenfläche). M ist der Mittelpunkt der Basis. Die Länge H der Höhe in diesem Dreieck auf die Basis ergibt sich wieder aus $H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2$ zu $H = r_U = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Das Lot aus M auf den Schenkel trifft diesen im Schwerpunkt S der Seitenfläche – das ist zugleich der Berührradius r_I der Inkugel. Es ist also $H^2 = \left(\frac{2}{3}h\right)^2 + r_I^2$ und damit $r_I = \frac{a}{6}\sqrt{6}$. Der Abstand h_K der Mitten gegenüberliegender Kanten ist gerade gleich a und somit $r_K = \frac{a}{2}$.
Der Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen ist gerade der größere der beiden Innenwinkel der Raute. Für dessen Größe α ergibt sich nach dem Kosinussatz $(2H)^2 = 2h^2(1 - \cos(\alpha))$ und damit

$$\cos(\alpha) = 1 - \frac{2H^2}{h^2} = 1 - \frac{1}{3/4} = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Zusammengefasst gilt

- $r_U = \frac{a}{2}\sqrt{2}$,
- $r_K = \frac{a}{2}$,
- $r_I = \frac{a}{6}\sqrt{6}$,
- $O = 8 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,a^2$,
- $V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$ (als Doppelpyramide mit Höhe H) und
- $\cos(\alpha) = -\frac{1}{3}$ und damit $\alpha \approx 109.47122°$.

Untersuchen wir nun die beiden „großen" Polyeder, das Dodekaeder und das Ikosaeder.

Das regelmäßige Fünfeck. In beiden Polyedern kommen regelmäßige Fünfecke vor. Als Vorbereitung wollen wir die Größenverhältnisse in einem solchen regelmäßigen Fünfeck der Seitenlänge a untersuchen und die Länge d einer der fünf gleich langen Diagonalen, die Länge h einer der fünf Höhen von einer Ecke auf die Gegenseite, den Umkreisradius R, den Inkreisradius r sowie den Flächeninhalt A berechnen.

Satz 1 *Für ein regelmäßiges Fünfeck mit der Seitenlänge a gilt*

Diagonalenlänge:	$d = \frac{a}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$
Höhe:	$h = \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
Umkreisradius:	$R = \frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}$
Inkreisradius:	$r = \frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
Flächeninhalt:	$A = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$

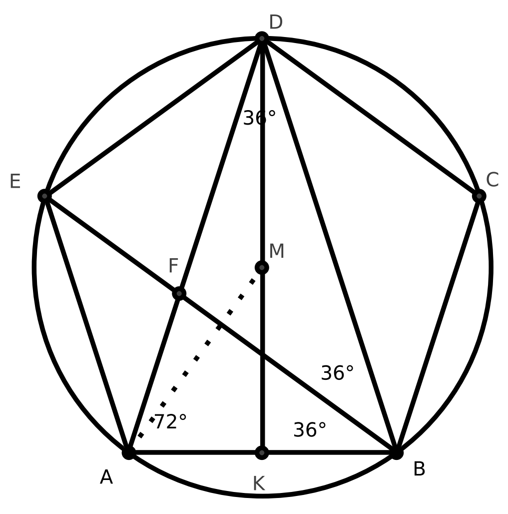

Abbildung 4: Größenverhältnisse im Fünfeck

Zeichne im regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ mit Zentrum M die Diagonalen AD und BE ein. Diese schneiden sich in F. Zeichne weiter die Diagonale BD ein.

Die Dreiecke ABD und FAB sind ähnlich, denn sie sind beide gleichschenklig mit Basiswinkeln von 72° und einem Winkel von 36° an der Spitze. Weiter ist $BCDF$ eine Raute, da

$BC \parallel AD$, $BE \parallel CD$ und $|AB| = |BF| = |CD| = |BC| = a$. Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke folgt $d : a = a : (d - a)$ und damit

$$d = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right).$$

h kann nun einfach mit Pythagoras im Dreieck ADK berechnet werden, wobei K die Mitte der Seite $\overline{AB}$ ist. Aus

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = d^2 = \frac{a^2}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right)$$

ergibt sich $h = \frac{a}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$. Auch ist $h = \frac{a}{2}\tan(72°)$, woraus $\tan(72°) = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ folgt.
Ähnlich kann eine Formel für den Radius $R = |AM|$ aufgestellt werden. Im rechtwinkligen Dreieck AKM ergibt sich

$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (h - R)^2,$$

daraus

$$2\,h\,R = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{a^2}{4}\left(6 + 2\sqrt{5}\right)$$

und weiter

$$R = \frac{a}{4}\,\frac{6 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}} = \frac{a}{2}\,\frac{\left(3 + \sqrt{5}\right)\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5^2 - 20}} = \frac{a}{2}\,\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \frac{a}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}},$$

wobei im vorletzten Schritt

$$\left(3 + \sqrt{5}\right)\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(3 + \sqrt{5}\right)^2\left(5 - 2\sqrt{5}\right)} = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

ausmultipliziert wurde.
$r = |MK| = h - R$ ist der Inkreisradius, für den wir aus derselben Beziehung nun

$$r^2 = R^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{100}\left(50 + 10\sqrt{5}\right) - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{100}\left(25 + 10\sqrt{5}\right)$$

erhalten. Es folgt $r = \frac{a}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$.
Der Flächeninhalt A setzt sich aus fünf gleichschenkligen Dreiecken mit Grundseite a und Spitze M zusammen. Es ergibt sich

$$A = 5 \cdot \frac{a}{2}\,r = \frac{a^2}{4}\left(25 + 10\sqrt{5}\right).$$

Wegen $\frac{r}{R} = \sin(54°)$ im selben Dreieck AKM ergibt sich auch noch

$$\sin(54°) = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{750 + 250\sqrt{5}}}{\sqrt{50^2 - 500}} = \frac{5\sqrt{30 + 10\sqrt{5}}}{20\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

wobei im zweiten Schritt mit $50 - 10\sqrt{5}$ erweitert und $\left(25 + 10\sqrt{5}\right)\left(50 - 10\sqrt{5}\right) = 750 + 250\sqrt{5}$ zusammengefasst wurde. Dieser Ausdruck kann weiter vereinfacht werden, denn es ist $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = 1 + \sqrt{5}$, wie man unmittelbar nachrechnet. Damit haben wir $\sin(54°) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Solche Vereinfachungen geschachtelter Wurzelausdrücke können systematisch mit folgendem Satz gefunden werden:

Satz 2 *Es ist* $\sqrt{a + 2\sqrt{b}} = \sqrt{c} + \sqrt{d}$ *mit positiven ganzen Zahlen* a, b, c, d *(*b *kein volles Quadrat) genau dann, wenn* $x^2 - ax + b = (x - c)(x - d)$ *gilt.*

Beweis: Quadrieren von $\sqrt{a + 2\sqrt{b}} = \sqrt{c} + \sqrt{d}$ zeigt, dass $a = c + d, b = c \cdot d$ zumindest eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Beziehung ist. Ist $\sqrt{b}$ irrational, so ist sie auch notwendig. $\square$

Dodekaeder und Ikosaeder. Wir kommen zu Dodekaeder und Ikosaeder zurück und erzeugen eine Schnittfigur durch die Ebene, die durch einen Eckpunkt, den Durchmesser durch diesen Eckpunkt (und damit durch das Zentrum M des Körpers) und eine dazu adjazente Kante bestimmt ist. Für beide Körper entsteht als Schnittfigur ein Sechseck $E_1E_2K_3E_4E_5K_1$, wobei $E_{1...4}$ Ecken und $K_{1,3}$ Mitten gegenüberliegender Kanten des jeweiligen Polyeders sind. Dann ist $r_U = |ME_1|$. Weiter ist K_2 die Mitten der Seite $\overline{E_1E_2}$ und damit $r_K = |MK_1|$. $\overline{E_1K_1}$ verbindet Ecke und gegenüberliegende Kantenmitte einer Seitenfläche. Auf dieser Strecke liegt auch der Mittelpunkt F_1 dieser Seitenfläche, für den $r_I = |MF_1|$ ist. $\angle E_1K_1E_4$ ist dann der Winkel zwischen zwei Seitenflächen.

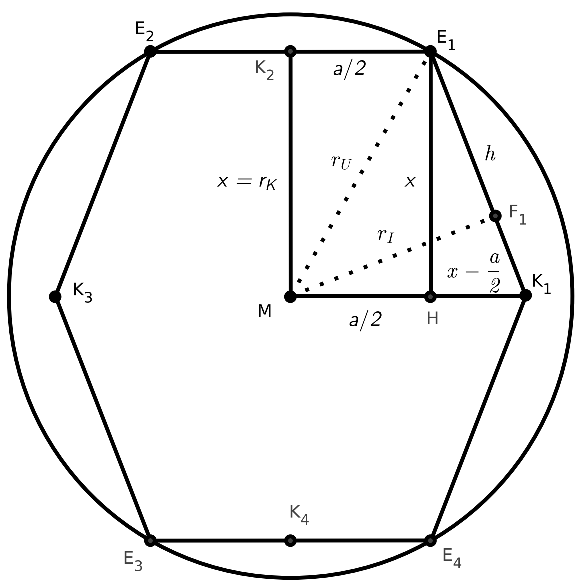

Abbildung 5: Die Schnittfigur, nach [2]

Die Rechnungen hierfür sind in [2, 3] ausgeführt. Zunächst wird $x = r_K$ aus der Beziehung

$$x^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = h^2$$

berechnet, die sich im Dreieck E_1HK_1 ergibt, wobei H der Lotfußpunkt aus E_1 auf MK_1 ist. h ist dabei die Höhe einer Seitenfläche, also eines gleichseitigen Dreiecks (Ikosaeder) oder eines regelmäßigen Fünfecks (Dodekaeder). Dann wird r_U im Dreieck ME_1K_2 aus

$$x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r_U^2$$

berechnet. Schließlich wird r_I im Dreieck MF_1E_1 aus

$$r_U^2 = r_I^2 + y^2$$

berechnet, wobei $y = |E_1F_1|$ der obere Abschnitt der Höhe einer Seitenfläche und damit gleich deren Umkreisradius ist. Die Größe der Oberfläche O ergibt sich unmittelbar aus Vervielfachung der entsprechenden Inhaltsformel für eine Seitenfläche, das Volumen V aus der Summe der Volumina der Pyramiden über den Seitenflächen mit Spitze in M zu $V = \frac{1}{3} \cdot O \cdot r_I$. Für die Größe α des Winkels $\angle E_1K_1E_4$ zwischen zwei Seitenflächen erhalten wir schließlich wieder mit dem Kosinussatz $(2x)^2 = 2h^2(1 - \cos(\alpha))$ und daraus $\cos(\alpha) = 1 - \frac{2x^2}{h^2}$.
Dies liefert für das Dodekaeder mit der Seitenlänge a

- $r_U = |ME_1| = \frac{a}{4}\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{5}\right)$ für den Umkugelradius,
- $r_K = |MK_3| = \frac{a}{4}\left(3 + \sqrt{5}\right)$ für den Kantenkugelradius,
- $r_I = |MF_1| = \frac{a}{20}\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}$ für den Inkugelradius,
- $O = 12 \cdot A = 12 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 3\,a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$,
- $V = 12 \cdot \frac{1}{3}\,A\,r = \frac{a^3}{4}\left(15 + 7\sqrt{5}\right)$ (12 Pyramiden auf den Seitenflächen mit Spitze im Zentrum des Polyeders) und
- $\cos(\alpha) = -\frac{1}{5}\sqrt{5}$ und damit $\alpha \approx 116.56505°$.

und für das Ikosaeder

- $r_U = |ME_1| = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ für den Umkugelradius,
- $r_K = |MK_3| = \frac{a}{4}\left(1 + \sqrt{5}\right)$ für den Kantenkugelradius,
- $r_I = |MF_1| = \frac{a}{12}\left(3\sqrt{3} + \sqrt{15}\right)$ für den Inkugelradius,
- $O = 5\,a^2\sqrt{3}$,
- $V = \frac{5}{12}\,a^3\left(3 + \sqrt{5}\right)$ und
- $\cos(\alpha) = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$ und damit $\alpha \approx 138.18969°$.

Kugelähnlichkeit der regulären Polyeder. Untersuchen wir zum Schluss, wie „nahe“ die einzelnen regulären Polyeder einer Kugel kommen. Wir wollen dabei drei Größen vergleichen, und zwar

$$K_1 = \frac{O}{4\pi r_U^2},\ K_2 = \frac{V}{\frac{4}{3}\pi r_U^3} \text{ und } K_3 = \frac{r_I}{r_U}.$$

K_1 bestimmt, wie nahe die Oberfläche des Polyeders der Oberfläche seiner Umkugel kommt, K_2 bestimmt dasselbe für das Volumen und K_3 sagt etwas über die „Abweichung“ von der Form einer Sphäre aus.

Brefeld betrachtet in [1] als weiteren Parameter K_4 die *Sphärizität* (siehe dazu auch [7]) als Quotient aus der Oberfläche einer Kugel gleichen Volumens und der Oberfläche des jeweiligen Polyeders. Dazu ist für das entsprechende Polyeder mit der Seitenlänge a aus dessen

Volumenformel $V(a)$ zunächst der Radius einer solchen Kugel gleichen Volumens über die Volumenformel $V(a) = \frac{4\pi}{3} r(a)^3$ zu bestimmen und dieser Ausdruck dann in die Formel $O = 4\pi r^2$ für die Oberfläche der Kugel einzusetzen.

$$K_4 = \frac{\sqrt[3]{36\pi \cdot V(a)^2}}{O(a)}$$

Aus den oben berechneten Werten ergeben sich die folgenden Formeln und Näherungswerte:

	K_1	K_2	K_3	K_4
Tetraeder	$\frac{2}{\sqrt{3}\pi} \approx 0.368$	$\frac{2}{3\sqrt{3}\pi} \approx 0.123$	$\frac{1}{3} \approx 0.333$	$\sqrt[3]{\frac{\pi}{6\sqrt{3}}} \approx 0.671$
Würfel	$\frac{2}{\pi} \approx 0.637$	$\frac{2}{\sqrt{3}\pi} \approx 0.368$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$	$\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} \approx 0.806$
Oktaeder	$\frac{\sqrt{3}}{\pi} \approx 0.551$	$\frac{1}{\pi} \approx 0.318$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$	$\sqrt[3]{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}} \approx 0.846$
Dodekaeder	$\frac{2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{(3+\sqrt{5})\pi} \approx 0.837$	$\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{3}\pi} \approx 0.665$	$\frac{250+110\sqrt{5}}{5\sqrt{3}(1+\sqrt{5})} \approx 0.795$	$K_4(D) \approx 0.910$
Ikosaeder	$\frac{10\sqrt{3}}{(5+\sqrt{(5)}\pi} \approx 0.762$	$\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\pi} \approx 0.605$	$\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \approx 0.795$	$\sqrt[3]{\frac{(7+3\sqrt{5})\pi}{30\sqrt{3}}} \approx 0.939$

Tabelle 2: Parameter der Kugelähnlichkeit der Platonischen Körper

Auch für $K_4(D)$ lässt sich ein exakter Wurzelausdruck mit einem CAS berechnen:

$$K_4(D) = \sqrt[3]{\frac{(47+21\sqrt{5})\pi}{(30+12\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}}.$$

In [7] wird für diesen Ausdruck eine andere Formel angegeben. Auch wenn die näherungsweise Berechnung nahe legt, dass beide Formeln dieselbe reelle Zahl beschreiben, ist es mühevoll, dies exakt nachzuweisen.

Der Eulersche Polyedersatz

Wir haben die fünf Platonischen Körper intensiver untersucht, allerdings bleibt noch ein kleiner Zweifel, ob es nicht doch noch andere reguläre Polyeder gibt. Irgendwie ist zwar klar, dass das nicht sein kann, da wir ja für jedes mögliche Paar (p, q) eine Bauvorschift angeben können – nimm genügend viele kongruente reguläre q-Ecke, baue p von ihnen zu einer Eckenfigur zusammen und klebe die restlichen Schritt für Schritt an, bis der Körper fertig ist. Überraschend ist eher, dass das in jedem Fall gelingt, sich die Konstruktion also zu einem Polyeder schließt, und nicht die mögliche Mehrdeutigkeit.

Euler hat einen Zusammenhang zwischen den Anzahlen der Ecken e, Kanten k und Seitenflächen f gefunden, der für alle konvexen Polyeder gilt und es gestattet, für die Platonischen Körper diese Anzahlen zu berechnen, ohne zu wissen, wie sie aussehen.

Satz 3 (Polyedersatz, Euler 1758) *Hat ein konvexes Polyeder e Ecken, k Kanten und f Seitenflächen, so gilt stets*

$$e - k + f = 2\,.$$

Beweisskizze: Es gibt verschiedene Beweise dieses Satzes. Eine besonders elementare Überlegung verwendet das schrittweise "Aufschneiden" in ein ebenes Körpernetz und untersucht, wie sich dabei die Zahlen e, k, f und $Z = e - k + f$ verändern. Wir bezeichnen die neuen Werte jeweils mit e', k', f', Z'.

Zunächst wird eine Seitenfläche herausgeschnitten: $e' = e, k' = k, f' = f - 1$, also $Z' = Z - 1$.

Danach werden weitere Kanten aufgeschnitten, bis das Körpernetz schließlich ausgebreitet werden kann. Bei jedem Schnitt wird es eine Ecke und eine Kante mehr: $e' = e + 1, k' = k + 1, f' = f, Z' = Z$.

Das Körpernetz ist ein ebener (überschneidungsfreier) Graph mit Ecken und Kanten. Die Seitenflächen nennen wir jetzt "Gebiete". Nun werden in diesem Netz nacheinander die inneren Kanten entfernt:

(1) Trennt die innere Kante zwei Gebiete, so werden diese beiden Gebiete vereinigt: $e' = e, k' = k - 1, f' = f - 1, Z' = Z$.

(2) "Hängt" die innere Kante nur noch an einer Ecke und ragt in ein Gebiet hinein, so wird beim Entfernen der Kante die Anzahl der Gebiete nicht geändert. Die Kante verschwindet zusammen mit dem an ihr "hängenden" Eckpunkt: $e' = e - 1, k' = k - 1, f' = f, Z' = Z$.

Schließlich bleibt nur noch ein einziges Gebiet übrig, das von n Ecken und dann logischerweise auch n Kanten begrenzt wird, die einen Ring bilden $e = k = n, f = Z = 1$. $\square$

Anwendung der Eulerschen Polyedersatzes

Der Eulersche Polyedersatz kann verwendet werden, um die Anzahlen der Ecken e, Kanten k und Seitenflächen f der regulären Polyeder durch rein kombinatorische Rechnungen zu bestimmen, ohne deren genaue Form zu kennen.

Wie oben bestehe das reguläre Polyeder aus regelmäßigen q-Ecken als Seitenflächen und in jeder Ecke stoßen die gleich Anzahl p von Kanten (und damit auch Seitenflächen) zusammen.

Dann ist $p \cdot e$ die Summe der von den Ecken ausgehenden Kanten. Dabei haben wir die Kanten allerdings doppelt gezählt, denn jede Kante hat zwei Endpunkte: $2\,k = p \cdot e$. Genauso bekommen wir $2\,k = q \cdot f$, wenn wir die Anzahlen der Kanten aller Flächen aufsummieren, da jede Kante an zwei Flächen angrenzt. Aus der Eulerformel $e - k + f = 2$ folgt

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k}. \tag{G}$$

Wegen $p, q \geq 3$ muss $p, q < 6$ gelten, denn sonst wäre $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$. Die Gleichung (G) hat deshalb genau die fünf bereits eingangs in Tabelle 1 aufgelisteten Lösungen.

Das Fußballpolyeder

Kann man auch aus anderen gleichartigen Eckenfiguren Polyeder zusammenbauen? Eine solche Konstruktion mit größtmöglicher Kugelähnlichkeit ergibt sich, wenn in einer Ecke zwei Sechsecke und ein Fünfeck zusammenstoßen. Diese Konstruktion ist als Fußball weithin bekannt. Wir wollen abschließend den Eulerschen Polyedersatz auf diese Situation anwenden.

Das Fußballpolyeder hat e Ecken, k Kanten und $f = f_5 + f_6$ Seitenflächen, wobei f_5 die Zahl der Fünfecke und f_6 die Zahl der Sechsecke bezeichnet. In jeder Ecke stoßen drei Kanten zusammen: $3\,e = 2\,k$. Vergleichen wir Kanten und Seitenflächen, so ergibt sich wie oben $2\,k = 5\,f_5 + 6\,f_6$.

Die Eckenfiguren lassen sich höchstens so zusammenbauen, dass jedes Fünfeck von 5 Sechsecken umgeben und jedes Sechseck von drei Fünfecken und drei Sechsecken umgeben ist. $3\,f_6 = 5\,f_5$: Zählen wir alle Kontakte zwischen Fünf- und Sechsecken, so haben wir jedes Fünfecke fünfmal und jedes Sechseck dreimal gezählt. Wir erhalten $f_6 = \frac{5}{3}\,f_5$, $e = \frac{2}{3}\,k$ und $2\,k = 5\,f_5 + 6\,f_6 = 15\,f_5$, also $f_5 = \frac{2}{15}\,k$, $f_6 = \frac{5}{3}\,f_5 = \frac{2}{9}\,k$ und damit aus dem Eulerschen Polyedersatz

$$2 = e - k + f = \frac{2}{3}\,k - k + \frac{2}{15}\,k + \frac{2}{9}\,k = \frac{1}{45}\,k$$

und damit $k = 90$, $e = 60$, $f_5 = 12$, $f_6 = 20$.

Literatur

[1] Werner Brefeld (1999-2023). Platonische Körper und archimedische Körper.
`http://www.brefeld.homepage.t-online.de/polyeder.html` (25.10.2023)

[2] Walter Fendt (2005). Das Dodekaeder.
`https://www.walter-fendt.de/math/geo/dodekaeder.pdf` (12.10.2021)

[3] Walter Fendt (2005). Das Ikosaeder.
`https://www.walter-fendt.de/math/geo/ikosaeder.pdf` (12.10.2021)

[4] Jürgen Köller. Mathematische Basteleien. Platonische Körper.
`http://www.mathematische-basteleien.de/platonisch.htm` (10.10.2021)

[5] Jürgen Köller. Mathematische Basteleien. Regelmäßiges Fünfeck.
`http://www.mathematische-basteleien.de/fuenfeck.htm` (10.10.2021)

[6] Wikipedia. Platonische Körper.
`https://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_K%C3%B6rper` (10.10.2021)

[7] Wikipedia. Sphärizität (Geologie).
`https://de.wikipedia.org/wiki/Sph%C3%A4rizit%C3%A4t_(Geologie)`
(27.10.2023)