Probabilidade 2 - ME310 - Lista 4

September 14, 2015

Lembrando:

1. Geratriz de momentos: $M_X(t) = \mathbf{E}(e^{t \cdot X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t \cdot x} \cdot f(x) \cdot dx$, observe que $\frac{dM_X(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{t \cdot x} \cdot f(x) \cdot dx \implies \frac{dM_X(0)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{t \cdot 0} \cdot f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \mathbf{E}(X)$, da mesma maneira, generalizando temos $\frac{d^n M_X(t)}{dt^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot e^{t \cdot x} \cdot f(x) \cdot dx \implies \frac{d^n M_X(0)}{dt^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot e^{t \cdot 0} \cdot f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f(x) \cdot dx = \mathbf{E}(X^n)$, esta propriedade é muito útil, pois em geral, derivar é muito mais fácil que integrar, e para calcular esperança, desvio padrão, etc. precisamos do cálculo de vários $\mathbf{E}(X^n)$, imagina se fossemos calcular vários $\mathbf{E}(X^n)$ na unha... duas, três integrais.

2. $X \sim Poisson(\lambda) \implies f_X(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \implies M_X(t) = \mathbf{E}(e^{t \cdot X}) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

3. $Y \sim Bernoulli(p) \implies f_Y(n) = p^n \cdot (1-p)^{1-n}$, para $n \in \{0, 1\}$ logo $\mathbf{E}(Y) = \sum_{i=0}^{i=1} i \cdot f_Y(i) \implies M_Y(t) = \mathbf{E}(e^{t \cdot Y}) = e^{0 \cdot t} \cdot (1-p) + e^{1 \cdot t} \cdot p = p.e^t + 1 - p$

4. Geratriz de momentos conjunta (pg. 430 Ross): $M_{X,Y,Z,...}(t_X, t_Y, t_Z, ...) = \mathbf{E}(e^{t_X \cdot X + t_Y \cdot Y + t_Z \cdot Z + \dots})$, observe que tem a mesma propriedade da geratriz de momentos, isto é, derivando parcialmente em termos de t_i obtemos valores de esperança, etc.

5. $X \sim Normal(\mu, \sigma^2) \implies M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{X \cdot t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{\mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2}}$, pag. 425 Ross

6. Desigualdade de Markov: temos só esperança ($\mu > 0$) e X só assume valores positivos então $P(X > k) \leq \frac{\mu}{k}$ para todo $k > 0$

   - Prova: $\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot p(\omega) = \sum_{\omega \geq a} X(\omega) \cdot p(\omega) + \sum_{\omega < a} X(\omega) \cdot p(\omega) \geq \sum_{\omega \geq a} X(\omega) \cdot p(\omega) \geq \sum_{\omega \geq a} a \cdot p(\omega) = a \cdot \sum_{\omega \geq a} p(\omega) = a \cdot P(X \geq a) \implies \frac{\mathbf{E}(X)}{a} \geq P(X \geq a)$

7. Desigualdade de Chebyshev: temos variância ($\sigma^2 < +\infty$) e a esperança ($\mu < +\infty$) concluímos que $P(|X - \mu| > k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$

- Prova:

Usando desigualdade de Markov, temos: $P(|X-\mu| \geq k) = P(|X-\mu|^2 \geq k^2) \leq \frac{\mathbf{E}(|X-\mu|^2)}{k^2}$

8. Desigualdade de Jensen: se $g(x)$ é convexa ('boca pra cima', ou equivalente $\frac{d^2g(x)}{dx^2} > 0$ ou $g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2)$ com $\lambda \in [0,1]$), e sabemos a esperança de X, $\mathbf{E}(X) = \mu$, vale a relação $\mathbf{E}(g(X)) \geq g(\mu)$, observe que na primeira aplicamos a função sobre uma variável aleatória e na segunda sobre uma constante.

    - Prova (caso discreto, mais extensa do que acho que valha a pena colocar aqui): www.ma.utexas.edu/users/ecarneiro/DesJensen.pdf

1) As funções geratrizes de momentos das v.a. X e Y são $M_X(t) = e^{2\cdot e^t - 2}$ e $M_Y(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot e^t$.Se X e Y são independentes, calcule:

a) $\mathbf{E}(X \cdot Y)$

Resp. a)

- X e Y são independentes, logo, $\mathbf{E}(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)dy = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y) = \frac{dM_X(0)}{dt} \cdot \frac{dM_Y(0)}{dt}$
- Vamos calcular $\frac{dM_X(t)}{dt} = \frac{d(e^{2\cdot e^t - 2})}{dt} = 2 \cdot e^t \cdot e^{2\cdot e^t - 2} \implies \frac{dM_X(0)}{dt} = 2 \cdot e^0 \cdot e^{2\cdot e^0 - 2} = 2$
- Vamos calcular $\frac{dM_Y(t)}{dt} = \frac{d(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot e^t)}{dt} = \frac{1}{4} \cdot e^t \implies \frac{dM_Y(0)}{dt} = \frac{1}{4} \cdot e^0 = \frac{1}{4}$
- Portanto a solução é: $\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y) = \frac{dM_X(0)}{dt} \cdot \frac{dM_Y(0)}{dt} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

b) $P(X + Y = 2)$, dica, identifique as distribuições

Resp. b)

- de 2,3: X $Poisson(2)$, $Y \sim Bernoulli(\frac{1}{4})$
- $P(X+Y = 2) = \mathbf{E}(P(X+Y = 2/Y = n)) = P(X+Y = 2/Y = 0) \cdot P(Y = 0) + P(X + Y = 2/Y = 1) \cdot P(Y = 1)$
- sabemos que X e Y são independentes, logo $p(X + Y = m/Y = n) = \frac{p(X=m-Y \cap Y=n)}{P(Y=n)} \overset{ind.}{=} \frac{p(X=m-n) \cdot P(Y=n)}{P(Y=n)} = p(X = m - n)$
- $P(X + Y = 2) = P(X = 2) \cdot P(Y = 0) + P(X = 1) \cdot P(Y = 1) = \frac{3}{4} \cdot e^{-2} \cdot \frac{2^2}{2!} + \frac{1}{4} \cdot e^{-2} \cdot \frac{2^1}{1!} = 2 \cdot e^{-2}$

2) Dois dados são lançados. Seja X o resultado no primeiro dado e Y a soma dos resultados. Calcule a função geratriz de momentos conjunta das v.a. X e Y

Resp. 2)

- $X \sim U(1,6)$ discreta; $Z \sim U(1,6)$ discreta; dado $Y = X + Z$ queremos $M_{X,Y}(t_X, t_Y) = \mathbf{E}(e^{X \cdot t_X + Y \cdot t_Y})$
- Vamos usar um truque, sabemos que $\mathbf{E}(\mathbf{E}(f(X,Y)/X)) = \mathbf{E}(f(X,Y))$, e $\mathbf{E}(k \cdot X) = k \cdot \mathbf{E}(X)$ para k constante

- $\mathbf{E}(e^{X\cdot t_X+Y\cdot t_Y}/X=x) \overset{ind.}{=} e^{x\cdot t_X}\cdot \mathbf{E}(e^{Y\cdot t_Y}) = e^{x\cdot t_X}\cdot \sum_{y=x+1}^{y=x+6}(\frac{1}{6}\cdot e^{y\cdot t_Y}) = \frac{1}{6}\cdot e^{x\cdot t_X}\cdot(e^{(1+x)\cdot t_Y}+e^{(2+x)\cdot t_Y}+e^{(3+x)\cdot t_Y}+e^{(4+x)\cdot t_Y}+e^{(5+x)\cdot t_Y}+e^{(6+x)\cdot t_Y}) = \frac{1}{6}\cdot e^{x\cdot(t_X+t_Y)}\cdot \sum_{i=1}^{i=6}(e^{i\cdot t_Y})$

- $\mathbf{E}(e^{X\cdot t_X+Y\cdot t_Y}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(e^{X\cdot t_X+Y\cdot t_Y}/X=x)) = \mathbf{E}(\frac{1}{6}\cdot e^{x\cdot(t_X+t_Y)}\cdot\sum_{i=1}^{i=6}(e^{i\cdot t_Y})) = \frac{1}{6}\cdot\sum_{i=1}^{i=6}(e^{i\cdot t_Y})\cdot\mathbf{E}(e^{x\cdot(t_X+t_Y)}) = \frac{1}{6}\cdot\sum_{i=1}^{i=6}(e^{i\cdot t_Y})\cdot\sum_{x=1}^{x=6}(e^{x\cdot(t_X+t_Y)})\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}\cdot\sum_{i=1}^{i=6}\sum_{x=1}^{x=6}(e^{i\cdot t_Y+x\cdot(t_X+t_Y)})$

3) A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-y}\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} \ , \quad 0<y<\infty,\ x\in\mathbb{R}$$

calcule a função geratriz de momentos conjunta e as funções geratrizes de momentos individuais.

Resp. 3)

- $f_{x,y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-y}\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}\cdot \mathbf{I}_{\{0<y<\infty\}}$

- $M_{X,Y}(t_X,t_Y) = \mathbf{E}(e^{X\cdot t_X+Y\cdot t_Y}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x\cdot t_X+y\cdot t_Y}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-y}\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}\cdot \mathbf{I}_{\{0<y<\infty\}}dydx = \int_0^{+\infty} e^{y\cdot t_Y}\cdot e^{-y}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x\cdot t_X}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}dxdy$

- Mas, de 5, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x\cdot t_X}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}dx$ equivale a $M_X(t_X)$ em que $X\sim Normal(y,1) \implies M_X(t_X) = e^{y\cdot t_X+\frac{t_X^2}{2}}$

- Assim, $M_{X,Y}(t_X,t_Y) = \int_0^{+\infty} e^{y\cdot t_Y}\cdot e^{-y}\cdot e^{y\cdot t_X+\frac{t_X^2}{2}}dy = e^{\frac{t_X^2}{2}}\int_0^{+\infty} e^{y\cdot(t_Y+t_X-1)}dy = \frac{e^{\frac{t_X^2}{2}}}{1-t_Y-t_X}$, se $t_Y+t_X<1$

4) Sejam X, Y v.a. independentes, sendo $M_X(z)$,$M_Y(z)$ as funções geratrizes delas. Determine a função geratriz de momentos da v.a. $U = 4X + 7Y$

Resp. 4) $M_U(z) = \mathbf{E}(e^{zU}) = \mathbf{E}(e^{z(4X+7Y)}) = \mathbf{E}(e^{4zX} \cdot e^{7zY}) \overset{ind.}{=} \mathbf{E}(e^{4zX}) \cdot \mathbf{E}(e^{7zY}) = M_X(4z) \cdot M_Y(7z)$

5) Sejam X e Y duas v.a. independentes, cada uma com distribuição Normal. Prove que $X + Y$ e $X - Y$ são independentes se e somente se $Var(x) = Var(y)$

Resp. 5)

1. Prova da volta

    - Hipótese: $Var(x) = Var(y)$, X e Y são independentes
    - Tese: $X + Y$ e $X - Y$ são independentes

    $M_{X+Y,X-Y}(t_1, t_2) = \mathbf{E}(e^{(X+Y)\cdot t_1+(X-Y)\cdot t_2}) = \mathbf{E}(e^{X\cdot(t_1+t_2)+Y\cdot(t_1-t_2)}) \overset{ind.}{=} \mathbf{E}(e^{X\cdot(t_1+t_2)}) \cdot \mathbf{E}(e^{Y\cdot(t_1-t_2)})$

    $\mathbf{E}(e^{X\cdot(t_1+t_2)}) \cdot \mathbf{E}(e^{Y\cdot(t_1-t_2)}) = \mathbf{E}(e^{X\cdot T_1}) \cdot \mathbf{E}(e^{Y\cdot T_2}) = M_X(T_1) \cdot M_Y(T_2)$, com $T_1 = t_1 + t_2$ e $T_2 = t_1 - t_2$

    utilizando 5, temos:

    $\mathbf{E}(e^{X\cdot(t_1+t_2)}) \cdot \mathbf{E}(e^{Y\cdot(t_1-t_2)}) = M_X(T_1) \cdot M_Y(T_2) = e^{\mu_1 T_1+\sigma_1^2\frac{T_1^2}{2}} \cdot e^{\mu_2 T_2+\sigma_2^2\frac{T_2^2}{2}} = e^{\mu_1(t_1+t_2)+\sigma_1^2\frac{(t_1+t_2)^2}{2}} \cdot e^{\mu_2(t_1-t_2)+\sigma_2^2\frac{(t_1-t_2)^2}{2}}$

    utilizando a hipótese que $Var(x) = Var(y)$ temos $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (vamos chamar de σ^2), substituindo isso na equação até agora temos

    $e^{\mu_1(t_1+t_2)+\sigma^2\frac{(t_1+t_2)^2}{2}} . e^{\mu_2(t_1-t_2)+\sigma^2\frac{(t_1-t_2)^2}{2}} = e^{\mu_1(t_1+t_2)} . e^{\mu_2(t_1-t_2)} . e^{\sigma^2(t_1^2+t_2^2)} = e^{(\mu_1+\mu_2)t_1} \cdot e^{(\mu_1-\mu_2)t_2} \cdot e^{\sigma^2(t_1^2+t_2^2)} =$

    $e^{(\mu_1+\mu_2)t_1} \cdot e^{\sigma^2 t_1^2} \cdot e^{(\mu_1-\mu_2)t_2} \cdot e^{\sigma^2 t_2^2} = M_{X+Y}(t_1) \cdot M_{X-Y}(t_2)$

    Ou seja, mostramos que $M_{X+Y,X-Y}(t_1, t_2) = M_{X+Y}(t_1) \cdot M_{X-Y}(t_2) \implies$ $X + Y$ e $X - Y$ são independentes

2. Prova da ida

    - Hipótese: $X+Y$ e $X-Y$ são independentes, X e Y são independentes
    - Tese: $Var(x) = Var(y)$

temos:

$M_{X+Y,X-Y}(t_1,t_2) = \mathbf{E}(e^{(X+Y)\cdot t_1+(X-Y)\cdot t_2}) = \mathbf{E}(e^{X\cdot(t_1+t_2)+Y\cdot(t_1-t_2)}) \overset{ind.}{=} \mathbf{E}(e^{X\cdot(t_1+t_2)})\cdot\mathbf{E}(e^{Y\cdot(t_1-t_2)}) = e^{\mu_1(t_1+t_2)+\sigma_1^2\frac{(t_1+t_2)^2}{2}}\cdot e^{\mu_2(t_1-t_2)+\sigma_2^2\frac{(t_1-t_2)^2}{2}}$

por outro lado, também temos:

$M_{X+Y,X-Y}(t_1,t_2) = \mathbf{E}(e^{(X+Y)\cdot t_1+(X-Y)\cdot t_2}) \overset{hip.}{=} \mathbf{E}(e^{(X+Y)\cdot t_1})\cdot\mathbf{E}(e^{(X-Y)\cdot t_2}) = e^{(\mu_1+\mu_2)t_1}\cdot e^{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t_1^2}\cdot e^{(\mu_1-\mu_2)t_2}\cdot e^{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t_2^2}$

ambos os resultados estão certo pela nossa hipótese, ou seja:

$e^{\mu_1(t_1+t_2)+\sigma_1^2\frac{(t_1+t_2)^2}{2}}\cdot e^{\mu_2(t_1-t_2)+\sigma_2^2\frac{(t_1-t_2)^2}{2}} = e^{(\mu_1+\mu_2)t_1}\cdot e^{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t_1^2}\cdot e^{(\mu_1-\mu_2)t_2}\cdot e^{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t_2^2}$

isso impõe que:

$\mu_1(t_1+t_2)+\sigma_1^2\frac{(t_1+t_2)^2}{2}+\mu_2(t_1-t_2)+\sigma_2^2\frac{(t_1-t_2)^2}{2} = (\mu_1+\mu_2)t_1+(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t_1^2+(\mu_1-\mu_2)t_2+(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t_2^2$

eliminando os termos iguais em ambos os lados ficamos com:

$\sigma_1^2 t_1 t_2 - \sigma_2^2 t_1 t_2 = 0 \implies \sigma_1 = \sigma_2$

6) O número de automóveis vendidos por semana por uma concessionária é uma v.a. com média 15 e variância 4. O que você pode dizer sobre a probabilidade de que numa semana serão vendidos de 11 a 19 (inclusive) automóveis? Se durante uma semana foram vendidos X automóveis, então o lucro da concessionária (em mil reais) é igual a $0,5\cdot X^{11/10}$. O que você pode dizer sobre o lucro médio semanal da concessionária?

Resp. 6)

Temos a variância $\sigma^2 = 4$ e temos a média $\mu = 15$

- $P(11 \le X \le 19) = P(|X-15| \le 4) = 1 - P(|X-15| > 4) = 1 - P(|X-15| \ge 5)$
- mas $P(|X-15| \ge 5) \le \frac{4}{25} \implies -P(|X-15| \ge 5) \ge -\frac{4}{25} \implies 1 - P(|X-15| \ge 5) \ge 1 - \frac{4}{25} \ge \frac{21}{25} = \frac{84}{100}$

Para a segunda parte usamos a desigualdade de Jensen:

- $f(x) = 0,5\cdot x^{11/10}$; $\frac{df(x)}{dx} = 0,5\cdot\frac{11}{10}x^{1/10}$; $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 0,5\cdot\frac{11}{100}x^{-9/10} > 0\ \forall x$, ou seja, convexa.
- $\mathbf{E}(f(X)) \ge f(\mathbf{E}(X)) \ge 0,5\cdot\mu^{11/10} \ge 0,5\cdot 15^{11/10} = 9.832,65\ Reais/semana$

7) A nota final dos alunos de ME310 é uma v.a. com média 5,5

a) Obtenha uma cota superior para a probabilidade de tirar uma nota acima de 7,0

Resp. a)
Usando desigualdade de Markov, temos

- $P(X \geq 7) \leq \frac{5,5}{7,0} = 0,7857$

b) Além da média sabe-se que a variância da nota final é 2,5. Quantos alunos de ter a turma para que a nota média da turma esteja entre 5,0 e 6,0 com probabilidade pelo menos 0,95 (sem usar o teorema central do limite!) ?

Resp. b)

- $\mu = 5,5$; $\sigma^2 = 2,5$; $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} X_i$
- Usando a desigualdade de Chebyshev temos:
  $P(\left|\frac{S_n}{n} - 5,5\right| < 0,5) = P(|S_n - n \cdot 5,5| < n \cdot 0,5) = 1 - P(|S_n - n \cdot 5,5| \geq n \cdot 0,5) \geq 1 - \frac{Var(S_n)}{(n \cdot 0,5)^2}$
  Mas também queremos
  $P(\left|\frac{S_n}{n} - 5,5\right| < 0,5) \geq 0,95$
  portanto, basta que:
  $1 - \frac{Var(S_n)}{(n \cdot 0,5)^2} \geq 0,95 \implies Var(S_n) \leq 0,05(n \cdot 0,5)^2 \implies Var(\sum_{i=1}^{i=n} X_i) \leq 0,05(n \cdot 0,5)^2$
  Assumindo que as notas são independentes (é aqui que o professor identifica porcentagem de colas na sala =P)
  $n \cdot Var(X) \leq 0,05(n \cdot 0,5)^2 \implies n \cdot 2,5 \leq 0,05(n \cdot 0,5)^2 \implies n \geq 200$

8) Seja X uma v.a. não negativa com $\mathbf{E}(X) = 25$. O que você pode dizer sobre $\mathbf{E}(\sqrt{X})$ e $\mathbf{E}(X^3)$?

Resp. 8)

- $f(x) = \sqrt{x}$ é côncava, pois $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \leq 0 \ \forall x \geq 0$, logo, aplicando a desigualdade de Jensen (caso côncavo!!!), temos $\mathbf{E}(f(X)) \leq f(\mathbf{E}(X)) \implies \mathbf{E}(f(X)) \leq \sqrt{25} = 5$
- $f(x) = x^3$ é convexa, pois $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 6x \geq 0 \ \forall x \geq 0$, logo, aplicando a desigualdade de Jensen, temos $\mathbf{E}(f(X)) \geq f(\mathbf{E}(X)) \implies \mathbf{E}(f(X)) \geq 25^3 = 15625$

OBS: observe a importância para a desigualdade de Jensen (nesse caso) que a v.a. seja não negativa ($x \geq 0$), se ela pudesse assumir valores negativos, ambas as funções NÃO teriam convexidade para todos os valores do domínio (ex. $x = -1 \implies 6x < 0$) e consequentemente não poderíamos usar a desigualdade!

9) Seja $X \sim U(0;2)$. Ache cotas (usando as desigualdades apropriadas) e compare com os valores exatos para $P(X > 1,95)$ e $P(0,5 < X < 1,5)$

Resp. 9)

Exercício interessante para termos consciência do preço a pagar pela facilidade do uso

do enunciado temos que $\mu = 1$; $\sigma^2 = \frac{1}{3}$

- Por Markov: $P(X > 1,95) < \frac{1}{1,95} = 0,5128$; $P(0,5 < X < 1,5) = P(X < 1,5) - P(X \geq 0,5) = 1 - P(X \geq 1,5) - P(X \geq 0,5) > 1 - \frac{1,5}{1,5} - \frac{1,5}{0,5} \implies P(X \geq 1,5) + P(X \geq 0,5) < +\frac{1,5}{1,5} + \frac{1,5}{0,5} = 5,5$, o que é válido, pois $P(X_n)$ é limitado superiormente por 1, então a desigualdade continua válida.

- Por Chebyshev: $P(X > 1,95) + P(X < 0,05) = P(|X-1| > 0,95) < \frac{1}{3 \cdot 0,95^2} = 0,0876$ mas por simetria $P(X > 1,95) = P(X < 0,05)$ daí temos $P(X > 1,95) + P(X < 0,05) = 2 \cdot P(X > 1,95) < \frac{1}{3 \cdot 0,95^2} = 0,0876 \implies P(X > 1,95) < 0,0438$; $P(0,5 < X < 1,5) = 1 - P(|X-1| > 0,5) > 1 - \frac{1}{3 \cdot 0,5^2} = -0,3333$, de novo uma informação válida, porém inútil, pois sabemos que $P(A_n) \geq 0$, o que nos dá um chute mais plausível, porém igualmente inútil.

- Resolvendo na unha temos: $P(X > 1,95) = \frac{1}{2}\int_{1,95}^{2} dx = 0,025$; $P(0,5 < X < 1,5) = \frac{1}{2}\int_{0,5}^{1,5} dx = 0,5$

OBS.:9)

Outro exemplo: se em vez de $X \sim U(0;2)$ fosse $X \sim N(0;2)$ temos que $\mu = 0$; $\sigma^2 = 2$

- Por Markov: $P(X > 1,95) < 0$; $P(0,5 < X < 1,5) = P(X < 1,5) - P(X \geq 0,5) = 1 - P(X \geq 1,5) - P(X \geq 0,5) > 1 - 0 - 0 \implies P(X \geq 1,5) + P(X \geq 0,5) < 0$, não funciona? não é isso, perceba na definição em 5 que a desigualdade só é definida para v.a. com $\mu > 0$, o que não é o caso!

- Por Chebyshev: $P(|X - 0| > 1,95) < \frac{2}{1,95^2} = 0,5259$; $P(0,5 < X < 1,5) = P(X < 1,5) - P(X \geq 0,5) = 1 - P(X \geq 1,5) - P(X \geq 0,5) \geq 1 - \frac{2}{1,5^2} - \frac{2}{0,5^2}$ $P(0,5 < X < 1,5) > 1 - 0,88888 - 16 = -14,1111$; Dessa vez está tudo de acordo com a definição... está errado? não!... vale lembrar que a probabilidade de qualquer coisa está definida no intervalo $[0,1]$, ora, com certeza $P(0,5 < X < 1,5) \geq 0$ portanto, a resposta, apesar de inútil está certa, pois $P(0,5 < X < 1,5) \geq 0 \geq -14,1111$, dessa forma não foi violada nenhuma restrição! Outra coisa que podíamos ter pensado era fazer $P(|X - 0,5| < 1) > \frac{2}{1^2}$, Note que além da resposta errada, isso não satisfaz a definição da desigualdade, pois $\mu = 0 \neq 0,5$

- Usando a tabela de distribuição normal: temos $P(X > 1,95) = 0.084$; $P(0,5 < X < 1,5) = 0.217$

Este solucionário foi feito para a disciplina ME310 - 2Sem 2012. Caso encontre algum erro, por favor peça alteração informando o erro em nosso grupo de discussão:

$https://groups.google.com/forum/?fromgroups\#!forum/me310-2s-2012$

ou diretamente no repositório do github:

$$https://github.com/eric-lopes/Probabilidade2$$

Bons estudos,
Eric.