Probabilidade 2 - ME310 - Lista 1

24 de Julho de 2016

Lembrando:

1. Probabilidade conjunta $P(a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2) = F(a_1, b_1) + F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1)$
2. Soma de v.a. independentes (por convolução) $f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(a-y) \cdot f_y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \cdot f_y(a-x)dx$
3. Probabilidade conjunta:$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$
4. Densidade condicional: $f_{X/Y}(x,y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$
5. Densidade marginal: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$
6. V.a. independentes: $f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$
7. I.i.d: independentes e identicamente distribuídas (mesma distribuição e cada uma é independente das demais)
8. Esperança: $\mathbf{E}(g(x,y,z)) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} \sum_{z \in Z} g(x,y,z) \cdot p(x,y,z)$

1) Seja $F(a,b)$ a função da distribuição acumulada conjunta da v.a. X e Y. Sabendo F(x,y), calcule

a)$P(X > a, Y > b)$

Resp. a)

- $P(\Omega) = 1 = P(\{X > a, Y > b\} \dot\cup \{X > a, Y > b\}^c) = P(\{X > a, Y > b\}) + P(\{X > a, Y > b\}^c) = P(X > a, Y > b) + P(X \leq a \cup Y \leq b)$
- $P(X \leq a \cup Y \leq b) = P(X \leq a) + P(Y \leq b) - P(X \leq a, Y \leq b) = F(a,\infty) + F(\infty, b) - F(a,b)$

unindo as duas equações temos que:
$P(X > a, Y > b) = 1 - (F(a,\infty) + F(\infty,b) - F(a,b)) = 1 + F(a,b) - F(a,\infty) - F(\infty,b)$

b)$P(a_1 < X < a_2, Y \geq b)$

Resp. b)

vamos enumerar o que sabemos:

- $P(a_1 < X < a_2) = P(X < a_2) - P(X \leq a_1) = \lim_{\epsilon\to 0} P(X \leq a_2 - \epsilon) - P(X \leq a_1) = \lim_{\epsilon\to 0} F(a_2 - \epsilon, \infty) - F(a_1, \infty) = F(a_2,\infty) - F(a_1,\infty)$
- $P(a_1 < X < a_2) = P(a_1 < X < a_2, \{Y \geq b \dot\cup Y < b\}) = P(a_1 < X < a_2, Y \geq b) + P(a_1 < X < a_2, Y < b)$
- $P(a_1 < X < a_2, Y < b) = \lim_{\epsilon\to 0} P(X < a_2, Y \leq b - \epsilon) - \lim_{\epsilon\to 0} P(X \leq a_1, Y \leq b - \epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} P(X \leq a_2 - \delta, Y \leq b - \epsilon) - \lim_{\epsilon\to 0} P(X \leq a_1, Y \leq b - \epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} F(a_2 - \delta, b - \epsilon) - \lim_{\epsilon\to 0} F(a_1, b - \epsilon) = F(a_2, b) - F(a_1, b)$

Unindo essas informações temos que
$F(a_2,\infty) - F(a_1,\infty) = P(a_1 < X < a_2, Y \geq b) + F(a_2,b) - F(a_1,b) \implies P(a_1 < X < a_2, Y \geq b) = F(a_2,\infty) - F(a_1,\infty) - F(a_2,b) + F(a_1,b)$

Obs.: foi usado a notação de limite só para chamar a atenção nas desigualdades e lembrar que apesar de no caso contínuo não fazer diferença se estamos usando $\leq$ ou $<$, nas variáveis discretas (ou quando procuramos pela melhor aproximação de uma variável normal em uma tabela de distribuição normal) isso pode fazer uma diferença significante!

Se a pergunta foi 'tenho mesmo que usar esses limites?', a resposta é 'não', quando estiver trabalhando com variáveis contínuas pode passar direto para o passo final e nem se preocupar com limites.

2) A distribuicão conjunta de X e Y é dada por $p(x, y)$, onde:

$$
\begin{array}{ccc}
p(1,1) = 1/9; & p(2,1) = 1/3; & p(3,1) = 1/9 \\
p(1,2) = 1/9; & p(2,2) = 0; & p(3,2) = 1/18 \\
p(1,3) = 0; & p(2,3) = 1/6; & p(3,3) = 1/9
\end{array}
$$

a) Calcule as distribuicões marginais de X e Y .

Resp. a)

Lembre-se que $P(Y = y) = \sum_{x=1}^{x=3} P(X = x, Y = y)$.

- $P(Y = 1) = p(1, 1) + p(2, 1) + p(3, 1) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$
- $P(Y = 2) = p(1, 2) + p(2, 2) + p(3, 2) = \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$
- $P(Y = 3) = p(1, 3) + p(2, 3) + p(3, 3) = 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$
- $P(X = 1) = p(1, 1) + p(1, 2) + p(1, 3) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 0 = \frac{2}{9}$
- $P(X = 2) = p(2, 1) + p(2, 2) + p(2, 3) = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
- $P(X = 3) = p(3, 1) + p(3, 2) + p(3, 3) = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$

b) As v.a. X e Y são independentes?

Resp. b)

Para que sejam independentes é necessário que $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$ para todos x e y, portanto basta mostrar um par que não obedece esta restrição para provar que as v.a. não são independentes:

Pegue, por exemplo $X = 2\, e\, Y = 2$ temos que $P(X = 2, Y = 2) = p(2, 2) = 0$, mas $P(X = 2) = \sum_{y=1}^{y=3} P(X = 2, Y = y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ e $P(Y = 2) = \sum_{x=1}^{x=3} P(X = x, Y = 2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$

Como $P(X = 2, Y = 2) = 0 \neq \frac{1}{12} = P(X = 2) \cdot P(Y = 2)$, temos que as v.a. X e Y não são independentes

c) Calcule a distribuicão condicional de X dado que Y = 1.

Resp. c)

Pela definição temos: $P(X = x/Y = y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p(x,y)}{P(Y=y)}$

Primeiro vamos calcular $P(Y = 1) = \sum_{x=1}^{x=3} P(X = x, Y = 1) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

Agora podemos calcular $P(X = x/Y = 1) = \frac{p(x,y)}{P(Y=1)} = \begin{cases} \frac{1/9}{5/9} & se\, x = 1 \\ \frac{1/3}{5/9} & se\, x = 2 \\ \frac{1/9}{5/9} & se\, x = 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{5} & se\, x = 1 \\ \frac{3}{5} & se\, x = 2 \\ \frac{1}{5} & se\, x = 3 \end{cases}$

3) A densidade conjunta das v.a. X e Y e dada por $f(x,y) = \begin{cases} c\cdot(x+2\cdot y) & se\, 0<x<1\, e\, 0<y<1 \\ 0 & caso\, contrário \end{cases}$:

*) Verique se X e Y são independentes.

Resp. *)

vamos calcular as marginais:

$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 c\cdot(x+2\cdot y)dy = c\cdot(x\cdot y+y^2)_{y=0}^{y=1} = \begin{cases} c\cdot(x+1) & se\, 0<x<1 \\ 0 & caso\, contrário \end{cases}$

$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 c\cdot(x+2\cdot y)dx = c\cdot(\frac{x^2}{2}+2\cdot y\cdot x)_{x=0}^{x=1} = \begin{cases} c\cdot(\frac{1}{2}+2\cdot y) & se\, 0<y<1 \\ 0 & caso\, contrário \end{cases}$

Disso, verificamos se $f(x,y) = \begin{cases} c\cdot(x+2\cdot y) & se\, 0<x<1\, e\, 0<y<1 \\ 0 & caso\, contrário \end{cases} \neq \begin{cases} c^2\cdot(x+1)\cdot(\frac{1}{2}+2\cdot y) & se\, 0<x<1\, e\, 0<y<1 \\ 0 & caso\, contrário \end{cases} = f(x)\cdot f(y)$

Então concluímos que não são independentes

a) o valor de c

Resp. a)

$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 c\cdot(x+2\cdot y)dxdy = \int_0^1 c\cdot(x+1)dx = \frac{3}{2}\cdot c \implies c = \frac{2}{3}$

b) a densidade de X;

Resp. b)

$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{2}{3}\cdot(x+2\cdot y)dy = \frac{2}{3}\cdot(x\cdot y+y^2)_{y=0}^{y=1} = \begin{cases} \frac{2}{3}\cdot(x+1) & se\, 0<x<1 \\ 0 & caso\, contrário \end{cases}$

c) $P(X<Y)$;

Resp. c)

$P(X<Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^y \frac{2}{3}\cdot(x+2\cdot y)dxdy = \frac{2}{3}\cdot\int_0^1(\frac{x^2}{2}+2\cdot x\cdot y)_{x=0}^{x=y}dy = \frac{2}{3}\cdot\int_0^1 \frac{5}{2}\cdot y^2dy = \frac{5}{3}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{5}{9}$

d) $P(X+Y<1)$

Resp. d)

$P(X+Y<1)=P(X<1-Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{1-y} f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^{1-y}\frac{2}{3}\cdot(x+2\cdot y)dxdy=\frac{2}{3}\cdot\int_0^1(\frac{x^2}{2}+2\cdot x\cdot y)_{x=0}^{x=1-y}dy=\frac{2}{3}\cdot\int_0^1(\frac{(1-y)^2}{2}+2\cdot(1-y)\cdot y)dy=\frac{2}{3}\cdot(-\frac{(1-y)^3}{6}+y^2-2\cdot\frac{y^3}{3})_{y=0}^{y=1}=\frac{2}{3}\cdot(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{6})=\frac{1}{3}$

Observe que não podemos aplicar a equação 2 pois as v.a. não são independentes.

4) A densidade conjunta das v.a. X e Y e dada por $f(x,y)=\begin{cases} c\cdot x\cdot e^{-(x+y)} & se\, x>0\, e\, y>0 \\ 0 & caso\, contrário \end{cases}$

(a) Calcule o valor de c.

usando a definição temos que $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} c\cdot x\cdot e^{-(x+y)}dxdy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} c\cdot x\cdot e^{-y}\cdot e^{-x}dxdy=c\cdot\int_0^{\infty} e^{-y}dy\int_0^{\infty} x\cdot e^{-x}dx=c\cdot 1\cdot\int_0^{\infty} x\cdot e^{-x}dx=c\cdot 1\cdot(-\frac{1+x}{e^x})_0^{\infty}=c$ logo $c=1$

(b) Calcule a densidade condicional de Y dado que $X=x$.

Usando a definição $f_{X/Y}(x,y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}$ e $f(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ temos:

$$f(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_0^{\infty} 1\cdot x\cdot e^{-(x+y)}dx=\begin{cases} e^{-y} & se\, y>0 \\ 0 & caso\, contrário \end{cases}$$

$$f_{X/Y}(x,y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{x\cdot e^{-(x+y)}}{e^{-y}}=\begin{cases} x\cdot e^{-x} & se\, x>0 \\ 0 & caso\, contrário \end{cases}$$

(c) Verique se X e Y são independentes.

Basta calcular $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_0^{\infty} x\cdot e^{-(x+y)}dy=\begin{cases} x\cdot e^{-x} & se\, x>0 \\ 0 & caso\, contrário \end{cases}$

Como $f(x,y)=\begin{cases} x\cdot e^{-x}e^{-y} & se\, x>0\, e\, y>0 \\ 0 & caso\, contrário \end{cases}=f(x)\cdot f(y)$ temos que X e Y são conjuntos independentes

5) Sejam X e Y v.a. independentes,$X\sim U(0,2)$ e $Y\sim U(-1,3)$. Calcule a densidade de $X+Y$.

Lembrando $V\sim U(a,b)\implies f_V(v)=\frac{1}{b-a}\cdot\mathbf{I}_{\{a\le v\le b\}}=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & se\, a\le v\le b \\ 0 & caso\, contrário \end{cases}$

e $F_V(v)=\begin{cases} 0 & se\, v<a \\ \frac{v-a}{b-a} & se\, a\le v\le b \\ 1 & se\, b>b \end{cases}$

O Objetivo desta questão é atentar para problemas decorrentes de trabalhar com intervalos, ou seja, devemos considerar apenas intervalos válidos. Para isso considere $Z = X + Y$ queremos encontrar $f_Z(z)$.

temos que:

- $f_X(x) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{I}_{\{0 \leq x \leq 2\}}$
- $f_Y(y) = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{I}_{\{-1 \leq y \leq 3\}}$

(pessoalmentee acho essa representação mais simpática, não ocupa duas linhas do caderno, esse $\mathbf{I}$ só nos diz que fora do intervalo a função vale 0)

Podemos usar diretamente a equação 2:

- $f_Z = f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \cdot f_y(a-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \mathbf{I}_{\{0 \leq x \leq 2\}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \mathbf{I}_{\{-1 \leq a-x \leq 3\}} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \frac{1}{4} \cdot \mathbf{I}_{\{-1 \leq a-x \leq 3\}} dx$

vamos tentar tirar alguma informação dos intervalos possíveis:

- $-1 \leq a - x \leq 3$
- $0 \leq x \leq 2$
- $-1 \leq a \leq 5$ (soma das variáveis X e Y)

1. se $-1 \leq a \leq 1$ então x estará limitado da seguinte forma: $-1 \leq a - x \leq 3 \implies a + 1 \geq x \geq a - 3$ com máximo $2 \geq x \geq -2$ e mínimo $0 \geq x \geq -4$, mas além disso, x está limitado pelo intervalo constante $0 \leq x \leq 2$, unindo essas duas informações para $-1 \leq a \leq 1$ então $0 \leq x \leq a+1 \implies f_Z(a) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{1+a} f_Y(a-x)dx = \frac{1}{8} \cdot (1 + a)$
2. se $1 \leq a \leq 3$ então x estará limitado em:$-1 \leq a - x \leq 3 \implies a + 1 \geq x \geq a - 3$ com máximo $4 \geq x \geq 0$ e mínimo $2 \geq x \geq -2$, porém estes dois intervalos contém integralmente a outra restrição $0 \leq x \leq 2$, como, quem restringe o valor é o menor intervalo de cada lado, para o caso $1 \leq a \leq 3$ temos $0 \leq x \leq 2 \implies \implies f_Z(a) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 f_Y(a-x)dx = \frac{1}{8} \cdot (2) = \frac{1}{4}$
3. se $3 \leq a \leq 5$ x estará limitado em: $-1 \leq a - x \leq 3 \implies a + 1 \geq x \geq a - 3$ com máximo $5 \geq x \geq 2$ e mínimo $4 \geq x \geq 0$, e como sempre também estará limitado a $0 \leq x \leq 2$, o intervalo que limita superiormente é $2 \geq x$ e o inferior $x \geq a-3$ logo $a-3 \leq x \leq 2 \implies f_Z(a) = \frac{1}{2} \cdot \int_{a-3}^2 f_Y(a-x)dx = \frac{1}{8} \cdot (2 - (a - 3)) = \frac{5-a}{8}$

Com isso temos nossa $f_Z(a) = \begin{cases} \frac{5-a}{8} & se\, 3 \leq a < 5 \\ \frac{1+a}{8} & se\, -1 \leq a < 1 \\ \frac{1}{4} & se\, 1 \leq a < 3 \\ 0 & caso\, contr\acute{a}rio \end{cases}$

*) Um jeito mais prático: (método da Talita)
temos que:

- $f_X(x) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{I}_{\{0 \leq x \leq 2\}}$
- $f_Y(y) = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{I}_{\{-1 \leq y \leq 3\}}$
- $f_Z = f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \cdot f_y(a-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \mathbf{I}_{\{0 \leq x \leq 2\}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \mathbf{I}_{\{-1 \leq a-x \leq 3\}} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \frac{1}{4} \cdot \mathbf{I}_{\{-1 \leq a-x \leq 3\}} dx$

disso:

- $-1 \leq a - x \leq 3 \implies a + 1 \geq x \geq a - 3 \implies a - 3 \leq x \leq a + 1$
- $0 \leq x \leq 2$
- $-1 \leq a \leq 5$ (soma das variáveis X e Y)

até aqui é igual, mas a 'diferença' está em achar os intervalos (procurar 'a' que não viole $0 \leq x \leq 2$):

1. se x é limitado por **baixo por** $a - 3$: vamos achar o intervalo onde isso vale: $0 \leq a - 3 \leq 2 \implies a \in (3, 5)$ e nesse intervalo a integral é $\frac{1}{2} \cdot \int_{a-3}^{2} \frac{1}{4} dx = \frac{5-a}{8}$ (x limitado por baixo por $a - 3$)
2. se x é limitado por **cima por** $a+1$: $0 \leq a+1 \leq 2 \implies a \in (-1, 1)$ e nesse intervalo ($0 \leq x \leq a + 1$) a integral a ser calculada é $\frac{1}{2} \cdot \int_0^{1+a} \frac{1}{4} dx = \frac{1+a}{8}$
3. se x não estiver limitado nem por baixo, nem por cima por a ($0 \leq x \leq 2$) que ocorre quando $0 \leq a - 3$ e $a + 1 \leq 2$ que implicam em $a \in (3, 5)$, a integral é $\frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}$

desse jeito fica mais fácil, vemo

6. Sejam X e Y v.a. independentes, $X \sim U(0, 1)$ e $Y \sim exp(\lambda)$. Calcule a densidade de $Z = X/Y$.

Resp. 6)

Queremos $f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz}$
sabemos que:

- $f_X(x) = \mathbf{I}_{\{x \in (0,1)\}}$
- $f_Y(y) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot y}$
- $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X/Y \leq z) = P(Y \geq X/z) = \int_0^1 \int_{x/z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy dx = 1 + \frac{z}{\lambda}(e^{-\lambda/z} - 1)$
- $f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{1}{\lambda} \cdot (e^{-\lambda/z} - 1) + \frac{z}{\lambda} e^{-\lambda/z} \cdot (\lambda/z^2) = \frac{1}{\lambda} \cdot (e^{-\lambda/z} - 1) + \frac{1}{z} e^{-\lambda/z}$

*) O exercício saiu de maneira mais fácil ao colocarmos em termos de Y, não de X

7. SejamX_1, X_2, X_3 v.a. i.i.d. exponenciais com parâmetro $\lambda = 1$. Calcule:

*) A ideia aqui é que a função min (ou max), nos dá uma informação importante sobre todas as suas variáveis, por exemplo:

$min(a, b, c, d, e) = 1$, isso nos informa que todos são pelo menos maiores que 1, ou seja, $a \geq 1$ e $b \geq 1$ e $c \geq 1$ e $d \geq 1$ e $e \geq 1$. Do mesmo jeito

$max(a, b, c, d, e) = 1$, isso nos informa que todos são pelo menos menores que 1, ou seja, $a \leq 1$ e $b \leq 1$ e $c \leq 1$ e $d \leq 1$ e $e \leq 1$.

(a) $P(max\{X_1, X_2, X_3\} \leq a)$

Resp. a) $P(max\{X_1, X_2, X_3\} \leq a) = P(X_1 \leq a, X_2 \leq a, X_3 \leq a) \overset{iid}{=} P(X_1 \leq a)^3 = (1 - e^{-a})^3$

(b) $P(min\{X_1 X_2 X_3\} \geq a)$

Resp. b)

$P(min\{X_1 X_2 X_3\} \geq a) = P(X_1 \geq a, X_2 \geq a, X_3 \geq a) \overset{iid}{=} (1 - P(X_1 \leq a))^3 = e^{-3 \cdot a}$

(c) densidade de $Z = min\{X_1, X_2, X_3\}$

Resp. c)

$f_Z(a) = \frac{dF_Z(a)}{da} = \frac{dP(min\{X_1 X_2 X_3\} \leq a)}{da} = \frac{d(1 - P(min\{X_1 X_2 X_3\} \geq a))}{da} = \frac{d1}{da} - \frac{dP(min\{X_1 X_2 X_3\} \geq a)}{da} = 0 - \frac{d(e^{-3 \cdot a})}{da} = \begin{cases} 3 \cdot e^{-3 \cdot a} & se\, a \geq 0 \\ 0 & caso\, contr\acute{a}rio \end{cases}$

8. O número dos clientes que entram numa loja durante uma hora tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 12$. Cada cliente compra alguma coisa com probabilidade 1/4 e não compra nada com probabilidade 3/4 independentemente dos outros. Se entre 12:00 e 13:00 entraram exatamente 10 clientes, qual é a probabilidade que pelo menos 2 compraram alguma coisa? Se entre 13:00 e 14:00 exatamente 8 clientes não compraram nada, qual e a probabilidade que pelo menos 2 compraram alguma coisa?

Resp. 8)

#clientes que entram na loja: $E \sim Poisson(12)$

cada cliente compra com prob 1/4 $\implies C \sim Bernoulli(1/4)$ independentes

- Entre 12 e 13 horas entram exatamente 10 clientes. Sabemos que todos compram independente dos outros seguindo uma Bernoulli(1/4), o número total de clientes que compraram é uma somatória de Bernoulli, ou seja uma

Binomial, com parâmetros 10 (quantos clientes entraram) e 1/4 (a probabilidade de cada um comprar algo), daí temos: $B \sim Bernoulli(10, \frac{1}{4})$, $P(B \geq 2) = 1 - P(B \leq 1) = 1 - \left(\begin{array}{c} 10 \\ 1 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{4} \cdot (\frac{3}{9})^9 - \left(\begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array} \right) \cdot (\frac{3}{9})^{10}$

- Sabemos exatamente quantos não compraram (8 entre 13:00-14:00), então se entrarem X nesse intervalo, sabemos que exatamente $X-8$ compraram alguma coisa, para isso, basta calcular $P(E \geq 10) = \sum_{x=10}^{x=\infty} P(E = x) = 1 - P(E \leq 9) = 1 - \sum_{x=0}^{x=9} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

9. Um casal combina de se encontrar por volta de 12:30. O homem chega num momento distribuído uniformemente entre 12:15 e 12:45, a mulher chega num momento distribudo uniformemente entre 12:00 e 13:00.

Uma observação aqui é o cuidado com a representação das horas, podemos por exemplo representar como minutos, ou frações de hora. Eu acho que é mais fácil trabalhar com minutos e depois converter, da seguinte maneira:

seja H a variável aleatória que representa a hora que o Homem vai chegar ao local e $D_H \sim U(15, 45)$. Dessa forma : $H = D_h + 12 \cdot 60$ min

seja M a variável aleatória que representa a hora que a Mulher vai chegar ao local e $D_M \sim U(0, 60)$. Dessa forma : $M = D_M + 12 \cdot 60$ min

Por causa das propriedades da uniforme:

- $f_{D_H}(h) = \frac{1}{30} \cdot \mathbf{I}_{h \in (15,45)}$
- $f_{D_M}(m) = \frac{1}{60} \cdot \mathbf{I}_{m \in (0,60)}$

a) Qual e a probabilidade de que primeiro a chegar terá de esperar mais de 15 minutos?

$P(H - M > 15 \dot{\cup} M - H > 15) = P(H - M > 15) + P(M - H > 15)$

Calculando cada parcela temos:

- $P(M-H > 15) = P(M > 15+H) = P(D_M > 15+D_H) = \int\int_{m>15+h} f(m,h)dmdh = \int\int_{m>15+h} f_{D_M}(m) \cdot f_{D_H}(h)dmdh =$

$\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{30} \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\int_{15+h}^{\infty} \mathbf{I}_{h\in(15,45)} \cdot \mathbf{I}_{m\in(0,60)} dmdh = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{30} \cdot \int_{15}^{45}\int_{15+h}^{60} dmdh = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{30} \cdot \int_{15}^{45}(60 - 15 - h)dh = \frac{30 \cdot 60 - 15 \cdot 30 - \frac{h^2}{2}\Big|_{h=15}^{h=45}}{60 \cdot 30} = 0,25$

- $P(H-M>15) = P(H>15+M) = P(D_H>15+D_M) = \int\int_{h>15+m} f(m,h)dmdh = \int\int_{h>15+m} f_{D_M}(m)\cdot f_{D_H}(h)dmdh =$

$\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{30}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{15+m}^{\infty}\mathbf{I}_{h\in(15,45)}\cdot\mathbf{I}_{m\in(0,60)}dhdhm \overset{**}{=} \frac{1}{60}\cdot\frac{1}{30}\cdot\int_0^{30}\int_{15+m}^{45}dhdm = \frac{1}{60}\cdot\frac{1}{30}\cdot\int_0^{30}(45-15-m)dm = \frac{45\cdot30-15\cdot30-\frac{m^2}{2}\Big|_{m=0}^{m=30}}{60\cdot30} = 0,25$

**) observe que não integramos até 60 pois para valores maiores que 30, a segunda integral se torna 0 por causa do problema de intervalos discutido na questão 5

assim a resposta é:$P(H-M>15\,\dot{\cup}\,M-H>15) = P(H-M>15)+P(M-H>15) = \frac{1}{2}$

b) Qual e a probabilidade de que o homem vai chegar primeiro?

- $P(M-H>0) = P(M>H) = P(D_M>D_H) = \int\int_{m>h} f(m,h)dmdh = \int\int_{m>h} f_{D_M}(m)\cdot f_{D_H}(h)dmdh =$

$\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{30}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{h}^{\infty}\mathbf{I}_{h\in(15,45)}\cdot\mathbf{I}_{m\in(0,60)}dmdh = \frac{1}{60}\cdot\frac{1}{30}\cdot\int_{15}^{45}\int_{h}^{60}dmdh = \frac{1}{60}\cdot\frac{1}{30}\cdot\int_{15}^{45}(60-h)dh = \frac{60*30-\frac{h^2}{2}\Big|_{m=15}^{m=45}}{60\cdot30} = \frac{1}{2}$

10. A densidade conjunta das v.a. X e Y e dada por $f(x;y) = \begin{cases} x+y; & se\,0<x<1\,e\,0<y<1 \\ 0 & caso\,contrário \end{cases}$. Calcule a densidade condicional de X dado que $Y=y$.

Resp. 10)$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{x+y}{\int_0^1(x+y)dx} = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\cdot\mathbf{I}_{0<x<1,0<y<1}$

11. Sejam X_1 e X_2 v.a. independentes, X_i tem distribuição de Poisson com parâmetro λ_i, $i=1,2$. Seja $Z=X_1+X_2$. Calcule a distribuição condicional de X_1 dado que $Z=n$.

Resp. 11)

- $X_1 \sim Poisson(\lambda_1) \implies f_{X_1}(x_1) = \frac{e^{-\lambda_1}\cdot\lambda_1^{x_1}}{x_1!}$
- $X_2 \sim Poisson(\lambda_2) \implies f_{X_2}(x_2) = \frac{e^{-\lambda_2}\cdot\lambda_2^{x_2}}{x_2!}$
- $P(x=k/X+Y=n) = \frac{P(X=k,X+Y=n)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=k,Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \overset{indep.}{=} \frac{P(X=k)\cdot P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \overset{*}{=} \frac{\frac{e^{-\lambda_1}\cdot\lambda_1^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\lambda_2}\cdot\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}} = \frac{\lambda_1^k\cdot\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}\cdot\frac{1}{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}$

*) Na página 319 do Ross temos que se $X,Y \sim Poisson(\lambda_{1,2})$ e $Z=X+Y$ então $Z \sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2)$

12. A distribuicão conjunta de X, Y e Z é dada por $p(1,2,3) = p(2,1,1) = p(2,2,1) = p(2,3,2) = \frac{1}{4}$: Calcule $\mathbf{E}(XYZ)$ e $\mathbf{E}(XY + XZ + YZ)$.

Resp. 12)

a) temos que $g(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$ com isso e a equação 8 temos:

$\sum_{x\in X} \sum_{y\in Y} \sum_{z\in Z} g(x,y,z) \cdot p(x,y,z) = \frac{1\cdot2\cdot3}{4} + \frac{2\cdot1\cdot1}{4} + \frac{2\cdot2\cdot1}{4} + \frac{2\cdot3\cdot2}{4} = \frac{24}{4}$

b) pela propriedade linear da esperança temos: $\mathbf{E}(XY+XZ+YZ) = \mathbf{E}(XY)+\mathbf{E}(XZ)+\mathbf{E}(YZ)$, disso

$\mathbf{E}(XY+XZ+YZ) = \mathbf{E}(XY)+\mathbf{E}(XZ)+\mathbf{E}(YZ) = \frac{1\cdot2+2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3}{4} + \frac{1\cdot3+2\cdot1+2\cdot1+2\cdot2}{4} + \frac{2\cdot3+1\cdot1+2\cdot1+3\cdot2}{4} = \frac{40}{4}$

13. Sejam X, Y e Z v.a. i.i.d. que assumem valores 1 e 2 com prob. $\frac{1}{2}$. Ache a distribuicão de XYZ e $X^2 + YZ$.

Resp. 13) todas as 3-uplas possíveis são:
$(1,1,1),(1,2,1),(2,1,1),(2,2,1),(1,1,2),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,2)$
observe que a probabilidade de X,Y,Z é $\frac{1}{2}$ tanto para 1 quanto para 2
dado que $g(X,Y,Z) = X \cdot Y \cdot Z$

- $P(g(x,y,z) = 1) = \frac{1}{8}$
- $P(g(x,y,z) = 2) = \frac{3}{8}$
- $P(g(x,y,z) = 3) = 0$
- $P(g(x,y,z) = 4) = \frac{3}{8}$
- $P(g(x,y,z) = 5) = 0$
- $P(g(x,y,z) = 6) = 0$
- $P(g(x,y,z) = 7) = 0$
- $P(g(x,y,z) = 8) = \frac{1}{8}$

nesse caso, temos $h(X,Y,Z) = X^2 + Y \cdot Z$

- $P(h(x,y,z) = 1) = 0$
- $P(h(x,y,z) = 2) = P(X = 1, Y = 1, Z = 1) = \frac{1}{8}$
- $P(h(x,y,z) = 3) = P(x = 1, y = 2, z = 1) + P(X = 1, Y = 1, Z = 2) = \frac{2}{8}$
- $P(h(x,y,z) = 4) = 0$
- $P(h(x,y,z) = 5) = P(x = 2, y = 1, z = 1) + P(X = 1, Y = 2, Z = 2) = \frac{2}{8}$

- $P(h(x,y,z)=6) = P(x=2,y=2,z=1) + P(X=2,Y=1,Z=2) = \frac{2}{8}$
- $P(h(x,y,z)=7) = 0$
- $P(h(x,y,z)=8) = P(x=2,y=2,z=2) = \frac{1}{8}$

14. Sejam $X \sim Poisson(\lambda)$ e $Y \sim U(0,1)$, independentes. Ache a distribuicão de $Z = X + Y$.

Resp. 14)

Vamos definir $V = P(X = z - Y)\cdot \mathbf{I}_{\{Y=k\}}$, com isso $\mathbf{E}(V) = P(X = z-k)$

$f_Z(z) = P(X+Y=z) = P(X = z-Y) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(V/Y)) = \int_0^1 P(Y = k)P(X = z-k)dk = \int_0^1 \mathbf{I}_{\{k\in(0,1)\}}\cdot P(X=z-k)dk = \int_0^1 \frac{\lambda^{(z-k)}\cdot e^{-\lambda}}{(z-k)!}dk$

Mas pela definição de Poisson, se $X \sim Poisson(\lambda)$ então $f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!} & se\, x\in\mathbb{N} \\ 0 & caso\, contrario \end{cases}$

com isso, a integral se torna

$f_Z(z) = \int_0^1 \frac{\lambda^{(z-k)}\cdot e^{-\lambda}}{(z-k)!}dk = \frac{\lambda^{(z-k)}\cdot e^{-\lambda}}{(z-k)!}\mathbf{I}_{\{z-k\in\mathbb{Z}\}} = \frac{\lambda^{\lfloor z\rfloor}\cdot e^{-\lambda}}{\lfloor z\rfloor!}$, em que $\lfloor z\rfloor$ denota a parte inteira de z

15. Seja $f(x,y) = \begin{cases} c(y-x) & se\, 0<x<y<1 \\ 0 & caso\, contrário \end{cases}$

a) Ache o valor de c e as distribuicões marginais de X e Y .

Resp. a)

$1 = \int\int f(x,y)dxdy = c\cdot\int_0^1\int_0^y (y-x)dxdy = c\cdot\int_0^1 (y^2 - \frac{y^2}{2})dy = c\cdot(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}) = \frac{1}{6}\cdot c \implies c = 6$

b) As v.a. X e Y são independentes?

Resp. b)

Não, pois

*) lembrando que para o cálculo das marginais, calculamos : $f_X(x) = \int f(x,y)dy$ e $f_Y(y) = \int f(x,y)dx$

*) como 0<x<y<1, os intervalos possíveis de cada um deles é 0<x<y e x<y<1

- $f_Y(y) = \int_0^y 6(y-x)dx = 6y^2 - 6\frac{y^2}{2} = 3y^2$
- $f_X(x) = \int_x^1 6(y-x)dy = 6\frac{y^2}{2} - 6xy|_{y=x}^{y=1} = 6(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} - x + x^2) = 6(\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2})$
- $f(x,y) \neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$

16. Um dado honesto e lançado 10 vezes. Qual e a probabilidade de obter duas vezes “6”, cinco vezes “5” e três vezes “1”?

Resp. 16)

Usaremos a distribuição multinomial (Ross. 291-292), cada uma com probabilidade de sucesso de um sexto

$P(X_1 = 2, X_2 = 5, X_3 = 3) = \frac{10!}{2!5!3!} \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{6^5} \cdot \frac{1}{6^3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{1}{6^{10}}$

Este solucionário foi feito para a disciplina ME310 - 2Sem 2012. Caso encontre algum erro, por favor peça alteração informando o erro em nosso grupo de discussão:

$$https://groups.google.com/forum/?fromgroups\#!forum/me310-2s-2012$$

ou diretamente no repositório do github:

$$https://github.com/nullhack/Probabilidade2$$

Bons estudos,
Eric.