LUMEN AD VIAM

UNIVERSIDADE
ESTADUAL DO CEARÁ

Fortaleza, 16 de Setembro de 2018

Arthur Cordeiro - 1368098
Sidney Xavier - 1357406
Matheus Monteiro - 1357484
Pedro Henrique - 1368041

Sumário

Introdução

Este relatório tem como objetivo contextualizar e explicar como são solucionados os problemas os quais os seguintes algoritmos propostos, que seriam o Método da Bisseção, Newton Raphson, Método Secante e suas possíveis aplicações.

Método de Bisseção

O método da Bisseção é um processo interativo que converge a raiz dado um intervalo [a,b] sabendo que existe uma raiz nesse intervalo, usando o teorema que diz que existe uma raiz no intervalo, se f(a)*f(b) < 0, com isso, o método irá convergir chutando o valor que está no meio desse intervalo, (a+b)/2, substituindo pelo valor a ou b, sempre respeitando o teorema do sinal, até que as aproximações sejam menores que o epsilon escolhido.

Exemplo: você comprar um carro com empréstimo e agora quer pagar o empréstimo em prestações mensais de d dólares por m meses. Suponha que o valor do carro seja originalmente v dólares e o banco cobra uma taxa de juros de i% para qualquer empréstimo não pago no final de cada mês. Qual é quantidade de dinheiro d que você deve pagar por mês (para 2 dígitos após o ponto decimal)? Suponha que d = 576,19, m = 2, v = 1000 e i = 10%. Depois de um mês, sua dívida torna-se 1000 × (1,1) - 576,19 = 523,81. Depois de dois meses, sua dívida se torna 523,81 × (1,1) - 576,19 ≈ 0. Se nos é dado apenas m = 2, v = 1000, e i = 10%, como nós determinamos que d = 576,19? Em outras palavras, encontrar a raiz d tal que o pagamento da dívida função f (d, m, v, i) ≈ 0.

Uma maneira fácil de resolver esse problema é usar o método de bisseção. Nós escolhemos um intervalo razoável como ponto de partida. Queremos fixar d dentro do intervalo [a..b], onde a = 0,01, como temos que pagar pelo menos um centavo eb = (1 + i%) × v, como o mais cedo podemos concluir o pagamento é m = 1 se pagarmos exatamente (1 + i%) × v dólares depois de um mês. Dentro Neste exemplo, b = (1 + 0,1) × 1000 = 1100,00 dólares. Para o método de bisseção trabalhar, devemos assegurar que os valores de função dos dois pontos extremos na faixa inicial real [a..b], isto é, f (a) e f (b) têm sinais opostos. Observe que o método de bisseção requer somente O (log2 ((b - a))) iterações para obter uma resposta que seja boa o suficiente (o erro é menor que o erro de limite que podemos tolerar).

Ou seja, generalizando : Dado um intervalo deseja-se encontrar suas raízes e sabe-se que dentro daquele intervalo há uma raiz, assim, o método da bisseção consiste em uma busca binária dentro do intervalo em questão.

Newton Raphson

Pode-se lembrar da álgebra que uma raiz de uma função é um zero da função. Isso significa que na "raiz" a função é igual a zero. Podemos encontrar essas raízes de uma função simples como: $f(x) = x^2 - 4$ simplesmente definindo a função como zero e resolvendo:

$$f(x) = x^2-4 = 0$$

(x+2)(x-2) = 0
x = 2 or x = -2

O método de Newton Raphson utiliza os primeiros termos da série de Taylor de uma função para se aproximar da raiz. A série de Taylor possui uma convergência do f(x), dado por um somatório infinito de uma função, no caso a função é $g(x) = x + a(x) * f(x)$, $a(x) \neq 0$. Resultando na recorrência $x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n)$, $n \geq 1$.

O método de Newton-Raphson usa um processo iterativo para se aproximar de uma raiz de uma função. A raiz que o processo localiza depende do valor x inicial, arbitrariamente escolhido.

Aqui, x_n é o valor x atual conhecido, $f(x_n)$ representa o valor da função em x_n , e $f'(x_n)$ é a derivada (inclinação) em x_n . x_{n+1} representa o próximo valor x que você está tentando encontrar. Esencialmente, $f'(x_n)$, a derivada representa $f(x) / dx\ (dx = delta - x)$. Portanto, o termo $f(x) / f'(x)$ representa um valor de dx. Quanto mais iterações forem executadas, o dx mais próximo será zero (0). Para ver como isso funciona, vamos executar o método de Newton-Raphson na função que investigamos anteriormente, $f(x) = x^2 - 4$. Abaixo estão listados os valores que precisamos saber para concluir o processo.

$x_{k+1} = x_k - f(x_k) / f'(x_k)$ (1)

Uma vez que $f'(x_k)$ é a derivada da função em questão, tome um x_k inicial e aplique a equação (1) acima. O próximo valor de cada iteração será dada pela aplicação do x_k atual, que irá convergir até até $f(x_k)$ = 0. 4

Método Secante

A idéia do método secante é pensar como no método de Newton, mas em vez de usar $f'(x_n)$, aproximamos essa derivada por uma diferença finita ou a secante, ou seja, a inclinação da linha reta que passa pelos dois mais aproximações recentes x_n e x_{n-1} . Esta inclinação lê :

$$(f(x_n) - f(x_{n-1}))/(x_n - x_{n-1})$$

Inserir esta expressão para f ′ (x_n) no método de Newton simplesmente nos dá o método secante: Este declive lê :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f(x_n) - f(x_{n-1})/x_n - x_{n-1}$$

Como no método de Newton, o procedimento é repetido até que $f(x_n)$ fique abaixo de algum valor limite escolhido, ou algum limite no número de iterações tenha sido atingido. Nós também usamos um contador de iteração, baseado no mesmo raciocínio que na implementação do método de Newton.

Podemos armazenar as aproximações xn em uma matriz, mas, como no método de Newton, notamos que o cálculo de x_{n+1} só precisa do conhecimento de x_n e x_{n-1} , e não de aproximações "mais antigas". Portanto, podemos fazer uso de apenas três variáveis: x para x_{n+1} , x_1 para x_n e x_0 para x_n − 1. Note que x_0 e x_1 devem ser dados (adivinhados) para o algoritmo iniciar.