

**Universidade Estadual de Campinas**  
**Instituto de Matemática, Estatística e Computação**  
**Científica**  
**(IMECC - Unicamp)**

**Análise Numérica - Projeto 2:**

Comparação de diferentes abordagens para o problema de quadrados mínimos lineares

Aluno: Daniel Yan || RA : 214793  
Aluno: Matheus Araujo Souza || RA : 184145  
Aluno: Daysa De Campos Da Silva || RA : 233469  
Aluno: Fábio Henrique Polidoro Paiva || RA : 215570

Junho 2021

## Introdução

O objetivo deste projeto é analisar os resultados de diferentes métodos de solução do *problema de quadrado mínimos lineares*, como:

- Equações normais via fatoração de Cholesky;
- Fatoração QR condensada, obtida pelo processo de Gram-Schmidt modificado;
- Fatoração QR Completa usando transformações de Householder.

Para isso, utilizamos o programa **GNU Octave** e a sua linguagem para criar rotinas que encontrem a função polinomial que melhor se ajustasse ao problema dado.

## PARTE 1

### 1) Construindo o Problema Teste

Queremos aproximar um polinômio de grau 10,  $p(x) = \sum_{i=0}^{10} c_i x^i$ , aos valores da função  $f(x) = \exp(\sin(6x))$  nos pontos  $x_k = 0.05k$ , para  $k = 1, \dots, 20$ . Dessa maneira, podemos escrever as equações do polinômio em tais pontos como:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + c_3 x_0^3 + c_4 x_0^4 + c_5 x_0^5 + c_6 x_0^6 + c_7 x_0^7 + c_8 x_0^8 + c_9 x_0^9 + c_{10} x_0^{10} = p(x_0) \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + c_3 x_1^3 + c_4 x_1^4 + c_5 x_1^5 + c_6 x_1^6 + c_7 x_1^7 + c_8 x_1^8 + c_9 x_1^9 + c_{10} x_1^{10} = p(x_1) \\ \vdots \\ c_0 + c_1 x_{20} + c_2 x_{20}^2 + c_3 x_{20}^3 + c_4 x_{20}^4 + c_5 x_{20}^5 + c_6 x_{20}^6 + c_7 x_{20}^7 + c_8 x_{20}^8 + c_9 x_{20}^9 + c_{10} x_{20}^{10} = p(x_{20}) \end{cases}$$

Equivalentemente, podemos escrever as equações acima no formato matricial, sendo  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{21 \times 11}$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{11}$ ,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{21}$ :

$$\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{p}$$

$$\begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 & x_0^5 & x_0^6 & x_0^7 & x_0^8 & x_0^9 & x_0^{10} \\ x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & x_1^5 & x_1^6 & x_1^7 & x_1^8 & x_1^9 & x_1^{10} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{20}^0 & x_{20}^1 & x_{20}^2 & x_{20}^3 & x_{20}^4 & x_{20}^5 & x_{20}^6 & x_{20}^7 & x_{20}^8 & x_{20}^9 & x_{20}^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(x_0) \\ p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_{20}) \end{bmatrix}$$

Sendo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{21}$  o vetor dos pontos  $x_k$  para  $k = 0, \dots, 20$ , e utilizando a notação  $\mathbf{x}^m$  para se referir vetor dos pontos  $(x_k)^m$  para  $k = 0, \dots, 20$ , podemos construir  $\mathbf{A}$  facilmente ao olharmos para suas colunas, pois:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\ \mathbf{x}^0 & \mathbf{x}^1 & \mathbf{x}^2 & \mathbf{x}^3 & \mathbf{x}^4 & \mathbf{x}^5 & \mathbf{x}^6 & \mathbf{x}^7 & \mathbf{x}^8 & \mathbf{x}^9 & \mathbf{x}^{10} \\ | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \end{bmatrix}$$

Sendo  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{21}$  o vetor contendo os valores de  $f(x_k)$  para  $k = 0, \dots, 20$ , é extremamente importante notar que:

1. Como  $p(x)$  é de grau 10 e estamos coletando uma malha com 21 pontos, nós não iremos interpolar um polinômio nos pontos da malha.
2. Também sabemos que  $b$  não mora no espaço imagem de  $A$

Assim, estamos satisfazendo as condições necessárias para a aplicação dos métodos de quadrados mínimos vistos durante as aulas para o seguinte problema:

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{11}} \frac{1}{2} \|\mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{b}\|_2^2$$

## 2) Solução das Equações Normais via fatoração de Cholesky

Para encontrar a fatoração de Cholesky de  $A^T A$ , utilizou-se a função "chol", que nos retorna o fator de Cholesky  $R$ . Com ele, sabemos que:

$$A^T A c = A^T b \implies R^T R c = A^T b$$

Podemos separar a resolução desse sistema linear em dois outros:

$$\begin{cases} 1^\circ \text{ Problema: } R c = w ; A^T b = y \implies R^T w = y \implies w = R^T \backslash y \\ 2^\circ \text{ Problema: } R c = w \implies c = R \backslash w \end{cases}$$

Assim, obtivemos o vetor dos coeficientes  $c$  e podemos avaliar o polinômio constituído por  $c$  através da função *polyval*. Antes, note que os elementos de  $c$  estão em ordem crescente de grau do monômio —por exemplo,  $c(1)$  é o coeficiente de  $x^0$ ,  $c(2)$  de  $x^2$  e  $c(11)$  de  $x^{11}$  —e para o uso de *polyval* em Octave os coeficientes precisam estar em ordem decrescente, e por isso rodou-se um laço *for* pra se adequar à situação.

Por último, avaliamos os gráficos do polinômio e o gráfico do resíduo em cada ponto, sendo apresentados a seguir.

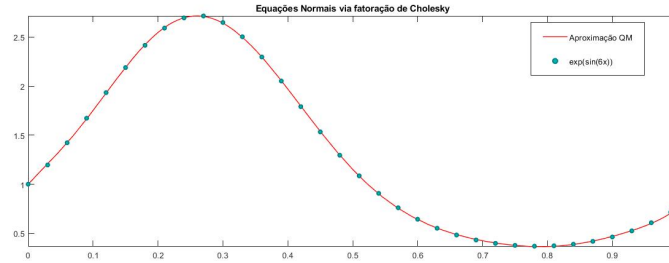


Figura 1: Gráfico da função  $f(x) = e^{\sin(6x)}$ , junto aos pontos do polinômio  $p(x)$  via Fatoração de Cholesky

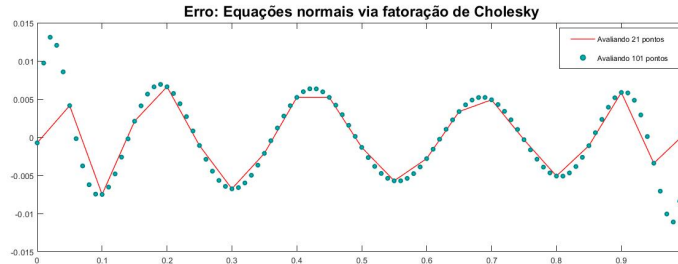


Figura 2: Gráfico do resíduo  $p(x) - f(x)$  considerando uma malha de 101 pontos e 21 pontos via fatoração de Cholesky

### 3) Solução via fatoração $QR$ condensada usando Gram-Schmidt modificado

Para encontrar a fatoração  $A = QR$ , implementamos o algoritmo de Gram-Schmidt modificado visto em aula, e ao fim do processo iterativo obtivemos os fatores  $Q$  e  $R$ .

No entanto, como o número de linhas de  $A$  ( $M = 21$ ) é menor que o número de colunas ( $N = 11$ ), esses fatores contêm informações além das essenciais e, portanto, iremos indexar  $Q$  e  $R$  de modo a obter submatrizes  $\hat{R}$  e  $Q_1$  tais que contenham somente a informação essencial para a resolução do problema dos quadrados mínimos.

$$\hat{R} = R(1:N, 1:N); Q_1 = Q(:, 1:N)$$

Com tais submatrizes, podemos obter a solução do problema através resolução do sistema linear:

$$\hat{R}c = Q_1^T b \implies c = \hat{R} \backslash (Q_1^T b)$$

Ao fim, avaliamos os gráficos do polinômio e do resíduo em cada ponto, sendo apresentados no anexo A) em função da similaridade deles com os dois gráficos construídos para o método da fatoração de Cholesky.

### 4) Solução via fatoração $QR$ usando transformações. de Householder

Encontrar o vetor  $c$  que minimiza  $\|Ac - b\|_2$  é o mesmo que resolver o sistema linear:

$$Rc = Q^T b$$

onde  $A = QR$ .

Para fatorar a matriz  $A \in \mathbb{R}^{21 \times 11}$  de forma que  $A = QR$ , onde  $Q \in \mathbb{R}^{21 \times 21}$  ortogonal e  $R \in \mathbb{R}^{21 \times 11}$  triangular superior, i.e., a fatoração completa de  $A$  usamos um algoritmo iterativo que percorre as  $n$  colunas da matriz  $A$ .

Para cada coluna  $k$  da matriz  $(a_{\bullet k})$ , calculamos o vetor  $u$  da matriz de Householder, tal que:

$$H = I - \frac{2uu^T}{u^T u}$$

Porém, não calculamos a matriz  $H$  explicitamente, mas sim utilizamos suas propriedades quando aplicada a um vetor (no nosso caso coluna  $k$  de  $A$ ):

$$H \cdot a_{\bullet k} = \left(I - \frac{2uu^T}{u^T u}\right)a_{\bullet k} = a_{\bullet k} - 2 \frac{u^T a_{\bullet k}}{u^T u} u$$

No final a parte superior da matriz  $A$  será igual a matriz  $R$  e utilizamos suas posições abaixo da diagonal principal para guardar os vetores  $u$ . Para calcular o produto  $Q^T b$  utilizamos o mesmo método escrito acima.

Ao fim, avaliamos os gráficos do polinômio e do resíduo em cada ponto, sendo apresentados no anexo B) em função da similaridade deles com os dois gráficos construídos para o método da fatoração de Cholesky.

## 5) Comparação entre os métodos

### 5.1) Apresentação dos Resultados

A seguir estão reunidos os coeficientes do polinômio  $p(x)$  solução do problema dos quadrados mínimos. Além disso, também consta o resultado do resíduo de cada método, importante para nos indicar qual das três abordagens nos forneceu uma melhor aproximação do resultado real.

Coeficientes	Cholesky	Gran-Schmidt	Householder
$C_0$	0.9992573440	0.9992563096	0.9992563094
$C_1$	7.50581228	7.50692911	7.50692934
$C_2$	-33.8282248	-33.8650871	-33.8650944
$C_3$	621.76581	622.22064	622.22073
$C_4$	-3520.98168	-3523.84360	-3523.84417
$C_5$	7492.8549	7503.2767	7503.2788
$C_6$	-4101.5844	-4124.8384	-4124.8430
$C_7$	-8979.982	-8947.708	-8947.702
$C_8$	17057.7830	17030.6123	17030.6070
$C_9$	-11265.055	-11252.355	-11252.353
$C_{10}$	2721.2798	2718.7516	2718.7511
—	—	—	—
Resíduo	0.01947549202946	0.01947548703036	0.01947548703007

Tabela 1: Coeficientes do polinômio  $p(x)$  solução do problema de quadrados mínimos através dos métodos de fatoração de Cholesky, Gram-Schmidt e Householder, junto ao respectivo resíduo.

Em função do alto número de casas decimais, arredondou-se os coeficientes para a primeiras casas decimais diferentes entre si, e caso haja o interesse em saber o valor exato dos coeficientes, os mesmos podem ser acessados através dos códigos fornecidos em anexo.

A seguir, iremos discutir os quesitos de estabilidade de cada método, sua relação com a decomposição SVD e logo em seguida relacionaremos tais informações com o tempo de processamento demandado para computar os métodos.

### 5.2) Estabilidade

Uma maneira de calcular se uma matriz  $A$  é estável (ou bem condicionada) é através do seu número de condição, definido como:

$$\text{cond}_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p$$

O número de condição de uma matriz é sempre maior ou igual a um. E uma matriz  $A$  é considerada bem condicionada quando  $\text{cond}_p(A) \approx 1$ . Essa

correspondência se deve ao fato do erro relativo ( $E_r$ ) e o resíduo relativo ( $R_r$ ) de um sistema linear na norma-p estarem relacionados pela  $cond_p(A)$ , de forma que:

$$E_r \leq cond_p(A) \cdot R_r \Rightarrow \frac{E_r}{R_r} \leq cond(A)_p$$

E portanto, se  $cond(A)$  é grande, o erro relativo pode ser muito maior que o resíduo relativo. Neste caso, a solução fornecida por um método numérico nem sempre é confiável.

Para este trabalho, utilizamos a norma-2 para calcular o número de condição das matrizes de coeficientes.

$$cond_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)} \cdot \sqrt{\lambda_{max}((A^{-1})^T A^{-1})}$$

Se uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , então  $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz simétrica com  $n$  autovalores reais e não-negativos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Supondo  $A$  não-singular e fazendo sua decomposição SVD, isto é,  $A = U\Sigma V^T$ , onde  $U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são ortogonais e  $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  com  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ , os chamados valores singulares de  $A$  que são as raízes quadradas dos auto-valores não nulos de  $A^T A$  (i.e.,  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ ,  $\forall \lambda_i > 0$ ).

Aplicando a mesma lógica, para a inversa de  $A$ , temos que  $A^{-1} = (U\Sigma V^T)^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$ , onde  $\Sigma^{-1} = diag(1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \dots, 1/\sigma_n)$  com  $1/\sigma_n \geq 1/\sigma_2 \geq \dots \geq 1/\sigma_1 > 0$ . Então:

$$cond_2(A) = \sigma_1 \cdot \frac{1}{\sigma_n} = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

Utilizamos o método *svd()* do Octave para obter o vetor de valores singulares de uma dada matriz e fizemos a divisão do seu primeiro elemento pelo último. A seguir é apresentada a tabela do número de condição da matriz  $A$  de coeficientes e da matriz  $R$  para cada um dos métodos trabalhados.

Método	$cond_2(\mathbf{A})$	$cond_2(\mathbf{R})$
Cholesky	5.3635e+14	2.3194e+07
Gram-Schmidt	2.3175e+07	2.3175e+07
Householder	2.3175e+07	2.3175e+07

### 5.3) Tempo de Processamento

A maneira que escolhemos para avaliar o custo computacional de cada método foi através da medição direta do tempo de processamento do código, pois acreditamos que o tempo é proporcional ao número de operações de ponto flutuante executadas. Além disso, também julgamos necessário medir os tempos através de uma única máquina, para evitar erros relacionados a diferentes configurações de hardware, principalmente de memória RAM.

Como foi percebido que o tempo necessário para executar o código apenas uma vez era baixo, decidimos adotar a estratégia de, com o auxílio de um laço *for*, medir o tempo total necessário para rodar o código 100 vezes seguidas

(incluindo a construção da matriz  $\mathbf{A}$ ) para tentar contornar o possível erro associado à medição. Em seguida, foi feita uma média simples e obtivemos o tempo final de cada método.

A tabela a seguir nos informa a média do tempo obtido para cada método, em um computador cuja configuração é: AMD Ryzen 5 2500 U com Radeon Vega Mobile Gfx(8 CPUs), 2.0GHz; 8192 MB RAM.

Método	Tempo Médio (s)
Cholesky	3.30963e-03
Gran-Schmidt	6.38654e-03
Householder	1.22632e-02

Tabela 2: Tempo médio de 100 execuções de cada método, em segundos.

Para visualizar tais dados, plotamos um gráfico de barras a seguir, que nos fornece uma panorama geral do tempo demandado por cada método.

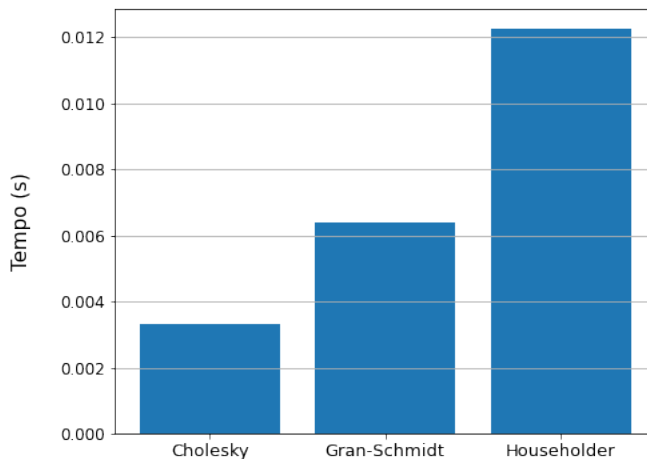


Figura 3: Tempo médio de 100 execuções de cada método, em segundos.

Já para a comparação entre os métodos, foi construída a Tabela (4), cujo elemento da linha  $i$  e coluna  $j$  é a razão entre o tempo do método da linha  $i$  e da coluna  $j$ . Com isso, nós sabemos quanto um método foi mais demorado ou mais rápido em relação a outro.



	Cholesky	Gram-Schmidt	Householder
Cholesky	1.00	0.52	0.27
Gram-Schmidt	1.93	1.00	0.52
Householder	3.71	1.92	1.00

Tabela 3: Tempo médio de 100 execuções de cada um dos métodos em um mesmo computador.

#### 5.4) Relacionando os resultados

Juntando os resultados de tempo aos de estabilidade, precisão e resíduo, vemos que eles atuam como "uma balança", ou seja, para diminuir o resíduo (e aumentar a precisão), nos parece necessário aumentar o tempo de processamento.

A evidência mais clara disso é o método de Householder, que apresenta o menor resíduo dentre todos os métodos estudados, mas também gasta quase o quádruplo do tempo do método de Cholesky (que é o com maior resíduo e menor tempo).

De tal modo, percebemos que não há um método melhor que o outro, mas sim métodos com diferentes vantagens e desvantagens. Assim, a escolha de um método depende das características do problema sendo modelado, como:

- Qual o tamanho do meu problema? Quais as dimensões da matriz  $A$ ?
- O quão preciso tem de ser meu resultado?
- O computador sendo utilizado para resolver o problema tem capacidade para processá-lo?
- Eu preciso resolver o problema rapidamente?

Essas e outras perguntas servem como um direcionador para a escolha de um dentre diversos métodos para a resolução de um problema computacional, não só para o de quadrados mínimos mas para vários outros. Isso se dá devido ao fato de que, ao respondê-las de maneira satisfatória, nós verificamos qual dos métodos possuem vantagens interessantes para nós, quais não possuem, e quais são as desvantagens significativas e como contorná-las.

A principal dificuldade em relação à parte 1 foi na hora de construir a matriz  $A$ , já que, apesar de não ser uma tarefa complicada, nos exigiu que sentássemos e pensássemos unicamente em relação ao procedimento que seria realizado. Logo depois de dedicar tal tempo, conseguimos construir o respectivo tópico desse relatório, o que nos facilitou na hora de visualizar o problema como um todo.

## PARTE 2

Nossos dados são os números de focos de calor no Brasil, incêndios florestais, por mês e por estado, coletados ao longo de 20 anos (1998 a 2017) mês a mês, no caso estamos arredondando para 20 anos, mas em 2017 a última atualização de dados foi coletada em novembro, cobrindo todos os 27 estados nacionais. Os dados estão disponíveis no (Referência I).

Depois do tratamento dos dados, foi realizada a soma de todos os meses disponíveis, com isso estamos tratando o Brasil como um só, e temos os números de ocorrência de incêndios ao longo desses 20 anos separados por mês (Figura 4). Considerando os resultados obtidos nas análises dos métodos da primeira parte, tempo de processamento e resíduo, escolhemos o método de método de gram-schmidt modificado para fazer a aproximação dos QM.

Podemos notar que, a partir dos nossos dados (Figura 4), para fazer um polinômio que se ajustasse a eles de maneira que reduzisse ao máximo o resíduo da aproximação, teríamos que procurar em graus mais elevados. Fazendo um teste do melhor grau que se ajusta à nossa função ao longo dos anos (Figura 5), podemos perceber que depois do grau 24 que corresponde ao menor (Figura 5), e proporcionando o seguinte resíduo (284085.937), o comportamento do resíduo começa a se tornar muito instável, com magnitudes muito elevadas.

Para solucionar esse problema, buscamos como solução um ajuste no espaço de função que mais poderia nos favorecer, aquele que nossa  $f(t)$  apresenta periodicidade, sendo então uma função periódica. Com isso, buscamos o espaço de frequência da nossa função  $f(t)$ . A maneira de fazer isso foi utilizando a transformada discreta de Fourier, transformando então nossa  $f(t)$  em uma  $F(w)$  (Figura 6, Figura 7). Testamos novamente o ajuste QM (Figura 8) e obtemos o seguinte resíduo (365827.305). Podemos ver claramente que mesmo fazendo o cálculo da inversa da transformada discreta de Fourier, não tivemos um bom ajuste (Figura 8).

Por fim, tentamos olhar para as funções de cada mês e, por meio delas, conseguir o melhor ajuste para as funções, pois assim diminuimos a complexidade da nossa função e facilitamos o trabalho para o método dos QM.

Primeiro, buscamos encontrar o polinômio de melhor grau que se ajustasse a cada uma das funções dos meses. O critério que adotamos foi achar o grau que minimizava o resíduo, obtendo um ajuste para cada mês (Figura (i), para  $i=9:20$ ). Agora indo para o espaço de frequência, aplicamos o mesmo procedimento para a parte real e imaginária. Com os ajustes, podemos voltar para o espaço tempo com a inversa da transformada discreta de Fourier, e verificar quão bom ficou nosso ajuste (Figuras (i), para  $i=21:32$ ). Podemos agora comparar os dois métodos:

Mês	Direto no Tempo	Vindo da Frequência
1	482.08404493093144	1.2930500487039111e-04
2	29.271665398067505	5.6329807563703535e-06
3	25.6656578359459	7.722515573381951e-05
4	327.62703584663655	4.878503949617778e-05
5	446.533567530109	2.0260247417213283e-05
6	802.0149531605185	9.573554428559478e-05
7	778.0204700207514	3.766752267519946e-04
8	7536.781096371677	5.979916916176284e-04
9	10060.370456600602	8.652981790370295e-04
10	771.218152893546	5.659701136173891e-04
11	3313.622149564739	1.754774867037628e-04
12	184.3425332218146	7.526239118153195e-05

Tabela 4: Comparação do resíduo da nossa função com a  $f(t)$  e a ifft da  $F(w)$ .

Conclusão:

Após várias tentativas, concluímos que o melhor método para achar uma função que se ajustasse ao número de focos de calor no Brasil é: filtramos os dados por mês; aplicamos a transformada discreta de Fourier; fazemos ajuste tanto na parte real quanto na parte imaginária; com os ajustes, realizamos a inversa da transformada discreta de Fourier.

Referência:

I: <https://dados.gov.br/dataset/sistema-nacional-de-informacoes-florestais-snif/resource/39308794-da81-4cab-89e7-1691c2f3893b>

II: <https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.fft.html>

III: Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide - por George B. Arfken

IV: Mathematical Methods for Physics and Engineering: A Comprehensive Guide - por K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence

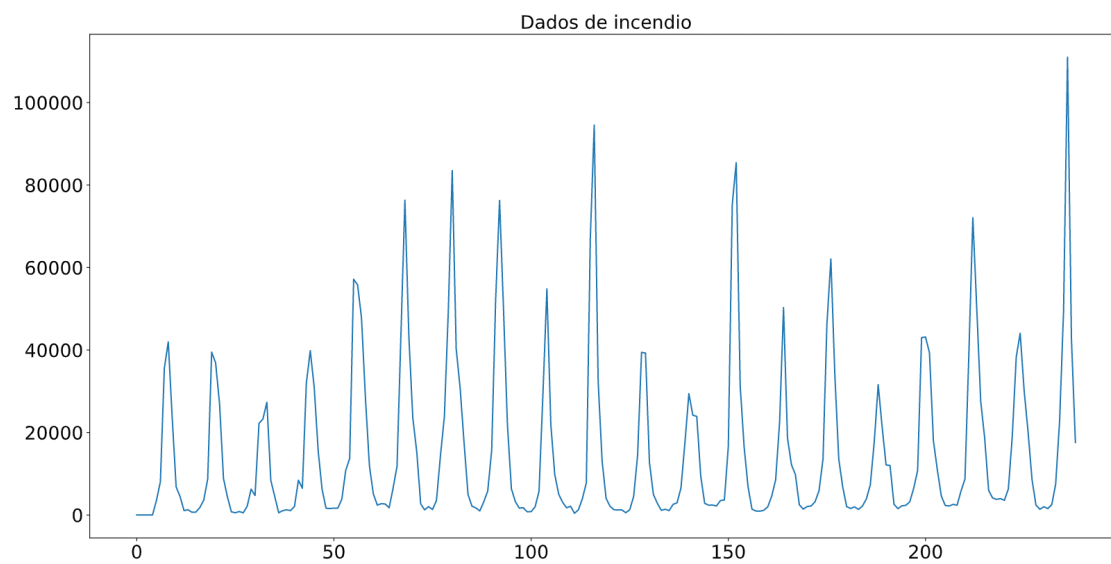


Figura 4: Número de incêndios Florestais vs Tempo.

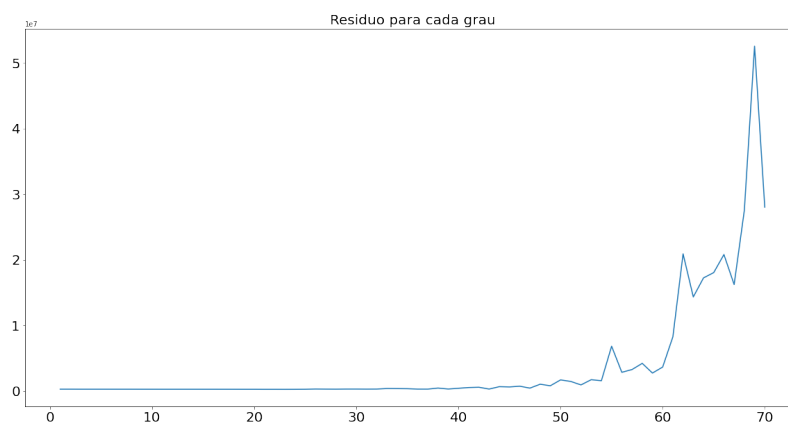


Figura 5: Gráfico do resíduo em função do grau.

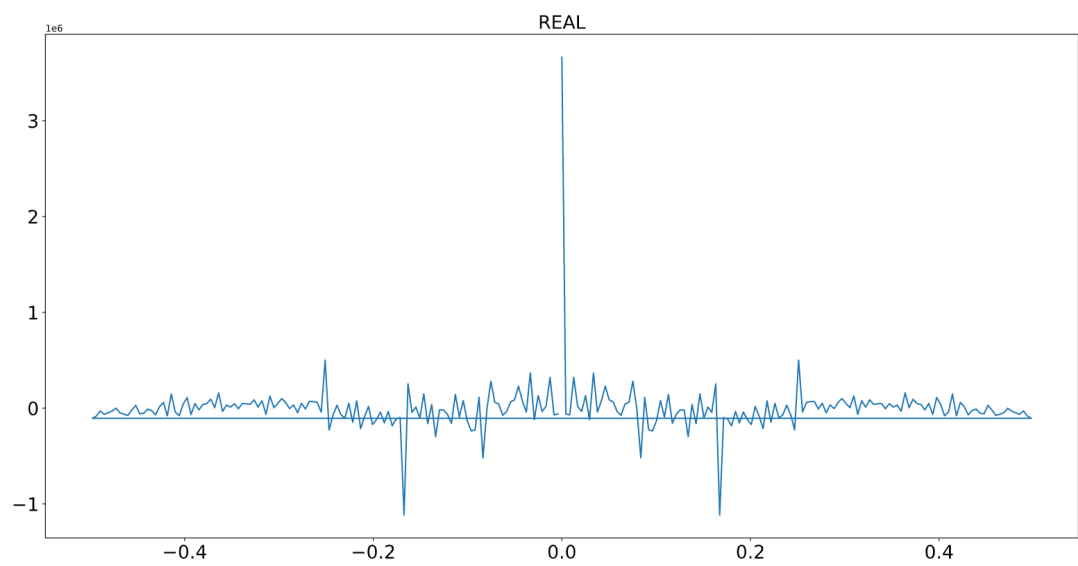


Figura 6: Parte real transformada discreta de Fourier.

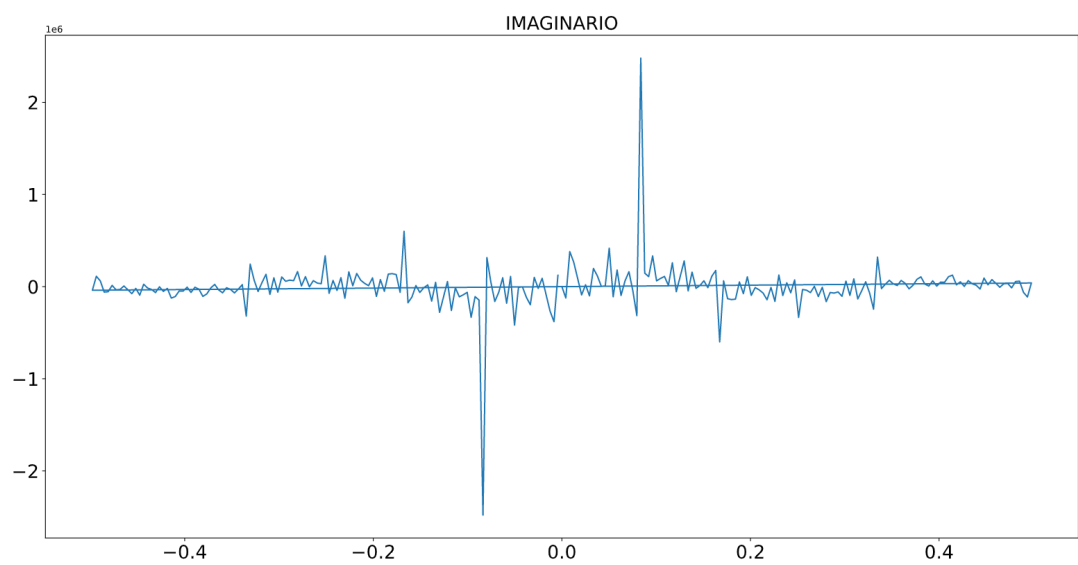


Figura 7: Parte imaginária da transformada discreta de Fourier.

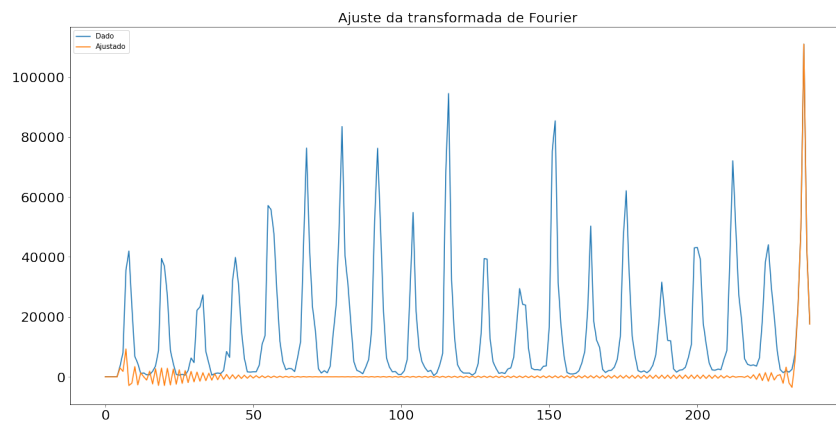


Figura 8: Gráfico da nossa função ao longo dos 20 anos comparado com o ajuste vindo do espaço de frequência.

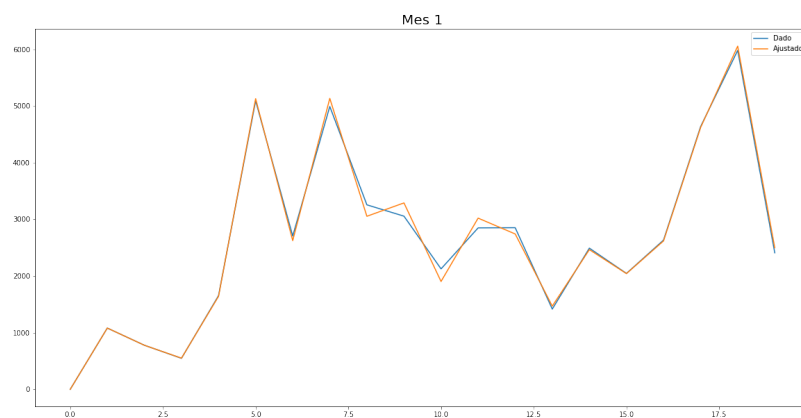


Figura 9: plotagem da função no tempo obtida pelo método QM via gram-schmidt no mês Janeiro.

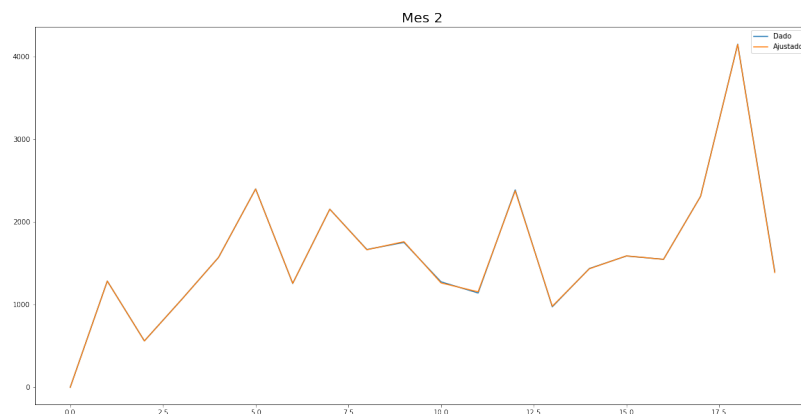


Figura 10: plotagem da função no tempo obtida pelo método QM via gram-schmidt no mês Fevereiro.

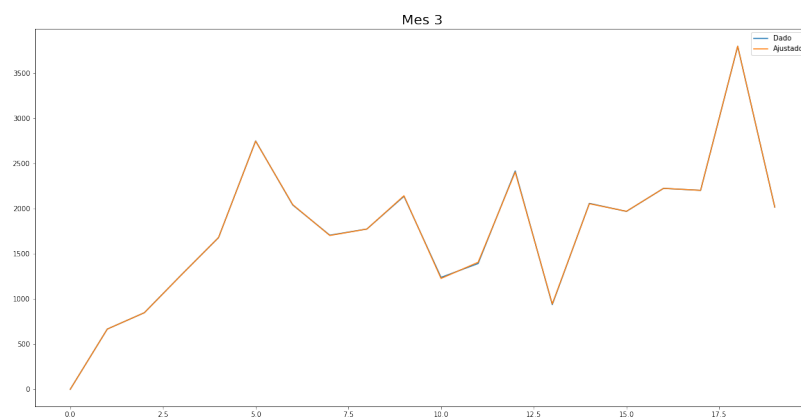


Figura 11: plotagem da função no tempo obtida pelo método QM via gram-schmidt no mês Março.

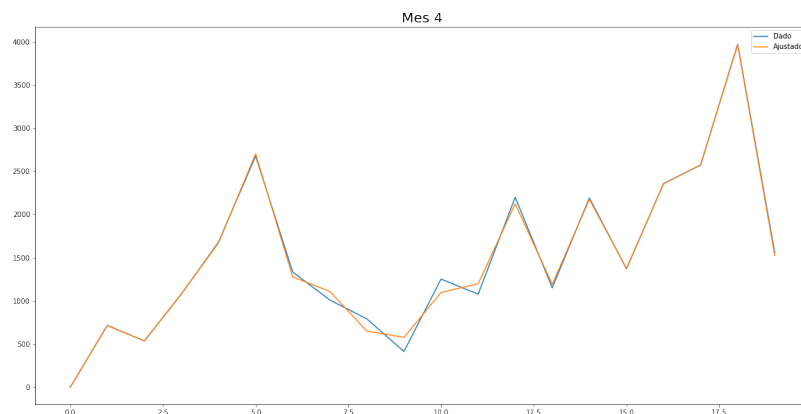


Figura 12: plotagem da função no tempo obtida pelo método QM via gram-schmidt no mês Abril.

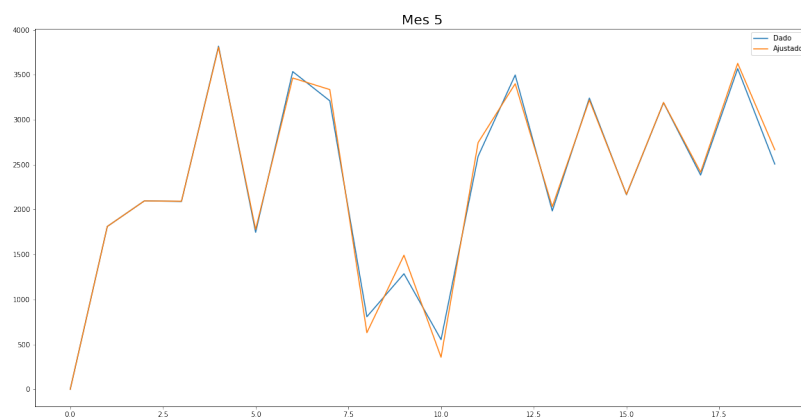


Figura 13: plotagem da função no tempo obtida pelo método QM via gram-schmidt no mês Maio.



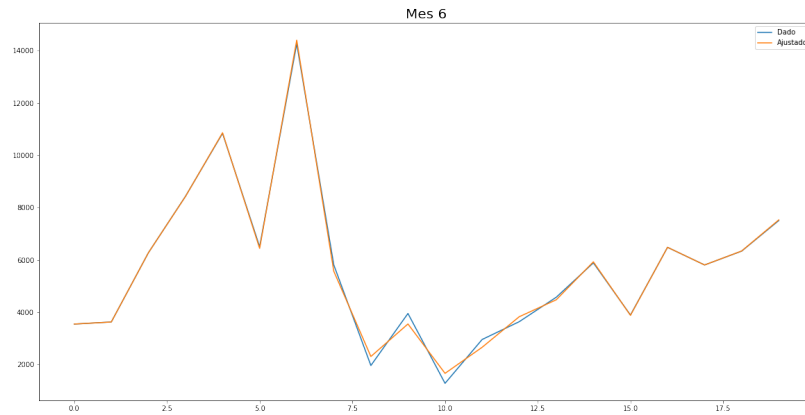


Figura 14: plotagem da função no tempo obtida pelo método QM via gram-schmidt no mês Junho.

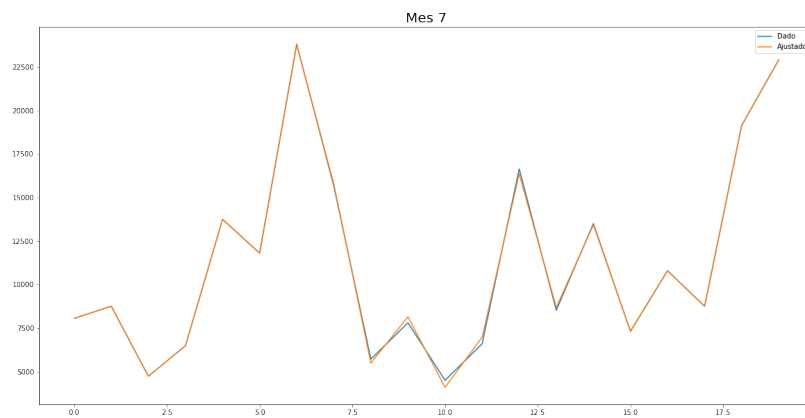


Figura 15: plotagem da função no tempo obtida pelo método QM via gram-schmidt no mês Julho.

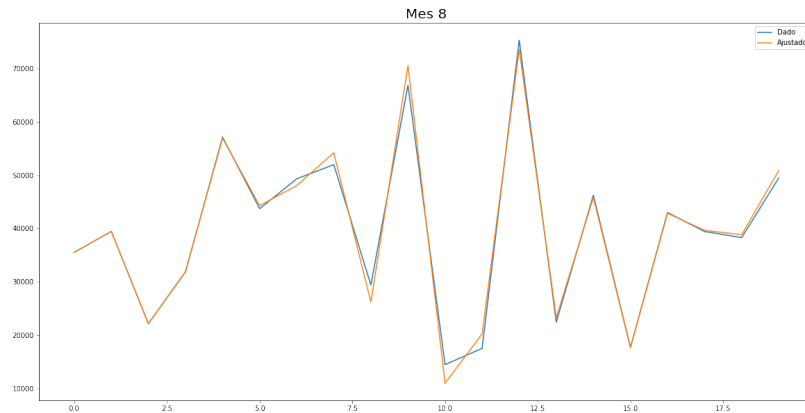


Figura 16: plotagem da função no tempo obtida pelo método QM via gram-schmidt no mês Agosto.

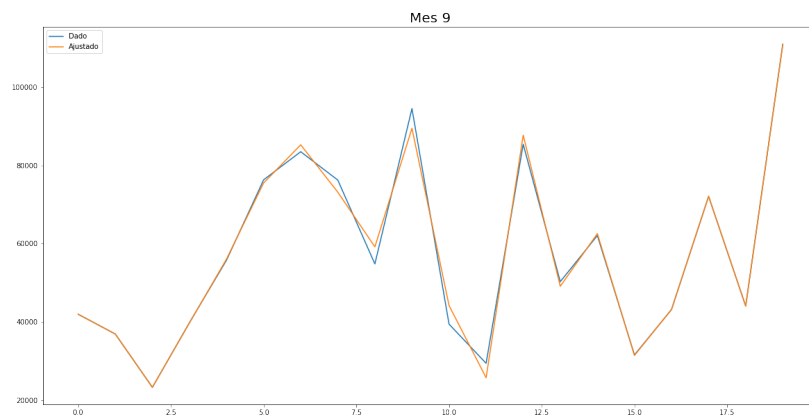


Figura 17: plotagem da função no tempo obtida pelo método QM via gram-schmidt no mês Setembro.

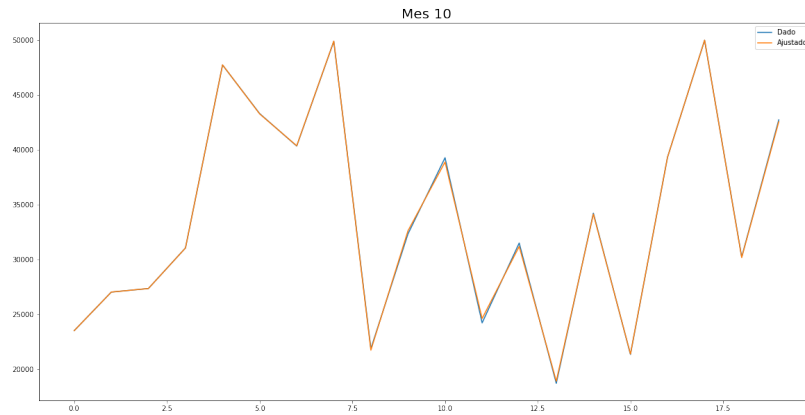


Figura 18: plotagem da função no tempo obtida pelo método QM via gram-schmidt no mês Outubro.

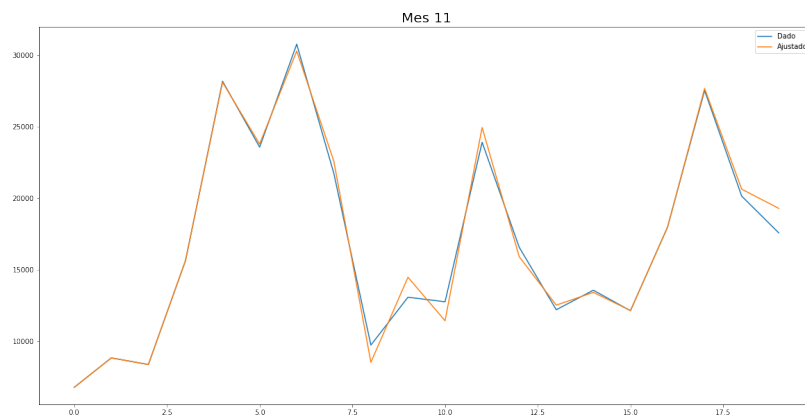


Figura 19: plotagem da função no tempo obtida pelo método QM via gram-schmidt no mês Novembro.

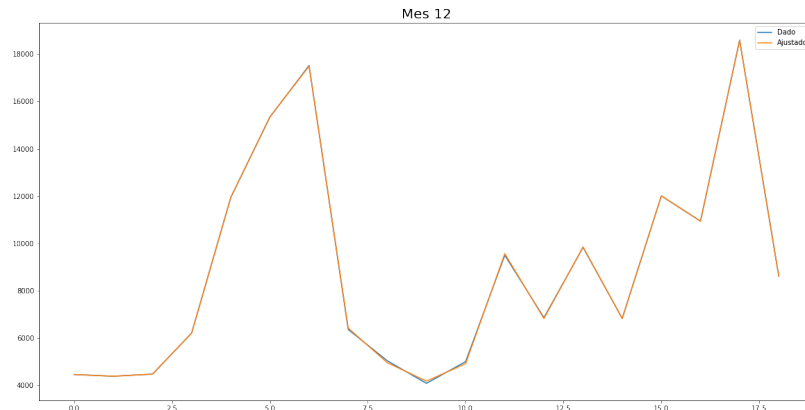


Figura 20: plotagem da função no tempo obtida pelo método QM via gram-schmidt no mês Dezembro.

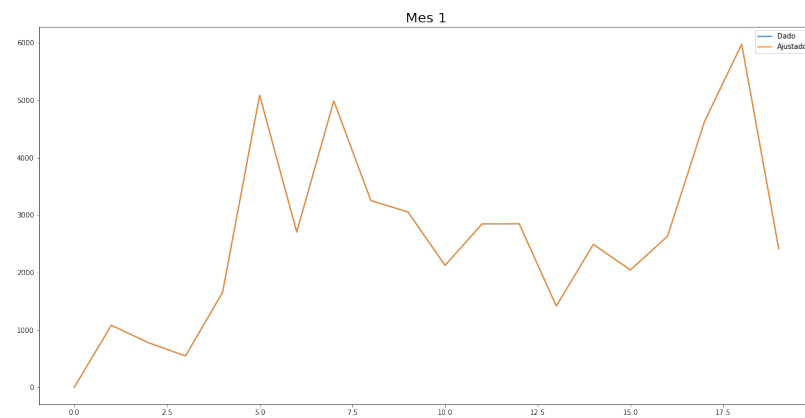


Figura 21: plotagem da função vinda do espaço de frequência obtida pelo método QM via gram-schmidt e os dados no mês Janeiro.

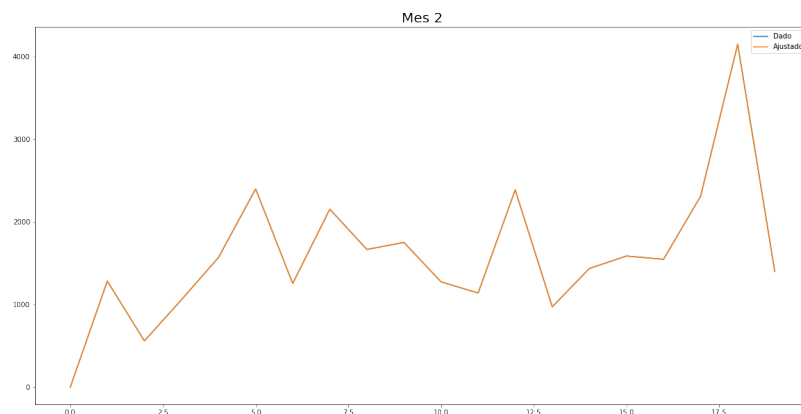


Figura 22: plotagem da função vinda do espaço de frequência obtida pelo método QM via gram-schmidt e os dados no mês Fevereiro.

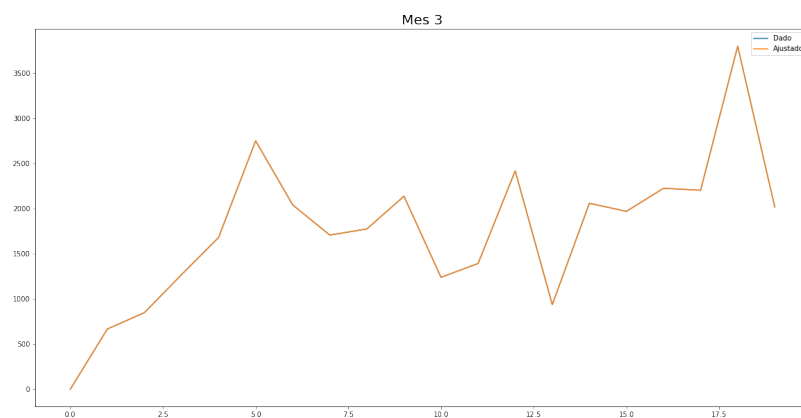


Figura 23: plotagem da função vinda do espaço de frequência obtida pelo método QM via gram-schmidt e os dados no mês Março.

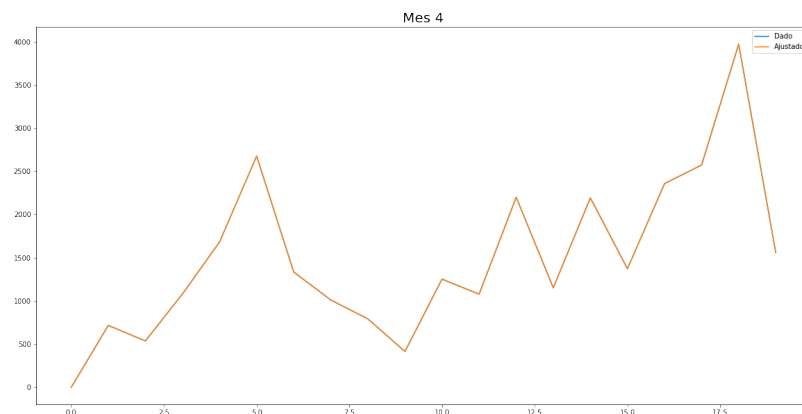


Figura 24: plotagem da função vinda do espaço de frequência obtida pelo método QM via gram-schmidt e os dados no mês Abril.

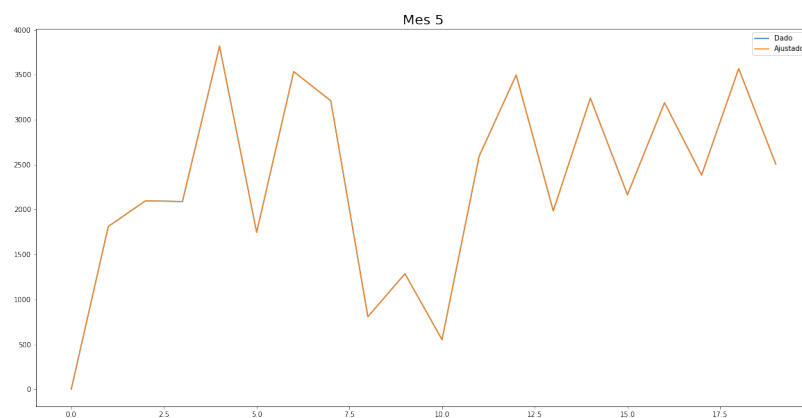


Figura 25: plotagem da função vinda do espaço de frequência obtida pelo método QM via gram-schmidt e os dados no mês Maio.

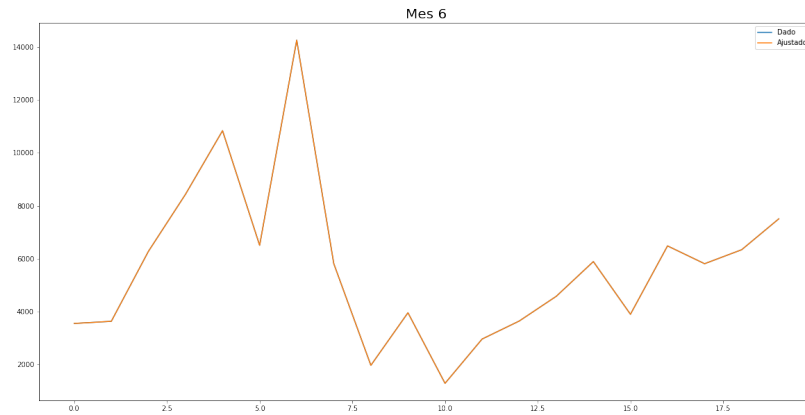


Figura 26: plotagem da função vinda do espaço de frequência obtida pelo método QM via gram-schmidt e os dados no mês Junho.

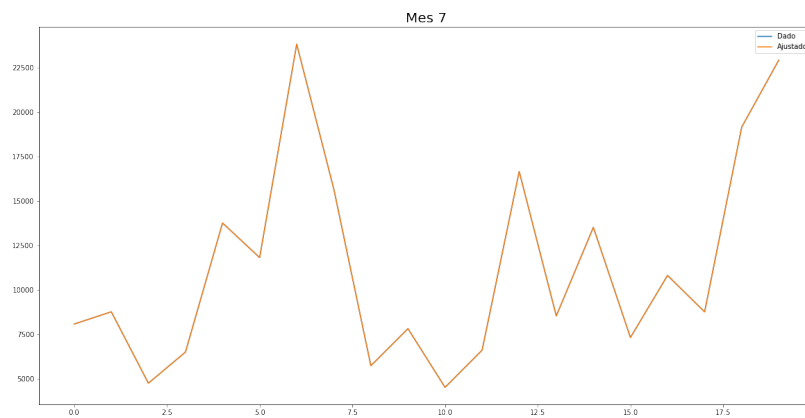


Figura 27: plotagem da função vinda do espaço de frequência obtida pelo método QM via gram-schmidt e os dados no mês Julho.

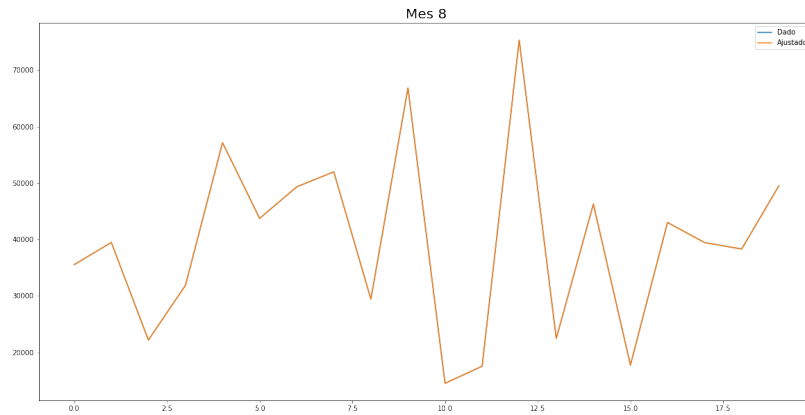


Figura 28: plotagem da função vinda do espaço de frequência obtida pelo método QM via gram-schmidt e os dados no mês Agosto.

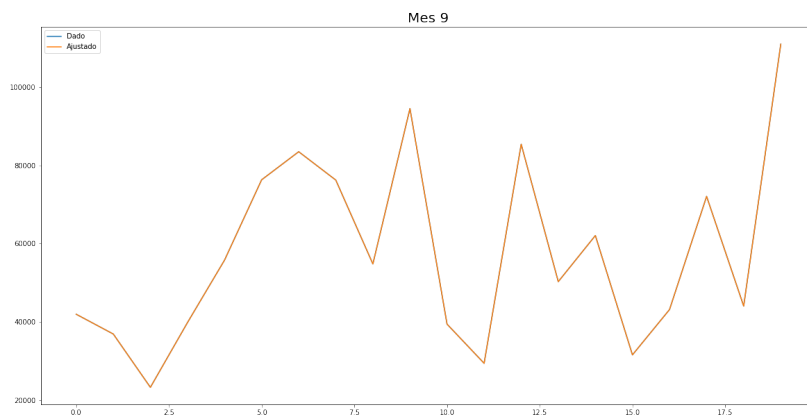


Figura 29: plotagem da função vinda do espaço de frequência obtida pelo método QM via gram-schmidt e os dados no mês Setembro.



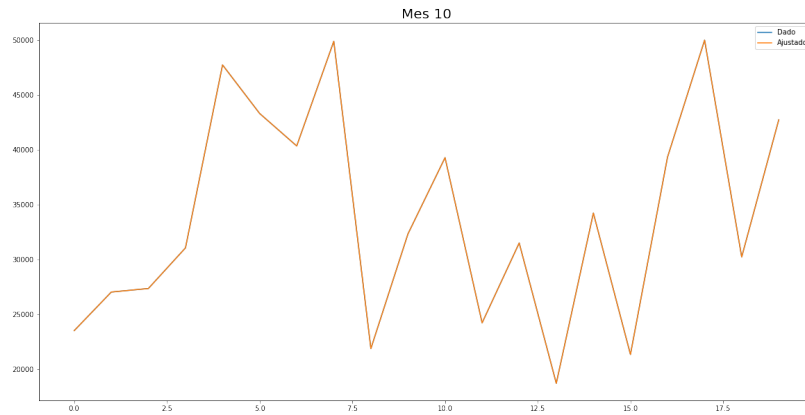


Figura 30: plotagem da função vinda do espaço de frequência obtida pelo método QM via gram-schmidt e os dados no mês Outubro.

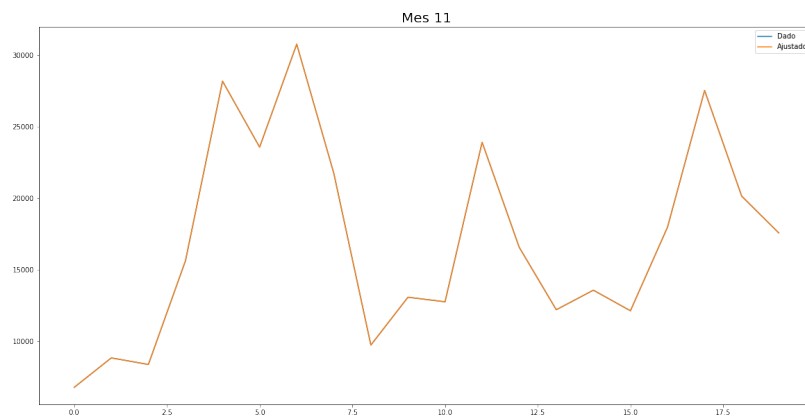


Figura 31: plotagem da função vinda do espaço de frequência obtida pelo método QM via gram-schmidt e os dados no mês Novembro.

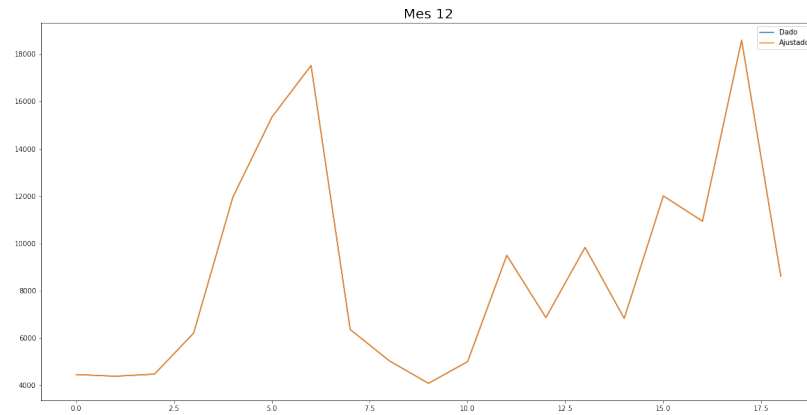


Figura 32: plotagem da função vinda do espaço de frequência obtida pelo método QM via gram-schmidt e os dados no mês Dezembro.

Anexo A) Gráficos do polinômio e do resíduo do método de Decomposição QR condensada via Gram-Schmidt modificado

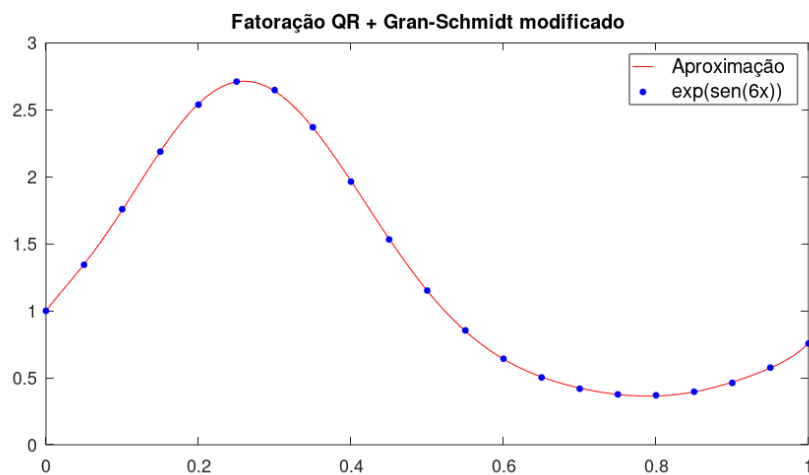


Figura 33: Gráfico da função  $f(x) = e^{\sin(6x)}$ , junto aos pontos do polinômio  $p(x)$  via Fatoração QR e Gram-Schmidt modificado

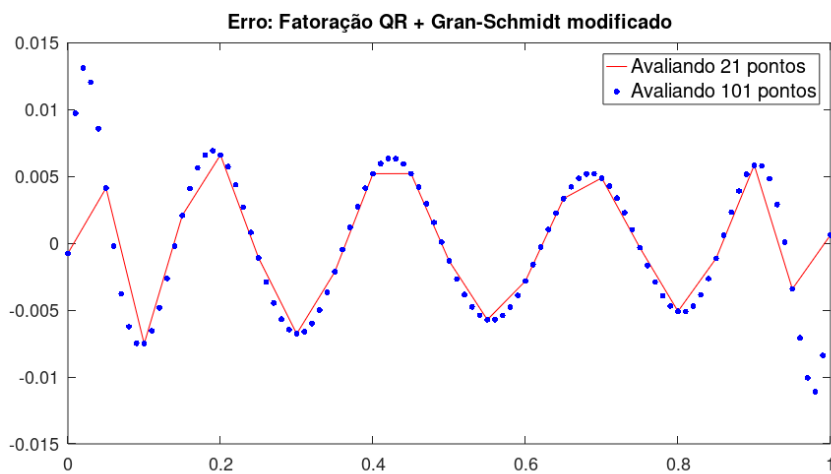


Figura 34: Gráfico do resíduo  $p(x)-f(x)$  considerando uma malha de 101 pontos e 21 pontos via Fatoração QR e Gram-Schmidt modificado

## Anexo B) Gráficos do polinômio e do resíduo do método de Decomposição QR completa via transformações de Householder

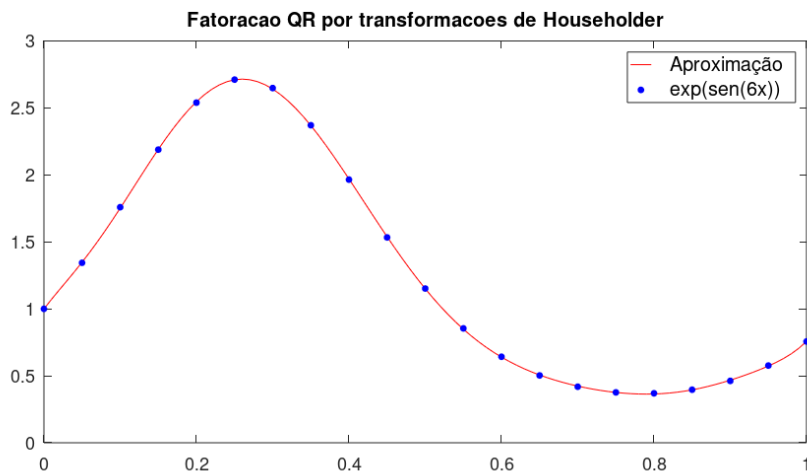


Figura 35: Gráfico da função  $f(x) = e^{\sin(6x)}$ , junto aos pontos do polinômio  $p(x)$  via Fatoração QR completa usando transformações de Householder

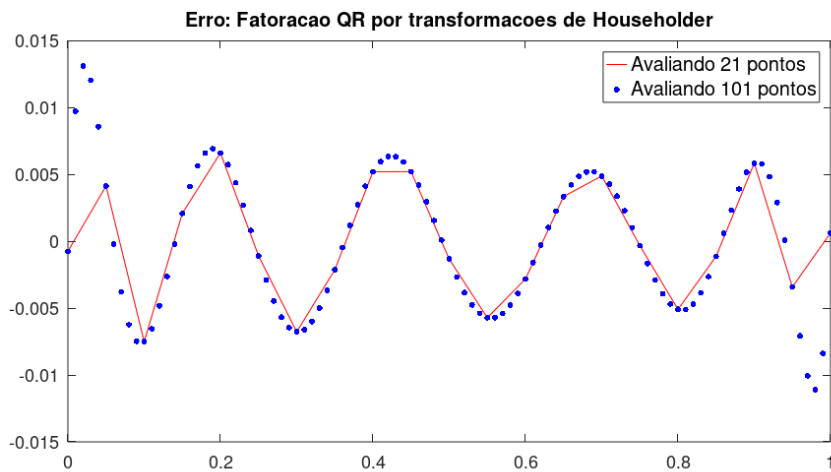


Figura 36: Gráfico do resíduo  $p(x) - f(x)$  considerando uma malha de 101 pontos e 21 pontos via fatoração QR completa usando transformações de Householder