Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística

1ª Lista de Exercícios de Cálculo I

Questão 1. Resolva as inequações:

(a) $3x + 6 < x + 3$;

(b) $2x + 1 \geq 3x$;

(c) $1 - 3x > 0$;

(d) $5x + 3 \leq 2x - 1$

(e) $\dfrac{x-2}{3x+1} < 0$;

(f) $(2x-3)(x+1) > 0$;

(g) $\dfrac{x-3}{x^2+1} > 0$;

(h) $x^2 + 5 \leq 0$;

(i) $\dfrac{x-1}{2-x} < 1$.

Questão 2. Estude o sinal da expressão:

(a) $3 - x$;

(b) $\dfrac{2-x}{x-5}$

(c) $x(x^2+3)$;

(d) $\dfrac{x-3}{x-2}$;

(e) $\dfrac{(x-1)(x+1)}{3-2x}$

(f) $(x-1)(1+x)(1-2x)$;

(g) $ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > 0$;

(h) $ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < 0$.

Questão 3. Verifique as identidades:

(a) $(x^2 - a^2) = (x-a)(x+a)$;

(b) $(x^3 - a^3) = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$;

(c) $(x^4 - a^4) = (x-a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$;

(d) $(x^n - a^n) = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$, onde $n \neq 0$ é um número natural.

Questão 4. Simplifique as expressões:

(a) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

(b) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$;

(c) $\dfrac{4x^2-9}{2x+3}$;

(d) $\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$;

(e) $\dfrac{x^4-1}{x-1}$;

(f) $\dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{9}}{x-3}$;

(g) $\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$;

(h) $\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$;

(i) $\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$.

Questão 5. Considere o polinômio do 2º grau $ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$ e b, c são reais dados:

(a) Verifique que:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$;

(b) Conclua do item (a) que, se $\Delta \geq 0$, as raizes de $ax^2 + bx + c$ são dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

;

(c) Sejam $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ as raízes de $ax^2 + bx + c$, $\Delta \geq 0$. Verifique que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Questão 6. Considere o polinômio do 2º grau $ax^2 + bx + c$ e sejam x_1 e x_2 como no exercício anterior. Verifique que

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Questão 7. Utilizando o exercício acima, fatore o polinômio do 2º grau dado:

(a) $x^2 - 3x + 2$;

(b) $x^2 - x - 2$;

(c) $2x^2 - 3x + 1$;

(d) $4x^2 - 9$;

(e) $2x^2 - 5x$;

(f) $x^2 - 6x + 9$.

Questão 8. Resova as inequações abaixo:

(a) $\dfrac{x^2-9}{x+1} > 2$;

(b) $(2x-1)(x^2-4) < 0$;

(c) $\dfrac{x^2-3}{x^2+3} \geq 0$;

(d) $x^2 > 1$;

(e) $4x^2 - 4x + 1 < 0$;

(f) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$;

(g) $3x^2 - x \leq 0$.

Questão 9. Considere um polinômio de grau n

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

com coeficientes inteiros, isto é, $a_0 \neq 0$, a_1, a_2, ..., a_n são números inteiros. Seja α um número inteiro. Prove que se α for uma raiz de $P(x)$, então α será um divisor do termo independente a_0.

Questão 10. Caso Existam, determine as raízes inteiras da equação:

(a) $x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0$;

(b) $2x^3 - x^2 - 1 = 0$;

(c) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x = 2$;

(d) $x^3 + x^2 + x - 14 = 0$.

Questão 11. Seja $P(x)$ um polinômio de grau n. Prove que α é raiz de $P(x)$ se, e somente se, $P(x)$ é divisível por $x - \alpha$. (**Sugestão:** Divida $P(x)$ por $x - \alpha$, obtendo um quociente $Q(x)$ e um resto R, R constante, tal que $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$.)

Questão 12. Fatore o polinômio dado utilizando o exercício acima:

(a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$;

(b) $x^4 - 3x^3 + 3x - 2$;

(c) $x^3 - 1$;

(d) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

Questão 13. Reescreva a expressão sem usar o símbolo de valor absoluto

(a) $|5 - 23|$;

(b) $|5| - |-23|$;

(c) $|x - 2|$;

(d) $|x^2 + 1|$;

(e) $|2x - 1|$;

(f) $|1 - 2x^2|$.

Questão 14. Resolva as equações:

(a) $|2x + 3| = 0$;

(b) $|x^2 - 3x - 1| = 3$;

(c) $|x| = 4x + 2$;

(d) $|3x + 2| = |x + 1|$;

(e) $|3x - 2| = 3x - 2$;

(f) $|4 - 3x| = 3x - 4$.

Questão 15. Resolver as inequações modulares abaixo:

(a) $|3x - 1| < -2$;

(b) $|3x - 1| < \frac{1}{3}$;

(c) $|2x - 1| < x$;

(d) $|3x - 2| + 2x - 3 \leq 0$;

(e) $|x^2 - 4| < 3x$;

(f) $|4x - 7| \geq -1$;

(g) $\left|\frac{2x - 1}{4 - x}\right| > 2$;

(h) $||x| - 2| > 1$;

(i) $|x + 2| + |2x - 3| < 10$.

Questão 16. Ache uma equação da reta que satisfaça as condições dadas:

(a) Que passe pelo ponto $(2, -3)$ e tenha inclinação 6;

(b) Que passe pelo ponto $(-3, -5)$ e tenha inclinação $-\frac{7}{2}$;

(c) Que passe pelos posntos $(2, 1)$ e $(1, 6)$;

(d) Com inclinação 3 e intersecção com o eixo y igual a 4;

(e) Intersecção com o eixo x igual a -8 e intersecção com o eixo y igual a 6;

(f) Que passe pelo ponto $(4, 5)$ e paralela ao eixo x;

(g) Que passe pelo ponto $(4, 5)$ e paralela ao eixo y;

Questão 17. A reta r intercepta os eixos coordenados nos pontos A e B. Determine a distância entre A e B, sabenso-se que r passa pelos pontos $(1, 2)$ e $(3, 1)$.

Questão 18. Determine a equação de reta que passa pelo ponto dado e que seja paralela a reta dada

(a) $y = 2x + 3$ e $(1, 3)$;

(b) $x - y = 2$ e $(-1, 2)$;

(c) $2x + 3y = 1$ e $(0, 1)$.

Questão 19. Determine a equação de reta que passa pelo ponto dado e que seja perpendicular a reta dada

(a) $y = -3x + 1$ e $(-1, 1)$;

(b) $3x - 2y = 0$ e $(0, 0)$;

(c) $2x + 3y = 1$ e $(1, 1)$.

Questão 20. Expresse a área A de um triângulo equilátero em função do lado l.

Questão 21. Determine uma equação da parábola com vértice $(1, -1)$ que passa pelos pontos $(-1, 3)$ e $(3, 3)$.

Questão 22. Determine uma equação da elipse com centro na origem que passe pelos pontos $(1, -10\sqrt{2/3})$ e $(-2, 5\sqrt{5/3})$.

Questão 23. (Completar quadrados) Coloque na forma: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

(a) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

(b) $x^2 + y^2 - x - y = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 3x - y = 2$

Questão 24. Identifique o tipo de curva (cônica) e esboce o gráfico.

(a) $y = x^2 + 2x$;

(b) $x^2 - y^2 - 4x + 3 = 0$;

(c) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$;

(d) $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$;

(e) $x = 4 - y^2$;

(f) $y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$

Referências:

GUIDORIZZI, H. L. Um Curso de Cálculo. V. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
STEWART, J. Cálculo. 5. ed. V. 1. São Paulo: Cengage, 2006.