- Demonstre por indução matemática:
  - $n^3 + 2n$ é divisível por 3, para $n \geq 0$. (01)
  - $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para $n \geq 0$. (02)
  - $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots + 2^{-n} < 1$, para $n > 0$. (03)
  - $n^2 < 2^n$, para $n > 4$. (04)
  - A representação binária de um número $n>0$ tem $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ *bits*. *Dica:* considere separadamente os casos em que n é ou não uma potência de 2. (05)

(04) $n^2 < 2^n$, para $n > 4$

Para $n = 5$, então $\underbrace{5^2}_{25} < \underbrace{2^5}_{32}$ (OK)

Para $n = 6$, então $\underbrace{6^2}_{36} < \underbrace{2^6}_{64}$ (OK)

Supondo que seja válido até n, vamos verificar para n+1.

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2^n + 2n + 1$

$(1+x)^n = 1 + nx + \ldots + nx^{n-1} + x^n$

Para $x = 1$, então: $(1+1)^n = 2^n = 1 + n + \ldots + n + 1 = 2n + 1 + (\ldots + 1)$

$2n + 1 < 2^n$

$(n+1)^2 < 2^n + (2n+1) < 2^n + 2^n \Rightarrow \underline{(n+1)^2 < 2^{n+1}}$

Logo, pelo princípio da indução finita a desigualdade é verdadeira!

(05)

- Demonstre por indução matemática:
  - $n^3 + 2n$ é divisível por 3, para $n \geq 0$.
  - $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para $n \geq 0$.
  - $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots + 2^{-n} < 1$, para $n > 0$.
  - $n^2 < 2^n$, para $n > 4$.
  - A representação binária de um número $n>0$ tem $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ *bits*. *Dica:* considere separadamente os casos em que n é ou não uma potência de 2.