Lógica de 1a Ordem

- Na Lógica Proposicional (LP) um átomo (p, q, r,...) representa uma sentença declarativa que pode ser V ou F, mas não ambos.
- Um átomo é tratado como uma entidade única. Seus atributos e componentes são desprezados
- Muitas idéias não podem ser tratadas de maneira tão simples. Existem argumentos que são válidos mas que LP garante que não são.

Lógica de 1a Ordem

- Exemplo: Representar na Lógica Proposicional

  Todo homem é mortal

  Sócrates é um homem

  Logo, Sócrates é mortal

  Se representarmos por:

  p: Todo homem é mortal

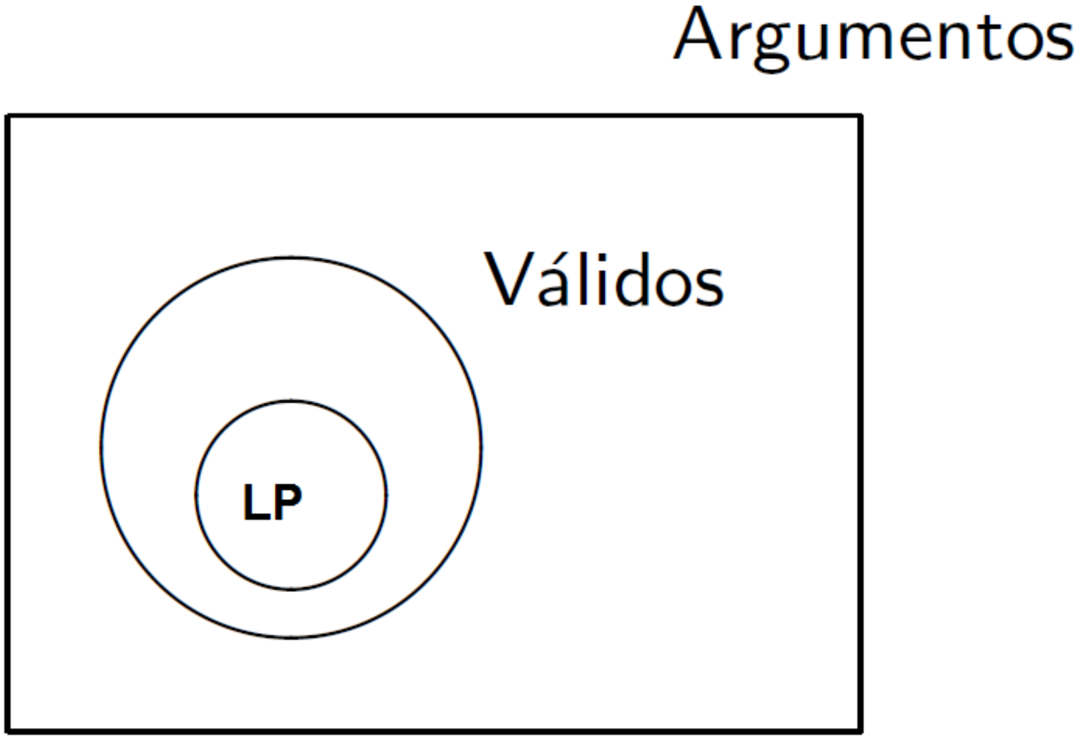
  q: Sócrates é um homem

  r: Sócrates é mortal

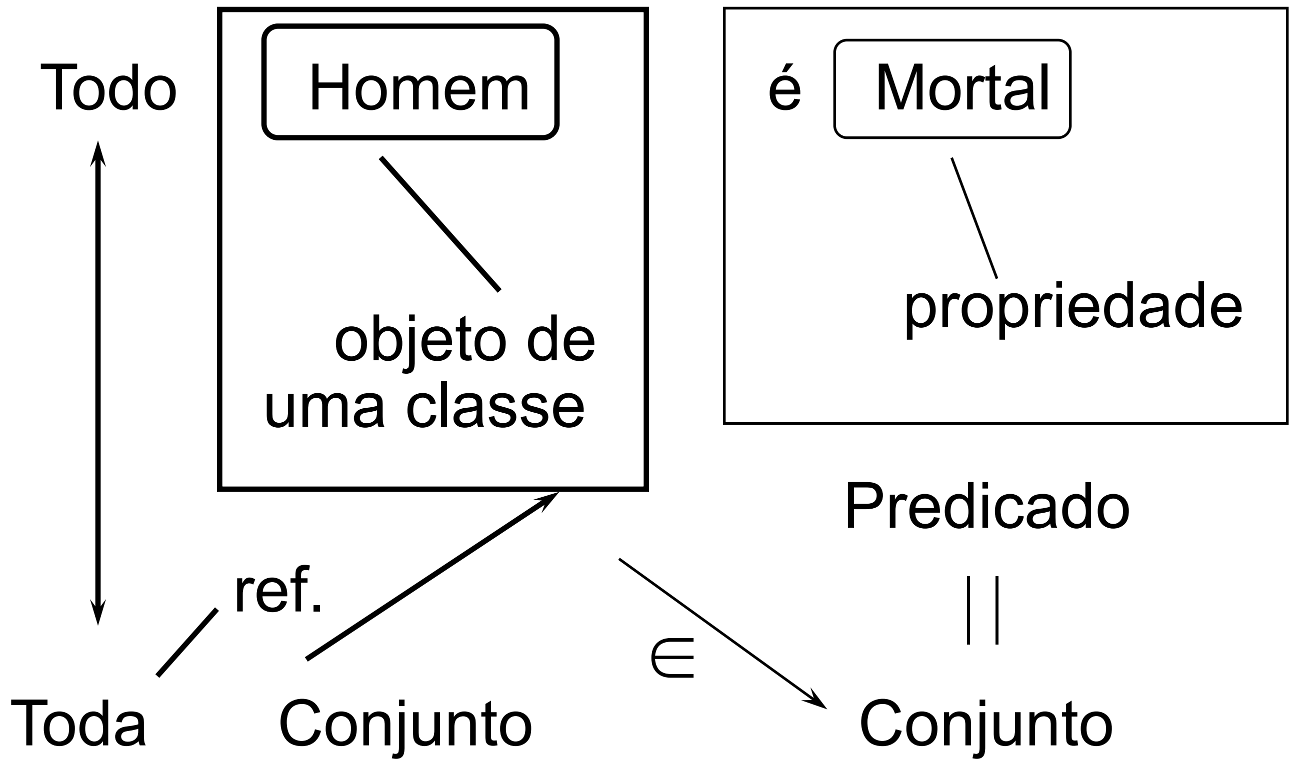
  $\{p, q\} \not\models r$

- Isso acontece porque os atributos (predicados ou características) de **p**, **q** e **r** não são considerados

Lógica de 1a Ordem



A Linguagem de primeira ordem



Toda referência ao conjunto dos homens pertence ao conjunto dos mortais.

Interpretação em aberto...

- Todo elemento pertencente ao conjunto denotado por Homem, pertence ao conjunto denotado por Mortal.

$$\forall \boxed{x} \left(\boxed{H}(x) \rightarrow \boxed{M}(x) \right)$$

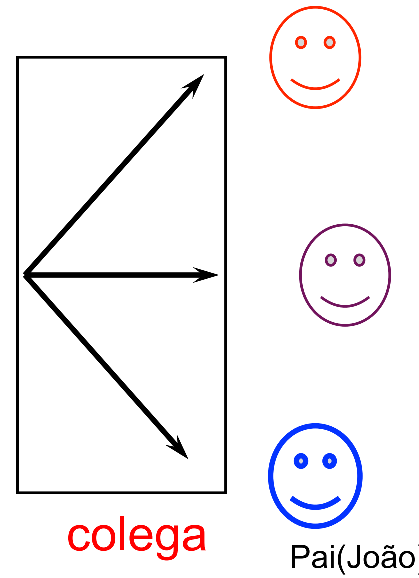
referência conjunto conjunto

Funções e Relações

O pai de João é colega de Denise

$\text{João} \xrightarrow{\text{pai}} \text{Pai(João)}$

Denise



colega(Denise, pai(João))

Formalizando

Alfabeto

Símbolos lógicos

$\{ \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists, \neg \}$

+

variáveis

Símbolos não lógicos = definidos pelo usuário

constantes

símbolos funcionais

símbolos predicativos

Interpretação e Semântica

Linguagem = <Lula, FHC, Irmão-de, Pai-de>

I associa os elementos da linguagem aos seus “significados”

I(Lula) = 

I(FHC) = 

I(Irmão-de) = 

I(Pai-de)* = 

Ver(*I*, Irmão(Lula, FHC)) = V

Ver(*I*, $\exists$x.Pai-de(Lula, x)) = V

* Como predicado (relação).

Interpretação e Semântica

Linguagem = <Lula, FHC, Irmão-de, Pai-de>

I associa os elementos da linguagem aos seus "significados"

I(Lula) = 

I(FHC) = 

I(Irmão-de) = 

I(Pai-de)* = 

Ver(*I*, Irmão(Lula, FHC)) = V

Ver(*I*, $\exists$x. Lula = Pai-de(x)) = V

* Como função.

Propriedades dos quantificadores

$\forall x\ \forall y$ is the same as $\forall y\ \forall x$ (why??)

$\exists x\ \exists y$ is the same as $\exists y\ \exists x$ (why??)

$\exists x\ \forall y$ is not the same as $\forall y\ \exists x$

$\exists x\ \forall y\ Loves(x, y)$
"There is a person who loves everyone in the world"

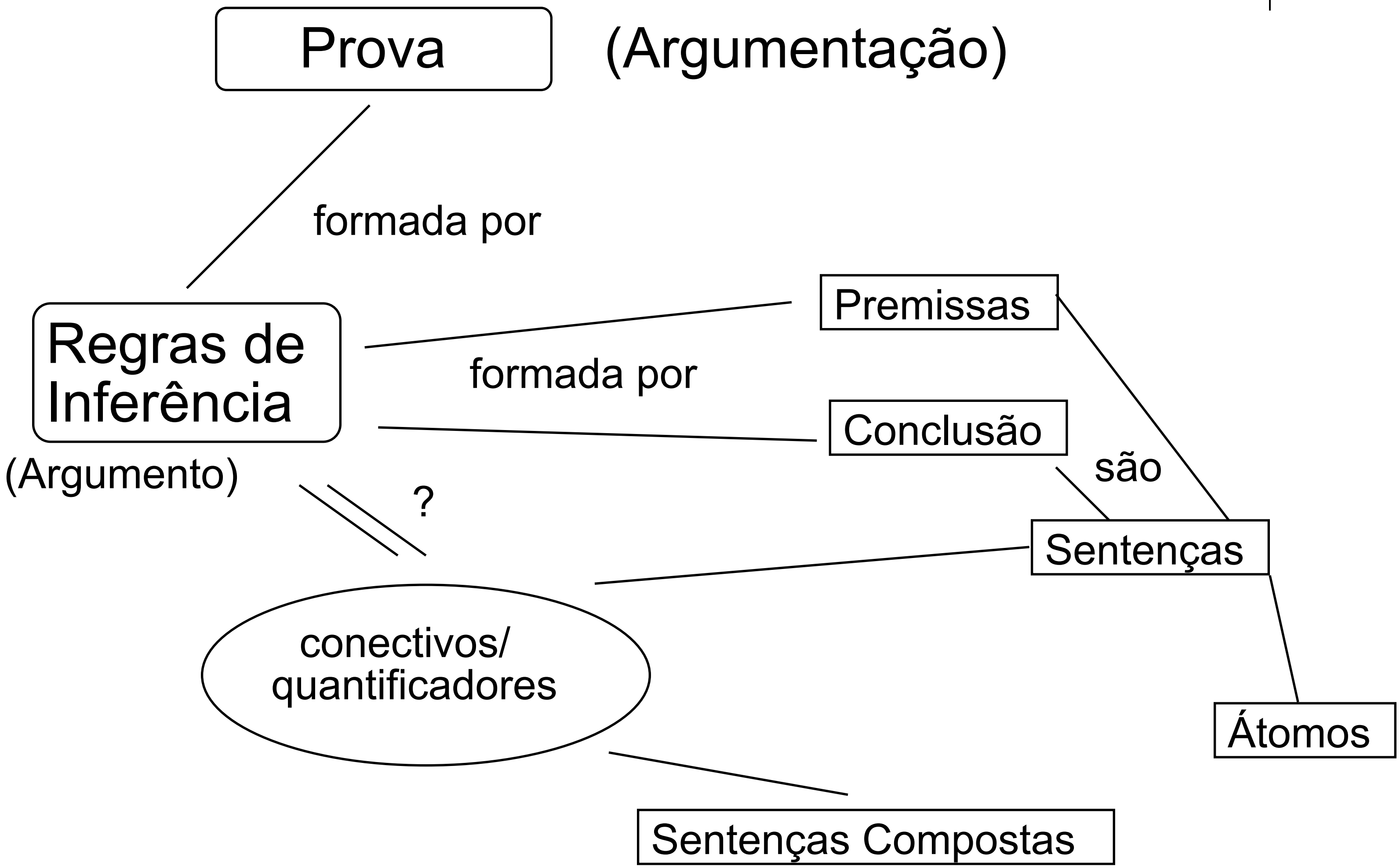
$\forall y\ \exists x\ Loves(x, y)$
"Everyone in the world is loved by at least one person"

Quantifier duality: each can be expressed using the other

$\forall x\ Likes(x, IceCream) \qquad \neg\exists x\ \neg Likes(x, IceCream)$

$\exists x\ Likes(x, Broccoli) \qquad \neg\forall x\ \neg Likes(x, Broccoli)$

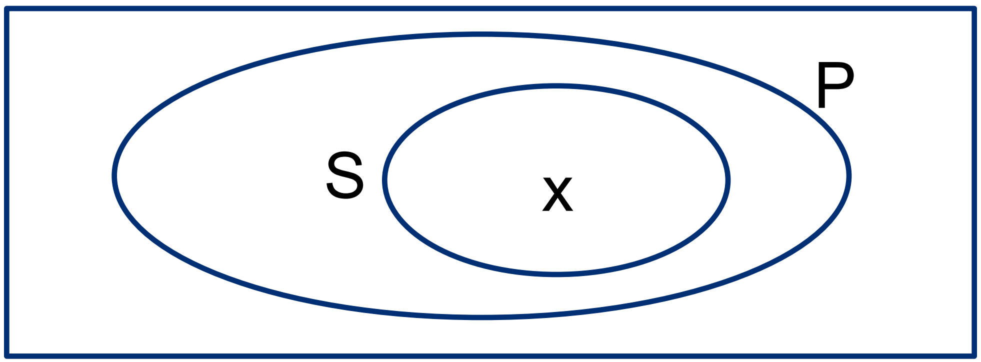
Em Lógica Matemática



Enunciados Categóricos: Universal afirmativo

Todo S é P: $\forall x\ (S(x) \rightarrow P(x))$

- Estabelece que S é um subconjunto de P



Exemplo:

Sentença....: Todos os homens são mortais

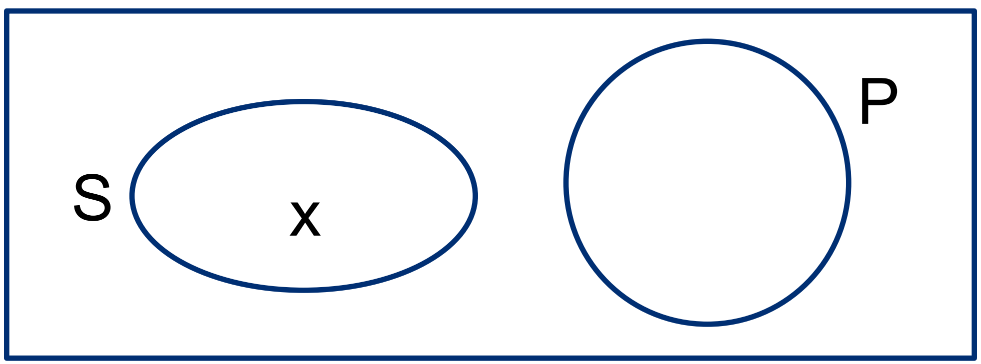
Sintaxe.......: $\forall x\ [H(x) \rightarrow M(x)]$

Semântica..: para todo x, se $x \in H$ então $x \in M$

Enunciados Categóricos: Universal negativo

Nenhum S é P $\forall x\, (S(x) \rightarrow \neg P(x))$

- Estabelece que os conjuntos S e P são disjuntos



Exemplo:

Sentença....: Nenhum homem é extra-terrestre

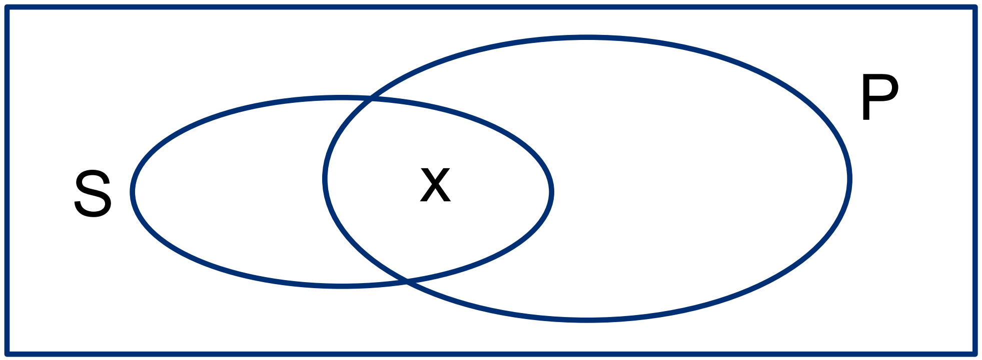
Sintaxe.......: $\forall x\, [H(x) \rightarrow \neg E(x)]$

Semântica..: para todo x, se $x \in H$ então $x \notin E$

Enunciados Categóricos: Particular afirmativo

Algum S é P $\exists x\ (S(x) \wedge P(x))$

•Estabelece que os conjuntos S e P têm intersecção não-vazia.



Exemplo:

Sentença....: Alguns homens são cultos.

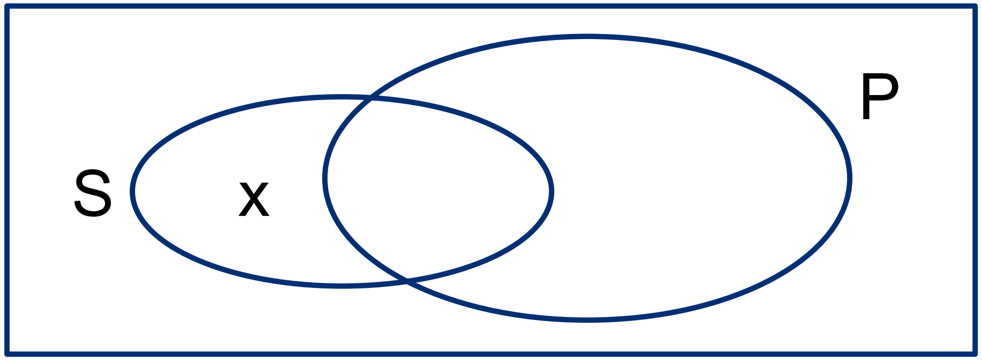
Sintaxe.......: $\exists x\ [H(x) \wedge C(x)]$

Semântica..: existe x tal que $x \in H$ e $x \in C$

Enunciados Categóricos: Particular negativo

Algum S não é P $\exists x\,(S(x) \land \neg P(x))$

- Estabelece que existem elementos em S que não estão em P.



Exemplo:

Sentença....: Alguns homens não são cultos.

Sintaxe.......: $\exists x\,[H(x) \land \neg\, C(x)]$

Semântica..: existe x tal que $x \in H$ e $x \notin C$

Exercício:

Para formalizar as sentenças que seguem, Interprete as letras C, R, V e S como:

C ≡ está chovendo; **R(x) ≡ x é uma rã;**

V(x) ≡ x é verde; **S(x) ≡ x é saltitante;**

- a – Todas as rãs são verdes. $\forall x\ (R(x) \rightarrow V(x))$
- b – Nenhuma rã é verde. $\forall x\ (R(x) \rightarrow \neg V(x))$
- c – Algumas rãs são verdes. $\exists x\ (R(x) \wedge V(x))$
- d – Toda coisa é uma rã. $\forall x\ (R(x))$
- e – Nada é uma rã. $\forall x\ (\neg R(x))$ ou $\neg \exists x\ (R(x))$
- f – Qualquer coisa é uma rã verde. $\forall x\ (R(x) \wedge V(x))$
- g – Está chovendo e algumas rãs estão saltitando. $C \wedge \exists x\ (R(x) \wedge S(x))$
- h – Somente rãs são verdes. $\forall x\ (V(x) \rightarrow R\ (x))$

Exercício: Para formalizar as sentenças que seguem considere a interpretação:

Indivíduos: Carlos, João e Maria.

Predicados: Mecânico(x) ≡ x é mecânico, Ama(x, y) ≡ x ama y

Enfermeiro(x) ≡ x é enfermeiro

1)Carlos é mecânico	$\text{Mecânico}(\text{Carlos})$
2) Carlos e João são mecânicos	$\text{Mecânico}(\text{Carlos}) \wedge \text{Mecânico}(\text{João})$
3) Carlos é mecânico ou enfermeiro	$\text{Mecânico}(\text{Carlos}) \vee \text{Enfermeiro}(\text{Carlos})$
4) Se Carlos é mecânico então Carlos não é enfermeiro	$\text{Mecânico}(\text{Carlos}) \rightarrow \neg \text{Enfermeiro}(\text{Carlos})$
5) João ama Maria	$\text{Ama}(\text{João}, \text{Maria})$
6) João ama a si próprio	$\text{Ama}(\text{João}, \text{João})$
7) Todo mundo ama João	$\forall x(\text{Ama}(x, \text{João}))$
8) Existe alguém que Maria não ama	$\exists x(\neg \text{Ama}(\text{Maria}, x))$
9) Todo mundo é amado por alguém	$\forall x \exists y(\text{Ama}(y, x))$
10) Alguém é amado por todos	$\exists x \forall y(\text{Ama}(y,x))$
11) Existe alguém que ama todo mundo	$\exists x \forall y(\text{Ama}(x,y))$
12) Alguém ama alguém	$\exists x \exists y(\text{Ama}(x,y))$