LPO - Lógica de Primeira Ordem

Estruturas

Alexandre Rademaker

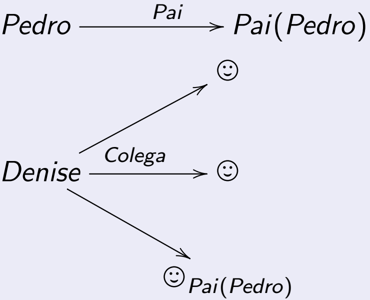
March 9, 2017

$\boxed{\text{Todo}}$	$\boxed{\text{homem}}$	$\boxed{\text{é mortal}}$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
referência	objeto de um conjunto	propriedade

- ☞ Toda referência ao conjunto dos homens é uma referência ao conjunto dos mortais.
- ☞ Todo elemento pertencente ao conjunto denotado por Homem pertence ao conjunto denotado por Mortal.
- ☞ $\forall x(H(x) \to M(x))$

Funções e Relações

O pai de Pedro é colega de Denise



Colega(Pai(Pedro), Denise)

Formalizando

Símbolos Lógicos
($\{\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow\}$ +
variáveis)

Alfabeto

símbolos não lógicos
(definidos pelo usuário)

constantes

símbolos
funcionais

símbolos
predicativos

Interpretação e semântica

Linguagem = ¡João, Maria, paiDe^2, irmãoDe^2¿

I associa os elementos da linguagem ao seu significado:

I(João): 🍃 I(Maria): $\heartsuit$

$I(\text{irmãoDe}) = \{< \heartsuit, 🍃 >, < ※, 🍃 > \ldots\}$

$I(\text{paiDe}) = \{< \sharp, \heartsuit >, < 🍃, \circledast > \ldots\}$

Posso atribuir valores verdade à sentenças

- $\forall x \forall y A$ é a mesma coisa que $\forall y \forall x A$
- $\exists x \exists y A$ é a mesma coisa que $\exists y \exists x A$
- $\forall x \exists y A$ não é a mesma coisa que $\exists y \forall x A$
- $\exists y \forall x Adora(x, y)$ – Tem uma pessoa que é adorada por todos.
- $\forall x \exists y Adora(x, y)$ – Todo mundo adora alguém.
- *Dualidade*: cada quantificador pode ser expresso em função do outro:
    - $\forall x$ Adora(x, sorvete) $\neg \exists x \neg$ Adora(x, sorvete)
    - $\exists x$ Adora(x, jiló) $\neg \forall x \neg$ Adora(x, jiló)

- $\forall x \forall y A$ é a mesma coisa que $\forall y \forall x A$
- $\exists x \exists y A$ é a mesma coisa que $\exists y \exists x A$
- $\forall x \exists y A$ não é a mesma coisa que $\exists y \forall x A$
- $\exists y \forall x Adora(x, y)$ – Tem uma pessoa que é adorada por todos.
- $\forall x \exists y Adora(x, y)$ – Todo mundo adora alguém.
- *Dualidade*: cada quantificador pode ser expresso em função do outro:
  - $\forall x$ Adora(x, sorvete) $\neg \exists x \neg$ Adora(x, sorvete)
  - $\exists x$ Adora(x, jiló) $\neg \forall x \neg$ Adora(x, jiló)

- $\forall x \forall y A$ é a mesma coisa que $\forall y \forall x A$
- $\exists x \exists y A$ é a mesma coisa que $\exists y \exists x A$
- $\forall x \exists y A$ <u>não</u> é a mesma coisa que $\exists y \forall x A$
- $\exists y \forall x Adora(x, y)$ – Tem uma pessoa que é adorada por todos.
- $\forall x \exists y Adora(x, y)$ – Todo mundo adora alguém.
- *Dualidade*: cada quantificador pode ser expresso em função do outro:
  - $\forall x$ Adora(x, sorvete) $\neg \exists x \neg$ Adora(x, sorvete)
  - $\exists x$ Adora(x, jiló) $\neg \forall x \neg$ Adora(x, jiló)

- $\forall x \forall y A$ é a mesma coisa que $\forall y \forall x A$
- $\exists x \exists y A$ é a mesma coisa que $\exists y \exists x A$
- $\forall x \exists y A$ <u>não</u> é a mesma coisa que $\exists y \forall x A$
- $\exists y \forall x Adora(x, y)$ – Tem uma pessoa que é adorada por todos.
- $\forall x \exists y Adora(x, y)$ – Todo mundo adora alguém.
- *Dualidade*: cada quantificador pode ser expresso em função do outro:
  - $\forall x$ Adora(x, sorvete) $\neg \exists x \neg$ Adora(x, sorvete)
  - $\exists x$ Adora(x, jiló) $\neg \forall x \neg$ Adora(x, jiló)

- $\forall x \forall y A$ é a mesma coisa que $\forall y \forall x A$
- $\exists x \exists y A$ é a mesma coisa que $\exists y \exists x A$
- $\forall x \exists y A$ <u>não</u> é a mesma coisa que $\exists y \forall x A$
- $\exists y \forall x Adora(x, y)$ – Tem uma pessoa que é adorada por todos.
- $\forall x \exists y Adora(x, y)$ – Todo mundo adora alguém.
- *Dualidade*: cada quantificador pode ser expresso em função do outro:
  - $\forall x$ Adora(x, sorvete) $\neg\exists x \neg$ Adora(x, sorvete)
  - $\exists x$ Adora(x, jiló) $\neg\forall x \neg$ Adora(x, jiló)

- $\forall x \forall y A$ é a mesma coisa que $\forall y \forall x A$
- $\exists x \exists y A$ é a mesma coisa que $\exists y \exists x A$
- $\forall x \exists y A$ <u>não</u> é a mesma coisa que $\exists y \forall x A$
- $\exists y \forall x Adora(x, y)$ – Tem uma pessoa que é adorada por todos.
- $\forall x \exists y Adora(x, y)$ – Todo mundo adora alguém.
- *Dualidade*: cada quantificador pode ser expresso em função do outro:
  - $\forall x$ Adora(x, sorvete) $\neg\exists x\neg$ Adora(x, sorvete)
  - $\exists x$ Adora(x, jiló) $\neg\forall x\neg$ Adora(x, jiló)

- $\forall x \forall y A$ é a mesma coisa que $\forall y \forall x A$
- $\exists x \exists y A$ é a mesma coisa que $\exists y \exists x A$
- $\forall x \exists y A$ não é a mesma coisa que $\exists y \forall x A$
- $\exists y \forall x Adora(x, y)$ – Tem uma pessoa que é adorada por todos.
- $\forall x \exists y Adora(x, y)$ – Todo mundo adora alguém.
- *Dualidade*: cada quantificador pode ser expresso em função do outro:
  - $\forall x$ Adora(x, sorvete) $\neg\exists x\neg$ Adora(x, sorvete)
  - $\exists x$ Adora(x, jiló) $\neg\forall x\neg$ Adora(x, jiló)

- $\forall x \forall y A$ é a mesma coisa que $\forall y \forall x A$
- $\exists x \exists y A$ é a mesma coisa que $\exists y \exists x A$
- $\forall x \exists y A$ <u>não</u> é a mesma coisa que $\exists y \forall x A$
- $\exists y \forall x Adora(x, y)$ – Tem uma pessoa que é adorada por todos.
- $\forall x \exists y Adora(x, y)$ – Todo mundo adora alguém.
- *Dualidade*: cada quantificador pode ser expresso em função do outro:
  - $\forall x$ Adora(x, sorvete) $\neg\exists x \neg$ Adora(x, sorvete)
  - $\exists x$ Adora(x, jiló) $\neg\forall x \neg$ Adora(x, jiló)

Exercício

Reescreva as sentenças abaixo de forma que, se houver a ocorrência de uma negação, ela só ocorrerá em um predicado atômico:

- $\neg(\exists x(P(x) \to \neg Q(x)))$
- $\neg(\forall x(P(x) \to (Q(x) \vee R(x))))$
- $\neg((\exists x P(x)) \wedge (\forall x R(x)))$
- $\neg(\forall x(Q(x) \to \exists y(A(y) \wedge R(x, y))))$
- $\neg(\forall x \exists y(P(x) \wedge \neg(Q(x) \vee R(x))))$

O que quero dizer com a sentença

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))?$$

O que quero dizer com a sentença

$$\forall x(P(x) \to Q(x))?$$

essa sentença é verdadeira ou falsa?

- Sentenças quantificadas são avaliadas como verdadeiras ou falsas em relação a um universo de discurso (ou domínio).
- Além disso, na medida em que tratamos também com objetos e suas propriedades ou relações, devemos também indicar claramente a qual objeto do universo discurso estamos nos referindo e o significado da propriedade ou relação considerada.
- Esse é o papel de uma *estrutura*, que podemos pensar como sendo uma tradução da linguagem formal para o Português.

Uma estrutura da LPO nos diz:

- a que coleção se referem os quantificadores;
- o que os outros parâmetros denotam.

Definição

Um *parâmetro* é:
um quantificador
um predicado
uma constante
uma função

Definição

Uma *estrutura* $\mathcal{U} =< |\mathcal{U}|, \mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{F} >$ para a nossa linguagem da LPO é uma função cujo domínio é o conjunto de parâmetros e é tal que:

- $\mathcal{U}$ associa a cada quantificador um conjunto não-vazio $|\mathcal{U}|$, chamado o universo de $\mathcal{U}$;
- $\mathcal{U}$ associa a cada predicado *n*-ário P uma relação *n*-ária $P^{\mathcal{U}} \subseteq |\mathcal{U}|^{\mathcal{U}}$, i.e., $P^{\mathcal{U}}$ é um conjunto de *n*-uplas de membros do universo;
- $\mathcal{U}$ associa a cada constante c um membro $c^{\mathcal{U}}$ do universo $|\mathcal{U}|$;
- $\mathcal{U}$ associa a cada função *n*-ária f uma operação *n*-ária em $|\mathcal{U}|$, i.e., $f^{\mathcal{U}} : |\mathcal{U}|^n \to |\mathcal{U}|$

Na presença de uma estrutura, podemos traduzir sentenças da linguagem formal para o Português e tentar dizer se essas traduções são verdadeiras ou falsas.

Exemplo

Considere a linguagem para a Teoria dos Conjuntos, cujo único parâmetro, além de $\forall$ e $\exists$, é $<$:

- $|\mathcal{U}| :=$ o conjunto dos números naturais
- $[<(m,n)]^{\mathcal{U}}$: m é menor que n.

- $\exists x \forall y (\neg < (y,x))$

Na presença de uma estrutura, podemos traduzir sentenças da linguagem formal para o Português e tentar dizer se essas traduções são verdadeiras ou falsas.

Exemplo

Considere a linguagem para a Teoria dos Conjuntos, cujo único parâmetro, além de $\forall$ e $\exists$, é $<$:

- $|\mathcal{U}| :=$ o conjunto dos números naturais
- $[<(m,n)]^{\mathcal{U}}$: m é menor que n.

- $\exists x \forall y (\neg < (y,x))$
- Existe um número que é menor que (ou igual a) todos os outros.
- Sabemos que essa sentença é verdadeira.
- Dizemos então que $\exists x \forall y (\neg < (y,x))$ é verdadeira em $\mathcal{U}$
- ou que $\mathcal{U}$ é um *modelo* da sentença.

Exemplo

Consider the binary relation **is-a-factor-of** on the domain $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- List all the ordered pairs in the relation.
- Display the relation as a directed graph.
- Display the relation in tabular form.
- Is the relation reflexive? symmetric? transitive?

Dada uma estrutura $\mathcal{U}$, uma valoração v para essa estrutura, é uma função que vai do conjunto das sentenças da linguagem da LPO em $\{V, F\}$, tal que:

- $v(P(t_1, \ldots, t_n)) = \begin{cases} V & \text{se a propriedade } P^{\mathcal{U}} \text{ for satisfeita pelos} \\ & \text{pelos objetos } t_1^{\mathcal{U}}, \ldots, t_n^{\mathcal{U}}\text{, nessa ordem} \\ F & \text{caso contrário} \end{cases}$
- $v(\forall A) = \begin{cases} V & \text{se } v(A[x \leftarrow c]) = V \text{ para cada objeto } c^{\mathcal{U}} \in |\mathcal{U}| \\ F & \text{caso contrário (o que isso significa?)} \end{cases}$
- $v(\exists A) = \begin{cases} V & \text{se } v(A[x \leftarrow c]) = V \text{ para algum objeto } c^{\mathcal{U}} \in |\mathcal{U}| \\ F & \text{caso contrário (o que isso significa?)} \end{cases}$
- Os conectivos são definidos como em LP.

Exemplo

$|\mathcal{U}|$ é o conjunto dos números naturais
$a^{\mathcal{U}}: 2$
$b^{\mathcal{U}}: 3$
$c^{\mathcal{U}}: 4$
$P^{\mathcal{U}}(x)$ é par
$Q^{\mathcal{U}}(x)$: x é ímpar
$R^{\mathcal{U}}(x)$: x é primo

Vamos avaliar as seguintes sentenças de acordo com essa interpretação:

- $v(P(a)) = V$;
- $v(P(b)) = F$;
- $v(\exists x(P(x) \land R(x))) = V$;
- $v(\forall x(P(x) \to R(x))) = F$;
- $v(\exists x(P(x) \land \neg R(x)) = V$;
- $v(\forall x(P(x) \lor Q(x))) = V$.

Exemplo

$|\mathcal{U}|$ é o conjunto dos números naturais
$a^{\mathcal{U}}$: 2
$b^{\mathcal{U}}$: 3
$c^{\mathcal{U}}$: 4
$P^{\mathcal{U}}(x)$ é par
$Q^{\mathcal{U}}(x)$: x é ímpar
$R^{\mathcal{U}}(x)$: x é primo

Vamos avaliar as seguintes sentenças de acordo com essa interpretação:

- $v(P(a)) = V$;
- $v(P(b)) = F$;
- $v(\exists x(P(x) \wedge R(x))) = V$;
- $v(\forall x(P(x) \to R(x))) = F$;
- $v(\exists x(P(x) \wedge \neg R(x)) = V$;
- $v(\forall x(P(x) \vee Q(x))) = V$.

Exemplo

$|\mathcal{U}|$ é o conjunto dos números naturais
$a^{\mathcal{U}}: 2$
$b^{\mathcal{U}}: 3$
$c^{\mathcal{U}}: 4$
$P^{\mathcal{U}}(x)$ é par
$Q^{\mathcal{U}}(x)$: x é ímpar
$R^{\mathcal{U}}(x)$: x é primo

Vamos avaliar as seguintes sentenças de acordo com essa interpretação:

- $v(P(a)) = V$;
- $v(P(b)) = F$;
- $v(\exists x(P(x) \wedge R(x))) = V$;
- $v(\forall x(P(x) \rightarrow R(x))) = F$;
- $v(\exists x(P(x) \wedge \neg R(x)) = V$;
- $v(\forall x(P(x) \vee Q(x))) = V$.

Exemplo

$|\mathcal{U}|$ é o conjunto dos números naturais
$a^{\mathcal{U}}: 2$
$b^{\mathcal{U}}: 3$
$c^{\mathcal{U}}: 4$
$P^{\mathcal{U}}(x)$ é par
$Q^{\mathcal{U}}(x)$: x é ímpar
$R^{\mathcal{U}}(x)$: x é primo

Vamos avaliar as seguintes sentenças de acordo com essa interpretação:

- $v(P(a)) = V$;
- $v(P(b)) = F$;
- $v(\exists x(P(x) \wedge R(x))) = V$;
- $v(\forall x(P(x) \to R(x))) = F$;
- $v(\exists x(P(x) \wedge \neg R(x)) = V$;
- $v(\forall x(P(x) \vee Q(x))) = V$.

Exemplo

$|\mathcal{U}|$ é o conjunto dos números naturais
$a^{\mathcal{U}}$: 2
$b^{\mathcal{U}}$: 3
$c^{\mathcal{U}}$: 4
$P^{\mathcal{U}}(x)$ é par
$Q^{\mathcal{U}}(x)$: x é ímpar
$R^{\mathcal{U}}(x)$: x é primo

Vamos avaliar as seguintes sentenças de acordo com essa interpretação:

- $v(P(a)) = V$;
- $v(P(b)) = F$;
- $v(\exists x(P(x) \wedge R(x))) = V$;
- $v(\forall x(P(x) \to R(x))) = F$;
- $v(\exists x(P(x) \wedge \neg R(x)) = V$;
- $v(\forall x(P(x) \vee Q(x))) = V$.

Exemplo

$|\mathcal{U}|$ é o conjunto dos números naturais
$a^{\mathcal{U}}: 2$
$b^{\mathcal{U}}: 3$
$c^{\mathcal{U}}: 4$
$P^{\mathcal{U}}(x)$ é par
$Q^{\mathcal{U}}(x)$: x é ímpar
$R^{\mathcal{U}}(x)$: x é primo

Vamos avaliar as seguintes sentenças de acordo com essa interpretação:

- $v(P(a)) = V$;
- $v(P(b)) = F$;
- $v(\exists x(P(x) \land R(x))) = V$;
- $v(\forall x(P(x) \to R(x))) = F$;
- $v(\exists x(P(x) \land \neg R(x)) = V$;
- $v(\forall x(P(x) \lor Q(x))) = V$.

Exemplo

Considere

$|\mathcal{U}|$ é o conjunto $\{-1, 0, 1\}$

e as interpretações usuais para $`+', `=', `<'$. Determine o valor de verdade para:

- $\forall x \exists y (x + y = 0)$;
- $\exists x \forall y (x + y = 0)$;
- $\exists x \forall y (x \geq y)$;
- $\forall x \forall y \exists z (x + y = z)$

Exercício

Para cada uma das seguintes fórmulas, indique:

1. Se é uma negação, uma conjunção, uma disjunção, uma implicação, uma fórmula univerdal ou uma fórmula existencial;
2. o escopo do quantificador;
3. as variáveis livres;
4. se é uma sentença.

- $\exists x(A(x,y) \wedge B(x)$
- $\exists x \exists y(A(x,y) \to B(x))$
- $\neg \exists x \exists y A(x,y) \to B(x)$
- $\forall x \neg \exists y(A(x,y))$
- $\exists x A(x,y) \wedge B(x)$
- $\exists x A(x,x) \wedge \exists y B(y)$

Exercício

Traduza as seguintes sentenças para LPO:

1. Todas as coisas são amargas ou doces.
2. Ou tudo é amargo ou tudo é doce.
3. Há alguém que é amado por todos.
4. Ninguém é amado por ninguém.
5. Se alguém é barulhento, todo mundo fica aborrecido.