Mínimos Quadrados Ponderados

9/3/2021

1

$$\tilde{\beta} = \arg\min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \omega_i (y_i - x_i\beta)^2$$

ou na forma matricial:

$$\tilde{\beta} = \arg\min_{\beta} (Y - X\beta)^T W (Y - X\beta)$$

onde $[W]_{ii} = \omega_i$ (matriz diagonal)

$$\tilde{\beta} = (X^T W X)^{-1} X^T W Y$$

pg. 97 e 98

$$\omega(x_i, x_0) = e^{-\frac{(x_i - x_0)^2}{2}}$$ (núcleo de uma densidade gaussiana)

Mínimos Quadrados Não Lineares

o modelo: $Y = f(x) + \varepsilon$ $\quad f(x) \neq \beta_0 + \beta_1 x$

$\varepsilon \sim \text{Normal}(0, \sigma^2)$

exemplo: $f(x) = \beta_0 e^{\beta_1 x}$

$$\hat{\beta} = \arg\min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \beta_0 e^{\beta_1 x_i}\right)^2$$

Solução: vamos assumir $f(\beta) = f(x, \beta)$ e aplicar uma expansão em Série de Taylor de primeira ordem:

$$f(\beta) = f(\beta^{(0)}) + f'(\beta^{(0)}) \cdot (\beta - \beta^{(0)})$$

$$f(x_i, \beta) = f(x_i, \beta^{(0)}) + J_i^{(0)} (\beta - \beta^{(0)})$$

$$J_i^{(0)} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial \beta_1}\Big|_{\beta^{(0)}} ; \frac{\partial f_i}{\partial \beta_2}\Big|_{\beta^{(0)}} \right]$$: i-ésima linha.

na forma matricial :

$$f = \underbrace{f(\beta^{(0)})}_{\text{conhecido}} + \overbrace{J^{(0)}}^{\text{conhecido}} \underbrace{(\beta - \beta^{(0)})}_{\text{conhecido}}$$

$$\hat{\beta} = \arg \min_\beta \|Y - f\|^2 = \arg \min_\beta \|Y - f^{(0)} - J^{(0)}(\beta - \beta^{(0)})\|^2$$

$$\|\underbrace{Y - f^{(0)} + J^{(0)}\beta^{(0)}}_{Z^{(0)}} - J^{(0)}\beta\|^2 = \|Z^{(0)} - J^{(0)}\beta\|^2$$

$$\hat{\beta} = \arg \min_\beta (Z^{(0)} - J^{(0)}\beta)^T (Z^{(0)} - J^{(0)}\beta)$$

lembrar: $(Y - X\beta)^T (Y - X\beta) \xrightarrow{\text{solução}} \hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$

então, a solução é :

$$\hat{\beta} = \left([J^{(0)}]^T [J^{(0)}] \right)^{-1} [J^{(0)}]^T Z^{(0)}$$

daqui cria-se um processo iterativo ...

no exemplo :

$$f(x) = \beta_0 e^{\beta_1 x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_0} = e^{\beta_1 x} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial \beta_1} = \beta_0 e^{\beta_1 x} \cdot x$$

Próximos passos :

Seria possível ?

$$\boxed{\tilde{\beta} = \arg\min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 \quad \text{sujeito a : } \sum_{j=1}^{p} |\beta_j| \leq d}$$