

Universidade Estadual de Campinas
Institute of Mathematics, Statistics and Scientific
Computing
(IMECC - Unicamp)

Título do projeto :

Mistura de Minérios com Metas de Qualidade

Aluno : Gabriel Borin Macedo || RA : 197201
Aluno : Matheus Araujo Souza || RA : 184145

Junho 2021

1 Introdução

Este trabalho se baseou em [4] para a modelagem de um *mix* de minérios com metas de qualidade. Um dos motivos dessa escolha foi devido a abordagem químico-físico que o problema apresenta e como seria feito a estratégia para atender ao pedido da demanda de uma mineradora, de tal forma que as especificações de qualidade estejam próximas aos da meta especificada.

Com isso, foi criado um modelo de *Programação inteira* para realização da modelagem e solução do problema. Por fim, o resultado final gerado pelo modelo satisfaz as metas de qualidade impostas pelo problema. Além disso, os resultados das variáveis estavam dentro do esperado pelo relatado em [4]. Desta forma, obtendo assim um modelo que gera um resultado confiável para esta tarefa.

2 Abordagem do problema

O nosso Problema consiste em uma mineradora que recebe uma encomenda para produzir 6000 toneladas de minério atendendo a especificação da tabela abaixo.

Com isso, a partir dessas informações iniciais, buscamos encontrar as melhores pilhas tais que possamos minimizar os desvios negativos e positivos, obtendo então o minério ideal que satisfaça a quantidade pedida e minimize o custo relativo da coleta de custo por tonelada de cada minério.

Elemento Químico	Teor Mínimo Permitido	Meta	Teor Máximo Permitido
Fe (%)	44.5	47.0	49.5
Al ₂ O ₃ (%)	0.27	0.32	0.37
P (%)	0.035	0.04	0.043
PPC (%)	2.05	2.35	2.65
He (%)	38.0	40.0	50.0

Tabela 1: Tabela 1 de entrada.

Além disso, sabemos que esta encomenda pode ser atendida a partir de um conjunto de pilhas de minérios, no qual a composição e disponibilidade são relacionadas a seguir.

Pilha	Fe(%)	Al ₂ O ₃ (%)	P(%)	PPC(%)	He(%)	Massa(ton)
1	42.605	0.286	0.047	0.692	66	935
2	52.382	0.29	0.054	4.526	56	1311
3	52.629	0.566	0.0819	2.063	86	1188
4	48.26	0.177	0.032	0.735	32	908
5	49.019	0.285	0.071	2.084	56	1330
6	43.869	0.639	0.046	4.78	85	1510
7	48.096	0.737	0.046	2.3	6	966
8	48.574	0.642	0.078	1.119	58	1602
9	48.636	0.198	0.036	2.698	52	1788
10	49.328	0.869	0.074	3.67	87	1198
11	40.652	0.608	0.065	4.056	1	1954
12	51.776	0.917	0.042	4.293	48	1196
13	48.387	0.166	0.052	3.111	72	1337
14	41.967	0.341	0.0819	4.39	2	908
15	51.504	0.51	0.075	1.412	74	1802

Tabela 2: Tabela 2 de entrada.

Outra tabela importante é a seguir, na qual utiliza de parâmetros de controle em 5 critérios diferentes: Irrelevante (-), Importante (I), Muito Importante (MI), Crítico (C) e Muito Crítico (MC), onde seus pesos são também apresentados na tabela abaixo

Criterio	-	I	MI	C	MC
Peso do critrio	0	1	5	10	100
Parametro	Fe	Al ₂ O ₃	P	PPC	He
Critrio	MI	-	MC	C	-

Tabela 3: Tabela 3 de entrada.

Por fim, temos os seguintes pesos para comparar os diversos parâmetros de controle representado na seguinte tabela :

Agora, iremos definir que o modelo possa retomar apenas múltiplos de 10 toneladas e que para cada pilhas, só se pode retomar um mínimo de 500 toneladas. Assim, esse trabalho aborda uma estratégia para a mineradora para atender a esse pedido que atenda as especificações de qualidade e que estejam mais perto as sugeridas pela meta. Uma observação do problema sera de considerar que a penalidade pelo desvio de atendimento à meta é igual ao produto do peso de comparação pelo correspondente peso do critério.

Parametro	Fe	Al2O3	P	PPC	He
Peso de comparação	1	100	1000	10	1

Tabela 4: Tabela 4 de entrada.

2.1 Desvio positivo e negativo de materiais

Essa lei foi proposta em 1887 pelo químico francês *François-Marie Raoult*, na qual descreve matematicamente o comportamento da pressão de vapor de uma solução de duas substâncias imiscíveis (Ou seja, duas substâncias não conseguem se misturar em uma única substância de forma homogênea. Um exemplo disso é a mistura da substância de *gasóleo* com a água, no qual forma uma interferência óptica, sendo visível por um "pequeno arco-iris" na mistura). Essa lei baseia-se em que as substâncias se comportam idealmente. Neste caso, as forças intermoleculares entre as diferentes moléculas são iguais às de moléculas semelhantes.

Isso é feito relacionando a pressão de vapor de uma solução com um soluto não volátil, declarando que a pressão será igual à pressão de vapor desse soluto puro nessa temperatura, multiplicado pela sua fração molar. Com isso, temos a expressão

$$P_i = P_i^0 * x_i$$

onde P_i é igual a pressão parcial de vapor do componente i da mistura do gás, P_i^0 é a pressão do vapor do componente puro i e x_i é a fração do molar do componente i na mistura.

Com isso, cada elemento da mistura possui seus respectivos desvios padrões positivos e negativos.

2.1.1 Desvio positivo

Os desvios positivos da lei de *Raoult* ocorrem quando a pressão de vapor da solução é maior do que o calculado com a lei de *Raoult*. Na prática, as forças de coesão entre as moléculas semelhantes são maiores que as mesmas forças entre as moléculas diferentes. Consequentemente, os dois componentes vaporizam mais facilmente. Esse desvio é visível na curva de pressão de vapor como um ponto de máximo em uma composição específica.

2.1.2 Desvio Negativo

Já os desvios negativos da lei de *Raoult* ocorrem quando a pressão de vapor da solução é menor do que o esperado após o cálculo com a lei. Na prática, esses desvios aparecem quando as forças de coesão entre as moléculas na mistura são maiores que as forças médias entre as partículas dos líquidos em seu estado puro. Esse tipo de caso gera uma retenção dos componentes em seu estado líquido por forças atrativas que são maiores do que a da substância em seu estado puro. De

modo que a pressão parcial de vapor do sistema é reduzido e torna mais difícil a evaporação da solução. Esse desvio é visível na curva de pressão de vapor como um ponto de mínimo em uma curva.

3 Modelagem do problema

Foi determinado as seguintes variáveis para o problema :

param : Parâmetros do controle
pilhas : Conjunto de pilhas
tl_j : Teor mínimo para o parâmetro *j* no produto final (em porcentagem)
tr_j : Teor desejável para o parâmetro *j* no produto final (em porcentagem)
tu_j : Teor superior para o parâmetro *j* no produto final (em porcentagem)
wdt_j : Peso do desvio da meta para o parâmetro *j*
dtn_j : Desvio negativo da meta para o parâmetro *j* (em toneladas)
dtp_j : Desvio positivo da meta para o parâmetro *j* (em toneladas)
q_i : Quantidade máxima disponível na pilhas *i* (em toneladas)
nunidret_i : Número de unidades de retomada
retmin : Unidade mínima de elementos para serem retornados
t_{ij} : Teor do parâmetro *j* na pilhas *i* (em toneladas)
p : Produção total desejada (em toneladas)

Com as seguintes variáveis de decisão :

x_i : Quantidade de minério que será retirado da pilhas *i* (em toneladas)
y_i : variável binária que diz se a pilha *i* foi utilizado ou não. Além disso, essa variável é definida da seguinte forma :

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{caso } i \text{ pilha foi utilizada} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Com isso, a modelagem matemática para o problema será minimizar a seguinte função

$$\min F(dtn, dtp) = \min \sum_{j \in \text{param}} ((wdt_j * dtn_j) + (wdt_j * dtp_j)) \quad (1)$$

S.A :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in \text{pilhas}} (t_{ij} - tu_j) * x_i \leq 0; \forall j \in \text{param} \\ \sum_{i \in \text{pilhas}} (t_{ij} - tl_j) * x_i \geq 0; \forall j \in \text{param} \\ \sum_{i \in \text{pilhas}} ((t_{ij} - tr_j) * x_i) + dtn_j - dtp_j = 0; \forall j \in \text{param} \\ x_i \leq q_i; \forall i \in \text{pilhas} \\ \sum_{i \in \text{pilhas}} x_i = p \\ \text{nunidret}_i = \frac{x_i}{\text{nunidret}}; \forall i \in \text{pilhas} \\ y_i \geq \frac{x_i}{q_i}; \forall i \in \text{pilhas e } q_i \neq 0 \\ x_i \geq \text{retmin} * y_i; \forall i \in \text{pilhas e } q_i \neq 0 \\ \text{nunidret}_i \in \mathbb{N}^+ \\ y_i \in \{0, 1\}; \forall i \in \text{pilhas} \end{array} \right.$$

4 Resolução computacional do problema

Para a modelagem computacional do problema, foi utilizado a linguagem de programação *python* e o *solver* denominado *gurubi*, o qual é um pacote contido nesta linguagem. Além disso, foi criado um outro arquivo auxiliar para criação de um arquivo de extensão *.csv* que contém as tabelas do dado de entrada para o problema. Essas tabelas correspondem as tabelas 1, 2, 4 e 10.

4.1 Análise dos resultados com dados randômicos em uma mesma faixa de dados

Com os dados randômicos obtemos a solução da função objetivo de 64254.37, obtemos também a informação da exploração de 1 nó com 52 simplex interações em 0.23 segundos, gap 0.00%. Temos as seguintes saídas:

Pilhas	Quantidade Coletada
Pilha 1	880.0
Pilha 2	0.0
Pilha 3	0.0
Pilha 4	900.0
Pilha 5	0.0
Pilha 6	0.0
Pilha 7	790.0
Pilha 8	0.0
Pilha 9	1780.0
Pilha 10	0.0
Pilha 11	500.0
Pilha 12	500.0
Pilha 13	650.0
Pilha 14	0.0
Pilha 15	0.0

Tabela 5: Tabela da saída de dados correspondente ao quantidade de minérios coletados de cada pilhas.

Pilhas	Variável y
Pilha 1	1.0
Pilha 2	0.0
Pilha 3	0.0
Pilha 4	1.0
Pilha 5	0.0
Pilha 6	0.0
Pilha 7	1.0
Pilha 8	0.0
Pilha 9	1.0
Pilha 10	0.0
Pilha 11	1.0
Pilha 12	1.0
Pilha 13	1.0
Pilha 14	0.0
Pilha 15	0.0

Tabela 6: Tabela da saída de dados correspondente a variável binária y.

Pilhas	Unidades retomadas
Pilha 1	88.0
Pilha 2	0.0
Pilha 3	0.0
Pilha 4	90.0
Pilha 5	0.0
Pilha 6	0.0
Pilha 7	79.0
Pilha 8	0.0
Pilha 9	178.0
Pilha 10	0.0
Pilha 11	50.0
Pilha 12	50.0
Pilha 13	65.0
Pilha 14	0.0
Pilha 15	0.0

Tabela 7: Tabela da saída de dados correspondente número de unidades retomadas.

Elementos/Compostos Químicos	Desvio positivo
Fe (%)	1159.870
Al ₂ O ₃ (%)	296.049
P (%)	17.880
PPC (%)	0.000
He (%)	15480.000

Tabela 8: Tabela da saída de dados correspondente desvio positivo da meta para o parâmetro j, em toneladas.

Elementos/Compostos Químicos	Desvio negativo
Fe (%)	0.000
Al ₂ O ₃ (%)	0.000
P (%)	0.000
PPC (%)	12.950
He (%)	0.000

Tabela 9: Tabela da saída de dados correspondente desvio negativo da meta para o parâmetro j, em toneladas.

5 Discussão sobre os resultados

Para validação de do modelo, foi decidido pelo grupo a realização de dois testes. Para o primeiro teste, foi utilizado o mesmo conjunto de dados descrito na pilha que corresponde a *Tabela* [2] e comparar o resultado obtido nas variáveis *dtn*, *dtp* e na variável de *custo total* do problema.

Já para o segundo teste, foi utilizado valores aleatórios dentro de uma mesma faixa de valor, apenas para testar o comportamento do modelo. Neste caso, ainda apenas os valores das porcentagem dos elementos da *Tabela* [2] foram escolhidos de forma aleatório e a quantidade de elementos da pilha ainda se manteve como 15 elementos. O restante das outras tabelas se mantiveram iguais.

Com o mesmo dados obtemos a solução da função objetivo de 7112.200 e obtemos também a informação da exploração de 1 nó com 60 *simplex* interações em 0.24 segundos, gap 0.00%.

A seguir, é possível visualizar um conjunto de tabelas que correspondem aos dados relacionados a porcentagem de cada elemento químico e a quantidade de massa em cada pilha.

Pilha	Fe(%)	Al2O3(%)	P(%)	PPC(%)	He(%)	Massa(ton)
1	52.64	0.52	0.084	4.48	45	1500
2	39.92	0.18	0.0289	0.65	97	2000
3	47.19	0.5	0.05	2.52	52	1700
4	49.36	0.22	0.039	1.74	78	1450
5	43.94	0.46	0.032	2.36	41	1250
6	48.97	0.54	0.057	4.34	90	1890
7	47.46	0.2	0.047	5.07	9	1640
8	46.52	0.32	0.039	3.51	4	1124
9	56.09	0.95	0.0590	4.1	80	1990
10	46.0	0.26	0.031	2.51	21	900
11	49.09	0.22	0.04	4.2	12	1540
12	49.77	0.2	0.047	4.81	12	1630
13	53.03	0.24	0.047	4.17	1	1320
14	52.96	0.29	0.052	4.81	1	1245
15	42.09	0.17	0.031	1.38	47	1859

Tabela 10: Tabela de entrada.

Tabelas do *output*:

Pilhas	Quantidade Coletada
Pilha 1	0.0
Pilha 2	0.0
Pilha 3	1700.0
Pilha 4	660.0
Pilha 5	550.0
Pilha 6	0.0
Pilha 7	0.0
Pilha 8	0.0
Pilha 9	0.0
Pilha 10	850.0
Pilha 11	0.0
Pilha 12	0.0
Pilha 13	990.0
Pilha 14	0.0
Pilha 15	1249.9

Tabela 11: Tabela da saída de dados correspondente ao quantidade de minérios coletados de cada pilhas.

Pilhas	Unidades retomadas
Pilha 1	0.0
Pilha 2	0.0
Pilha 3	1.0
Pilha 4	1.0
Pilha 5	1.0
Pilha 6	0.0
Pilha 7	0.0
Pilha 8	0.0
Pilha 9	0.0
Pilha 10	1.0
Pilha 11	0.0
Pilha 12	0.0
Pilha 13	1.0
Pilha 14	0.0
Pilha 15	1.0

Tabela 12: Tabela da saída de dados correspondente número de unidades retomadas.

Elementos/Compostos Químicos	Desvio positivo
Fe (%)	0.000
Al ₂ O ₃ (%)	0.000
P (%)	0.000
PPC (%)	617.200
He (%)	19.999

Tabela 13: Tabela da saída de dados correspondente desvio positivo da meta para o parâmetro j, em toneladas.

Elementos/Compostos Químicos	Desvio negativo
Fe (%)	820.199
Al ₂ O ₃ (%)	0.699
P (%)	0.02999
PPC (%)	0.000
He (%)	0.000

Tabela 14: Tabela da saída de dados correspondente desvio negativo da meta para o parâmetro j, em toneladas.

Pilhas	Unidades retomadas
Pilha 1	0.0
Pilha 2	0.0
Pilha 3	170.0
Pilha 4	66.0
Pilha 5	55.0
Pilha 6	0.0
Pilha 7	0.0
Pilha 8	0.0
Pilha 9	0.0
Pilha 10	85.0
Pilha 11	0.0
Pilha 12	0.0
Pilha 13	99.0
Pilha 14	0.0
Pilha 15	125.0

Tabela 15: Tabela da saída de dados correspondente número de unidades retomadas.

Pilhas	Custo(\$/t)
1	10.50
2	12.50
3	12.00
4	10.00
5	11.50
6	11.00
7	10.80
8	11.20
9	10.40
10	12.00
11	10.30
12	11.90
13	12.30
14	11.10
15	12.10

Tabela 16: Tabela que informa o custo por tonelada de cada pilha.

Com isso, o resultado final gerado pelo modelo é demonstrado a partir da imagem abaixo :

```
valores pegos de cada pilha x
0
Pilha_1 <gurobi.Var C15 (value -0.0)>
Pilha_2 <gurobi.Var C16 (value -0.0)>
Pilha_3 <gurobi.Var C17 (value 1700.0)>
Pilha_4 <gurobi.Var C18 (value 660.0000000000039)>
Pilha_5 <gurobi.Var C19 (value 550.0)>
Pilha_6 <gurobi.Var C20 (value -0.0)>
Pilha_7 <gurobi.Var C21 (value -0.0)>
Pilha_8 <gurobi.Var C22 (value -0.0)>
Pilha_9 <gurobi.Var C23 (value -0.0)>
Pilha_10 <gurobi.Var C24 (value 850.0000000000001)>
Pilha_11 <gurobi.Var C25 (value -0.0)>
Pilha_12 <gurobi.Var C26 (value -0.0)>
Pilha_13 <gurobi.Var C27 (value 990.0)>
Pilha_14 <gurobi.Var C28 (value -0.0)>
Pilha_15 <gurobi.Var C29 (value 1249.9999999999882)>

Pilhas selecionadas
0
Pilha_1 <gurobi.Var C0 (value 0.0)>
Pilha_2 <gurobi.Var C1 (value -0.0)>
Pilha_3 <gurobi.Var C2 (value 1.0)>
Pilha_4 <gurobi.Var C3 (value 1.0)>
Pilha_5 <gurobi.Var C4 (value 1.0)>
Pilha_6 <gurobi.Var C5 (value -0.0)>
Pilha_7 <gurobi.Var C6 (value -0.0)>
Pilha_8 <gurobi.Var C7 (value -0.0)>
Pilha_9 <gurobi.Var C8 (value 0.0)>
Pilha_10 <gurobi.Var C9 (value 1.0)>
Pilha_11 <gurobi.Var C10 (value -0.0)>
Pilha_12 <gurobi.Var C11 (value -0.0)>
Pilha_13 <gurobi.Var C12 (value 1.0)>
Pilha_14 <gurobi.Var C13 (value -0.0)>
Pilha_15 <gurobi.Var C14 (value 1.0)>
```

```
Desvio negativo da meta para o parâmetro j, em toneladas
0
Fe (%) <gurobi.Var C35 (value 820.1999999999407)>
Al2O3 (%) <gurobi.Var C36 (value 0.699999999999136)>
P (%) <gurobi.Var C37 (value 0.029999999999969162)>
PPC (%) <gurobi.Var C38 (value 0.0)>
He (%) <gurobi.Var C39 (value 0.0)>

Desvio positivo da meta para o parâmetro j, em toneladas
0
Fe (%) <gurobi.Var C30 (value 0.0)>
Al2O3 (%) <gurobi.Var C31 (value 0.0)>
P (%) <gurobi.Var C32 (value 0.0)>
PPC (%) <gurobi.Var C33 (value 617.2000000000006)>
He (%) <gurobi.Var C34 (value 19.9999999999005)>

Numero de unidades de retomada
0
Pilha_1 <gurobi.Var C40 (value -0.0)>
Pilha_2 <gurobi.Var C41 (value -0.0)>
Pilha_3 <gurobi.Var C42 (value 170.0)>
Pilha_4 <gurobi.Var C43 (value 66.0)>
Pilha_5 <gurobi.Var C44 (value 55.0)>
Pilha_6 <gurobi.Var C45 (value -0.0)>
Pilha_7 <gurobi.Var C46 (value -0.0)>
Pilha_8 <gurobi.Var C47 (value -0.0)>
Pilha_9 <gurobi.Var C48 (value -0.0)>
Pilha_10 <gurobi.Var C49 (value 85.0)>
Pilha_11 <gurobi.Var C50 (value -0.0)>
Pilha_12 <gurobi.Var C51 (value -0.0)>
Pilha_13 <gurobi.Var C52 (value 99.0)>
Pilha_14 <gurobi.Var C53 (value -0.0)>
Pilha_15 <gurobi.Var C54 (value 125.0)>

Custo total
70826.99999999999
```

Figura 1: Resultado final do modelo que aparecerá no terminal

Além disso, o valor do nosso custo total, nas pilhas selecionadas pela tabela y e com a quantidade especificada pela tabela x foi de \$ 70826.999 reais, enquanto o relatado no trabalho [4] foi de \$70759,000 reais. Note que houve um pouco de diferença no valor final da função, no qual gira em torno de 68,00 reais de diferença.

Uma das possíveis explicações para esta diferença está provavelmente na utilização de diferentes ferramentais computacionais. Enquanto que neste projeto foi utilizado a linguagem de programação *python* com a biblioteca *gurobi*, o trabalho que este relatório se baseou utilizou o *Excel* como ferramenta computacional para o problema. Por causa disso, acreditamos que o uso de diferentes ferramentais computacionais gerou essa diferença. Já para os valores aleatórios, não houve nenhum comportamento que não fosse esperado pelo modelo.

Por fim, temos a seguir os valores das médias ponderada finais para cada elemento da tabela

Elemento	Teor(%)
Fe (%)	47.19
Al ₂ O ₃ (%)	0.37
P (%)	0.04
PPC (%)	2.35
He (%)	42.58

Tabela 17: Tabela das médias ponderadas finais para o caso de valores aleatórios na mesma faixa de variação

Elemento	Teor(%)
Fe (%)	46.86
Al ₂ O ₃ (%)	0.32
P (%)	0.04
PPC (%)	2.45
He (%)	40.0

Tabela 18: Tabela das médias ponderadas finais para o caso dos valores idênticos ao valor do trabalho base deste relatório

6 Conclusão

Foi possível observar dos resultados obtidos que a porcentagem de teor requisitado no início do problema foi atingido com êxito, tanto para os dados gerados aleatoriamente, quanto para os dados teóricos. Isso mostra que o modelo criado neste trabalho estava correto para ambas formulações.

Além disso, é possível notar uma leve diferença dos resultados teóricos. Essa desigualdade pode ser explicada pela abordagem de diferentes métodos para a resolução desse problema. Um ponto a ser destacado é que mesmo no enunciado do problema ou durante o trabalho [4], o autor não deixa de forma explícita alguns aspectos da função objetivo. Com isso, este relatório deu um significado dos desvios, não fazendo apenas uma análise superficial da função objetivo, mas mostrando uma relação Físico-Química para estes desvios positivos e negativos.

Referências

- [1] V.; MORABITO R.; YANASSE H. ARENALES, M.N.; ARMENTANO. Pesquisa operacional, 2006.
- [2] R.G; DANG Y. CHEN, D.S.; BATSON. Applied integer programming - modeling and solution, 2010.
- [3] Tatiana Alves Costa Frederico Augusto C. Guimarães José Maria do Carmo Bento Alves Marcone Jamilson Freitas Souza, Alexandre Xavier Martins. Pesquisa operacional aplicada À mineração. http://www.decom.ufop.br/prof/marcone/Disiplinas/Pesquisa%20operacional%20I/LINGO_ListaExercicios.pdf.
- [4] Marcone Jamilson Freitas Souza. Otimização combinatória (página 35). <http://www.decom.ufop.br/prof/marcone/Disiplinas/OtimizacaoCombinatoria/OtimizacaoCombinatoria.pdf>, 2009.