Lógica de Primeira Ordem

Alexandre Rademaker

September 15, 2011

Linguagem

Símbolos lógicos:

- "(", ")", $\rightarrow$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$.
- Variáveis
- Símbolo de igualdade

Parâmetros:

- Símbolos quantificadores: $\forall$ e $\exists$
- Símbolos predicativos de aridade n. Exemplo: pai^2.
- Símbolos de constantes (aridade zero). Exemplo: z^0
- Símbolos de funções de aridade n. Exemplo: $+^2$.

Exemplos

Linguagem dos conjutos:

$$L = \langle \in^2, =^2, \emptyset \rangle$$

Linguagem da teoria elementar dos números:

$$L = \langle 0^0, <^2, S^1, +^2, \times^2, E^2 \rangle$$

Pura predicativa:

$$L = \langle A_1^n, A_2^m, \ldots, a_1, a_2, \ldots \rangle$$

Formulas

- Uma expressão é qualquer sequência de símbolos.
- Expressões interessantes: **termos** e **fórmulas bem formadas** (wff).
- Termos são entendidos como os nomes e pronomes da linguagem, dão nomes à objetos.
- Fórmulas atômicas não têm quantificadores nem conectivos.
- Fórmulas são afirmações sobre objetos.

Formulas

- Uma expressão é qualquer sequência de símbolos.
- Expressões interessantes: **termos** e **fórmulas bem formadas** (wff).
- Termos são entendidos como os nomes e pronomes da linguagem, dão nomes à objetos.
- Fórmulas atômicas não têm quantificadores nem conectivos.
- Fórmulas são afirmações sobre objetos.

Formulas

- Uma expressão é qualquer sequência de símbolos.
- Expressões interessantes: **termos** e **fórmulas bem formadas** (wff).
- Termos são entendidos como os nomes e pronomes da linguagem, dão nomes à objetos.
- Fórmulas atômicas não têm quantificadores nem conectivos.
- Fórmulas são afirmações sobre objetos.

Formulas

- Uma expressão é qualquer sequência de símbolos.
- Expressões interessantes: **termos** e **fórmulas bem formadas** (wff).
- Termos são entendidos como os nomes e pronomes da linguagem, dão nomes à objetos.
- Fórmulas atômicas não têm quantificadores nem conectivos.
- Fórmulas são afirmações sobre objetos.

Formulas

- Uma expressão é qualquer sequência de símbolos.
- Expressões interessantes: **termos** e **fórmulas bem formadas** (wff).
- Termos são entendidos como os nomes e pronomes da linguagem, dão nomes à objetos.
- Fórmulas atômicas não têm quantificadores nem conectivos.
- Fórmulas são afirmações sobre objetos.

Termos

Podem ser construídos a partir de **constantes** e **variáveis** sob os quais são aplicados um ou mais símbolos funcionais.

$$+(v_1, S(0))$$

$$S(S(S(0)))$$

$$+(E(v_1, S(S(0))), E(v_2, S(S(0))))$$

Fórmulas

Fórmulas atômicas tem função similar aos símbolos sentênciais na Lógica Proposicional. Tem a forma:

$$P(t_1, \ldots, t_n)$$

onde P é um símbolo predicativo de aridade n e $t_1, \ldots, t_n$ são termos.

Por exemplo, $v_1 = v_2$ (ou $= (v_1, v_2)$) são fórmulas. Ou ainda, $\in (v_5, v_3)$ na linguagem dos conjuntos.

Se α e β são fórmulas atômicas, então são WFF: $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\neg\alpha$, $\alpha \to \beta$, $\forall v_i \alpha$ e $\exists v_i \alpha$.

- Não é WFF: $\neg v_3$ ou $v_1 \to v_2$
- É WFF: $\forall v_1((\neg\forall v_3(\neg(v_3 \in v_1))) \to (v_1 \in v4))$

Variáveis

$$\forall v_2(v_2 \in v_1) \qquad \exists v_1 \forall v_2 v_2 \in v_1$$

A segunda, formaliza a frase "existe um conjunto que todo conjunto é membro dele". A primeira, "todo conjunto é membro de ...".

Seja x uma variável, dizemos que x é livre em α se:

- Se α é atômica, x é livre em α se x é um símbolo em α.
- x é livre em $\neg\alpha$ se é livre em α.
- x é livre em $\alpha \to \beta$ se é livre em α e livre em β.
- x é livre em $\forall v_i \alpha$ se é livre em α e $x \neq v_i$.

Sentenças? Fórmulas sem variáveis livres!

Estruturas

Nos dizem:

- A qual coleção de coisas os quantificadores $\forall$ e $\exists$ referem-se.
- O que os símbolos de predicados e funções denotam.

Formalmente, uma estrutura $\mathfrak{A}$ para uma linguagem FOL associa:

- Ao quantificador $\forall$ um conjunto não vazio $|\mathfrak{A}|$ denominado **universo** ou **domínio.**
- A cada símbolo predicativo P de aridade n, uma relação de aridade n, $P^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^n$.
- A cada símbolo funcional f de aridade n, uma função $f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$.
- A cada símbolo constante c, um membro $c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$.

Estruturas

Seja a linguagem dos conjuntos $L = \langle \in^2 \rangle$. Podemos considerar a estrutura $\mathfrak{A}$ que:

- $|\mathfrak{A}| =$ o conjunto dos números naturais.
- $\in^{\mathfrak{A}} =$ o conjunto dos pares (m, n) tal que $m < n$.

Como a estrutura $\mathfrak{A}$ nos permite interpretar (ler) a sentença:

$$\exists x \forall y \neg (y \in x)$$

Estruturas

Seja a linguagem $L = \langle \in^2 \rangle$ (mesma) e o parâmetro $\forall$. Considere a estrutura finita $\mathfrak{B}$ com universo $|\mathfrak{B}| = \{a, b, c, d\}$. Suponha a relação binária

$$E^{\mathfrak{B}} = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, c)\}$$

que pode ser desejada como um **grafo**

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left] & b \arrow[l, bend left] \arrow[r] & c \arrow[loop below] & d
\end{tikzcd}$$

A sentença $\exists x \forall y \neg yEx$ na estrutura $\mathfrak{B}$ pode ser interpretada como? É verdadeira?

Semântica

Se σ é uma sentença. Como dizer que "σ é verdade em $\mathfrak{A}$"? Sem a necessidade de traduzir σ para português?

$$\models_{\mathfrak{A}} \sigma$$

Para uma WFF qualquer, precisamos de:

$$s : V \to |\mathfrak{A}|$$

Para então, informalmente definir "$\mathfrak{A}$ satisfaz σ com s" representado por:

$$\models_{\mathfrak{A}} \sigma[s]$$

se e somente se da tradução de σ determinada por $\mathfrak{A}$, onde a variável x é traduzida por $s(x)$ se x é livre, é verdade.

Semântica

Formalmente, precisamos definir a interpretação de termos e fórmulas por uma estrutura...

Interpretação de termos

Definimos a função:

$$\overline{s} : T \to |\mathfrak{A}|$$

que mapea termos para elementos do universo de $\mathfrak{A}$. Como:

1. Para cada variável x, $\overline{s}(x) = s(x)$.
2. Para cada constante c, $\overline{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$.
3. Se $t_1, \ldots, t_n$ são termos e f é uma fução, então

$$\overline{s}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathfrak{A}}(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n))$$

$\overline{s}$ depende de $\mathfrak{A}$ e s. Notação alternativa para $\overline{s}(t)$ poderia ser $t^{\mathfrak{A}}[s]$.

Interpretação de fórmulas

Fórmulas atômicas. Definimos explicitamente, dois casos:

1. Igualdade onde $=$ significa $=$, não é um parâmetro aberto à interpretações.

$$\models_{\mathfrak{A}} t_1 = t_2\ [s] \ \text{ sse } \ \overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)$$

2. Para um predicado n-ário P:

$$\models_{\mathfrak{A}} P(t_1, \ldots, t_n)\ [s] \ \text{ sse } \ \langle \overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n) \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$$

Interpretação de fórmulas

Outras WFF. Definimos recursivamente:

1. $\models_{\mathfrak{A}} \neg\phi\ [s]$ sse $\not\models_{\mathfrak{A}} \phi\ [s]$
2. $\models_{\mathfrak{A}} \phi \to \psi\ [s]$ sse ou $\not\models_{\mathfrak{A}} \phi\ [s]$ ou $\models_{\mathfrak{A}} \psi\ [s]$ ou ambos.
3. $\models_{\mathfrak{A}} \phi \wedge \psi\ [s]$ sse $\models_{\mathfrak{A}} \phi\ [s]$ e $\models_{\mathfrak{A}} \psi\ [s]$.
4. $\models_{\mathfrak{A}} \phi \vee \psi\ [s]$ sse $\models_{\mathfrak{A}} \phi\ [s]$ ou $\models_{\mathfrak{A}} \psi\ [s]$.
5. $\models_{\mathfrak{A}} \forall x \psi\ [s]$ sse para todo $d \in |\mathfrak{A}|$, temos $\models_{\mathfrak{A}} \psi\ [s(x|d)]$.

Onde $s(x|d)$ é a função s com uma diferença, para a variável x, ela retorna d.

$$s(x|d)(y) = \begin{cases} s(y) & \text{se } y \neq x \\ d & \text{se } y = x \end{cases}$$