- Demonstre por indução matemática:
  - $n^3 + 2n$ é divisível por 3, para $n \geq 0$. (01)
  - $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para $n \geq 0$. (02)
  - $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + ... + 2^{-n} < 1$, para $n > 0$. (03)
  - $n^2 < 2^n$, para $n > 4$. (04)
  - A representação binária de um número $n>0$ tem $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ *bits*. *Dica:* considere separadamente os casos em que n é ou não uma potência de 2. (05)

(01) $f(n) = n^3 + 2n$

Para $n = 0$, então $f(0) = 0$ e $f(0) \equiv 0 \pmod{3}$ (OK)

Para $n = 1$, então $f(1) = 3$ e $f(1) \equiv 0 \pmod{3}$ (OK)

Supondo que $3 | f(n)$ até n, vamos verificar para $n+1$.

$f(n+1) = (n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 =$

$= \underbrace{(n^3 + 2n)}_{f(n)} + 3(n^2 + n + 1)$

$f(n+1) = f(n) + 3(n^2+n+1)$

Como $3 | f(n)$ e $3 | 3(n^2+n+1)$, então $3 | f(n+1)$

Pelo princípio da indução finita $3 | f(n)$ $\forall n \geq 0$.

(02) $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$, $n \geq 0$

Para $n = 0$, então $2^0 = 2^{0+1} - 1$ (OK)

Para $n = 1$, então $2^0 + 2^1 = 2^{1+1} - 1$ (OK)

Supondo que $2^0 + 2^1 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ até n, vamos verificar para $n+1$.

$\underbrace{2^0 + 2^1 + ... + 2^n}_{2^{n+1}-1} + 2^{n+1} = 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$ (OK)

Pelo princípio da indução finita a igualdade é verdadeira.

(03) $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + ... + 2^{-n} < 1$, $\forall n > 0$

Para $n = 1$, $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5 < 1$ (OK)

Para $n = 2$, $2^{-1} + 2^{-2} = 0,5 + 0,25 = 0,75 < 1$ (OK)

Supondo que a desigualdade seja válida até n. Vamos verificar para $n+1$.

$2^{-1} + 2^{-2} + ... + 2^{-n} + 2^{-n-1} = 2^{-1}(1 + \underbrace{\overset{K}{2^{-1} + 2^{-2} + ... + 2^{-n}}}_{<1}) = \frac{1+K}{2} < 1$

$K < 1$

$K + 1 < 2 \rightarrow \frac{K+1}{2} < 1$

Logo, pelo princípio da indução finita a desigualdade é verdadeira.