

Modelagem matemática

MS480

Efeitos das variações das condições de contorno em uma EDP

Matheus Araujo Souza

RA:184145

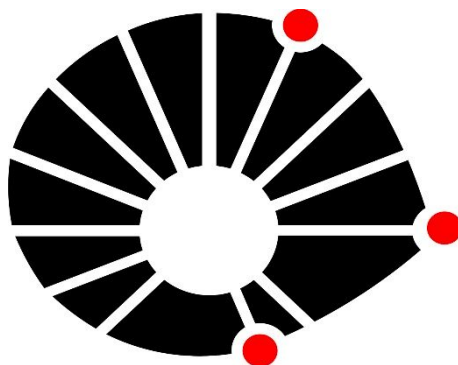
Supervisionado por

José Mario Martínez

Professor emérito

IMECC, instituto de Matemática Estatística e Computação Científica

Unicamp, Campinas, Brasil.



UNICAMP

Agosto de 2020

Resumo

Com o objetivo de estudar e analisar o comportamento de uma Equação Diferencial Parcial (EDP), para certas variações em condições de contorno à esquerda, foram realizados vários testes e simulações para condições específicas, conhecidas como função rampa, constatando que, para determinadas variações de tempo e elevação da altura máxima da função a esquerda, nossa curva fica mais elevada ao passar por ela, aumentando sua altura e fugindo do comportamento normal da função $\sin(xt)$, comportamento que era seguido antes da passagem por ela.

palavras chaves: (EDP) equação diferencial parcial, função rampa, altura máxima

Lista de Figuras

Figura-1: Primeira altura máxima	
Figura-2: Primeira altura máxima	
Figura-3: Primeira altura máxima	
Figura-4: Primeira altura máxima	
Figura-5: Primeira altura máxima	
Figura-6: Primeira altura máxima	
Figura-7: Primeira altura máxima	
Figura-8: Primeira altura máxima	
Figura-9: Primeira variação de altura	
Figura-10: Primeira variação de altura	
Figura-11: Primeira variação de altura	
Figura-12: Primeira variação de altura	
Figura-13: Primeira variação de altura	
Figura-14: Primeira variação de altura	
Figura-15: Primeira variação de altura	
Figura-16: Primeira variação de altura	
Figura-17: Segunda variação de altura	
Figura-18: Segunda variação de altura	
Figura-19: Segunda variação de altura	
Figura-20: Segunda variação de altura	
Figura-21: Segunda variação de altura	
Figura-22: Segunda variação de altura	
Figura-23: Segunda variação de altura	
Figura-24: Terceira variação de altura	
Figura-25: Terceira variação de altura	
Figura-26: Terceira variação de altura	
Figura-27: Terceira variação de altura	
Figura-28: Terceira variação de altura	
Figura-29: Terceira variação de altura	
Figura-30: Terceira variação de altura	
Figura-31: Terceira variação de altura	
Figura-32: Variando os tempos	
Figura-33: Variando os tempos	
Figura-34: Variando os tempos	

SUMÁRIO

RESUMO _____	01
Lista de figuras _____	02
Introdução _____	04
Primeiros intervalos de tempo _____	05
Primeira variação de altura _____	08
Segunda variação de altura máxima de M _____	11
Terceira variação da altura máxima M _____	14
Modificando os tempos internos e externos _____	17
Modificando as condições de contorno _____	19
Conclusão _____	20
Referências bibliográficas _____	21
Anexos _____	22

Introdução

Podemos observar os acontecimentos que ocorrem no nosso meio: dos mais simples aos mais complexos, aqueles que sabemos a resposta para o que vai acontecer e aqueles que não sabemos a resposta. Para todos podemos criar modelos matemáticos, não só para descrevê-los, mas para tentar compreender aquilo que não temos uma solução formalizada, segundo Bassanezi (1994, p. 01)

Modelagem Matemática é um processo que consiste em traduzir uma situação ou tema do meio em que vivemos para uma linguagem matemática. Essa linguagem, que denominamos Modelo Matemático, pressupõe um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam o fenômeno em questão.

O assunto principal deste trabalho é a análise do comportamento de uma equação diferencial parcial que até então temos o resultado para uma certa condição de contorno específica à esquerda, mas ao colocarmos uma variação na sua condição de contorno à esquerda no tempo, conhecida como função rampa, podemos então observar que o comportamento de algo que antes era possível ser previsto agora não é mais.

Temos nossa equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]^2 = x \cos(xt) + t^2 \cos^2(xt)$$

Sendo M a altura máxima que vamos impor para nossa condição de contorno à esquerda, nossas condições de contorno são dadas por:

Para o deslocamento temos a seguinte condição de contorno:

$$u(x, 0) = 0$$

Ela vai se manter para todas as nossas observações, não vamos ficar enunciando-a a todo momento, pois a única coisa que iremos variar agora são as condições de contorno à esquerda.

Sendo as condições de contorno no tempo:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 & \text{se } t < t_1 \\ u(0, t) &= \frac{M(t-t_1)}{(t_2-t_1)} & \text{se } t_1 \leq t < t_2 \\ u(0, t) &= M & \text{se } t_2 \leq t \leq t_3 \\ u(0, t) &= \frac{M(t_4-t)}{(t_4-t_3)} & \text{se } t_3 < t \leq t_4 \\ u(0, t) &= 0 & \text{se } t > t_4 \end{aligned}$$

Caso, as únicas condições de contorno impostas a nossa edp fossem a que $u(x,0)=0$ e $u(0,t)=0$, teríamos apenas como resultado a função $\sin(xt)$. Logo, antes de começarmos a subir a função rampa, já sabemos o comportamento da nossa edp, depois que começarmos a subir não saberemos mais o resultado dela, cabe a nós então observar os resultados das simulações que vem a seguir.

Para a solução numérica da nossa EDP (equação diferencial parcial), utilizamos a linguagem de programação fortran 90 e para as plotagens dos gráficos aqui apresentados usamos o matlab 2018.

Primeiros intervalos de tempo

Depois da realização de vários testes, foi escolhida uma configuração inicial para a realização das alturas máximas da condição de contorno. Vamos iniciar com uma altura inicial e começar a variá-la sempre tentando estressar ao máximo a nossa função. Para o primeiro teste escolhemos uma altura máxima da nossa função rampa de $M=0.20$, fica assim nossa configuração da condição de contorno:

$$\begin{aligned}
 u(0, t) &= 0 & \text{se } t < 0.75 \\
 u(0, t) &= \frac{0.20(t - 0.75)}{(0.25)} & \text{se } 0.75 \leq t < 1.00 \\
 u(0, t) &= 0.20 & \text{se } 1.00 \leq t \leq 1.25 \\
 u(0, t) &= \frac{0.20(1.50 - t)}{(0.25)} & \text{se } 1.25 < t \leq 1.50 \\
 u(0, t) &= 0 & \text{se } t > 1.50
 \end{aligned}$$

Como foi dito anteriormente, o resultado do comportamento da nossa EDP antes de alcançar a condição de contorno já é previsto, então nas simulações que visualizarmos a seguir foram focadas em observar o comportamento dela na incidência da rampa, no topo e na saída.

Resultados para primeira simulação:

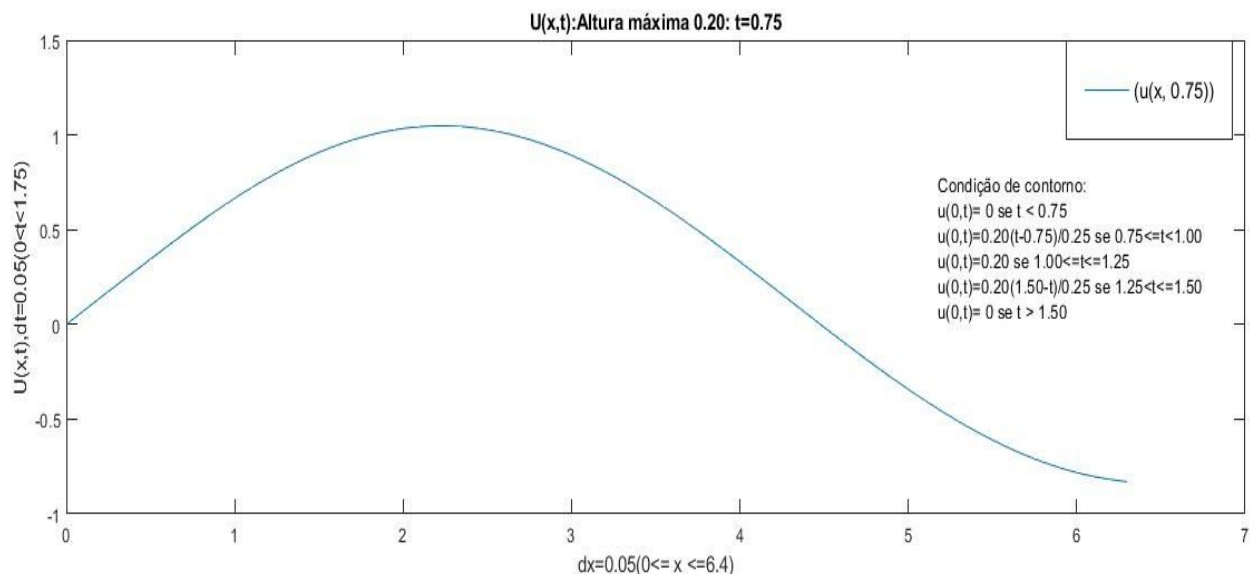


Figura 1: primeira altura máxima.

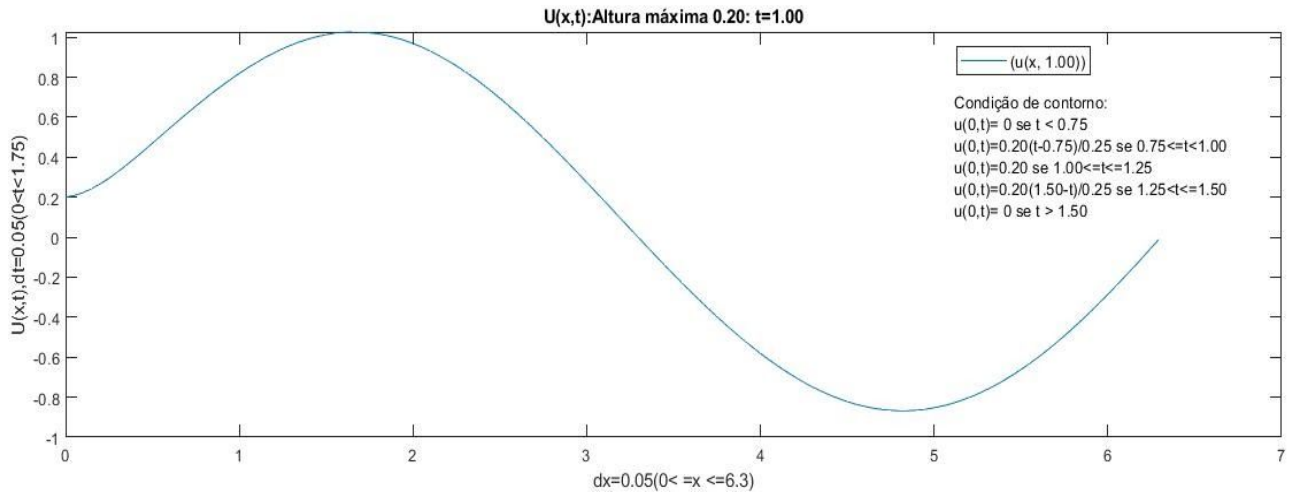


Figura 2: primeira altura máxima.

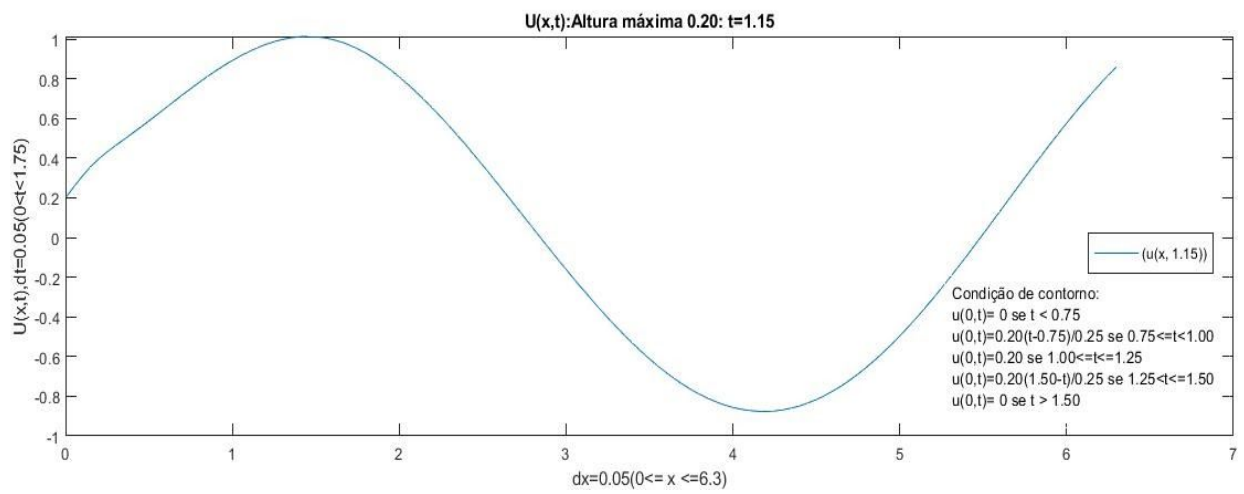


Figura 3: primeira altura máxima.

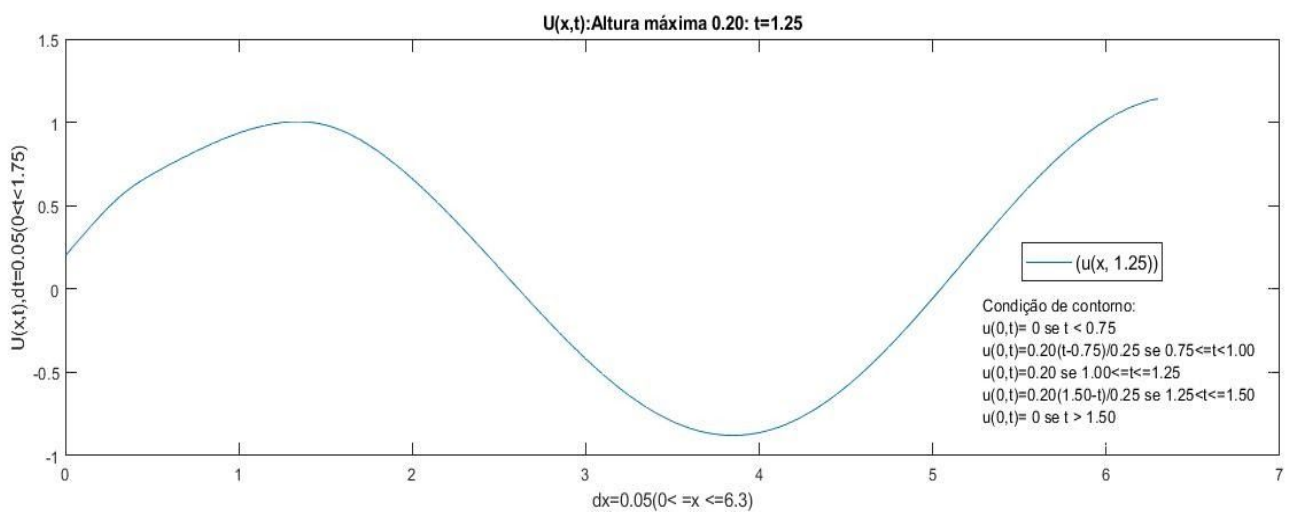


Figura 4: primeira altura máxima.

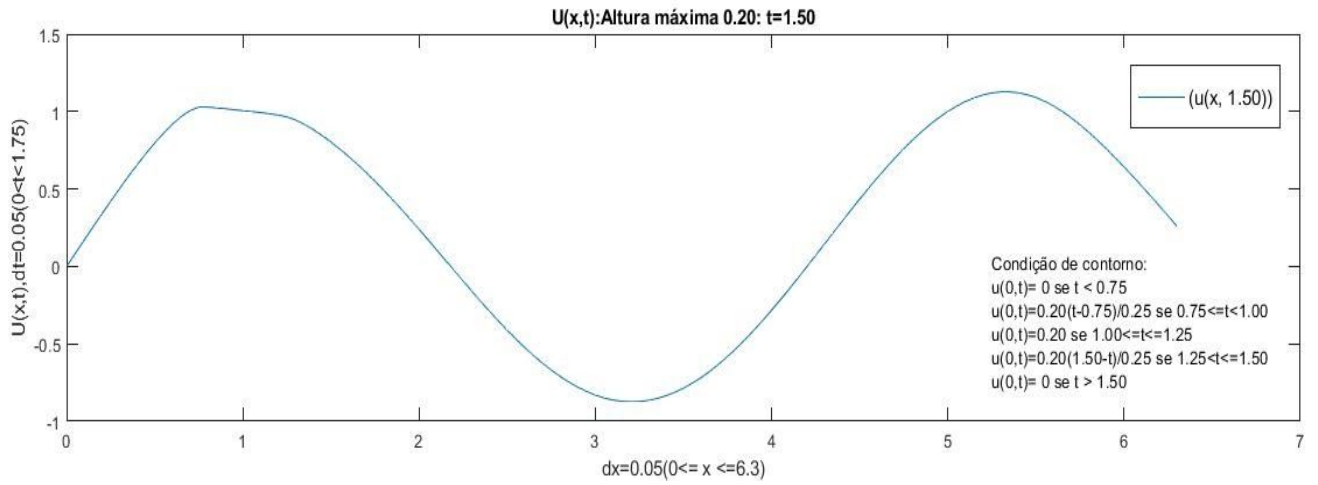


Figura 5: primeira altura máxima.

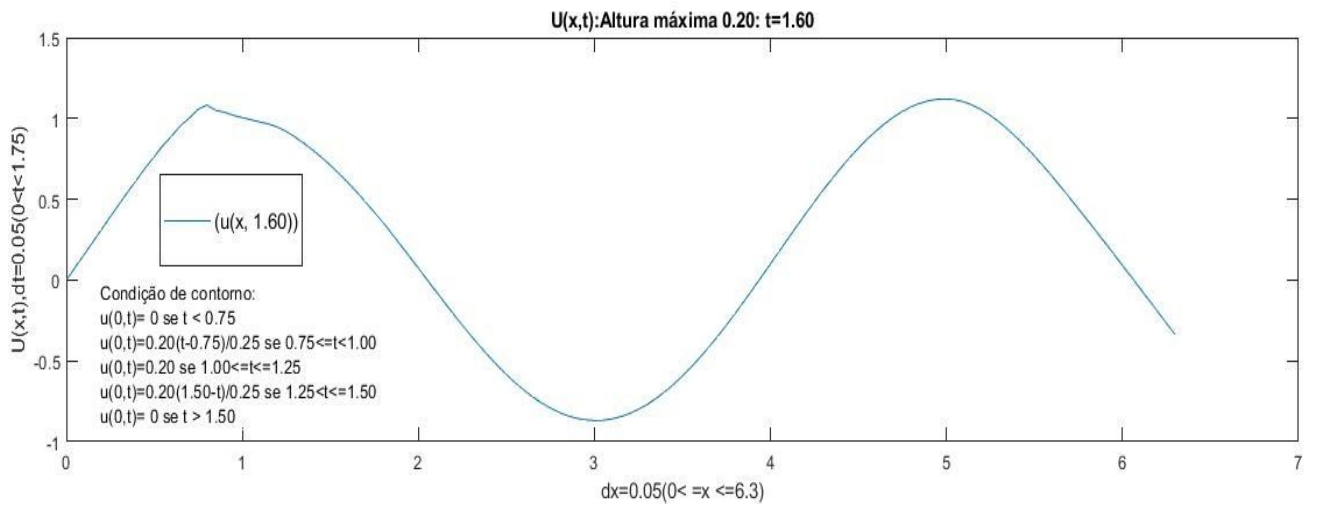


Figura 6: primeira altura máxima.

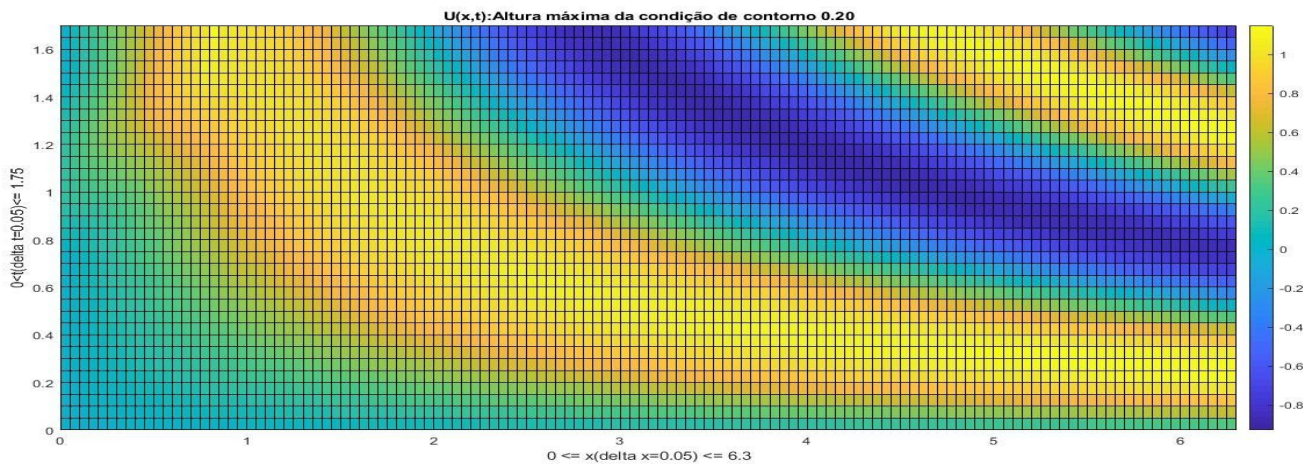


Figura 7: primeira altura máxima.

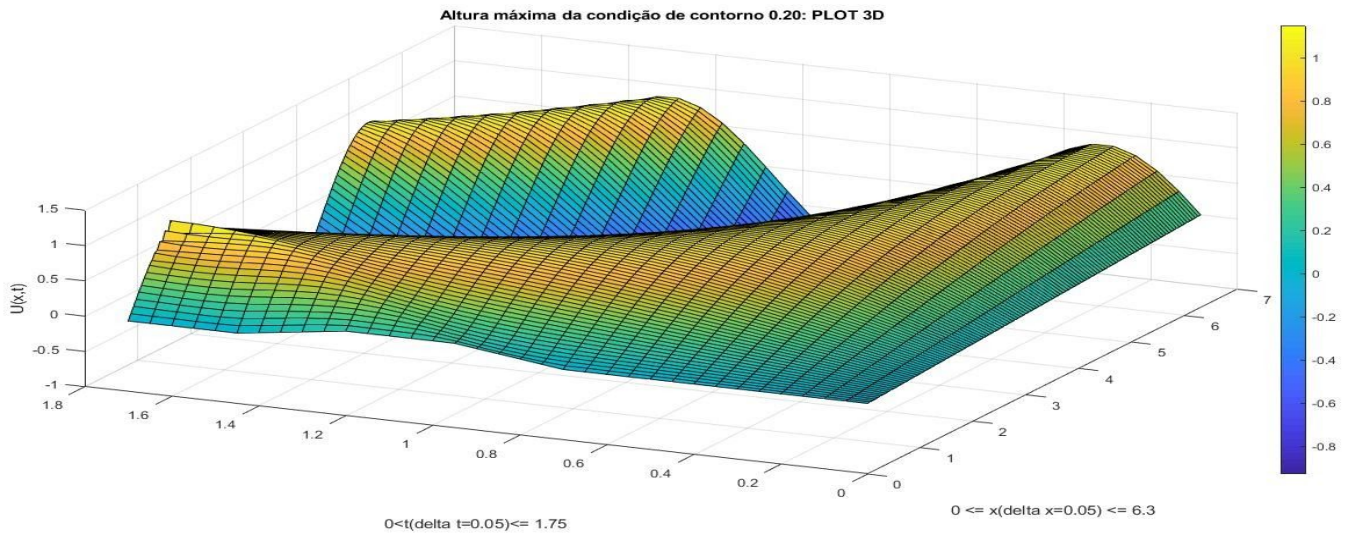


Figura 8: primeira altura máxima.

Para configuração inicial escolhida, podemos notar um pequeno aumento na curva nas proximidades das condições de contorno, ele acaba sendo mais presente depois que passamos pela função rampa. Foi escolhido a distância de 6.3 para o eixo x para conseguirmos ver o ciclo completo da função.

Primeira variação da Altura máxima

Mantendo o mesmo intervalo de tempo, porém variando agora a altura máxima das condições de contorno para $M=0.30$

$$\begin{aligned}
 u(0, t) &= 0 & \text{se } t < 0.75 \\
 u(0, t) &= \frac{0.30(t - 0.75)}{(0.25)} & \text{se } 0.75 \leq t < 1.00 \\
 u(0, t) &= 0.30 & \text{se } 1.00 \leq t \leq 1.25 \\
 u(0, t) &= \frac{0.30(1.50 - t)}{(0.25)} & \text{se } 1.25 < t \leq 1.50 \\
 u(0, t) &= 0 & \text{se } t > 1.50
 \end{aligned}$$

Temos os seguintes resultados:

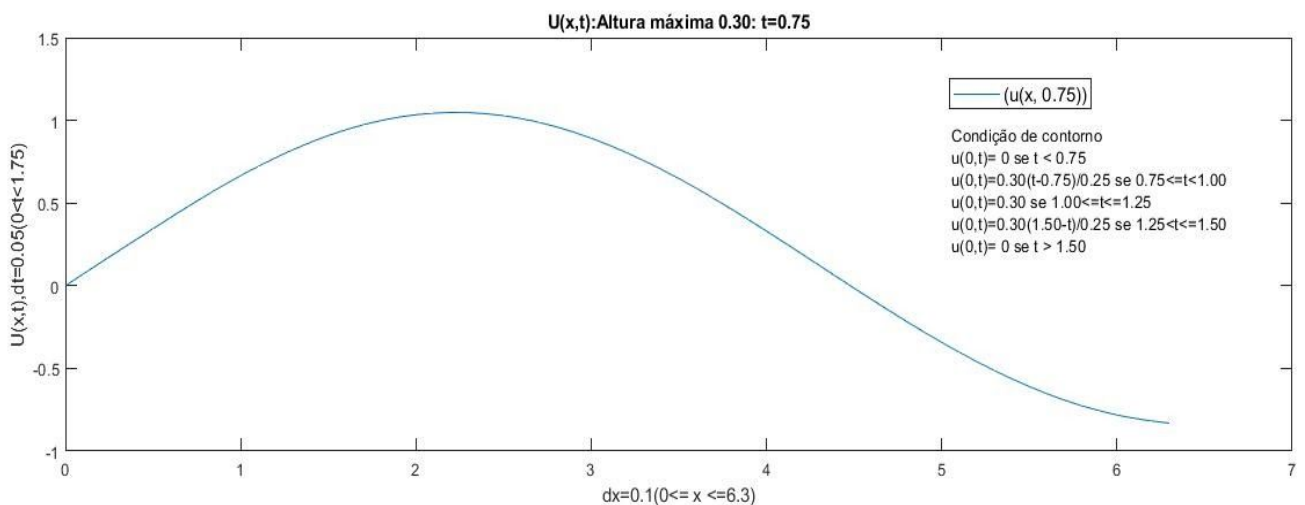


Figura 9: Primeira variação de altura

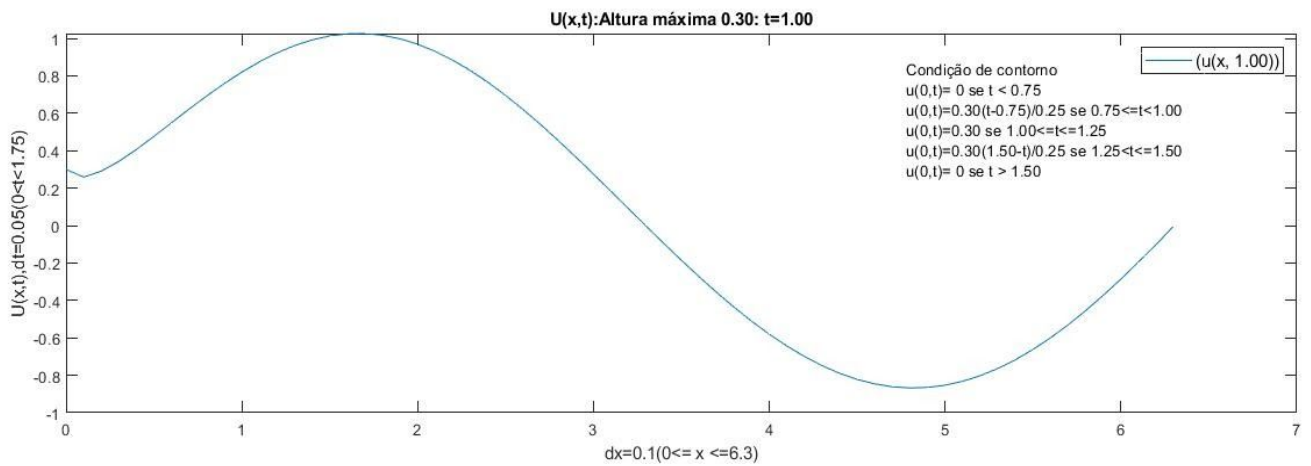


Figura 10: Primeira variação de altura

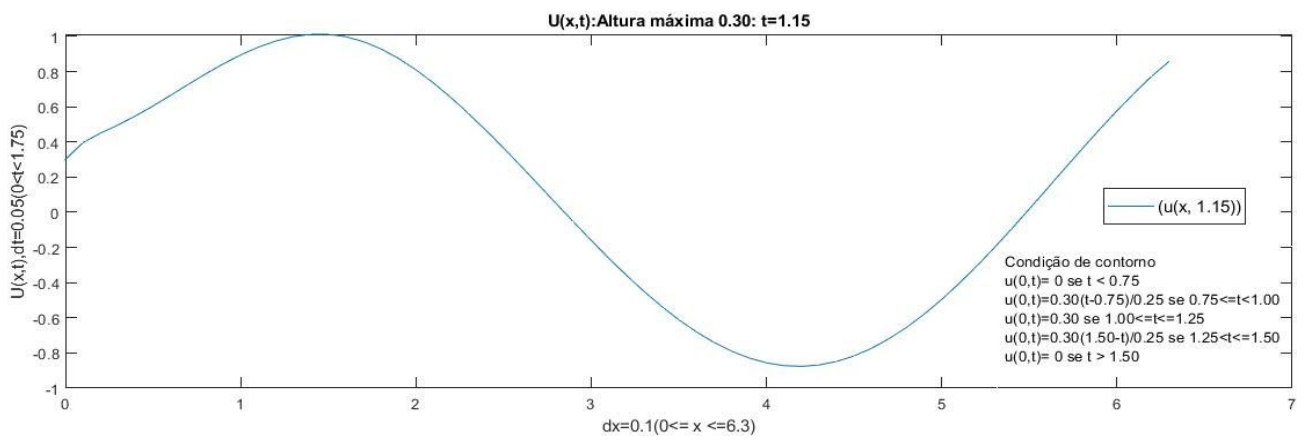


Figura 11: Primeira variação de altura

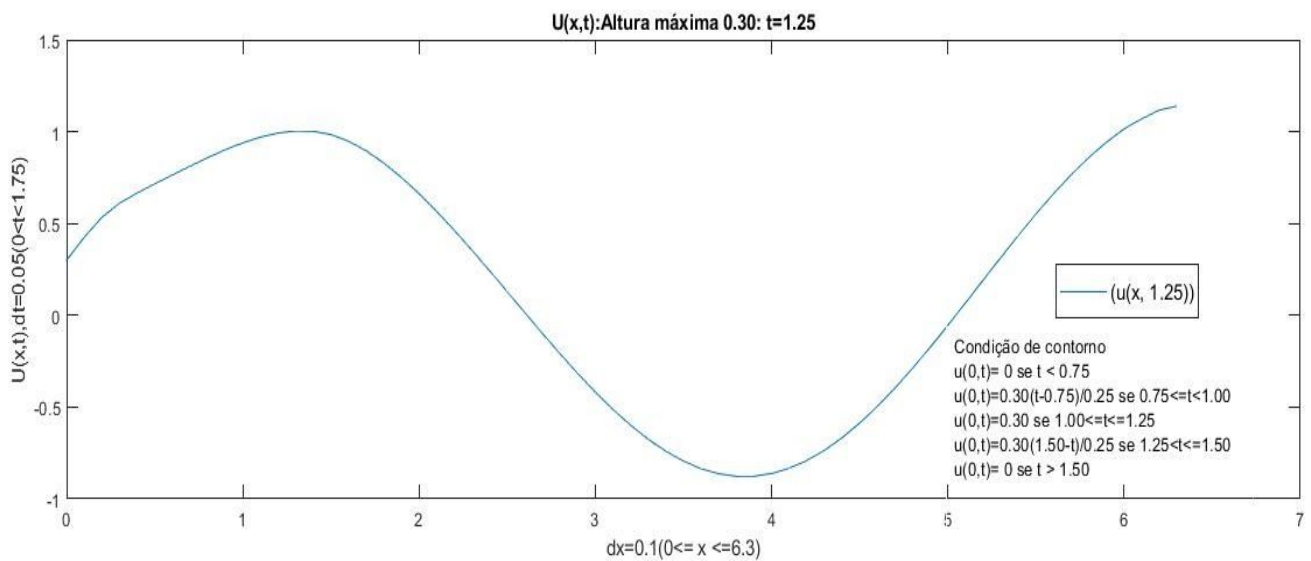


Figura 12: Primeira variação de altura

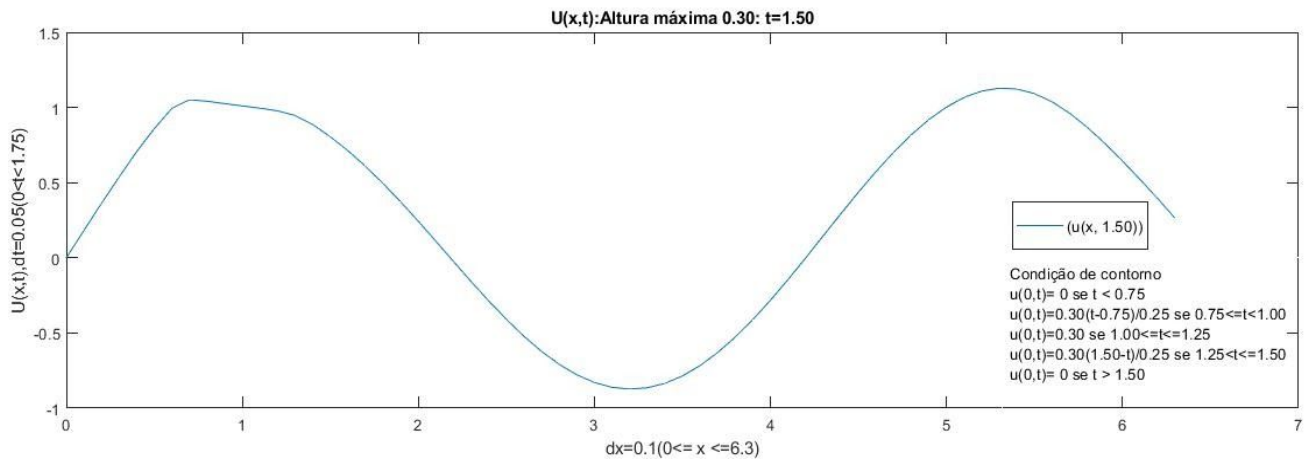


Figura 13: Primeira variação de altura

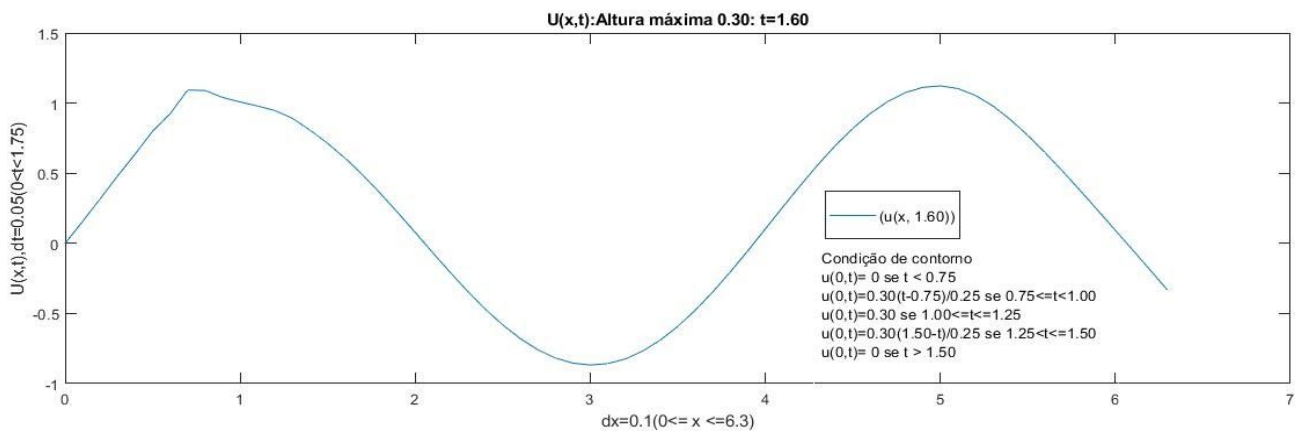


Figura 14: Primeira variação de altura

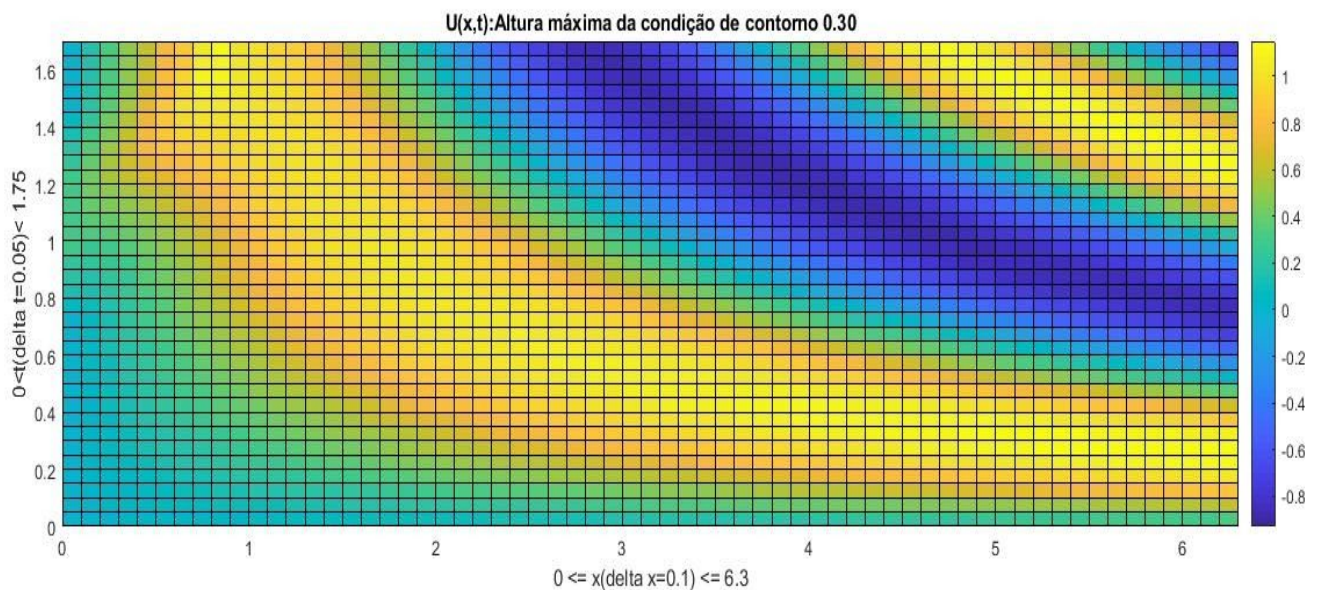


Figura 15: Primeira variação de altura

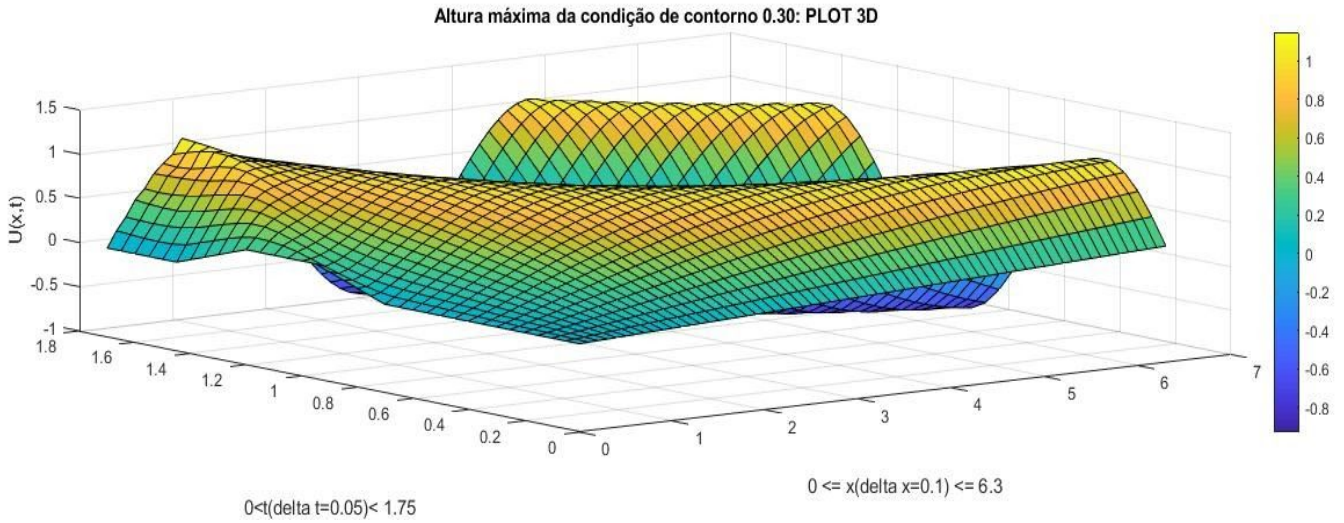


Figura 16: Primeira variação de altura

Para essa nova altura máxima escolhida, as curvas de nível com o novo aumento é possível ver que o crescimento da função foi afetado. Quando aumentamos a altura máxima da condição de contorno, a curva acaba crescendo logo à frente dela.

Segunda variação para a altura máxima de M

Mantendo o mesmo intervalo de tempo porém variando a altura máxima das condições de contorno e fazendo $M=0.35$:

$$\begin{aligned}
 u(0, t) &= 0 & \text{se } t < 0.75 \\
 u(0, t) &= \frac{0.35(t - 0.75)}{(0.25)} & \text{se } 0.75 \leq t < 1.00 \\
 u(0, t) &= 0.35 & \text{se } 1.00 \leq t \leq 1.25 \\
 u(0, t) &= \frac{0.35(1.50 - t)}{(0.25)} & \text{se } 1.25 < t \leq 1.50 \\
 u(0, t) &= 0 & \text{se } t > 1.50
 \end{aligned}$$

Temos os seguintes resultados:

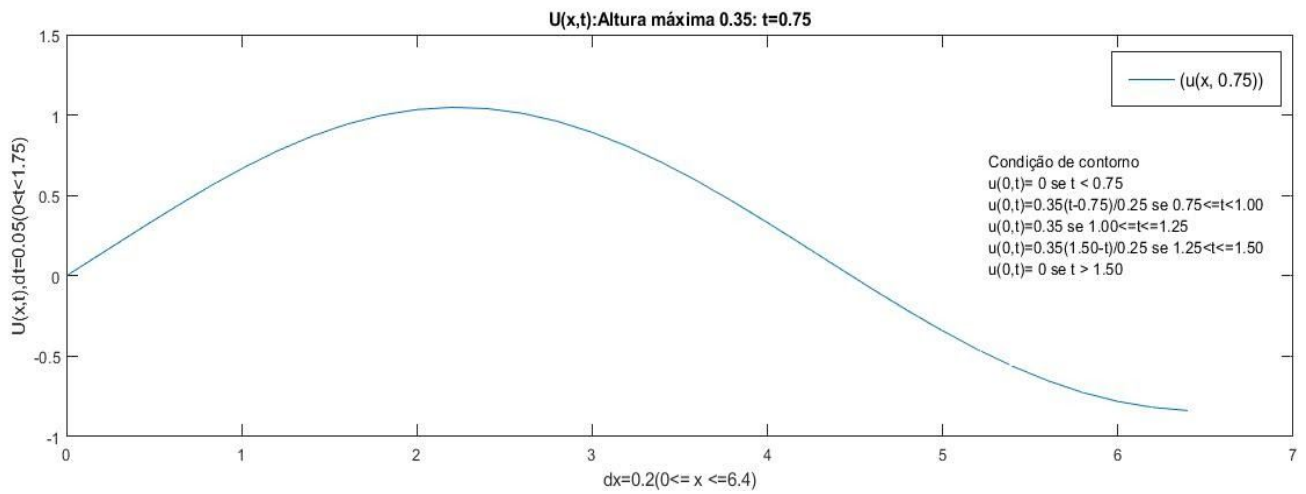


Figura 17: Segunda variação de altura

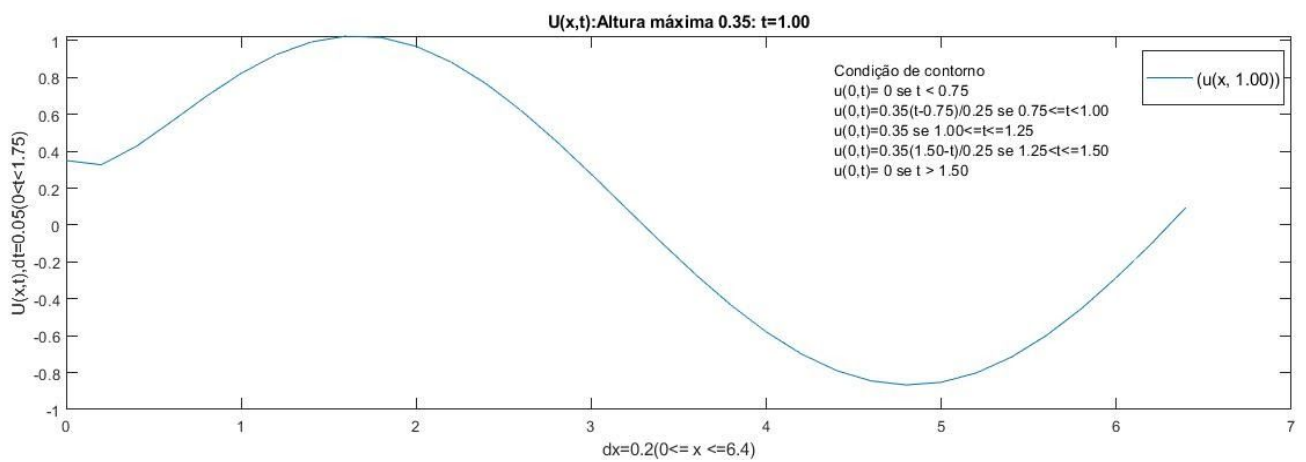


Figura 18: Segunda variação de altura

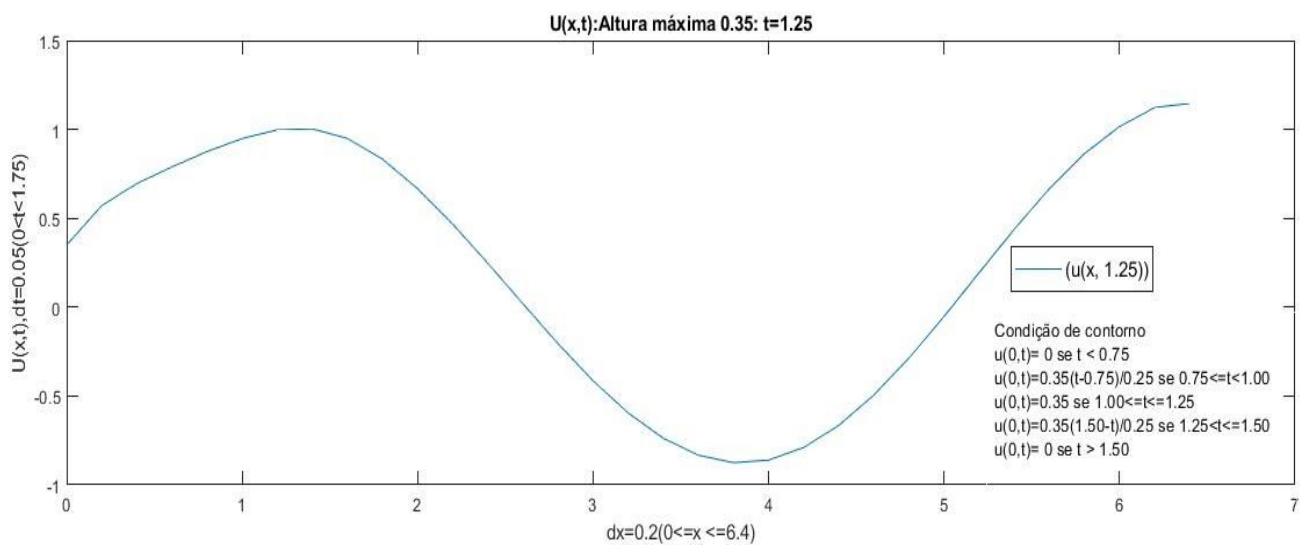


Figura 19: Segunda variação de altura

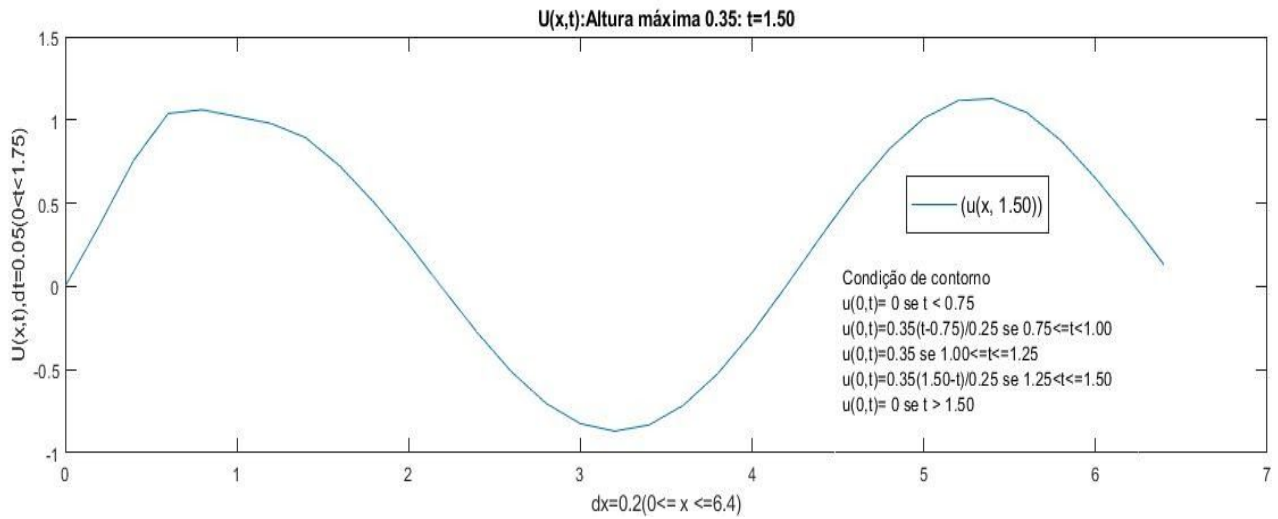


Figura 20: Segunda variação de altura

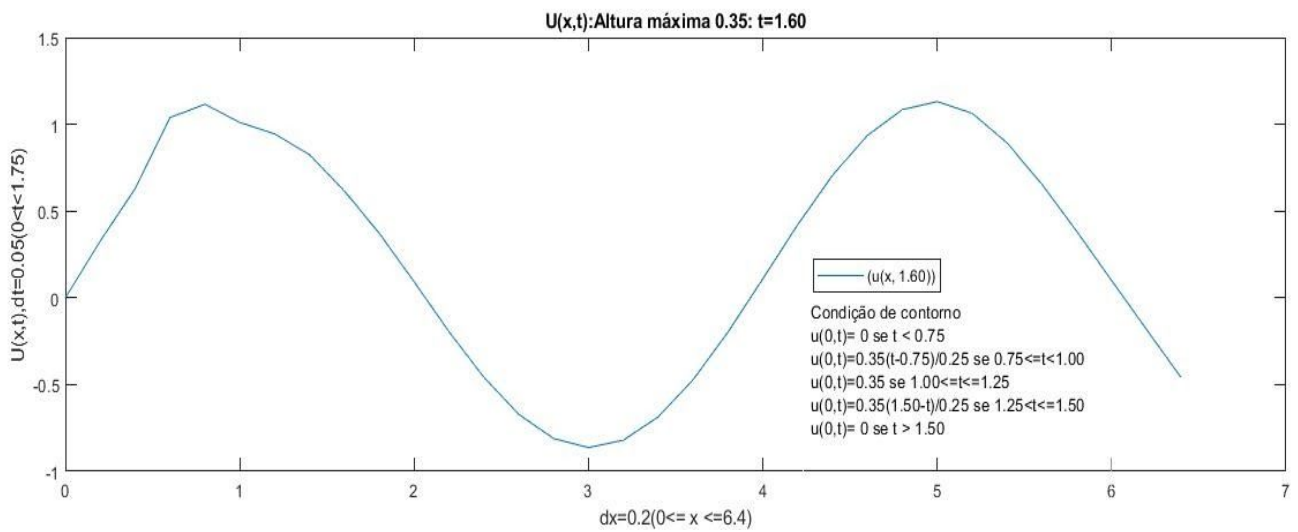


Figura 21: Segunda variação de altura

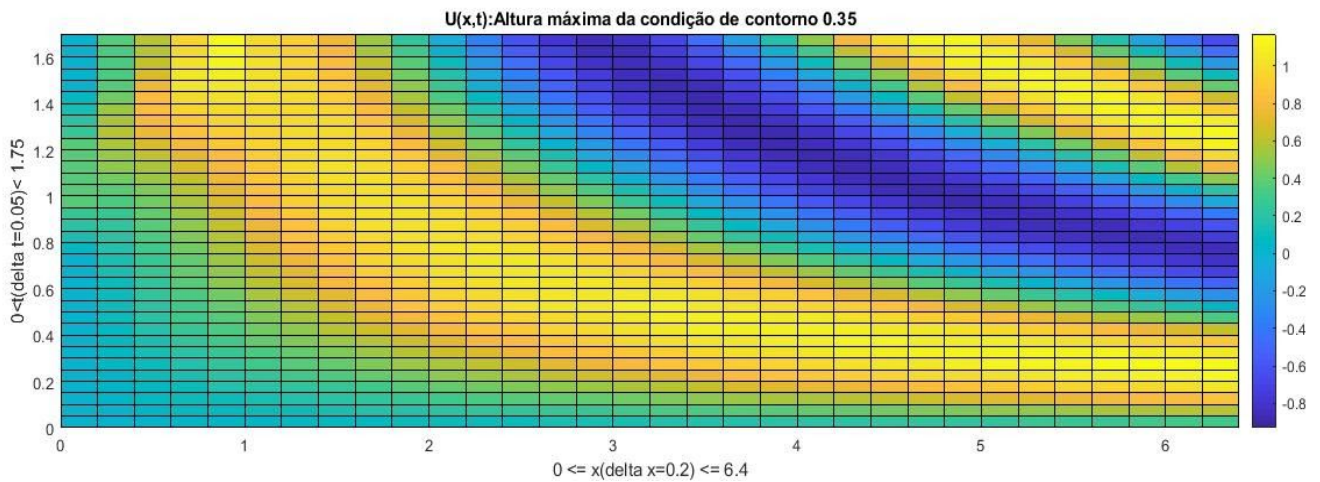


Figura 22: Segunda variação de altura

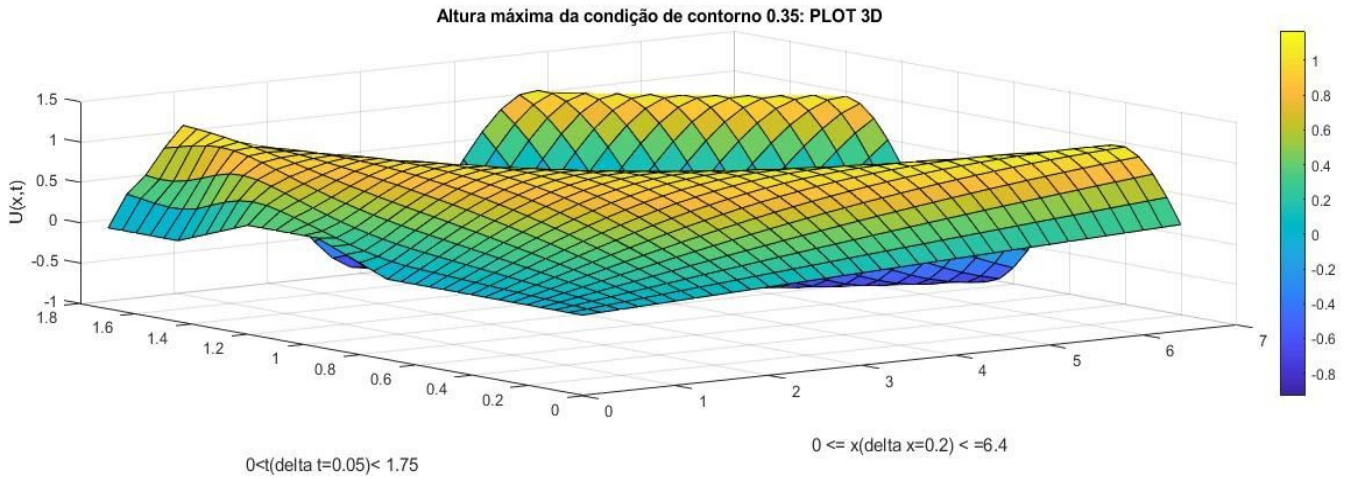


Figura 23: Segunda variação de altura

Para essa nova mudança de altura é possível perceber que temos uma modificação no Δx (variação no deslocamento x), o pequeno aumento no seu valor foi um ajuste para manter o comportamento da nossa função. Nosso objetivo é estressá-la ao máximo nas configurações de tempo atuais, esse ajuste foi feito para fins de suavização do resultado.

Terceira variação da altura máxima M

Aqui temos mais uma variação da altura máxima das condições de contorno, para essa configuração de Δx esse foi o maior valor encontrado $M=0.45$, temos então nossa nova configuração:

$$\begin{aligned}
 u(0, t) &= 0 & \text{se } t < 0.75 \\
 u(0, t) &= \frac{0.45(t - 0.75)}{(0.25)} & \text{se } 0.75 \leq t < 1.00 \\
 u(0, t) &= 0.45 & \text{se } 1.00 \leq t \leq 1.25 \\
 u(0, t) &= \frac{0.45(1.50 - t)}{(0.25)} & \text{se } 1.25 < t \leq 1.50 \\
 u(0, t) &= 0 & \text{se } t > 1.50
 \end{aligned}$$

Temos os seguintes resultados:

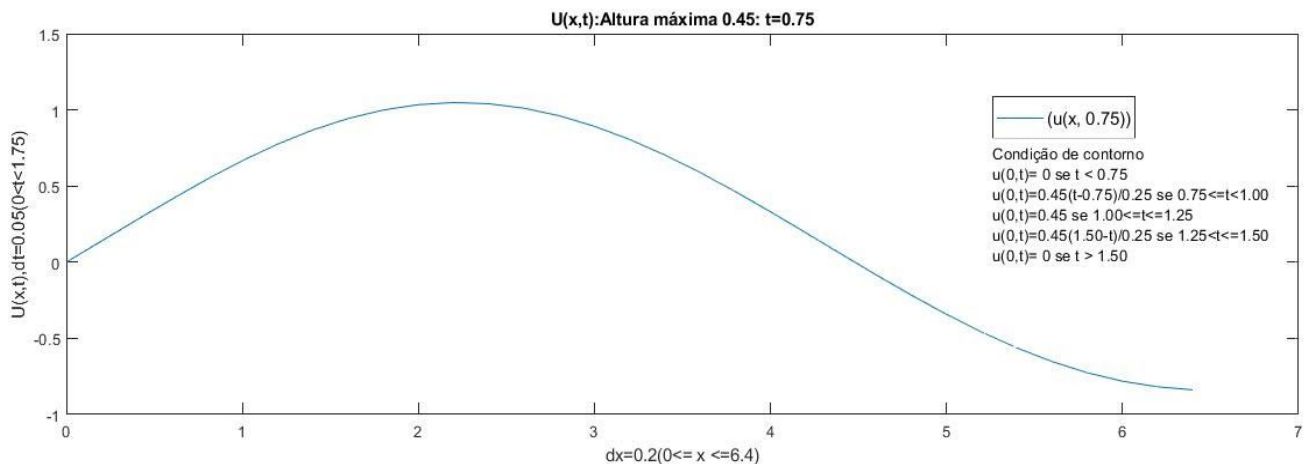


Figura 24: Terceira variação de altura

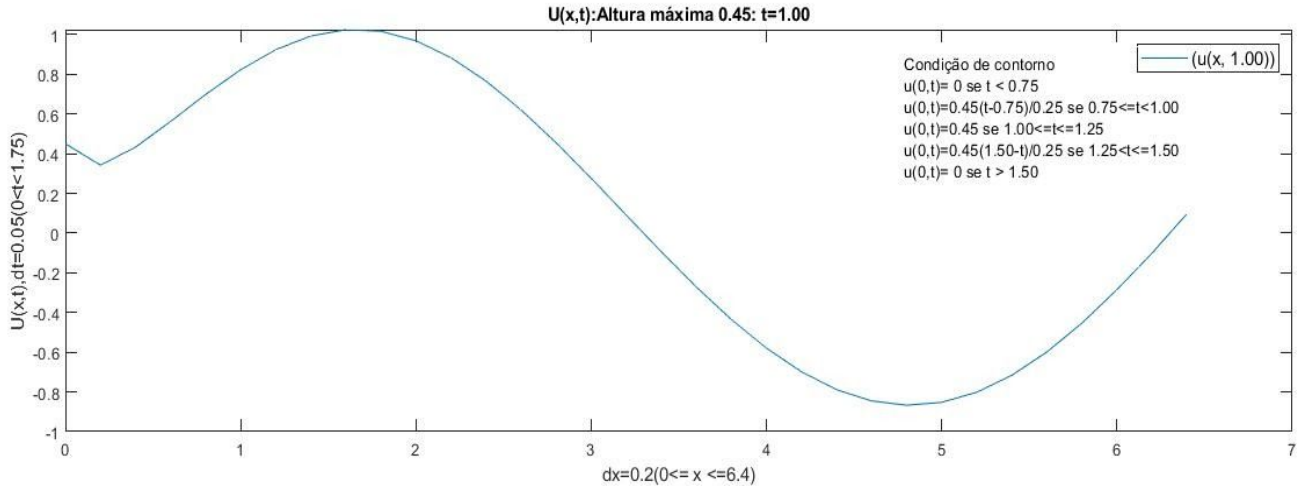


Figura 25: Terceira variação de altura

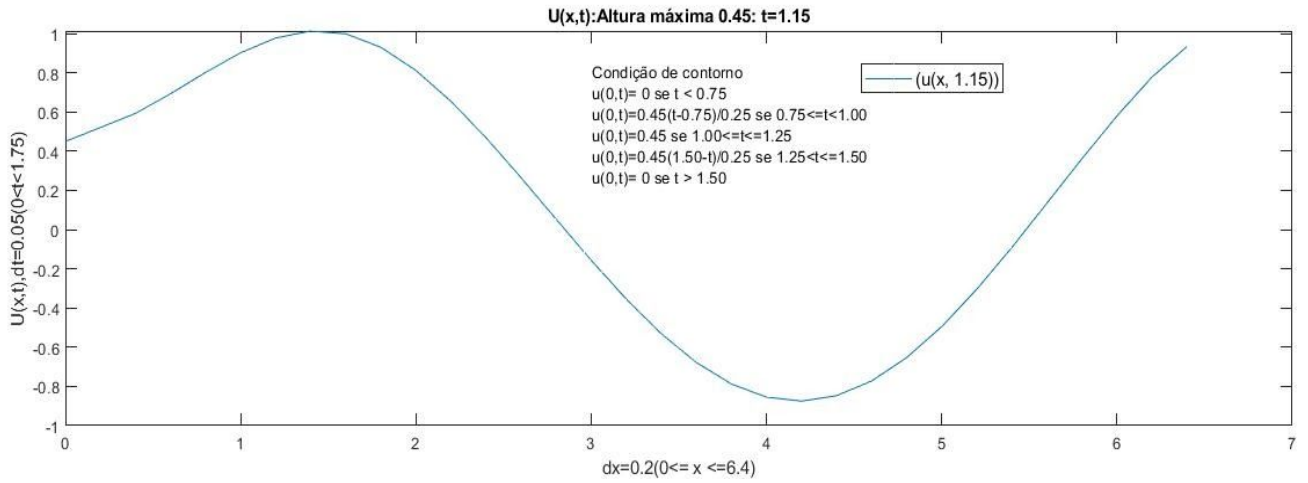


Figura 26: Terceira variação de altura

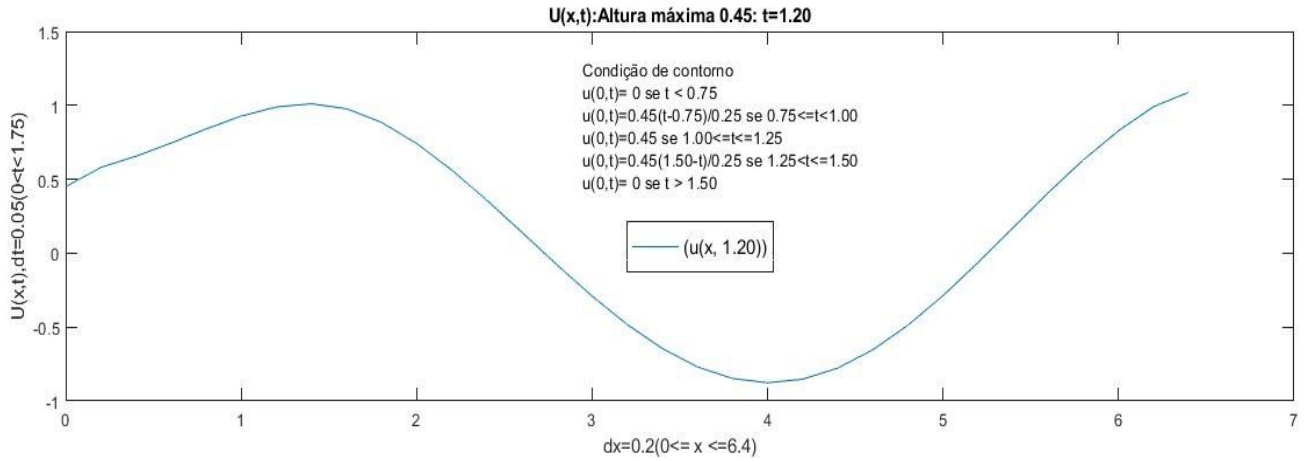


Figura 27: Terceira variação de altura

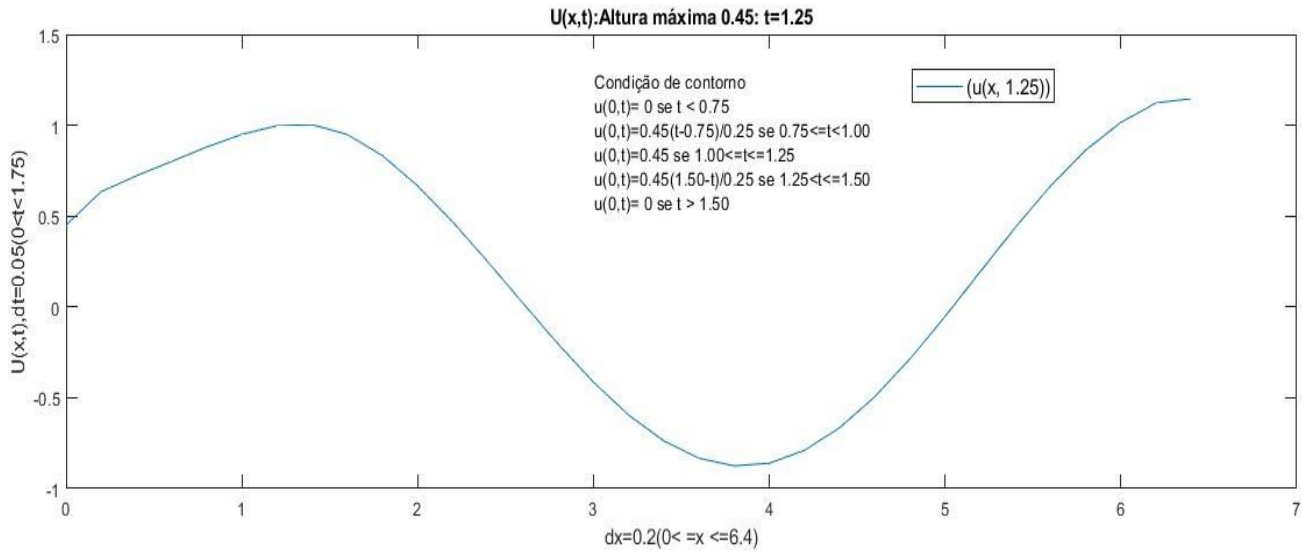


Figura 28: Terceira variação de altura

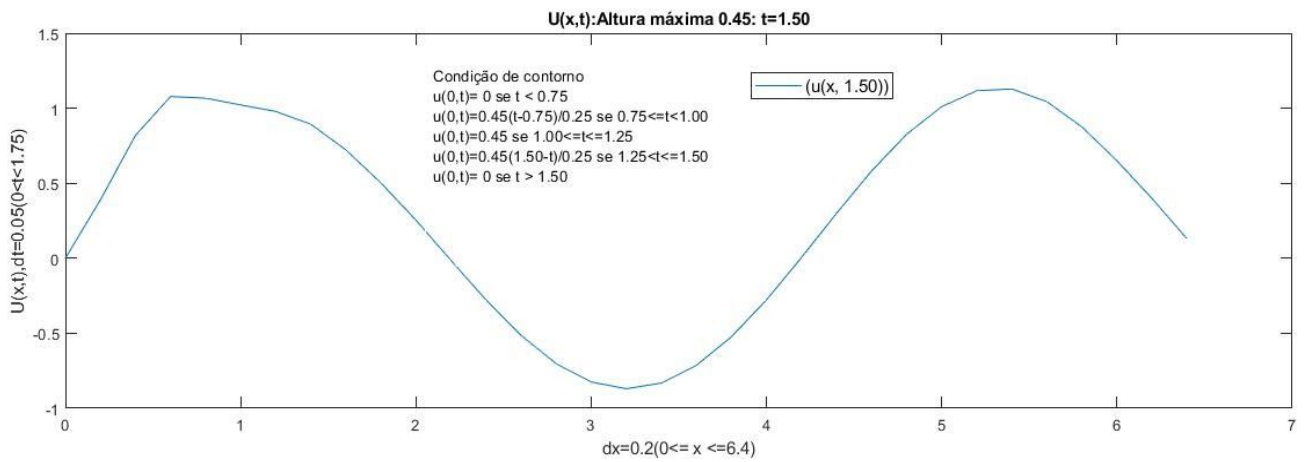


Figura 29: Terceira variação de altura

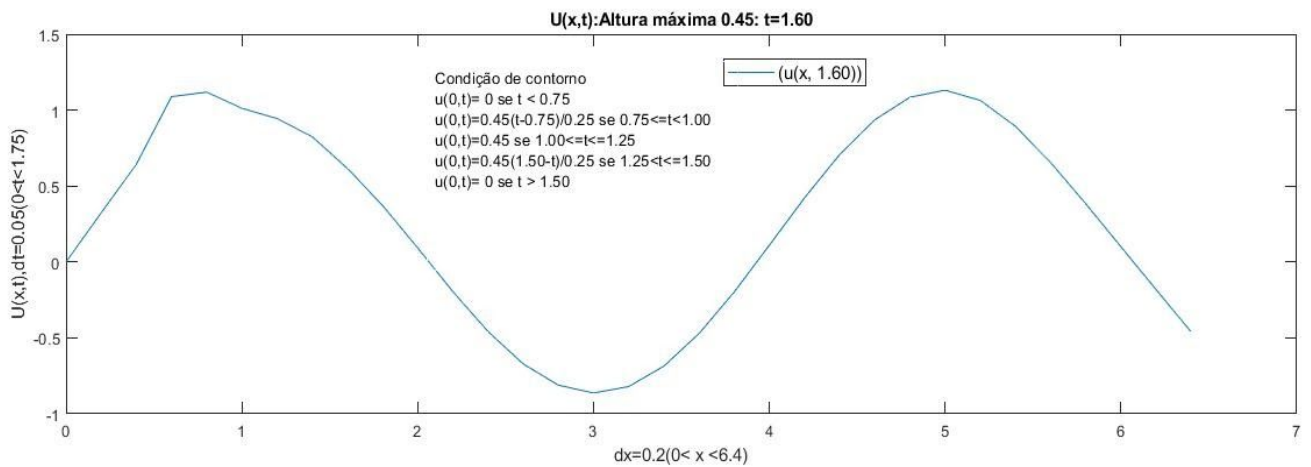


Figura 30: Terceira variação de altura

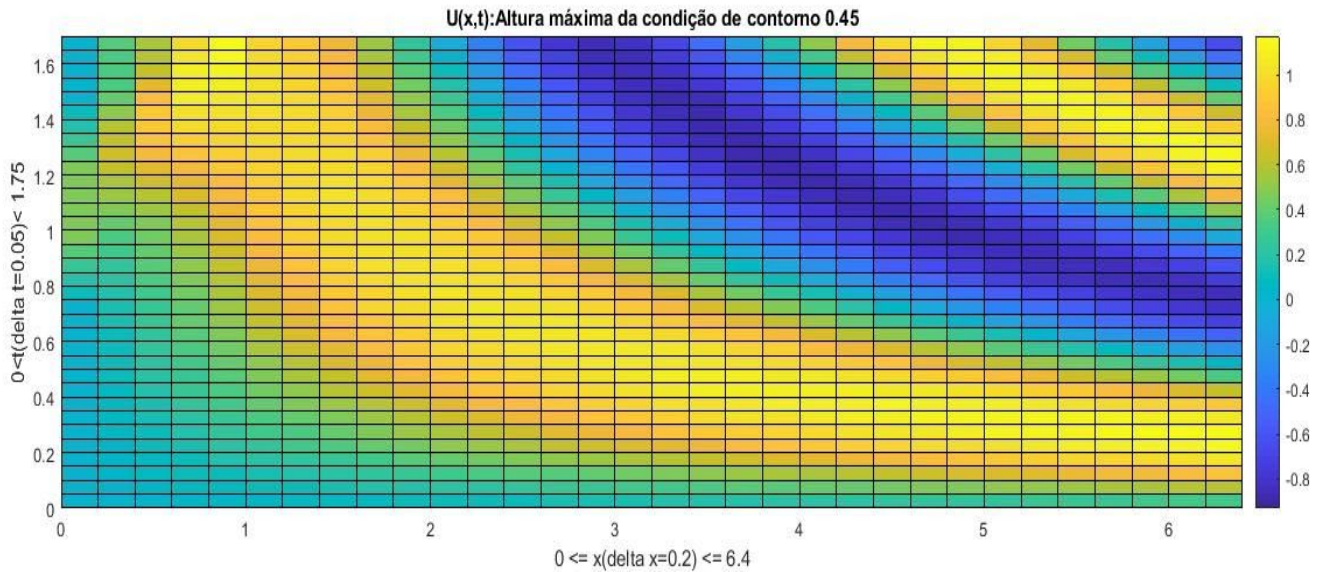


Figura 31: Terceira variação de altura

Modificando os tempos externos e internos e deixando a função rampa em maiores intervalos de tempo

Podemos também observar o comportamento da nossa função para uma abertura maior do tempo, expandindo os intervalos de tempo da nossa condição de contorno:

$$\begin{aligned}
 u(0, t) &= 0 & \text{se } t < 0.10 \\
 u(0, t) &= \frac{0.15(t - 0.10)}{(0.10)} & \text{se } 0.10 \leq t < 0.20 \\
 u(0, t) &= 0.15 & \text{se } 0.20 \leq t \leq 1.65 \\
 u(0, t) &= \frac{0.15(1.70 - t)}{(0.05)} & \text{se } 1.65 < t \leq 1.70 \\
 u(0, t) &= 0 & \text{se } t > 1.70
 \end{aligned}$$

Temos os seguintes resultados:

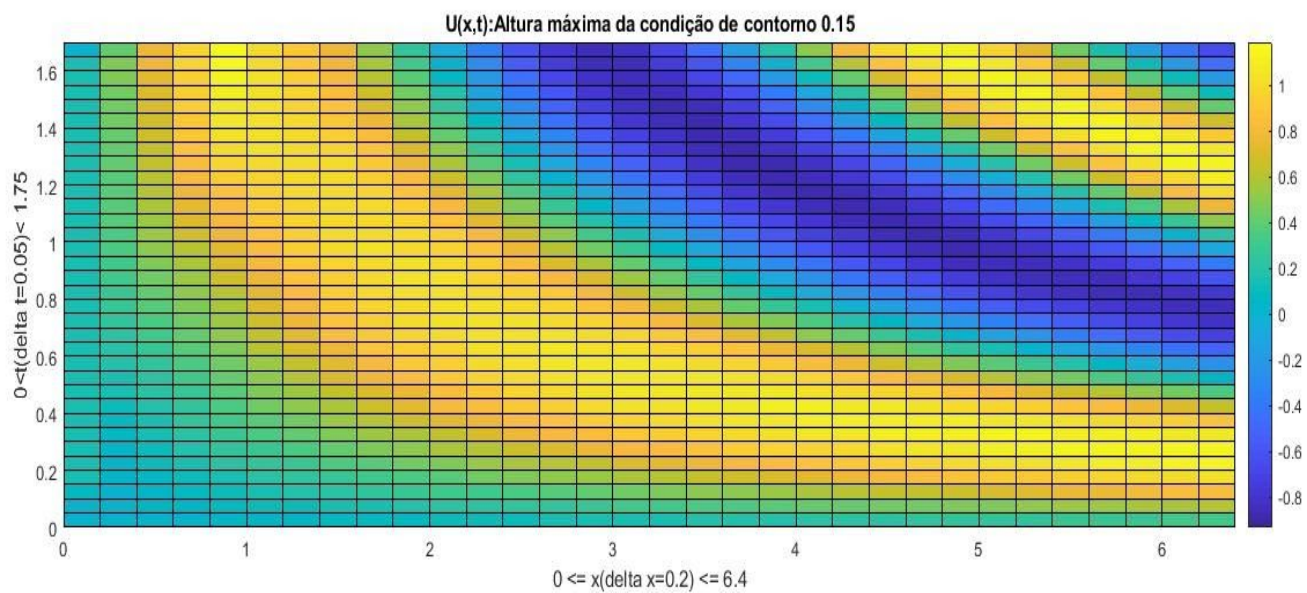


Figura 32: variando os tempos

Mantendo os mesmos intervalos de tempo, porém aumentando as condições de contorno à esquerda:

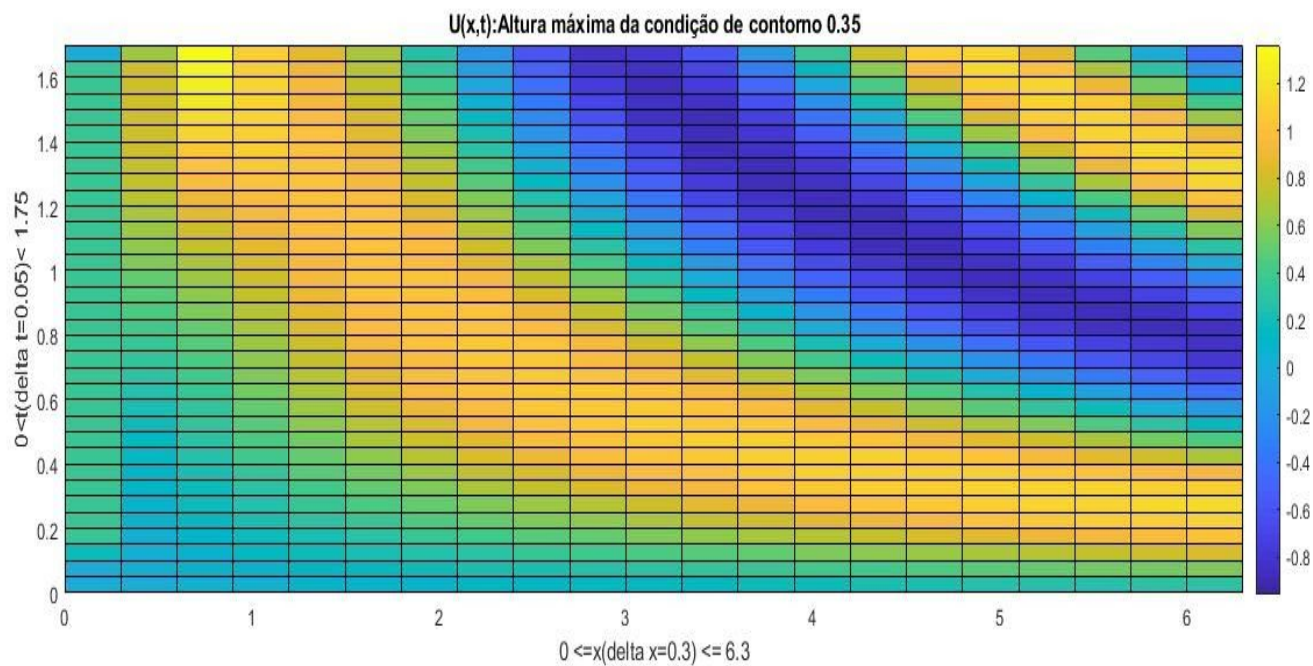


Figura 33: variando os tempos

Modificando as condições de contorno externas para a aumentar a altura máxima M

Colocando então um intervalo de tempo muito pequeno, podemos observar seu comportamento com uma altura máxima da condição de contorno bem elevada, sendo nossa nova configuração para as condições de contorno à esquerda:

$$\begin{aligned}
 u(0, t) &= 0 & \text{se } t < 0.60 \\
 u(0, t) &= \frac{0.4(t - 0.60)}{(0.10)} & \text{se } 0.60 \leq t < 0.70 \\
 u(0, t) &= 0.4 & \text{se } 0.70 \leq t \leq 0.75 \\
 u(0, t) &= \frac{0.4(0.85 - t)}{(0.10)} & \text{se } 0.75 < t \leq 0.85 \\
 u(0, t) &= 0 & \text{se } t > 0.85
 \end{aligned}$$

Temos os seguintes resultados:

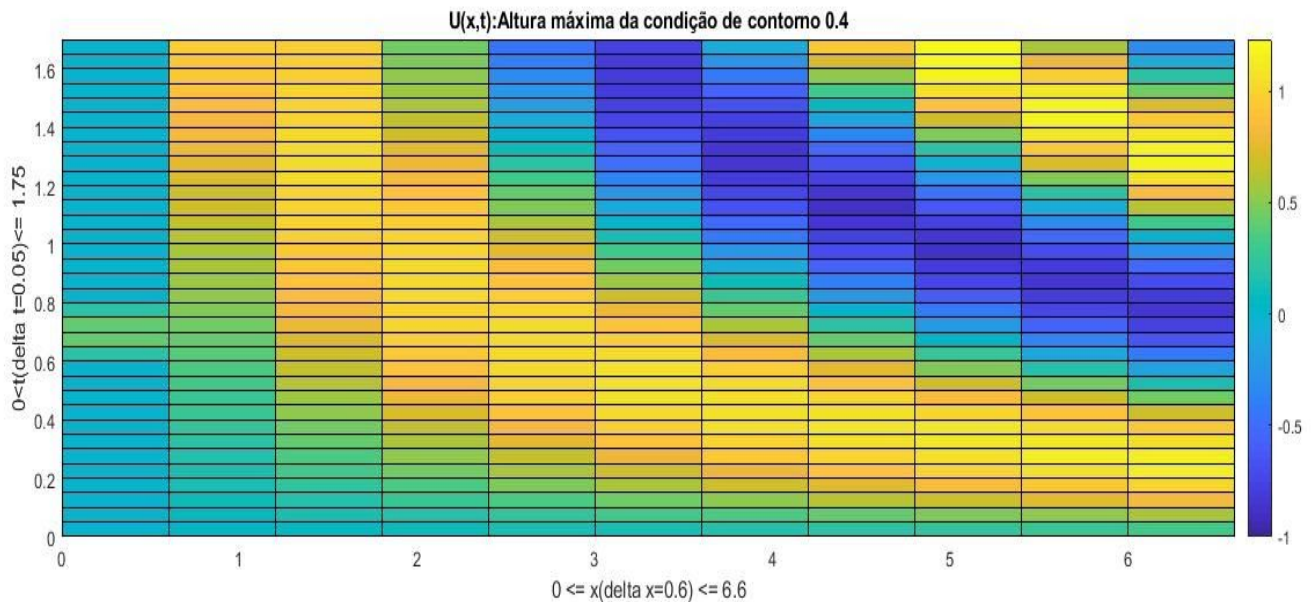


Figura 34: variando os tempos

Podemos reparar através das curvas de nível que os resultados se elevam em maior escala logo depois que passam pela condição de contorno, grande parte desse efeito é por já termos escolhido uma altura máxima elevada para esse modelo, essa escolha foi feita para marcar bem a presença da rampa nas condições de contorno.

Conclusão

Depois de vários resultados e simulações aqui apresentados, fica claro que as novas condições de contorno afetam o comportamento da função, mas é com o aumento da altura máxima que esse comportamento se intensifica, caracterizando o aumento da altura da função logo depois de passar pela rampa. Isso pode ser visto nas variações para um caso específico: no aumento do intervalo do tempo para a condição de altura máxima e na diminuição dele. Antes nossa EDP tinha uma solução de fácil previsão e comportamento espacial, porém agora foi preciso uma resolução numérica para conseguir entender seu comportamento. As variações de posições da função rampa e seu comportamento foram testadas ao máximo para diversas variações de dx e dt . A suavização dos resultados também foi uma parte muito interessante desse trabalho: a análise do comportamento de uma situação específica foi feita e assim poderíamos passar para as próximas, não só por um capricho de apresentação, mas para que o comportamento da função nos dados apresentados satisfaça um comportamento matemático e físico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- 1.[Sujit,2019] Sujit K.(2019).Numerical Methods of Mathematics Implemented in Fortran.
- 2.[UFPel,2010] Universidade federal de Pelotas(2010).Introdução ao Fortran 90/95.
- 3.[F. J. Romeiras , 3.NOV.2003] FORTRAN 90 PROGRAMMING.

Anexos

Tabelas de resultados

Tabela referente às simulações da página: 05

Tabela 1				
0.0000000000000000	2.4999942850104971E-003	4.9999440637024176E-003	7.4998036395753243E-003	9.9995165202904270E-003
0.0000000000000000	4.9999770492841281E-003	9.9997358985052919E-003	1.4999060484600587E-002	1.9997607496616370E-002
0.0000000000000000	7.4999500681073748E-003	1.4999290186468263E-002	2.2497485415972174E-002	2.9993339448755884E-002
0.0000000000000000	9.9999244561088593E-003	1.9998504010977212E-002	2.9994856731652527E-002	3.9985774057542653E-002
0.0000000000000000	1.2499935475016903E-002	2.4997222549745193E-002	3.7491000515855674E-002	4.9973977075964605E-002
0.0000000000000000	1.5000076030521186E-002	2.9995220013458591E-002	4.4985753733154027E-002	5.9957023875298748E-002
0.0000000000000000	1.7500539816474162E-002	3.4992222738370451E-002	5.2478920393346777E-002	6.9933985244438474E-002
0.0000000000000000	2.0001647103611228E-002	3.9987982462400429E-002	5.9970255431786856E-002	7.9903904724421590E-002
0.0000000000000000	2.2503823412452641E-002	4.4982366914860412E-002	6.7459502391365125E-002	8.9865799043839081E-002
0.0000000000000000	2.5007526428300828E-002	4.9975405392664499E-002	7.4946468641686734E-002	9.9818699988493409E-002
0.0000000000000000	2.7513155819825660E-002	5.4967246487136232E-002	8.2431080665786055E-002	0.10976171506631856
0.0000000000000000	3.0020998804661882E-002	5.9958048841132240E-002	8.9913367737186015E-002	0.11969405630308548
0.0000000000000000	3.2531239739016095E-002	6.4947878754952310E-002	9.7393378469544725E-002	0.12961500568430004

0.0000000000000000	3.5044014521848396E-002	6.9936679085402811E-002	0.10487108981268388	0.13952383771496571
8.9406968495353567E-009	3.7559468432605013E-002	7.4924314720852966E-002	0.11234637041937132	0.14941975414498535
4.0000010132789754E-002	5.9441889612057659E-002	9.0128660772455696E-002	0.12513100726821211	0.16252042482010876
8.0000011324882658E-002	9.1530286184003787E-002	0.11596982152703442	0.14631242639233194	0.18199803194064521
0.12000001251697556	0.12983262748622873	0.15037491223155677	0.17619534919940771	0.20922251207732651
0.16000001370906847	0.17240610032238896	0.19145465662223576	0.21391918953119521	0.24420881927466856
0.20000000298023224	0.21768685391528689	0.23765960624974886	0.25836052623102190	0.28635839704527444
0.20000000298023224	0.24415138275445575	0.27874672467075717	0.30482233841179512	0.33299464531565209
0.20000000298023224	0.25373976439346324	0.30317462542205198	0.34353150227222723	0.37741310312282716
0.20000000298023224	0.25779200909208089	0.31344623927752352	0.36729060191936480	0.41122803888361370
0.20000000298023224	0.26115682146710889	0.31905612771759312	0.37975051956180050	0.43273215848995283
0.20000000298023224	0.26410507059500865	0.32439220186152679	0.38782698483614059	0.44662357515907475
0.15999998688697792	0.23837723404861236	0.30991066205971557	0.38156894550515597	0.44771001598135002
0.11999998569488501	0.20247546907172542	0.28069007235721738	0.35973284645904108	0.43341332466295907
7.9999984502792110E-002	0.16452493989659930	0.24611139106534990	0.32921949602906814	0.40833959235960393
3.9999983310699205E-002	0.12637170187751981	0.21042303435794979	0.29582145059286097	0.37832253306756164
-1.7881393699070713E-008	8.8287198313320589E-002	0.17461146859770868	0.26192078136780528	0.34672293329416348
0.0000000000000000	8.0066249004928536E-002	0.16131856379711454	0.24468399089878559	0.32762109282128710
0.0000000000000000	8.0518593590081497E-002	0.16076206856897479	0.24191481775359627	0.32251613506757987
0.0000000000000000	8.2887371389715206E-002	0.16451341987949930	0.24637024835915750	0.32623627316617154

0.0000000000000000	8.5619831846408881E-002	0.16924362422126457	0.25328721230243778	0.33395325307613283
0.0000000000000000	8.8412283792419458E-002	0.17415718103930652	0.26074528000768543	0.34303517641796977
dx=	5.0000000745058060E-002	dt=	5.0000000745058060E-002	Tmax=1.75
		Valor de M	0.20000000298023224	

Tabela referente às simulações da página: 08

Tabela 2				
0.0000000000000000	4.9999463518015123E-003	9.9995271812557910E-003	1.4998371377982883E-002	1.9996065986147952E-002
0.0000000000000000	9.9997608401934095E-003	1.9997713752181581E-002	2.9992036349016014E-002	3.9980429210485786E-002
0.0000000000000000	1.4999411016031099E-002	2.9993791953350963E-002	4.4978207584024585E-002	5.9945322832014210E-002
0.0000000000000000	1.9998907158488462E-002	3.9987040556312956E-002	5.9954428289551387E-002	7.9882870837502507E-002
0.0000000000000000	2.4998305363448266E-002	4.9976690512079550E-002	7.4918618973350962E-002	9.9785099637485178E-002
0.0000000000000000	2.9997736613234897E-002	5.9961791503164955E-002	8.9869094717757642E-002	0.11964404524668663
0.0000000000000000	3.4997484550419240E-002	6.9941062769101961E-002	0.10480450931031009	0.13945189255252607
0.0000000000000000	3.9998126869316253E-002	7.9912780772618749E-002	0.11972370097888299	0.15920106827507921
0.0000000000000000	4.5000732034966934E-002	8.9874777992324406E-002	0.13462545939648876	0.17888422795934444
0.0000000000000000	5.0007066789750865E-002	9.9824620088559413E-002	0.14950828966403171	0.19849412946879097
0.0000000000000000	5.5019734360979199E-002	0.10975997765985875	0.16437028640842569	0.21802345290317740

0.0000000000000000	6.0042151325326157E-002	0.11967911988622208	0.17920921805026449	0.23746467618837813
0.0000000000000000	6.5078303366970749E-002	0.12958136617577995	0.19402284431157635	0.25681011233665502
0.0000000000000000	7.0132298469337856E-002	0.13946729350058237	0.20880937213268483	0.27605214527800692
1.3411045607369942E-008	7.5207837006991407E-002	0.14933855670212698	0.22356785546526753	0.29518359109817954
6.0000016689301106E-002	9.8163597201454691E-002	0.16516231652666638	0.24025168736360270	0.31503735396791949
0.12000001996755660	0.13296976471873015	0.18951495380332370	0.26132620168464710	0.33720892110573403
0.18000002324581210	0.17584800480824050	0.22265548303253221	0.28863034588913256	0.36342770279343178
0.24000002652406760	0.22482915809418305	0.26392112792492778	0.32309368113810238	0.39503781689271295
0.30000001192092896	0.27910945865674025	0.31253435012803843	0.36496501583884006	0.43284097655725817
0.30000001192092896	0.33301185539555422	0.36687030902274237	0.41387651658517938	0.47708539207677952
0.30000001192092896	0.37851681304387680	0.42405072331056332	0.46883757855513153	0.52749864572942973
0.30000001192092896	0.40879826798551627	0.47875093979866329	0.52787701941067577	0.58320577237736393
0.30000001192092896	0.42276509752399166	0.52264840722786188	0.58707634635063977	0.64232842929544753
0.30000001192092896	0.42705954146052783	0.54912197488745518	0.63977273709088589	0.70118860039848829
0.23999998629093078	0.39927249921978075	0.54440081912352789	0.67247633630481141	0.75119760313995154
0.17999998301267528	0.35576795289950308	0.51218471540633626	0.67388198281076783	0.77955511933096877
0.11999997973441978	0.30629832050004258	0.46700134621915301	0.64724926131182625	0.77945580876886289
5.9999976456164283E-002	0.25345090303154966	0.41858067612110045	0.60505543459528577	0.75592688168062105
-2.6822091214739885E-008	0.19784631088375573	0.36936281105328045	0.55723063439692977	0.71870169859126443
0.0000000000000000	0.17572462559866550	0.33979262540228011	0.51986367056762273	0.68242268400576411
0.0000000000000000	0.17010373866379280	0.32900832530912749	0.49947986345618117	0.65690344922983190
0.0000000000000000	0.17139494705893835	0.32996169264090880	0.49430472910653139	0.64464550067561033

0.0000000000000000	0.17522732660497270	0.33640401561698785	0.49946780481205250	0.64363850192722094
0.0000000000000000	0.18013625524592014	0.34467136359125394	0.51028424194766031	0.65037868820134315
dx=	0.10000000149011612	dt=	5.0000000745058060E-002	Tmax=1.75
		Valor de M	0.30000001192092896	

Tabela referente às simulações da página: 11

Tabela 3				
0.0000000000000000	9.9995364217637054E-003	1.9996110681564854E-002	2.9986737251482466E-002	3.9968266902032402E-002
0.0000000000000000	1.9997814297468927E-002	3.9980897248343882E-002	5.9934428769015967E-002	7.9841765609919346E-002
0.0000000000000000	2.9994272737981734E-002	5.9947445389624376E-002	8.9818499922795059E-002	0.11955748113219483
0.0000000000000000	3.9988606762335073E-002	7.9889306711935962E-002	0.11961575379242555	0.15905180634383964
0.0000000000000000	4.9980768796266554E-002	9.9800361689702188E-002	0.14930461286498936	0.19826030394210736
0.0000000000000000	5.9970967514655089E-002	0.11967458108347682	0.17886540284549865	0.23711787473845283
0.0000000000000000	6.9959691913237823E-002	0.13950567299717156	0.20828060827183700	0.27555928669832636
0.0000000000000000	7.9947797689906508E-002	0.15928662151458758	0.23753500374783576	0.31351994813253015
0.0000000000000000	8.9936697863062021E-002	0.17900915497869133	0.26661556308990852	0.35093675892198961
0.0000000000000000	9.9928695369777748E-002	0.19866322281277912	0.29551107642973556	0.38774885687631655
0.0000000000000000	0.10992747777838939	0.21823659970293860	0.32421146070301765	0.42389809824373864
0.0000000000000000	0.11993876101709548	0.23771476168595923	0.35270682285402177	0.45932917025103992
0.0000000000000000	0.12997102212536341	0.25708117615179016	0.38098641169276815	0.49398931897937487

0.0000000000000000	0.14003620795802396	0.27631810618492436	0.40903765395954983	0.52782777010569049
1.5646218987086513E-008	0.15015026325167588	0.29540794648328883	0.43684549361950054	0.56079500130800752
7.0000015497207357E-002	0.17222438856554198	0.31648517042508678	0.46475004450414081	0.59292897753008567
0.14000001534819573	0.20450021904224433	0.34136356970794146	0.49341046585711618	0.62441953909267345
0.21000001519918410	0.24540441819693670	0.37135577650629725	0.52368368990769365	0.65562290393033185
0.28000001505017247	0.29367859417634556	0.40726495972686066	0.55646808658147751	0.68701976752595750
0.34999999403953552	0.34841345482442665	0.44947593826922089	0.59256364646060566	0.71913322531596180
0.34999999403953552	0.40413334691952751	0.49740347910685101	0.63247473576751734	0.75240977422329658
0.34999999403953552	0.45897974292813087	0.55025039063077097	0.67639691687796255	0.78712939358627021
0.34999999403953552	0.51076081230325854	0.60702191346394374	0.72424211507720693	0.82335264672908071
0.34999999403953552	0.55710631829477486	0.66647909674260841	0.77567941441144772	0.86089824613474575
0.34999999403953552	0.59571837571007757	0.72702047966868177	0.83017659019449086	0.89933797906177704
0.27999996811151551	0.60515723182503645	0.78323878587530704	0.88672930829830388	0.93795994599353949
0.20999996826052714	0.58075872929928485	0.82625463957763756	0.94374951124437312	0.97577453355402244
0.13999996840953877	0.52610479962239587	0.84377263779959932	0.99863178308374367	1.0115940834642740
6.9999968558550396E-002	0.45434406484541234	0.82444757744212127	1.0465794259908525	1.0443258137579345
-3.1292437974173026E-008	0.38312291229891826	0.76618459980442910	1.0791742155163240	1.0735522158799189
0.0000000000000000	0.35174696820413454	0.69246310818324175	1.0883763552769719	1.0990733341365222
0.0000000000000000	0.35296336847077825	0.62892947506808572	1.0727974064430930	1.1184581303567818
0.0000000000000000	0.37499432838057239	0.59129908854436530	1.0404485824416791	1.1273330821155452
0.0000000000000000	0.40674823801321486	0.58269243372800872	1.0041442024176073	1.1240555421985863
0.0000000000000000	0.43947426081057017	0.59809949999367473	0.97453430001346830	1.1117445209958177
dx=	0.20000000298023224	dt=	5.0000000745058060E-002	Tmax=1.75

		Valor de M	0.34999999403953552	
--	--	------------	---------------------	--

Tabela referente às simulações da página: 14

Tabela 4				
0.0000000000000000	9.9995364217637054E-003	1.9996110681564854E-002	2.9986737251482466E-002	3.9968266902032402E-002
0.0000000000000000	1.9997814297468927E-002	3.9980897248343882E-002	5.9934428769015967E-002	7.9841765609919346E-002
0.0000000000000000	2.9994272737981734E-002	5.9947445389624376E-002	8.9818499922795059E-002	0.11955748113219483
0.0000000000000000	3.9988606762335073E-002	7.9889306711935962E-002	0.11961575379242555	0.15905180634383964
0.0000000000000000	4.9980768796266554E-002	9.9800361689702188E-002	0.14930461286498936	0.19826030394210736
0.0000000000000000	5.9970967514655089E-002	0.11967458108347682	0.17886540284549865	0.23711787473845283
0.0000000000000000	6.9959691913237823E-002	0.13950567299717156	0.20828060827183700	0.27555928669832636
0.0000000000000000	7.9947797689906508E-002	0.15928662151458758	0.23753500374783576	0.31351994813253015
0.0000000000000000	8.9936697863062021E-002	0.17900915497869133	0.26661556308990852	0.35093675892198961
0.0000000000000000	9.9928695369777748E-002	0.19866322281277912	0.29551107642973556	0.38774885687631655
0.0000000000000000	0.10992747777838939	0.21823659970293860	0.32421146070301765	0.42389809824373864
0.0000000000000000	0.11993876101709548	0.23771476168595923	0.35270682285402177	0.45932917025103992
0.0000000000000000	0.12997102212536341	0.25708117615179016	0.38098641169276815	0.49398931897937487
0.0000000000000000	0.14003620795802396	0.27631810618492436	0.40903765395954983	0.52782777010569049
2.0116567078787284E-008	0.15015026405131715	0.29540794662258840	0.43684549364173336	0.56079500131326698

9.0000019073485760E-002	0.17510826926911988	0.31699454713464714	0.46483444056398959	0.59294945497705276
0.18000001803040444	0.21174224806407305	0.34309878012924772	0.49378207287360415	0.62452658033631625
0.27000001698732312	0.25733968833949145	0.37496339106077387	0.52463663884293599	0.65593937858671503
0.36000001594424180	0.30979239652867485	0.41315133646437563	0.55832062072899469	0.68771295024994206
0.44999998807907104	0.36760083154435058	0.45774759141978949	0.59558423322191190	0.72038285949623460
0.44999998807907104	0.42904247803384876	0.50846513218292400	0.63691693525834137	0.75439001857462573
0.44999998807907104	0.49230341375142661	0.56477670115708278	0.68252255979713738	0.78999802117407447
0.44999998807907104	0.55505175372813598	0.62596873705622624	0.73233295581163360	0.82724057575334276
0.44999998807907104	0.61452223423060337	0.69116197386217726	0.78604140745970863	0.86589353408469549
0.44999998807907104	0.66766644385522156	0.75925968286854917	0.84313840891502834	0.90545776193197236
0.35999995559454057	0.68841351610600909	0.82590017616803302	0.90273065274083697	0.94511491910282952
0.26999995663762189	0.66551835817563032	0.88233901071083876	0.96352635881911708	0.98370265553285752
0.17999995768070320	0.59776355283155513	0.91295205225449305	1.0236480569465136	1.0197128749071078
8.9999958723784523E-002	0.49973280606224363	0.89824202282230614	1.0793659864531495	1.0514788373165727
-4.0233134157574568E-008	0.39791589017126971	0.82761420148235110	1.1218322645871908	1.0783851874312784
0.00000000000000000	0.35030703022247606	0.72900650731092487	1.1391407916999718	1.1023581323728879
0.00000000000000000	0.34765638395814580	0.63869150119046503	1.1247416026552561	1.1243488628840588
0.00000000000000000	0.37338217840041177	0.58121522814986870	1.0849552259846724	1.1390078519446449
0.00000000000000000	0.41233222657408453	0.56258584113842947	1.0359945404818911	1.1401446635524723
0.00000000000000000	0.45309446626372096	0.57620058786345174	0.99348753447179050	1.1285609229295663
dx=	0.20000000298023224	dt=	5.0000000745058060E-002	Tmax=1.75
		valor de M	0.44999998807907104	

Tabela referente às simulações da página: 17

Tabela 5				
0.0000000000000000	9.9995364217637054E-003	1.9996110681564854E-002	2.9986737251482466E-002	3.9968266902032402E-002
0.0000000000000000	1.9997814297468927E-002	3.9980897248343882E-002	5.9934428769015967E-002	7.9841765609919346E-002
7.5000002980232239E-002	3.1046862725088754E-002	5.9986402485743051E-002	8.9819947116013668E-002	0.11955758127936778
0.15000000596046448	4.1504531413325559E-002	8.0002646150303253E-002	0.11962276901127231	0.15905252702115347
0.15000000596046448	5.3832549683142342E-002	0.10014649929162432	0.14933266416533436	0.19826400418524445
0.15000000596046448	6.8028127004346475E-002	0.12059263225984869	0.17895947193052181	0.23713305576350213
0.15000000596046448	8.4076420848304148E-002	0.14156138733825038	0.20854390142444620	0.27561014256111116
0.15000000596046448	0.10193804136145775	0.16330339881121139	0.23816698821890631	0.31366332300306543
0.15000000596046448	0.12153395446816442	0.18608096660071538	0.26795564490673973	0.35128747209455141
0.15000000596046448	0.14272889936633140	0.21014685884170678	0.29808214030007846	0.38851231059533198
0.15000000596046448	0.16531487346568177	0.23572164523161154	0.32875634510824869	0.42540671627381654
0.15000000596046448	0.18899676358338496	0.26297064488384364	0.36021092683894029	0.46207725775128272
0.15000000596046448	0.21338280624868491	0.29198109436537839	0.39268091914884951	0.49866001644133717
0.15000000596046448	0.23798323759354775	0.32273943247763581	0.42637981810480335	0.53530614993567149
0.15000000596046448	0.26222120078162259	0.35510812297635769	0.46147439107309929	0.57216282100055404
0.15000000596046448	0.28546051832136671	0.38880184100670168	0.49805985439125916	0.60935174076978216
0.15000000596046448	0.30705476820749017	0.42336485268289914	0.53613634885974382	0.64694760556358710
0.15000000596046448	0.32642016891060344	0.45815554749606724	0.57558716348986205	0.68495834607174710
0.15000000596046448	0.34312959575151686	0.49235006787351632	0.61615933497102815	0.72330866314924169

0.15000000596046448	0.35701552623188798	0.52498272818228664	0.65744843867691360	0.76182806160504424
0.15000000596046448	0.36825700481064022	0.55504162454206429	0.69889192892211460	0.80024465770727504
0.15000000596046448	0.37741542948947315	0.58162684915813323	0.73977937207442379	0.83818643999802855
0.15000000596046448	0.38538590065966205	0.60415216483396672	0.77929214733586627	0.87519227248100706
0.15000000596046448	0.39325303462220657	0.62253552290627445	0.81658557644355445	0.91073543798218615
0.15000000596046448	0.40207845974349660	0.63730039724413201	0.85091638595328534	0.94426243664525356
0.15000000596046448	0.41268153574131083	0.64952358300527890	0.88179476490123254	0.97524819661522710
0.15000000596046448	0.42548155623891887	0.66062172942279940	0.90911258565127351	1.0032641423525468
0.15000000596046448	0.44044315164747366	0.67204050878324784	0.93318979115580836	1.0280464797519322
0.15000000596046448	0.45712549185952217	0.68495173309847501	0.95470624962781403	1.0495422297629116
0.15000000596046448	0.47480552970797235	0.70005007225087201	0.97453665689960878	1.0679099303930026
0.15000000596046448	0.49263662478433828	0.71748800451262973	0.99354848641975557	1.0834673320047963
0.15000000596046448	0.50980973297266796	0.73693340805915886	1.0124309829705034	1.0966022522404473
0.15000000596046448	0.52569322631980886	0.75770594258361590	1.0315983697103344	1.1076781778186404
6.7055132113713792E-008	0.48260279243695975	0.76094183561715500	1.0473910577207659	1.1164181288046664
0.0000000000000000	0.45088559220176200	0.75096027103285945	1.0571304812377920	1.1223271553618768
dx=	0.20000000298023224	dt=	5.0000000745058060E-002	tmax=1.75
		valor de M	0.15000000596046448	

Tabela referente às simulações da página: 17

Tabela 6				
0.0000000000000000	1.4998395619395248E-002	2.9986751749491693E-002	4.4954977871988010E-002	5.9892623292871483E-002
0.0000000000000000	2.9992287209226226E-002	5.9934559773730689E-002	8.9776620640098823E-002	0.11946433455521380
0.17499999701976776	4.5092142551658769E-002	8.9821799893059107E-002	0.13437954901265708	0.17850233454077716
0.34999999403953552	5.4675034006414568E-002	0.11944181926768793	0.17867572923947500	0.23679314763379633
0.34999999403953552	6.7118097964005571E-002	0.14880353298810434	0.22257794308142073	0.29412180264664012
0.34999999403953552	8.2411822602052223E-002	0.17799314899439725	0.26600524742290099	0.35027222086448240
0.34999999403953552	0.10055332472354092	0.20716452159088714	0.30889060301887722	0.40502935424785652
0.34999999403953552	0.12154248763041185	0.23652796016417851	0.35118942293018612	0.45818330414002778
0.34999999403953552	0.14537544904400815	0.26633709896005053	0.39288749455816924	0.50953516163848023
0.34999999403953552	0.17203587041390525	0.29687378426932842	0.43400660846308958	0.55890375976160800
0.34999999403953552	0.20148448053231005	0.32843137703278041	0.47460638222303342	0.60613206397124275
0.34999999403953552	0.23364748260548687	0.36129728801007738	0.51478123044085433	0.65109169819317170
0.34999999403953552	0.26840452778904395	0.39573585109976922	0.55465213955716697	0.69368420367770167
0.34999999403953552	0.30557706489816899	0.43197272611893389	0.59435370853221292	0.73383806095706317
0.34999999403953552	0.34491794802424852	0.47018188983288700	0.63401762254579241	0.77150117030460952
0.34999999403953552	0.38610319726456860	0.51047596494622749	0.67375416849233616	0.80662920919018344
0.34999999403953552	0.42872674862391058	0.55290023177647130	0.71363348725523745	0.83917087871771645
0.34999999403953552	0.47229889664038460	0.59743025884862011	0.75366799535499751	0.86905137845256086
0.34999999403953552	0.51624893939172667	0.64397275724835135	0.79379688426905071	0.89615546541245605

0.34999999403953552	0.55993229968383662	0.69236906601460146	0.83387294299881465	0.92031120928414833
0.34999999403953552	0.60264213634361841	0.74240064514681903	0.87365126162621554	0.94127517638156466
0.34999999403953552	0.64362518128580604	0.79379610467964123	0.91277873021005540	0.95871943043069696
0.34999999403953552	0.68210122490454017	0.84623963634834909	0.95078266217115837	0.97222064461141944
0.34999999403953552	0.71728528055997365	0.89938122694576550	0.98705631559915552	0.98125209009768566
0.34999999403953552	0.74841092251199404	0.95284967476143390	1.0208385408564169	0.98518086255112747
0.34999999403953552	0.77475254662948501	1.0062700829694982	1.0511843801630929	0.98327654333237957
0.34999999403953552	0.79564334601420017	1.0592878872690565	1.0769238271115316	0.97474574528293367
0.34999999403953552	0.81048480126353717	1.1116009845769912	1.0966091295150817	0.95882342514090024
0.34999999403953552	0.81874304010524768	1.1629989563621848	1.1084620539104639	0.93498082637936342
0.34999999403953552	0.81992885588002862	1.2134017062675730	1.1103614386628202	0.90334793374919475
0.34999999403953552	0.81356373696558226	1.2628772924967697	1.0999688449908036	0.86545222576691483
0.34999999403953552	0.79914570295280352	1.3116045813739192	1.0751552106900233	0.82519718453029711
0.34999999403953552	0.77614178967720604	1.3597526092048362	1.0348320155920967	0.78941258120546298
1.5646196605022736E-007	0.62797696520948587	1.3976761744926214	0.98149542422605995	0.76603671001718954
0.0000000000000000	0.47441786171571604	1.4228902679965292	0.92038582415884507	0.76058624599352309
dx=	0.30000001192092896	dt=	5.0000000745058060E-002	tmax=1.75
		Valor de M	0.34999999403953552	

Tabela referente às simulações da página: 19

Tabela 7				
0.0000000000000000	2.9986835482647557E-002	5.9893036039098131E-002	8.9637861621564549E-002	0.11913937093036506
0.0000000000000000	5.9935472714554093E-002	0.11946876124212408	0.17819858708644049	0.23571226283856150
0.0000000000000000	8.9823355351840911E-002	0.17852299373394345	0.26498507215608047	0.34804704293885264
0.0000000000000000	0.11963097171922073	0.23685838793049596	0.34932253287997272	0.45452285970784040
0.0000000000000000	0.14934225421802372	0.29428467902374361	0.43056185198212515	0.55358962190118688
0.0000000000000000	0.17894481497852216	0.35061855749622839	0.50808173076462471	0.64379181641973693
0.0000000000000000	0.20843003369729526	0.40568327202958238	0.58128954358602736	0.72379553425608822
0.0000000000000000	0.23779301891802943	0.45930808410565294	0.64962091754752394	0.79241727690095753
0.0000000000000000	0.26703246453986046	0.51132769841876946	0.71253830542226249	0.84865273662488450
0.0000000000000000	0.29615042066125519	0.56158176041030150	0.76952914154238328	0.89170380550915973
0.0000000000000000	0.32515199501325442	0.60991444296376940	0.82010449878824299	0.92100247266148216
-5.9604666979859058E-008	0.35404499927380984	0.65617404649696320	0.86379942968099321	0.93623084101133602
0.20000001788139898	0.39116556105836464	0.70050897241882137	0.90018120504437815	0.93733708278334404
0.40000000596046448	0.43489962037118257	0.74299982816844834	0.92885163509771174	0.92454710162573661
0.40000000596046448	0.47961027998179123	0.78349888903519749	0.94945302542185095	0.89837227854277979
0.20000000298023224	0.51798025930205460	0.82159978371692599	0.96168530839380184	0.85961339476191112
4.4703473589538129E-008	0.5461888006641202	0.85679659932082930	0.96533790783847018	0.80935941203933326
0.0000000000000000	0.57427902339274828	0.88889856412181156	0.96032954273532967	0.74897786525678733
0.0000000000000000	0.60227819990759046	0.91770319362617070	0.94675002414878795	0.68009190289491139
0.0000000000000000	0.63022086911376096	0.94299457135579756	0.92490531871064352	0.60453715841222877

0.0000000000000000	0.65814953829599387	0.96454529785247434	0.89536089923712492	0.52429046093675968
0.0000000000000000	0.68611464903508645	0.98212454425397633	0.85897582740928724	0.44136300520207195
0.0000000000000000	0.71417310089525410	0.99551454171230302	0.81691761544258490	0.35765414189256289
0.0000000000000000	0.74238452377534214	1.0045369689589645	0.77064668675239290	0.27476892976639028
0.0000000000000000	0.77080459648043687	1.0090889349870804	0.72186029911667948	0.19381188051045986
0.0000000000000000	0.79947508759529273	1.0091857572686820	0.67238964422387171	0.11517749316189878
0.0000000000000000	0.82841093899343710	1.0050050370672128	0.62404969905951591	3.8360074019423929E-002
0.0000000000000000	0.85758550651736221	0.99692438312992127	0.57844682414104109	-3.8203683692185644E-002
0.0000000000000000	0.88691581185543433	0.98554414541238722	0.53675047997910486	-0.11726734017837895
0.0000000000000000	0.91625013430456625	0.97168672445800819	0.49942901902030656	-0.20292207335897333
0.0000000000000000	0.94536039035839148	0.95636451760568042	0.46593172981183212	-0.30083653943850769
0.0000000000000000	0.97394167492279182	0.94070715693958651	0.43426492788607518	-0.41871359421498394
0.0000000000000000	1.0016216392414834	0.92583086962545280	0.40034662695189216	-0.56715586948264940
0.0000000000000000	1.0279843645261553	0.91260803034531812	0.35690167020226948	-0.76124810561584988
0.0000000000000000	1.0526201248927889	0.90122455000499668	0.29140703786516514	-1.0233599754064051
dx=	0.60000002384185791	dt=	5.0000000745058060E-002	tmax=1.75
		Valor de M	0.40000000596046448	