Problema dos Vestidos

Alexandre Rademaker

28 de Março de 2017

Escreva sentenças em lógica proposicional que descrevam as condições do problemas abaixo, depois mostre que a solução do problema de fato decorre logicamente das sentenças (fórmulas em lógica proposicional).

Três irmãs - Ana, Maria e Cláudia - foram a uma festa com vestidos de cores diferentes. Uma vestia azul, a outra branco e a terceira preto. Chegando à festa, o anfitrião perguntou quem era cada uma delas. As respostas foram:

- A de azul respondeu: "Ana é a que está de branco."
- A de branco falou: "Eu sou Maria."
- A de preto disse: "Cláudia é quem está de branco."

O anfitrião foi capaz de identificar corretamente quem era cada pessoa considerando que:

- Ana sempre diz a verdade.
- Maria às vezes diz a verdade.
- Cláudia nunca diz a verdade.

Determine a cor do vestido de cada irmã.

Vamos utilizar AA, AB e AP para representar "Ana veste azul", "Ana veste branco" e "Ana veste preto" respectivamente; CA, CB e CP para representar "Claudia veste azul", "Claudia veste branco" e "Claudia veste preto" respectivamente e MA, MB e MP para representar "Maria veste azul", "Maria veste branco" e "Maria veste preto" respectivamente.

Como cada uma das irmãs veste algum vestido, temos: $(AA \vee AB \vee AP) \wedge (CA \vee CB \vee CP) \wedge (MA \vee MB \vee MP)$.

Como cada irmã veste *apenas* um vestido, temos: $(\neg(AA \wedge AB) \wedge \neg(AB \wedge AP) \wedge \neg(AA \wedge AP)) \wedge (\neg(CA \wedge CB) \wedge \neg(CB \wedge CP) \wedge \neg(CA \wedge CP)) \wedge (\neg(MA \wedge MB) \wedge \neg(MB \wedge MP) \wedge \neg(MA \wedge MP))$.

Como cada vestido é usado por alguma das irmãs, temos:

$$(AA \vee CA \vee MA) \wedge (AB \vee CB \vee MB) \wedge (AP \vee CP \vee MP)$$

.

Como cada vestido é usado por *apenas* uma das irmãs, temos: $(\neg(AA \wedge CA) \wedge \neg(AA \wedge MA) \wedge \neg(CA \wedge MA)) \wedge (\neg(AB \wedge CB) \wedge \neg(AB \wedge MB) \wedge \neg(CB \wedge MB)) \wedge (\neg(AP \wedge CP) \wedge \neg(AP \wedge MP) \wedge \neg(CP \wedge MP))$.

Essas sentenças podem ser separadas em fórmulas menores considerando as componentes das conjunções. Por exemplo, podemos ver $(AA \vee AB \vee AP) \wedge (CA \vee CB \vee CP) \wedge (MA \vee MB \vee MP)$ como o conjunto das sentenças $(AA \vee AB \vee AP), (CA \vee CB \vee CP), (MA \vee MB \vee MP)$.

Ressaltamos que as sentenças simbolizadas acima apenas enunciam as proposições sobre todas as possibilidades de cada irmã usar uma única cor e cada cor ser usada por apenas uma irmã. Vamos agora analisar as frases ditas por cada irmã.

Se Ana é a que veste azul, então Ana é a que está de branco (Ana sempre diz a verdade). Simbolizando: $AA \to AB$.

Se Claudia for a que veste azul, então Ana não está de branco: $CA \to \neg AB$.

Se Ana é a que veste branco, então Ana é Maria, o que é um absurdo. Logo: $\neg AB$.

Claudia dizendo a segunda frase não acrescenta informação alguma, pois sabemos que ela não é Maria.

Se Ana for a que veste preto, então Claudia é a que veste branco: $AP \to CB$.

E se Claudia for a que veste preto, então Claudia não é a que veste branco: $CP \to \neg CB$, cuja informação já faz parte do nosso conjunto de premissas. Vamos representar todas essas sentenças simbolizadas por Γ. Agora basta verificarmos se $\Gamma \models AP$, $\Gamma \models AB$, $\Gamma \models AA$, $\Gamma \models CP\ldots$

Note que não precisamos de todas as premissas de Γ. Por exemplo, para provarmos $\Gamma \models AP$, podemos usar apenas as sentenças $\neg AB$, $AA \vee AB \vee AP$ e $AA \to AB$.

Prova por contradição: Se AP for falsa e as sentenças $\neg AB$, $AA \vee AB \vee AP$ e $AA \to AB$ forem verdadeiras, então AB é falsa (pois $\neg AB$ é verdadeira). Para que $AA \to AB$ seja verdadeira, AA tem que ser falsa. Para que $AA \vee AB \vee AP$ seja verdadeira, AP precisa ser verdadeira, o que é um absurdo, pois estamos supondo AP falsa. Logo, AP não pode ser falsa.

Resposta: Ana veste preto, Claudia branco e Maria azul.