Probabilidade 2 - ME310 - Lista 3

September 14, 2015

Lembrando:

1. $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X/T = t))$
2. $f_{X/Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)}{f_Y(y)} \cdot f_{Y/X}(x,y)$
3. Binomial Negativa:$X \sim BinNeg(r,p)$ então $P(X=n) = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ r-1 \end{array} \right) \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$, $\forall n \geq r$
4. Variância em termos da Variância condicional (pg. 413 Ross) $Var(X) = \mathbf{E}(Var(X/Y)) + Var(\mathbf{E}(X/Y))$

1) Seja X uma v.a. Exponencial com parâmetro λ. Calcule $\mathbf{E}(X^2/X < 2)$.

Resp. 1)

- $X \sim exp(\lambda) \implies f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \mathbf{I}_{\{x \geq 0\}}$
- Seja $Y = \mathbf{I}_{\{X<2\}} \implies f_Y(y=1) = P(X<2) = \int_{-\infty}^{2} f_X(x)dx = 1-e^{-2\cdot\lambda}$
- Lembrando: $f_{X/Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)}{f_Y(y)} \cdot f_{Y/X}(x,y)$
- $f_{Y/X}(x,y) = \mathbf{I}_{\{x<2\}}$
- $\mathbf{E}(X^2/X \leq 2) = \mathbf{E}(X^2/Y=1) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{X/Y}(x,y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda\cdot x} \cdot \mathbf{I}_{\{x\geq 0\}} \cdot \mathbf{I}_{\{x<2\}}}{1-e^{-2\cdot\lambda}} dx = \frac{\lambda}{1-e^{-2\cdot\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\lambda\cdot x} \cdot \mathbf{I}_{\{x\geq 0\}} \cdot \mathbf{I}_{\{x<2\}} dx = \frac{\lambda}{1-e^{-2\cdot\lambda}}(-x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda\cdot x}}{\lambda^2}|_{x=0}^{x=2} + 2\int_0^2 x \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx) = \frac{\lambda}{1-e^{-2\cdot\lambda}} \cdot (-4 \cdot \frac{e^{-4\cdot\lambda}}{\lambda} + 2(-x \cdot \frac{e^{-\lambda\cdot x}}{\lambda^2}|_{x=0}^{x=2} + \int_0^2 \frac{e^{-\lambda\cdot x}}{\lambda^2} dx)) = \frac{\lambda}{1-e^{-2\cdot\lambda}} \cdot (-4 \cdot \frac{e^{-4\cdot\lambda}}{\lambda} - 4 \cdot \frac{e^{-2\cdot\lambda}}{\lambda^2} - 2 \cdot \frac{e^{-2\cdot\lambda}}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda^3})$

2) A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por $f(x,y) = \frac{2\cdot e^{-2x}}{x} \cdot \mathbf{I}_{\{0\leq y \leq x\}}$. Calcule $E(Y^3/X)$.

Resp. 2)

- $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\cdot e^{-2x}}{x} \cdot \mathbf{I}_{\{0\leq y\leq x\}} dy = \frac{2\cdot e^{-2x}}{x} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_{\{0\leq y\leq x\}} dy = \frac{2\cdot e^{-2x}}{x} \cdot y|_{y=0}^{y=x} = 2 \cdot e^{-2x}$
- $\mathbf{E}(Y^3/X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y^3 \cdot f_{Y/X}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^3 \cdot \frac{f(x,y)}{f_X(y)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^3 \cdot \frac{2\cdot e^{-2x}}{x} \cdot \mathbf{I}_{\{0\leq y\leq x\}} \cdot \frac{1}{2e^{-2x}} dy = \int_0^x \frac{y^3}{x} dy = \frac{y^4}{4\cdot x}|_{y=0}^{y=x} = \frac{x^3}{4}$

3) Pedro se perdeu na mata e pode escolher uma das 3 trilhas. Se ele escolher a primeira trilha, ele vai caminhar por 2 horas e voltar ao mesmo lugar, se ele escolher a segunda, ele vai caminhar por 6 horas e sairá da mata, se ele escolher a terceira, ele vai caminhar por 4 horas e voltar ao mesmo lugar. Seja X o tempo até Pedro sair da mata. Calcule $\mathbf{E}(X)$ se

a) Pedro sempre escolhe uma das trilhas ao acaso.

Resp. a)

- $\mathbf{E}(x/T=1) = \mathbf{E}(x) + 2$
- $\mathbf{E}(x/T=2) = 6$

- $\mathbf{E}(x/T=3)=\mathbf{E}(x)+4$
- $p(T=1)=p(T=2)=p(T=3)=\frac{1}{3}$
- $\mathbf{E}(x)=\mathbf{E}(\mathbf{E}(x/T=t))=\sum_{t=1}^{t=3}\mathbf{E}(X/T=t)\cdot p(T=t)=\frac{1}{3}\cdot(\mathbf{E}(X/T=1)+\mathbf{E}(X/T=2)+\mathbf{E}(X/T=3))=\frac{1}{3}\cdot(\mathbf{E}(x)+2+6+\mathbf{E}(x)+4)\implies \mathbf{E}(x)=12$

b) Pedro não pega o mesmo caminho errado duas vezes.

Resp. b)

Vamos quebrar o problema em uma árvore de probabilidades

- $\mathbf{E}(X/T_1=2)=6$
- $\mathbf{E}(X/T_1=3,T_2=2)=10$
- $\mathbf{E}(X/T_1=1,T_2=2)=8$
- $\mathbf{E}(X/T_1=1,T_2=3,T_3=2)=12$
- $\mathbf{E}(X/T_1=3,T_2=1,T_3=2)=12$
- $\mathbf{E}(X/T_1=3,T_2=1)=\mathbf{E}(\mathbf{E}(X/T_1=3,T_2=1,T_3))=1\cdot\mathbf{E}(X/T_1=3,T_2=1,T_3=2)=12$
- $\mathbf{E}(X/T_1=1,T_2=3)=\mathbf{E}(\mathbf{E}(X/T_1=1,T_2=3,T_3))=1\cdot\mathbf{E}(X/T_1=1,T_2=3,T_3=2)=12$
- $\mathbf{E}(X/T_1=1)=\mathbf{E}(\mathbf{E}(X/T_1=1,T_2))=\frac{1}{2}\cdot(\mathbf{E}(X/T_1=1,T_2=2)+\mathbf{E}(X/T_1=1,T_2=3))=\frac{1}{2}\cdot(8+12)=10$
- $\mathbf{E}(X/T_1=3)=\mathbf{E}(\mathbf{E}(X/T_1=3,T_2))=\frac{1}{2}\cdot(\mathbf{E}(X/T_1=3,T_2=1)+\mathbf{E}(X/T_1=3,T_2=2))==\frac{1}{2}\cdot(12+10)=11$
- $\mathbf{E}(X)=\mathbf{E}(\mathbf{E}(X/T))=\frac{1}{3}\cdot(\mathbf{E}(X/T_1=1)+\mathbf{E}(X/T_1=2)+\mathbf{E}(X/T_1=3))=\frac{1}{3}\cdot(10+6+11)=9$

4) Uma moeda viciada, com $P(cara)=p$ é lançada até obter 3 caras seguidas. Calcule o número médio dos lançamentos necessários.

Resp. 4) Seja $Cara=C$, $Coroa=K$

- $P(C)=p$
- $\mathbf{E}(X/L_1=K)=\mathbf{E}(X)+1$
- $\mathbf{E}(X/L_1=C,L_2=K)=\mathbf{E}(X)+2$

- $\mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = C, L_3 = C) = 3$
- $\mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = C, L_3 = K) = \mathbf{E}(X) + 3$
- $\mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = C) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = C, L_3)) = p \cdot \mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = C, L_3 = C) + (1-p) \cdot \mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = C, L_3 = K) = p \cdot 3 + (1-p) \cdot (\mathbf{E}(x) + 3)$
- $\mathbf{E}(X/L_1 = C) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2)) = p \cdot \mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = C) + (1-p) \cdot \mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = K) = p \cdot (p \cdot 3 + (1-p) \cdot (\mathbf{E}(x)+3)) + (1-p) \cdot (\mathbf{E}(X)+2)$
- $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X/L_1)) = p \cdot \mathbf{E}(X/L_1 = C) + (1-p) \cdot \mathbf{E}(X/L_1 = K) = p \cdot (p \cdot p \cdot 3 + (1-p) \cdot (\mathbf{E}(x)+3)) + (1-p) \cdot (\mathbf{E}(X)+2)) + (1-p) \cdot (\mathbf{E}(X)+1) = 3 \cdot p^2 - p^3 \cdot \mathbf{E}(X) + p - 2 \cdot p^2 + \mathbf{E}(X) + 1 \implies p^3 \cdot \mathbf{E}(X) = p^2 + p + 1 \implies \mathbf{E}(X) = \frac{p^2+p+1}{p^3}$

5) Suponha que X tem uma distribuição de Poisson com parâmetro λ, onde λ é uma v.a. Exponencial com parâmetro 1. Mostre que $P(X = n) = (\frac{1}{2})^{n+1}$.

Resp. 5)

- $X \sim Poisson(\lambda)$; $\lambda \sim Exp(1)$
- $f_\lambda(h) = e^{-h}$
- $f_{X/\lambda}(n, h) = \frac{f_{X,\lambda}(n,h)}{f_\lambda(h)} \implies f_{X,\lambda}(n, h) = f_{X/\lambda}(n, h) \cdot f_\lambda(\lambda)$
- $f_{X/\lambda}(n, h) = P(X = n/\lambda = h) = e^{-h} \cdot \frac{h^n}{n!} \cdot \mathbf{I}_{\{y \geq 0\}}$
- $P(X = n) = \mathbf{E}(P(X = n, \lambda = h)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(n,h)dh = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X/\lambda}(n,h) \cdot f_\lambda(h)dh = \int_0^\infty e^{-h} \cdot \frac{h^n}{n!} \cdot e^{-h}dh = \frac{1}{n!} \cdot (h^n \cdot \frac{e^{-2h}}{-2}|_{h=0}^{h=\infty} + \int_0^\infty n \cdot \frac{e^{-2h}}{2} \cdot h^{n-1}dh) \overset{partes,partes...nX}{=} \frac{1}{n!} \cdot \int_0^\infty n! \cdot \frac{e^{-2h}}{2^n} \cdot y^0 dh = \int_0^\infty \frac{e^{-2h}}{2^n}dh = -\frac{e^{-2h}}{2^{n+1}}|_{h=0}^{h=\infty} = \frac{1}{2^{n+1}}$

6) Numa gaveta tem 3 moedas. Seja $p_i = P(cara no\, lançamento\, da\, moeda\, i)$. Suponha que $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.4$ e $p_3 = 0.5$. Uma moeda destas 3 é escolhida ao acaso e lançada 10 vezes. Seja N o número de caras (C).

a) Calcule P(N = k), k = 0, . . . , n.

Resp. 6)

- seja N='número de caras' e M='qual das moedas está sendo jogada (i=1,2,3)'

- $P(N=k/M=i) = \begin{pmatrix} 10 \\ k \end{pmatrix} \cdot p_i^k \cdot (1-p_i)^{10-k}$

- $P(N=k) = \mathbf{E}(P(N=k/M)) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{i=3} \begin{pmatrix} 10 \\ k \end{pmatrix} \cdot p_i^k \cdot (1-p_i)^{10-k}$

b) Se depois de cada lançamento a moeda é colocada de volta (e para próximo lançamento escolhemos uma moeda ao acaso de novo) N terá distribuição binomial?

- Seja X_i='i-ésimo lançamento'
- $P(X_i = C) = \mathbf{E}(P(X_i = C/M)) = \frac{1}{3} \cdot (0.3 + 0.4 + 0.5) = 0.4$
- Dessa forma, podemos considerar que cada lançamento é uma variável aleatória com probabilidade $p_i = 0.4$, dessa forma $N \sim Bin(10, 0.4)$

7) Sejam X e Y v.a. i.i.d. Geométricas com parâmetro p. Ache a distribuição condicional de X dado X + Y = n.

Dica: Seja W o número de tentativas para obter r sucessos no total numa sequência de experimentos independentes com probabilidade de sucesso p em cada experimento. Então W tem distribuição binomial negativa com parâmetros r, p e $P(W=n) = \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$, $n = r, r+1, ...$

Resp. 7)

- A definição de uma binomial negativa: Tentativas independentes com mesma probabilidade de sucesso p. A probabilidade de acumular r acertos em n tentativas é: $P(X=n) = \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$
- $X, Y \sim Geometrica(p)$ então $P(X=n) = P(Y=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p$
- $P(X+Y=n) = P(W=n)$, 'duas sequências de experimentos independentes para acumular 2 sucessos (Geométricas=chance de acertar exatamente na i-ésima jogada=1 sucesso) com exatamente n tentativas'
- $P(X/X+Y=n) = \frac{P(X=x, X+Y=n)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=x, Y=n-x)}{P(X+Y=n)} \overset{indep}{=} \frac{P(X=x) \cdot P(Y=n-x)}{P(X+Y=n)} = \frac{(1-p)^{x-1} \cdot p \cdot (1-p)^{n-x-1} \cdot p}{P(W=n)} = \frac{(1-p)^{x-1} \cdot p \cdot (1-p)^{n-x-1} \cdot p}{\begin{pmatrix} n-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1} \cdot \mathbf{I}_{\{x \in \mathbb{N}\}}$

8) Sejam X1, X2, . . . v.a. independentes, com $\mathbf{E}(X_i) = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2$ para todo i. Seja uma v.a. independente dos X_i 's. Usando a fórmula para variância condicional, mostre que: $Var(\sum_{i=1}^{i=N} X_i) = \sigma^2\mathbf{E}(N) + \mu^2 Var(N)$

Resp. 8)

- $W = \sum_{i=1}^{i=N} X_i$
- $\mathbf{E}(X_i) = \mu$
- $Var(X_i) = \sigma^2$
- $\mathbf{E}(W/N) = \mathbf{E}(\sum_{i=1}^{i=k} X_i/N = k) = \sum_{i=1}^{i=N} \mathbf{E}(X_i) = N \cdot \mu$, pg.414 Ross
- $Var(W/N) = Var(\sum_{i=1}^{i=k} X_i/N = k) = \sum_{i=1}^{i=N} Var(X_i) = N \cdot \sigma^2$, pg.414 Ross
- $Var(W) = \mathbf{E}(Var(W/N)) + Var(\mathbf{E}(W/N)) = \mathbf{E}(N) \cdot \sigma^2 + Var(N) \cdot \mu^2$

9) Mostre que $Cov(X, E(Y/X)) = Cov(X, Y)$.

Resp. 9)

- $Cov(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X)) \cdot (Y - \mathbf{E}(Y)))$, pg. 385 Ross
- $W = \mathbf{E}(Y/X)$
- $Cov(X, W) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(W)) \cdot (W - \mathbf{E}(W))) = \mathbf{E}(XW - X\mathbf{E}(W) - \mathbf{E}(X)W + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(W)) = \mathbf{E}(XW) - \mathbf{E}(X\mathbf{E}(W)) - \mathbf{E}(\mathbf{E}(X)W) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(W) = \mathbf{E}(XW) - \mathbf{E}(X\mathbf{E}(W)) = \mathbf{E}(X\mathbf{E}(Y/X)) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \mathbf{E}(Y/X) \cdot f_X(x)dx - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y/X}(x, y)dy \cdot f_X(x)dx - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}dy \cdot f_X(x)dx - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x, y)dxdy - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = Cov(X, Y)$

10) Suponha que se o pai tem altura x cm, então o filho, quando adulto, tem altura que é uma v.a. Normal com média x + 1 e variância 4. Qual é a melhor estimativa para a altura do filho de um homem com altura 180 cm?

Resp. 10)

- $F \sim N(181, 4)$

- A melhor estimativa para o filho é $\mathbf{E}(F) = 181$, outra forma de ver isso, é procurarmos pelo ponto máximo de $f_F(a) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, ou seja, tal que $\frac{df_F(a)}{dx} = 0$ e $\frac{d^2 f_F(a)}{dx^2} < 0$, mas $\frac{df_F(a)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma^2}\right) = 0 \implies x = \mu = 181$ e $\frac{d^2 f_F(a)}{dx^2} = k \cdot (e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma^2}\right) \cdot \left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma^2}\right) + e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)) < 0$ se $x = \mu$

11) Mostre que $a = \mathbf{E}(X)$ minimiza $\mathbf{E}((X-a)^2)$

Resp. 11)

Basta mostrar que $\frac{d\mathbf{E}((X-a)^2)}{dx} = 0$ e $\frac{d^2\mathbf{E}((X-a)^2)}{dx^2} > 0$ se $a = \mathbf{E}(X)$

- Considere $\frac{d\mathbf{E}((X-a)^2)}{dx}$ mas pela propriedade linear da esperança, ao aplicar um operador linear temos $\frac{d\mathbf{E}((X-a)^2)}{dx} = \mathbf{E}(\frac{d(X-a)^2}{dx}) = \mathbf{E}(2(X-a)) = 2\mathbf{E}(X) - 2\mathbf{E}(a) = 0$ se $a = \mathbf{E}(X)$ e além disso, $\frac{d^{\mathbf{2}}\mathbf{E}((X-a)^2)}{dx^2} = \mathbf{E}(\frac{d^2(X-a)^2}{dx^2}) = \mathbf{E}(2X) = 2\mathbf{E}(X) > 0$ se $a = \mathbf{E}(X)$. Com isso mostramos que este é ponto de mínimo

Este solucionário foi feito para a disciplina ME310 - 2Sem 2012. Caso encontre algum erro, por favor peça alteração informando o erro em nosso grupo de discussão:

$https://groups.google.com/forum/?fromgroups\#!forum/me310-2s-2012$

ou diretamente no repositório do github:

$https://github.com/eric-lopes/Probabilidade2$

Bons estudos,
Eric.