Modelos e algoritmos

Problemas de roteamento

Ricardo Camargo (rcamargo@dep.ufmg.br)

2020

Definição:

O problema consiste em projetar as rotas de entrega de menor custo que saem do depósito para atender um conjunto de clientes espalhados numa área geográfica por um conjunto de veículos. Cada cliente é visitado exatamente uma única vez por um único veículo de forma que a demanda total servida pelo rota não exceda a capacidade do veículo. Pode se considerar ainda a existência de um tempo ou distância máxima que deve ser respeitado pelos veículos. Este problema é central em empresas de distribuição que o resolvem rotineiramente.

Definição:

Seja um grafo direcionado $G = (N, A)$ no qual $N = 0, \ldots, n$ e $A = \{(i, j) \in N \times N : i \neq j\}$ representam os conjuntos de nós e arcos. Nó 0 representa o depósito, enquanto os demais nós correspondem aos nós dos clientes. Uma frota com m veículos com capacidade Q está sediada no depósito. O tamanho de frota é conhecido a priori ou pode ser uma variável de decisão. Cada cliente $i \in N$ possui uma demanda não-negativa q_i. A matriz de custo c_{ij} é definida em A, não sendo necessariamente simétrica. Por simplificação, assumem-se aqui que o tempo de viagem ($l_{ij} \geq 0$) e a distância ($c_{ij} \geq 0$) entre os nós i e j são equivalentes ($l_{ij} = c_{ij}$). Além disso, c_{ij} pode ser diferente de c_{ji}.

Formulação com dois índices

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.a:} \quad & \sum_{(0,j)\in A} x_{0j} = m \\
& \sum_{(i,0)\in A} x_{i0} = m \\
& \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = 1 && \forall i \in N \setminus \{0\} \\
& \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = 1 && \forall j \in N \setminus \{0\} \\
& \sum_{(i,j)\in A: i,j\in S} x_{ij} \leq |S| - \gamma(S) && \forall S \subset N \setminus \{0\} : |S| > 2 \\
& x_{ij} \in \{0,1\} && \forall (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

no qual a restrição de eliminação de sub-rotas garantem que as capacidades e distâncias máximas de deslocamento dos veículos sejam respeitadas através do parâmetro $\gamma(S)$.

- $\gamma(S)$: representa o número mínimo de veículos necessários para atender todos os clientes observando a capacidade e a distância máxima permitidos.
- Capacidade: $\gamma(S) = \left\lceil \frac{\sum_{i \in S} q_i}{Q} \right\rceil$
  Ou pode-se resolver um problema de bin-packing com pesos q_i, $i \in N$, e tamanho de bin igual a Q

Formulação com três índices

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ijk} & & \\
\text{s.a: } \sum_{(0,j) \in A} x_{0jk} &= 1 & \forall k \in K \\
\sum_{(i,0) \in A} x_{i0k} &= 1 & \forall k \in K \\
\sum_{i \in N \setminus \{1\}} q_i y_{ik} &\leq Q & \forall k \in K \\
\sum_{k \in K} y_{ik} &= 1 & \forall i \in N \setminus \{0\} \\
\sum_{(i,j) \in A} x_{ijk} &= y_{ik} & \forall i \in N \setminus \{0\}, k \in K \\
\sum_{(i,j) \in A} x_{ijk} &= y_{jk} & \forall j \in N \setminus \{0\}, k \in K \\
\sum_{(i,j) \in A : i,j \in S} x_{ijk} &\leq |S| - 1 & \forall k \in K, S \subset N \setminus \{0\} : |S| > 2 \\
x_{ijk} &\in \{0,1\} & \forall (i,j) \in A, k \in K \\
y_{ik} &\in \{0,1\} & \forall i \in N \setminus \{0\}, k \in K
\end{aligned}
$$

Formulação dois produtos

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{s.a:} \quad & \sum_{(i,j)\in A} (f_{ij} - f_{ji}) = 2q_j & \forall j \in N \setminus \{1, n+1\} \\
& \sum_{(0,j)\in A} f_{0j} = \sum_{i\in N\setminus\{0,n+1\}} q_i & \\
& \sum_{(i,0)\in A} f_{i0} = mQ - \sum_{i\in N\setminus\{0,n+1\}} q_i & \\
& \sum_{(n+1,j)\in A} f_{(n+1)j} = mQ & \\
& \sum_{(i,n+1)\in A} f_{i(n+1)} = 0 & \\
& f_{ij} + f_{ji} = Q(x_{ij} + x_{ji}) & \forall (i,j) in A : i < j \\
& \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = 1 & \forall i \in N \setminus \{0, n+1\} \\
& \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = 1 & \forall j \in N \setminus \{0, n+1\} \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall (i,j) \in A \\
& f_{ij} \geq 0 & \forall (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

Formulação único produto

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{s.a:} \quad & \sum_{(0,j)\in A} x_{0j} = m & \\
& \sum_{(i,0)\in A} x_{i0} = m & \\
& \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = 1 & \forall i \in N \setminus \{0\} \\
& \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = 1 & \forall j \in N \setminus \{0\} \\
& \sum_{(0,j)\in A} f_{ij} = \sum_{i\in N\setminus\{0\}} q_i & \\
& \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} f_{ji} = q_i & \forall i \in N \setminus \{0\} \\
& f_{ij} \leq Q x_{ij} & \forall (i,j) \in A \\
& f_{ij} \geq 0 & \forall (i,j) \in A \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

Formulação baseada no MTZ

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.a:} \quad & \sum_{(0,j)\in A} x_{0j} = m \\
& \sum_{(i,0)\in A} x_{i0} = m \\
& \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = 1 && \forall i \in N \setminus \{0\} \\
& \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = 1 && \forall j \in N \setminus \{0\} \\
& z_j \geq z_i + q_i + Q(x_{ij} - 1) && \forall (i,j) \in A : j \neq 0 \\
& z_i \geq q_i && \forall i \in N \setminus \{0\} \\
& z_0 \geq 0 \\
& x_{ij} \in \{0,1\} && \forall (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

Atividades a serem feitas

- Implementar os modelos em ampl:
  - Dois índices
  - Três índices
  - Dois produtos
  - MTZ
  - Combinar dois índices com:
    - com a MTZ
    - om a dois produtos.
    - Iterar por $h = n$
- executar todos os modelos apresentados para valores de $n = \{10, 20, 30\}$, com o número de veículos igual a $m = \{2, 3, 4\}$ e demandas geradas aleatoriamente $d_i = U(1, 5)$, para todo $i \in N$, e $Q = \lceil \frac{\sum_i d_i}{m} \rceil$ dando um tempo limite de 30 minutos para cada execução. Reportar, em forma de tabela, todos os valores obtidos para o gap final obtido em %, tempo de execução gasto, número de nós de branch-and-bounds usados, número de iterações para o caso específico do modelo de dois índices.