Estatística Aplicada
Distribuição Binomial de Probabilidade

Prof. Me. Lucas de Agostini Zago

Construindo o conceito

- Uma moeda é lançada quatro vezes; qual é a probabilidade de se obter três caras?
- Um dado é lançado quatro vezes; qual é a probabilidade de se obter face “6” no duas vezes?
- Quatro peças são extraídas, ao acaso, com reposição, de um lote contendo 500 peças, sabendo-se que 10% das peças do lote são defeituosas, calcule a probabilidade de sair 3 peças defeituosas?

Uma moeda é lançada quatro vezes; qual é a probabilidade de se obter três caras?

KKKC $P(1) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

KKCK $P(2) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

KCKK $P(3) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

CKKK $P(4) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

$$R = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Probabilidade Binomial

$$P(X = k) = \binom{n}{k} * p^k * q^{n-k}$$

Número Binomial
$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

k = número de eventos favoráveis

n = total de eventos

$n - k$ é o total de eventos não favoráveis

q = probabilidade de não acontecer o evento em cada experimento

$q = 1 - p$

p = probabilidade do evento favorável em cada experimento

$b(k, n, p)$
forma reduzida

- Uma moeda é lançada **quatro vezes**; qual é a probabilidade de se obter **três caras**?

$$P(X = k) = \binom{n}{k} * \mathrm{p}^{\mathrm{k}} * \mathrm{q}^{n-k}$$

$$n = 4 \qquad k = 3 \qquad p = \frac{1}{2} \qquad q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} * \left(\frac{1}{2}\right)^{3} * \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3}$$

$$P(X = 3) = \frac{4!}{3!\,1!} * \frac{1}{8} * \frac{1}{2}$$

$$P(X = 3) = 4 * \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

- Um dado é lançado **cinco** vezes; qual é a probabilidade de se obter face **“6”** no **duas** vezes?

$$P(X = k) = \binom{n}{k} * \mathrm{p}^{\mathrm{k}} * \mathrm{q}^{n-k}$$

$$n = 5 \qquad k = 2 \qquad p = \frac{1}{6} \qquad q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} * \left(\frac{1}{6}\right)^2 * \left(\frac{5}{6}\right)^{5-2}$$

$$P(X = 2) = \frac{5!}{2!\,3!} * \left(\frac{1}{6}\right)^2 * \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$P(X = 2) = \frac{5 * 4 * 3!}{2!\,3!} * \frac{1}{36} * \frac{125}{216}$$

$$P(X = 2) = 10 * \frac{1}{36} * \frac{125}{216} = \frac{1250}{7760} =$$

$$P(X = 2) = 0{,}161 = 16{,}1\%$$

- Quatro peças são extraídas, ao acaso, com reposição, de um lote contendo 500 peças, sabendo-se que 10% das peças do lote são defeituosas, calcule a probabilidade de sair 3 peças defeituosas?

$$P(X = k) = \binom{n}{k} * \mathrm{p}^{\mathrm{k}} * \mathrm{q}^{n-k}$$

$$n = 4 \qquad k = 3 \qquad p = 10\% \qquad q = 100\% - 10\% = 90\%$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} * 10\%^3 * 90\%^{4-3}$$

$$P(X = 3) = \frac{4!}{3!\,1!} * 10\%^3 * 90\%^1 = 4 * 10\%^3 * 90\%$$

$$P(X = 3) = 0{,}0036 = 0{,}36\%$$

Exercício 1

Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso é de 0,2. Se dez itens produzidos por essa máquina são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que no **máximo um** defeituoso seja encontrado?

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$n = 10$

$k = 0\ ou\ 1$

$p = 0{,}2$

$q = 0{,}8$

$$P(X\ = 0) = \binom{10}{0} * 0{,}2^0 * 0{,}8^{10}$$

$$P(X\ = 0) = \frac{10!}{10!} * 0{,}2^0 * 0{,}8^{10}$$

$$P(X\ = 0) = 1 * 1 * 0{,}8^{10}$$

$$P(X\ = 0) = 0{,}8^{10} = 0{,}1073$$

$$P(X\ = 1) = \binom{10}{1} * 0{,}2^1 * 0{,}8^9$$

$$P(X\ = 1) = \frac{10!}{9! * 1!} * 0{,}2^1 * 0{,}8^9$$

$$P(X\ = 1) = 10 * 0{,}2^1 * 0{,}8^9$$

$$P(X\ = 1) = 0{,}2684$$

$$P(X \leq 1) = 0{,}1073 + 0{,}2684 = 0{,}3757 = 37{,}57\%$$

$R = 37{,}58\%,$

Exercício 2

Na manufatura de certo artigo, é sabido que um entre oito dos artigos é defeituoso. Qual a probabilidade de que uma amostra casual de tamanho quatro contenha:

(a) nenhum defeituoso?

$$R = 58{,}62\%$$

(b) exatamente um defeituoso?

$$R = 33{,}50\%$$

(c) exatamente dois defeituosos?

$$R = 7{,}18\%$$

(d) não mais do que dois defeituosos

$$R = 0{,}71\%$$

Exercício 2

Na manufatura de certo artigo, é sabido que um entre oito dos artigos é defeituoso. Qual a probabilidade de que uma amostra casual de tamanho quatro contenha:

(a) nenhum defeituoso?

$$n = 4 \qquad k = 0 \qquad p = \frac{1}{8} \qquad q = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} * \left(\frac{1}{8}\right)^0 * \left(\frac{7}{8}\right)^4 = \frac{4!}{4!\,0!} * 1 * \left(\frac{7}{8}\right)^4 = \left(\frac{7}{8}\right)^4 = 0{,}5861 = 58{,}61\%$$

(b) exatamente um defeituoso?

$$n = 4 \qquad k = 1 \qquad p = \frac{1}{8} \qquad q = \frac{7}{8}$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} * \left(\frac{1}{8}\right)^1 * \left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{4!}{3!\,1!} * \frac{1}{8} * \left(\frac{7}{8}\right)^3 = 4 * \frac{1}{8} * \left(\frac{7}{8}\right)^3 = 0{,}3349 = 33{,}49\%$$

Exercício 2

Na manufatura de certo artigo, é sabido que um entre oito dos artigos é defeituoso. Qual a probabilidade de que uma amostra casual de tamanho quatro contenha:

(c) exatamente dois defeituosos?

$$n = 4 \qquad k = 2 \qquad p = \frac{1}{8} \qquad q = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} * \left(\frac{1}{8}\right)^2 * \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{4!}{2!\,2!} * \left(\frac{1}{8}\right)^2 * \left(\frac{7}{8}\right)^2 = 6 * \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^2 = 0{,}0717 = 7{,}17\%$$

(d) não mais do que dois defeituosos

$$P(k = 0) = 58{,}61\%$$

$$P(k = 1) = 33{,}49\%$$

$$P(k = 2) = 7{,}17\%$$

$$P(K > 2) = 1 - P(K \leq 2) = 1 - 58{,}61\% - 33{,}49\% - 7{,}17\%$$

$$P = 100\% - 99{,}27\% = 0{,}73\%$$

Exercício 3

Um fabricante de peças de automóveis garante que cada caixa de suas peças conterá, no máximo, duas defeituosas. Se a caixa contém 18 peças, e a experiência tem demonstrado que esse processo de fabricação produz 5% das peças defeituosas, qual a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia?

$$P(X = k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} * (p)^k * (q)^{n-k}$$

$$K \leq 2 \rightarrow K = 0 \; ou \; K = 1 \; ou \; K = 2$$

$$p = 5\%$$

$$n = 18$$

$$P(X = 0) = \frac{18!}{(18-0)!\,0!} * (0{,}05)^0 * (0{,}95)^{18-0}$$

$$P(X = 0) = 1 * 1 * (0{,}95)^{18} = 0{,}3972 = 39{,}72\%$$

$$P(X = 1) = \frac{18!}{(18-1)!\,1!} * (0{,}05)^1 * (0{,}95)^{18-1}$$

$$P(X = 1) = \frac{18!}{17!\,1!} * (0{,}05)^1 * (0{,}95)^{17}$$

$$P(X = 1) = 18 * (0{,}05)^1 * (0{,}95)^{17} = 0{,}3772 = 37{,}72\%$$

R = 94,2%

Exercício 3

Um fabricante de peças de automóveis garante que cada caixa de suas peças conterá, no máximo, duas defeituosas. Se a caixa contém 18 peças, e a experiência tem demonstrado que esse processo de fabricação produz 5% das peças defeituosas, qual a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia?

$$P(X = k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} * (p)^k * (q)^{n-k}$$

$$K \leq 2 \rightarrow K = 0 \; ou \; K = 1 \; ou \; K = 2$$

$$p = 5\%$$

$$n = 18$$

$$P(X = 0) = 39{,}72\%$$

$$P(X = 1) = 37{,}72\%$$

$$P(X = 2) = \frac{18!}{(18-2)!\,2!} * (0{,}05)^2 * (0{,}95)^{18-2}$$

$$P(X = 2) = \frac{18!}{16!\,2!} * (0{,}05)^2 * (0{,}95)^{16}$$

$$P(X = 2) = 153 * (0{,}05)^2 * (0{,}95)^{16} = 0{,}1683 = 16{,}83\%$$

$$P(K \leq 2) = P(k = 0) + P(k = 1) + P(k = 2) = 39{,}72\% + 37{,}72\% + 16{,}83\% = 94{,}27\%$$

Exercício 4

Um curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 80% dos casos. Se dez funcionários quaisquer participam desse curso, encontre a probabilidade de:

(a) exatamente sete funcionários aumentarem a produtividade;

(b) não mais do que oito funcionários aumentarem a produtividade;

(c) pelo menos três funcionários não aumentarem a produtividade.

R = 20,1%; 62,4%; 32,2

Exercício 4

Um curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 80% dos casos. Se dez funcionários quaisquer participam desse curso, encontre a probabilidade de:

(a) exatamente sete funcionários aumentarem a produtividade;

$N = 10$

$p = 80\%$

$k = 7$

$$P(X = k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} * (p)^k * (q)^{n-k}$$

$$P(X = 7) = \frac{10!}{(10-7)!\,7!} * (0{,}8)^7 * (0{,}2)^{10-7}$$

$$P(X = 7) = \frac{10!}{3!\,7!} * (0{,}8)^7 * (0{,}2)^3 = 120 * (0{,}8)^7 * (0{,}2)^3 = 0{,}2013 = 20{,}13\%$$

R = 20,1%; 62,4%; 32,2

Exercício 4

Um curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 80% dos casos. Se dez funcionários quaisquer participam desse curso, encontre a probabilidade de:

(B) não mais do que oito funcionários aumentarem a produtividade;

$K = 9;\ 10$

$N = 10$

$p = 80\%$

$$P(X = k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} * (p)^k * (q)^{n-k}$$

$$P(X = 9) = \frac{10!}{(10-9)!\,9!} * (0{,}8)^9 * (0{,}2)^{10-9}$$

$$P(X = 9) = 10 * (0{,}8)^9 * (0{,}2)^1 = 0{,}2684 = 26{,}84\%$$

$$P(X = 10) = \frac{10!}{(10-10)!\,10!} * (0{,}8)^{10} * (0{,}2)^{10-10}$$

$$P(X = 10) = 1 * (0{,}8)^{10} * 1 = 0{,}8^{10} = 0{,}1073 = 10{,}73\%$$

$$P(K \leq 8) = 100\% - P(k > 8)$$

$$P(K \leq 8) = 100\% - 26{,}84\% - 10{,}73\%$$

$$P(K \leq 8) = 62{,}43$$

R = 20,1%; 62,4%; 32,2

Exercício 4

Um curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 80% dos casos. Se dez funcionários quaisquer participam desse curso, encontre a probabilidade de:

(a) pelo menos três funcionários não aumentarem a produtividade.

$$P(K < 7) = 100 - P(k \geq 8) = 100\% - P(k = 8) - P(K = 9) - P(K = \ 10)$$

$$P(X = 8) = \frac{10!}{(10-8)!\,8!} * (0{,}8)^8 * (0{,}2)^2 = 45 * (0{,}8)^8 * (0{,}2)^2 = 30{,}19\%$$

$$P(K < 7) = 100 - P(k \geq 8) = 100\% - 30{,}19\% - 26{,}84\% - 10{,}73\% = 32{,}24\%$$

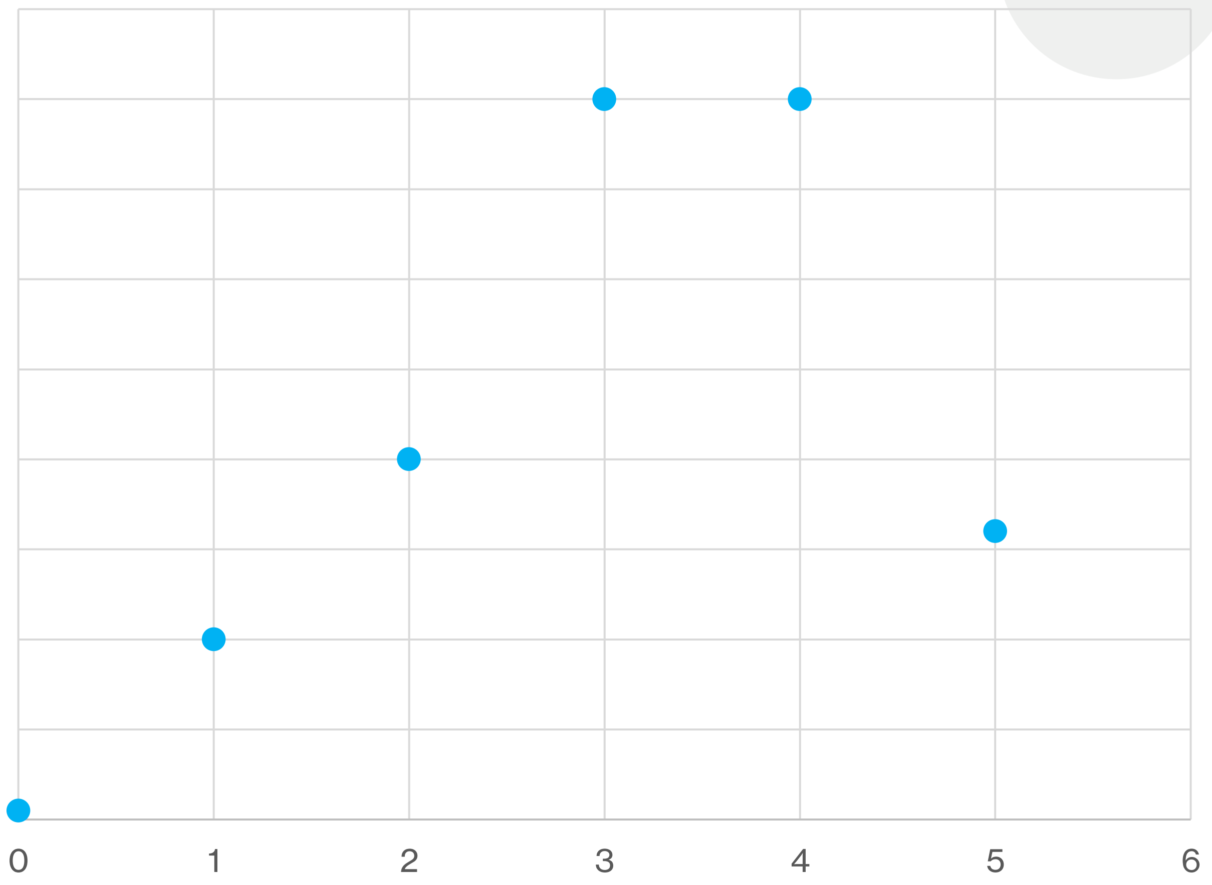
R = 20,1%; 62,4%; 32,2

Exercício 5

Se X tem distribuição binomial com parâmetros $n = 5$ e $p = 2/3$, faça os gráficos da distribuição de X.

Resposta do Exercício 5

K	P(x=k)
0	$\frac{1}{243}$
1	$\frac{10}{243}$
2	$\frac{40}{243}$
3	$\frac{80}{243}$
4	$\frac{80}{243}$
5	$\frac{32}{243}$



Exercício 6

Determinado tipo de parafuso é vendido em caixas com 1.000 peças. É uma característica da fabricação produzir 10% com defeito. Normalmente, cada caixa é vendida por R$13,50. Um comprador faz a seguinte proposta: de cada caixa, ele escolhe uma amostra de 20 peças; se a caixa não tiver parafusos defeituosos, ele paga R$20,00; um ou dois defeituosos, ele paga R$14,00; três ou mais defeituosos, ele paga R$8,00. Qual alternativa é a mais vantajosa para o fabricante?

R = Vender tudo por R$ 13,50