MS428 Programaçao Linear
Projeto Computacional 2 – Métodos de Pontos Interiores

Bruno Trevisan Ra:168170
Matheus Araujo Souza Ra:184145

Introdução

Em 1967, foi proposto o primeiro método de pontos interiores, apresentado por Dikin. Em 1984, Karmarkar propôs o primeiro método de Pontos Interiores Polinomial, o qual deu início a uma pesquisa por outros métodos mais completos. Os métodos de Pontos Interiores aproximam-se da fronteira do conjunto factível apenas no limite, ou seja, aproximam-se da solução somente do interior ou exterior da região factível e nunca sobre a fronteira da região. As iterações feitas no método de pontos interiores são em menor número do que no simplex, embora sejam mais caras computacionalmente. O métodos de pontos interiores que nos interessa é o Método Primal Dual Seguidor de Caminho, na literatura, este método simplesmente chamado seguidor de caminho, foi proposto por Megiddo e está melhor apresentado em Wright e Vanderbei.

Método

Dado o problema de programação linear primal (a esquerda) e seu problema dual associado (a direita) ambos na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{Min:}\quad & c^T x \\ \text{Sujeito a:}\quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \text{Max:}\quad & b^T y \\ \text{Sujeito a:}\quad & A^t y + z = c \\ & z \geq 0 \quad , y \text{ livre} \end{aligned}$$

Onde A $\in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $c \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ é o vetor coluna de variaveis duais e $z \in \mathbb{R}^n$ é a variável de folga complementar.

Para $x > 0$, $z > 0$, x é um ponto interior do problema primal e z no problema dual. Além disso, se x satisfaz $Ax = b$, x é um ponto factível e se $A^t y + z = c$, z é um ponto interior factível.

Um outro conceito introduzido por esse método é o *gap*, que é dado pela diferença entre os valores das funções objetivo para o primal e o dual de um mesmo problema, ou seja,$\gamma = c^t x - b^t y$. Temos também que para um ponto primal e dual factível, o *gap* é $\gamma = c^t x - b^t y = z^t x$.

Como uma ultima etapa antes de podermos aplicar o método temos que verificas as condições de otimalidade. Tomando um ponto (x, y, z) ele é ótimo para os problemas primal e dual se e somente se:

- Primal factível: $Ax = b,\ x \leq 0$;

- Dual factível: $A^t y + z = c,\ z \leq 0$;
- Complementaridade: $XZe = \mu e$, ou seja, $x_i z_i = 0,\ \ i = 1, ..., n$.

Onde e é o vetor coluna de dimensão n com todos os elementos iguais a 1, as

No método primal dual afim escala, a fim de satisfazer a condição de complementaridade $x_j z_j = 0$ para todo valor de j mas dessas variáveis podem ser numericamente nulas antes de atingir o ponto ótimo. Esse fato provoca instabilidade numérica na matriz diagonal $D = Z^{-1}X$. Então, uma ideia é perturbar a condição de complementaridade tal que essa perturbação vai para zero próximo a um ponto ótimo. Ou seja, se $x_j z_j$ tiver o mesmo valor para cada j então seria excelente que

$$x_j z_j = \frac{x^T z}{n} = \frac{\gamma}{n} \to 0$$

Introduzimos um parâmetro de perturbação μ tal que

$$Zdx + Xdz = -XZe + \mu e, \mu = \sigma \frac{\gamma}{n}, \sigma \in (0, 1).$$

Um bom método deveria fazer $\mu \to 0$, a fim de resolver a condição de complementaridade $XZe = \mu e \to 0$.

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + z - c \\ XZe - \mu e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_p \\ r_d \\ r_c \end{pmatrix} \tag{1}$$

Logo a jacobiana por blocos de F para (x,y,z) é

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \tag{2}$$

Então, as equações de Newton são $J(x, y, z)d = -F(x, y, z)$, onde d é a direção de Newton. Dado um ponto (x^0, y^0, z^0), definimos o vetor resíduo

$$r(x^0, y^0, z^0) = -F(x^0, y^0, z^0) = \begin{pmatrix} r_p \\ r_d \\ r_c \end{pmatrix} \tag{3}$$

Resolvendo o sistema obtemos

$$ADA^T dy = r_p + AD(r_d - X^{-1} r_c) \tag{4}$$

$$dx = D(A^T dy - r_d + X^{-1} r_c) \tag{5}$$

$$dz = X^{-1}(r_c - Zdx) \tag{6}$$

Uma vez que A é de posto completo, ADA^t é simétrica e definida positiva. Portanto, dependendo da esparsidade e/ou da dimensão do problema ela pode ser resolvida pela fatoração Cholesky ou iterativamente pelo método de gradientes conjugados. Agora, dado um ponto interior inicial $x^0 > 0,\ \ z^0 > 0$, a ideia é avançar iterativamente na direção de Newton com um tamanho de passo $\alpha(0 < \alpha \leq 0)$ maior possível que garanta que o próximo ponto também seja interior.

Analise de Dados

Nos resultados obtidos, podemos perceber que eles satisfazem todas as condições de otimalidade para um PL, quando trabalhamos com matrizes tão grandes alguns problemas na otimização dos seus códigos podem acarretar resultados adversos e até mesmo erros não esperados na saída, foi preciso um trabalho meticuloso e teórico para obtenção dos resultados. Algumas variações de dados podem ser obtidos no output (informação que é emitida por um sistema informático),caso tivéssemos usado o comando inv(), resultados esses como matrizes quase singular ou mal dimensionada, evitamos assim o uso de matrizes inversas e usamos a decomposição de Cholesky com permutação, sendo a implementação desse método crucial para obtenção dos dados aqui apresentados.

Alguns resultados					
Resultados scfxm3			Resultados scsd8		
x	y	z	x	y	z
0	-0	0	0	2.0834	0.9956
0	-0	0	0	-38.2780	1.0044
0	-0	0	2.4802	2.0878	2.5981
0.0006	-0	0	0.1641	-41	1.4019
0	-0	0	0	1.4853	4.2861
0	-0	0	0	-42.3333	1.7139
0	-0	0	0	0.7973	5.2687
0.0024	-0	0	0	-41	2.7313
Continua					

Conclusão

Dentre tudo que podemos obter nesse projeto ou até mesmo perceber, foi a eficiência do método Primal Dual seguidor de caminhos, como relatado aqui o método primal dual afim escala, afim de satisfazer as condições de complementaridade, algumas variáveis podem ser numericamente nulas e atingir resultados com velocidades diferentes, causando uma instabilidade numérica, resolver esse problema é a principal motivação desse método. Todos os resultados aqui obtidos satisfazem a base teórica, problemas menores também foram resolvidos antes da resolução dos problemas aqui apresentados, trabalhamos com o código de maneira meticulosa, mesmo enfrentando adversidades no início da sua construção, conseguimos alcançar nosso objetivo com êxito.