Probabilidade 2 - ME310 - Lista 0

24 de Julho de 2016

Lembrando:

1) Conjuntos disjuntos: $A \cap B = \emptyset \implies P(A \cap B) = 0$

2) Conjuntos independentes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

3) Podemos dividir qualquer conjunto em dois conjuntos disjuntos: $A = (A \cap B) \dot{\cup} (A \cap B^c)$

4) Notação para união disjunta: $A \dot{\cup} B$ **é só uma forma de deixar explicito que** $A \cap B = \emptyset$ **e que estamos fazendo uma união** $A \cup B$

5) Probabilidade de união de conjuntos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6) Probabilidade condicional: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

7) Fórmula de Bayes: $P(K) = P(K \cap W) + P(K \cap W^c) = P(K/W) \cdot P(W) + P(K/W^c) \cdot P(W^c) \implies P(K/W) = \frac{P(W/K) \cdot P(K)}{P(W/K) \cdot P(K) + P(W/K^c) \cdot P(K^c)}$

8) $P(\Omega) = 1$ **e** $P(\emptyset) = 0$

9) $X \sim Poisson(\lambda) \implies f(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$ **e** $\mathbf{E}(X) = \lambda$

10) $X \sim Exp(\lambda) \implies f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ **e** $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$

11) $X \sim Uniforme(a, b) \implies f(x) = \frac{1}{b-a}$ **e** $F_X(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$

e $\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2}$

1) Sejam A e B eventos disjuntos tais que P(A) = 0,1 e P(B)=0,4 . Qual é a probabilidade que:

a) A ou B ocorra e são disjuntos

Resp. a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \stackrel{1}{=} P(A) + P(B) - 0 = 0,1 + 0,4$

b) A ocorra mas não B e são disjuntos

Resp. b) $P(A \cap B^c) \stackrel{3}{=} P(A) - P(A \cap B) \stackrel{1}{=} P(A) - 0$

c) A ou B ocorra e são independentes

Resp. c)$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \stackrel{2}{=} P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0,1 + 0,4 - (0,1 \cdot 0,4)$

d) A ocorra mas não B e são independentes

Resp. d) $P(A \cap B^c) \stackrel{1,3,5}{=} P(A) - P(A \cap B) \stackrel{2}{=} P(A) - P(A) \cdot P(B) = 0,1 - (0,1 \cdot 0,4)$

2) Considere duas urnas, a urna A e a urna B. Urna A contém 4 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 2 bolas verdes. A urna B contém 2 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 4 bolas verdes. Uma bola é retirada da urna A e colocada na urna B. Depois, uma bola é retirada da urna B.

Para simplificar, vamos considerar que V = verde; Z = aZul; D = verDe

A notação que eu vou usar é X_y em que X representa a cor que nos interessa e Y a urna de interesse

Pelo enunciado temos $P(V_A) = 4/9$; $P(Z_A) = 3/9$; $P(D_A) = 2/9$.

a) Qual a probabilidade de que uma bola retirada da urna B seja vermelha ?

Resp. a) $P(V_B) \stackrel{7}{=} P(V_B/V_A) \cdot P(V_A) + P(V_B/V_A^c) \cdot P(V_A^c) = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{22}{90}$

b) Se uma bola vermelha é retirada da urna B, qual é a probabilidade de que uma bola vermelha tenha sido retirada da urna A ?

Resp. b) $P(V_A/V_B) \stackrel{6}{=} \frac{P(V_A \cap V_B)}{P(V_B)} = \frac{P(V_B \cap V_A)}{P(V_B)} \stackrel{6}{=} P(V_B/V_A) \cdot \frac{P(V_A)}{P(V_B)} = \frac{3}{10} \cdot \frac{4/9}{22/90} = \frac{12}{22}$

3) Demonstre as seguintes afirmações:

a) Se $P(A) = 0$ e B é um evento qualquer, então A e B são independentes:

Resp. a) $A \cap B \subset A \implies 0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$ Logo $P(A \cap B) = 0 = 0 \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$

b) Se $P(A) = 1$ e B é um evento qualquer, então A e B são independentes:

Resp. b) $P(A^c) = 0$ e $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) = P(B \cap A)$ Logo $P(B \cap A) = P(B) = 1 \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$

c) Os eventos D e D^c são independentes se e somente se $P(D) = 0$ ou $P(D) = 1$

Resp. c) Se $P(D \cap D^c) = P(\emptyset) = 0 = P(D) \cdot P(D^c)$ Então $P(D^c) = 0$ ou $P(D) = 0$

d) Ache uma condição para que o evento E seja independente dele mesmo

Resp. d) $P(E) = P(E \cap E) = P(E) \cdot P(E) \implies P(E) = P(E)^2 \implies P(E) = 0$ ou $P(E) = 1$

4) Suponha que o número de vezes que uma pessoa fica resfriada durante o um ano tem distribuição de poisson com parâmetro $\lambda = 4$. Um novo remédio pra prevenir resfriados reduz este parâmetro para $\lambda' = 2$ em 75% das pessoas e não tem efeito nos 25% restantes. Se uma pessoa tomou este remédio durante um ano e pegou resfriado 2 vezes, qual é a probabilidade de que o remédio funcione para esta pessoa ?

Minha notação: F = Funcionar ; N = Não funcionar; X = número de resfriados durante o ano

Do enunciado: $P(F) = 0,75$; $P(N) = 0,25$; $P(X = n/F) \sim Poisson(2)$; $P(X = n/N) \sim Poisson(4)$

Resp.) $P(F/X = 2) = \frac{P(F \cap X=2)}{P(X=2)} = \frac{P(X=2 \cap F)}{P(X=2)} \overset{7}{=} \frac{P(X=2/F) \cdot P(F)}{P(X=2/F) \cdot P(F) + P(X=2/N) \cdot P(N)} = \frac{\frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} \cdot 0{,}75}{\frac{e^{-2} \cdot 2^2 \cdot 0{,}75}{2!} + \frac{e^{-2} \cdot 4^2 \cdot 0{,}25}{2!}}$

5) Seja X a v.a. contínua cuja densidade de probabilidade é $f(x) = \begin{cases} k \cdot x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & cc \end{cases}$

a) Determine o valor de k

Resp. a) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 k \cdot x^3 dx \implies k = 4$

b) Calcule $P(1/4 < X < 1/2)$

Resp. b) $\int_{1/4}^{1/2} 4 \cdot x^3 dx = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{4^4}$

c) Calcule $\mathbf{E}(X)$, $Var(X)$

Resp. c) $\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x \cdot 4 \cdot x^3 dx = \int_0^1 4 \cdot x^4 dx = \frac{4}{5}$

$\mathbf{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 4 \cdot x^3 dx = \int_0^1 4 \cdot x^5 dx = \frac{4}{6}$

$Var(x) = \mathbf{E}((X - \mu)^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{4}{6} - (\frac{4}{5})^2$

d) Determine a f.d.a. de X

Resp. d) $F(n) = \int_{-\infty}^{n} f(x)dx = \int_0^n 4 \cdot x^3 dx = \begin{cases} n^4 & 0 \leq n \leq 1 \\ 0 & cc \end{cases}$

6) O tempo que um eletrodoméstico funciona (até quebrar) tem distribuição exponencial com média 3 anos. Se uma pessoa comprou um eletrodoméstico usado, calcule a probabilidade de que este vai durar pelo menos mais 2 anos.

Resp.) $P(X \geq s + t/x \geq s) = \frac{P(X \geq s+t \cap X \geq s)}{P(X \geq s)} = \frac{P(X \geq s+t)}{P(x \geq s)} \overset{10}{=} \frac{\int_{s+t}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx}{\int_s^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx} = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (s+t)}}{\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot s}} = e^{-\lambda \cdot t} = \int_t^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx = P(X \geq t)$

Do enunciado, temos que $\lambda = \frac{1}{3}$

$$\implies P(X \geq s + 2/x \geq s) = P(X \geq 2) \overset{10}{=} \int_2^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx = e^{-2 \cdot \lambda} = e^{-\frac{2}{3}}$$

7) Na fabricação de parafusos, os parafusos tem que ter diâmetro entre d_1 e d_2, senão eles são considerados defeituosos. Para controle de qualidade é feito um teste "passa - não passa", o parafuso é aceito, se ele não passa numa abertura de diâmetro d_1, mas passa numa abertura de diâmetro d_2. Suponha que o diâmetro D de um parafuso é uma v.a. Normal com média $\frac{(d_1+d_2)}{2}$ e variância $\frac{(d_2-d_1)^2}{16}$.

Do enunciado: $d \in (d_1, d_2)$ para passar no teste, e o seu tamanho é uma variável aleatória $D \sim Normal(\frac{(d_1+d_2)}{2}, \frac{(d_2-d_1)^2}{16})$, estou usando $\epsilon \to 0$

a) Ache a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso

Resp. a) $P(D < d_1 \cup D > d_2) = 1 - P(D \geq d_1 \cup D \leq d_2) = 1 - (F(d_2) - F(d_1 - \epsilon)) = 1 + F(d_1 - \epsilon) - F(d_2) = 1 + \phi(\frac{d_1-\epsilon-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{d_2-\mu}{\sigma})$

b) Se em vez de saber a variância, você soubesse que $d_1 = 40mm$, $d_2 = 50mm$ e que 10% dos parafusos são rejeitados, quanto valeria Var(D) ?

Resp. b) $P(D < d_1 \cup D > d_2) = 1 - P(D \geq d_1 \cup D \leq d_2) = 1 - (F(d_2) - F(d_1 - \epsilon)) = 1 + \phi(\frac{d_1-\epsilon-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{d_2-\mu}{\sigma}) = 0,1$ e $\mu = 45mm$, já que

$F(a) = P(X \leq a) = P(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}) = \phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

disso temos que

$1 + \phi(\frac{d_1-\epsilon-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{d_2-\mu}{\sigma}) = 0,1 \implies \phi(\frac{-5-\epsilon}{\sigma}) - \phi(\frac{5}{\sigma}) = -0,9 \implies 1 - \phi(\frac{5+\epsilon}{\sigma}) - \phi(\frac{5}{\sigma}) = -0,9 \implies 2 \cdot \phi(\frac{5+\epsilon_1}{\sigma}) = 1,9 \implies \phi(\frac{5+\epsilon_1}{\sigma}) = 0,95$

Olhando na tabela de distriuição normal temos $\phi(x) = 0,95 \implies x = 1,64 + \epsilon_2 = \frac{5+\epsilon_1}{\sigma} \implies \sigma \backsimeq \frac{5}{1,64}$

8) Suponha que o raio R de uma esfera seja uma v.a. contínua com densidade $f_r(r) = \begin{cases} 6 \cdot r \cdot (1-r) & 0 < r < 1 \\ 0 & cc \end{cases}$, ache a densidade do volume V da esfera.

Do nosso conhecimento sobre volume de sólidos temos que $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = k \cdot R^3$

Resp.) $F_V(v) = P(V \leq v) = P(k \cdot R^3 \leq v) = P(R \leq \left(\frac{v}{k}\right)^{\frac{1}{3}}) = \int_0^{\left(\frac{v}{k}\right)^{\frac{1}{3}}} 6 \cdot r \cdot (1 - r)dr$ e temos a restrição $0 \leq \left(\frac{v}{k}\right)^{\frac{1}{3}} \leq 1 \implies v \in \left(0, \frac{4 \cdot \pi}{3}\right)$

com isso temos

$F_V(v) = 3 \cdot \left(\frac{v}{k}\right)^{\frac{2}{3}} - 2 \cdot \frac{v}{k}$, como queremos a densidade, temos que derivar em relação a v

$f_V(v) = \frac{dF_V(v)}{dv} = 2 \cdot \left(\frac{v}{k}\right)^{\frac{-1}{3}} - \frac{2}{k}$ com $0 < v < \frac{4 \cdot \pi}{3}$

9) Seja X uma v.a. com f.d.a. F_X

a) Seja $Y = 1 + b \cdot X$. Ache a f.d.a. de Y (considere dois casos: b>0 e b<0).

Resp. a) Caso $b > 0$: $P(Y \leq y) = P(1 + b \cdot X \leq y) = P(X \leq \frac{y-1}{b}) = F_x(\frac{y-1}{b})$

Resp. a) Caso $b < 0$: $P(Y \leq y) = P(1+b\cdot X \leq y) = P(X \geq \frac{y-1}{|b|}) = 1-F_x(\frac{y-1}{|b|})$

b) Suponha que F_X é estritamente monótona e defina $Z = F_X(X)$. Mostre que $Z \sim U(0,1)$

Resp. b) Para resolver esse problema, basta mostrarmos que $f_Z(z) = 1$. A informação relevante aqui é que F_X é estritamente monótona, o que implica que é contínua e que possui inversa denotada por F_x^{-1} que também é contínua. Disso temos que $P(Z \leq z) = P(F_X(X) \leq z) = P(F_X^{-1}(F_X(X)) \leq F_X^{-1}(z)) = P(X \leq F_X^{-1}(z)) = P(X \leq F_X^{-1}(z)) = F_X(F_X^{-1}(z)) = z$. Como $F_z(z) = P(Z \leq z) = z$ temos que $f_Z(z) = \frac{dF_z(z)}{dz} = 1$.

c) Tome $U \sim U(0,1)$ e mostre que $W = F_X^{-1}(U)$ tem f.d.a. F_X.

Resp. c) Análogo a b)$F_W(w) = P(W \leq w) = P(F_X^{-1}(U) \leq w) = P(F_X(F_X^{-1}(U)) \leq F_X(w)) = P(U \leq F_X(w)) = \int_0^{F_X(w)} 1du = F_x(w)$. Observe que a última integral é válida pois $0 \leq F_X(w) \leq 1$, senão teríamos que avaliar intervalos de restrição.

10) Seja $U \sim Uniforme(0,1)$ e $X = ln(U)$. Ache a densidade e a função geratriz de momentos de X. Usando a função geratriz de momentos, calcule $\mathbf{E}(X)$ e $Var(X)$.

Resp.) $F_X(x) = P(X \leq x) = P(ln(U) \leq x) = P(U \leq e^x) = F_U(e^x) \overset{11}{=}$

$$\begin{cases} e^x & 0 \leq e^x \leq 1 \\ 1 & e^x > 1 \end{cases} \implies f_x(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

- Observe que $0 \leq e^x \leq 1 \iff -\infty < x \leq 0$

Com isso, podemos calcular $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \cdot x} \cdot f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} e^{t \cdot x} \cdot e^x dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(t+1) \cdot x} dx = \frac{1}{t+1}$

E com isso $\mathbf{E}(X) = \frac{dM_X(t)}{dx} = -\frac{1}{(t+1)^2}_{t=0} = -1$

E $Var(X) = \frac{d^2 M_X(t)}{dx^2} = \frac{2}{(t+1)^3}_{t=0} = 1$

11) Para quaisquer eventos A, B e C mostre que:

a) se $A \subset B$, então $B^c \subset A^c$

Resp. a) Vou usar o conhecimento prévio que $A \subset B \iff A \cup C \subset B \cup C$ para qualquer conjunto C. E que $A \subset B$ pelo enunciado

$\Omega = B^c \cup B = A \cup A^c \subset B \cup A^c \implies B^c \cup B \subset A^c \cup B \implies B^c \subset A^c$

b) $(A \bigcup B)^c \; A^c \bigcap B^c$

Resp. b) Vou usar algum conhecimento anterior também:

0)$A \cap B \subset A \cup B$

i)$A \subset B \implies B^c \subset A^c$

ii)$A \subset C$ e $B \subset C \implies A \cup B \subset C$

iii)$A \subset B$ e $A \subset C \implies A \subset C \cap B$

Dessas relações conseguimos:

iv)$B^c \cap A^c \subset B^c \stackrel{i}{\implies} B \subset (A^c \cap B^c)^c$

v)$B^c \cap A^c \subset A^c \stackrel{i}{\implies} A \subset (A^c \cap B^c)^c$

vi)$B \subset A \cup B \stackrel{i}{\implies} (A \cup B)^c \subset B^c$

vii)$A \subset A \cup B \stackrel{i}{\implies} (A \cup B)^c \subset A^c$

viii) usando 0, ii, iv, v temos: $A \cap B \subset A \cup B \subset (A^c \cap B^c)^c \stackrel{i}{\implies} A^c \cap B^c \subset (A \cap B)^c$

ix) Análogo, usando iii, vi, vii temos: $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$

Finalmente, como de viii e ix temos que $A^c \cap B^c \subset (A \cap B)^c$ e $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ então chegamos à conclusão que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

c) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$

Resp. c) Como não podemos usar para a prova essa relação que é uma das mais úteis em teoria dos conjuntos, vamos ter que usar uma carga pesada de conhecimento anterior (para economizar espaço utilizarei a notação $AB \equiv A \cap B$):

a)$A \subset B \iff AC \subset BC$

b)$A = AB^c \dot{\cup} AB$

c)$AA = A$

d)$A \subset \Omega$

e)$\Omega A = A$

f)$A \subset B \iff B^c \subset A^c$

g)$A \subset B \iff C \cup A \subset C \cup B$

h)$AA^c = \emptyset$

i)$A \subset B$ e $C \subset D \implies AC \subset BD$ e $A \cup C \subset B \cup D$

j)$AB \subset A$

k)$(A \cup B)^c = A^c B^c$

l)$A \subset A \cup B$

Com isso podemos atacar o problema. Vamos começar tentando encontrar uma relação tal que $A \bigcap (B \bigcup C) \subset (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$:

1) Considere o conjunto $(A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c)$

1.i) Vamos quebrar o problema em partes menores, aqui vamos mostrar que $(A^c \cup B^c) \cap A \subset B^c A$:

$$(A^c \cup B^c) \cap A \overset{b,h}{=} ([A^c B] \dot\cup [A^c B^c] \dot\cup [AB^c]) \cap A \iff \begin{cases} x \in A^c B \implies A^c B A \overset{h}{=} \emptyset \\ x \in A^c B^c \implies A^c B^c A \overset{h}{=} \emptyset \\ x \in AB^c \implies AB^c A \overset{c}{=} B^c A \end{cases}$$

Disso concluímos que $(A^c \cup B^c) \cap A \subset B^c A$

1.ii) Na mesma linha, vamos mostrar que $(A^c \cup C^c) \cap A \subset C^c A$:

Vamos reescrever $(A^c \cup C^c) \cap A$ como uma união disjunta interseccionada com A

$$(A^c \cup C^c) \cap A \overset{b,h}{=} ([A^c C] \dot\cup [A^c C^c] \dot\cup [AC^c]) \cap A \iff \begin{cases} x \in A^c C \implies A^c C A \overset{h}{=} \emptyset \\ x \in A^c C^c \implies A^c C^c A \overset{h}{=} \emptyset \\ x \in AC^c \implies AC^c A \overset{c}{=} C^c A \end{cases}$$

Disso concluímos que $(A^c \cup C^c) \cap A \subset C^c A$

1.1) A partir de 1.i e 1.ii e usando a, c, i temos que $(A^c \cup C^c) \cap A \subset C^c A$ e $(A^c \cup B^c) \cap A \subset B^c A \implies (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \cap A \subset B^c C^c A \overset{a}{\implies} (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \subset B^c C^c$

1.2) Agora vamos provar a relação com o complementar de A:

$(A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \cap A^c \overset{c}{\subset} [(A^c \cup B^c) \cap A^c] \cap [(A^c \cup C^c) \cap A^c] \overset{j}{\subset} A^c$

1.final) De 1.1, 1.2, g, l temos que $(A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \subset [(A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \cap A^c] \dot\cup [(A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c)] \subset A^c \cup B^c C^c$ logo

$(A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \subset A^c \cup B^c C^c \overset{k,f}{\implies} A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2) Agora basta provar a volta $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ esta etapa é relativamente menos custosa que a primeira:

2.1) $B \subset B \cup C \overset{a}{\implies} AB \subset A \cap (B \cup C)$

2.2) $C \subset B \cup C \overset{a}{\implies} AC \subset A \cap (B \cup C)$

2.final) De 2.1 e 2.2 e utilizando i temos que $AB \cup AC \subset A \cap (B \cup C)$

Resp. c final) de 1.final e 2.final temos que $AB \cup AC = A \cap (B \cup C)$

12) Numa urna há 5 bolinhas brancas, 4 verdes e 6 azuis. Escolhemos 4 bolinhas. Qual é a probabilidade de que foram escolhidas 2 bolinhas de uma cor e 2 bolinhas de outra cor? Qual é a probabilidade de que todas as bolinhas escolhidas são da mesma cor? Considere dois casos: escolha sem reposição e com reposição.

Resp. Sem reposição)

Temos que o conjunto de todas as combinações possiveis dado por Ω tem $\#\Omega = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix}$ possibilidades

Seja o conjunto A:"retirar duas bolas de uma cor e duas de outra cor", com isso $\#A = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Logo, $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \dfrac{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix}}$

Considere o conjunto B:"retirar quatro vezes a mesma cor"

$\#B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Logo, $P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \dfrac{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix}}$

Resp. Com reposição)

Temos que o conjunto de todas as combinações possiveis dado por Ω tem $\#\Omega = 15^4$ possibilidades

Seja o conjunto A:"retirar duas bolas de uma cor e duas de outra cor", com isso $\#A = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 + 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6$

Logo, $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 + 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6}{15^4} = \frac{5^2 \cdot 4^2 + 5^2 \cdot 6^2 + 4^2 \cdot 6^2}{15^4}$

Considere o conjunto B:"retirar quatro vezes a mesma cor"

$\#B = 5.5.5.5 + 6.6.6.6 + 4.4.4.4$

Logo, $P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{5.5.5.5 + 6.6.6.6 + 4.4.4.4}{15^4} = \frac{5^4 + 6^4 + 4^4}{15^4}$

13) Seja X uma variável aleatória discreta com $P(X = 0) = 0.25$, $P(X = 1) = 0.125$, $P(X = 2) = 0.125$, $P(X = 3) = 0.5$. Calcule a função de distribuiçãoo acumulada, o valor esperado e a variância de X. Determine as seguintes probabilidades: $P(0 < X < 1)$, $P(X \leq 1)$, $P(X > 2)$, $P(X > 2.5)$.

Resp.)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=-\infty}^{i=x} P(X = i) = \begin{cases} 0 & se\, x < 0 \\ 0,25 & se\, 0 \leq x < 1 \\ 0,375 & se\, 1 \leq x < 2 \\ 0,5 & se\, 2 \leq x < 3 \\ 1 & se\, x \geq 3 \end{cases}$$

Com essa definição temos:
$P(0 < X < 1) = 0,25 - 0,25 = 0$
$P(X \leq 1) = 0,375$
$P(X > 2) = 1 - F_X(2) = 0,5$
$P(X > 2.5) = 1 - F_X(2,5) = 0,5$
Para calcular a Esperança, utilizamos a definição
$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X}[P(X = x) \cdot x] = 0,125 + 2 \cdot 0,125 + 3 \cdot 0,5 = 2,125$
Para calcular a Variância, usamos a esperança de X^2
$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{x \in X}[P(X = x) \cdot x^2] = 0,125 + 4 \cdot 0,125 + 9 \cdot 0,5 = 5,625$
$Var(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = 5,625 - (2,125)^2$

14) Suponha que o tempo de viagem entre sua casa e UNICAMP tem distribuição Normal com média 50 minutos e desvio padrão 4 minutos. Se você tem uma prova as 10:00 e quer que probabilidade de chegar atrasado seja no máximo 0.5%, a que horas você deve sair de casa?

Resp.)

O tempo que demoramos é uma v.a. normal $T \sim N(50, 16)$, já que $\sigma = 4 \implies \sigma^2 = 16$.

Seja H a hora que temos que acordar:

$P(H + T > 10 \cdot 60) \leq 0,005 \implies P(H > 600 - T) \leq 0,005 \implies P(\frac{H-50}{4} > \frac{600-T-50}{4}) \leq 0,005 \implies 1 - \phi(\frac{550-H}{4}) \leq 0,005 \implies \phi(\frac{550-H}{4}) \geq 0,995$

Olhando na tabela de distribuição normal, vemos que o valor para que isso ocorra é $2,58$ daí:

$\frac{550-H}{4} = 2,58 \implies H = 539,68$, assim temos que acordar no máximo às 8:59:41

Este solucionário foi feito para a disciplina ME310 - 2Sem 2012. Caso encontre algum erro, por favor peça alteração informando o erro em nosso grupo de discussão:

$https://groups.google.com/forum/?fromgroups\#!forum/me310-2s-2012$

ou diretamente no repositório do github:

$https://github.com/nullhack/Probabilidade2$

Bons estudos,
Eric.