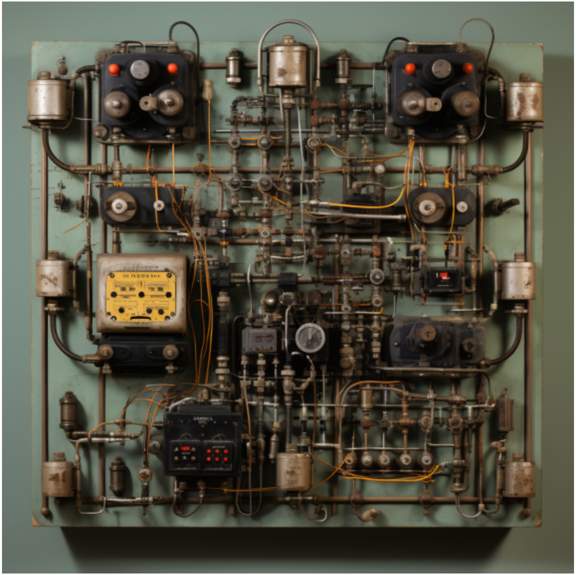
# Sistemas Embarcados (C213)

Prof. Samuel Baraldi Mafra

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Créditos: Prof. Egídio Raimundo Neto

Modelagem e Identificação de Sistemas Dinâmicos



## Modelagem de Sistemas Dinâmicos

- Modelar um sistema físico significa obter uma representação matemática que permita um estudo analítico coerente do comportamento do sistema na prática.

## Modelagem de Sistemas Dinâmicos

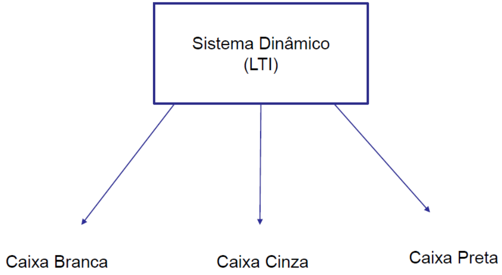
- Como os sistemas em consideração são dinâmicos por natureza, suas equações descritivas são usualmente equações diferenciais.
- No entanto é utilizada a transformada de Laplace do modelo matemático para facilitar sua compreensão e solução.

$$\overbrace{F(t)}^{\text{Applied Force}} = \overbrace{kx(t)}^{\text{Spring Force}} + k_d \cdot \overbrace{\frac{dx(t)}{dt}}^{\text{Damping Force}}$$

$$\Downarrow$$

$$F(s) = kX(s) + k_d \cdot sX(s)$$

# Introdução a Identificação



Modelagem de Sistemas Mecânicos

- \- Lei de Ação e reação (terceira lei de Newton): O deslocamento de um corpo devido a uma força (ação) produz uma reação de mesma intensidade em sentido contrário.
- Segunda Lei de Newton: Relaciona a aceleração a, velocidade v, o deslocamento x de uma massa M sujeita a uma força F no tempo t, sendo s o operador de Laplace.

$$F(t) = Ma(t) = M\frac{dv(t)}{dt} = M\frac{d^2x(t)}{dt}, ou\ ainda, sMv(s) = Ms^2x(s).$$

Função de Transferência (F.T.)

- A F.T. é uma propriedade do sistema, independe da magnitude e da natureza da entrada ou função de excitação.
- A F.T. inclui as unidades necessárias para relacionar a entrada com a saída, não fornecendo qualquer informação relativa à estrutura física do sistema.
- Se a F.T. for conhecida, a saída pode ser estudada para várias formas de entrada.
- A F.T. pode ser obtida experimentalmente.

## Modelagem de Sistemas Mecânicos

- Força de mola: Relaciona a força *F* associada a uma mola com um determinado coeficiente elástico *K* sujeita a um deslocamento, ou seja,

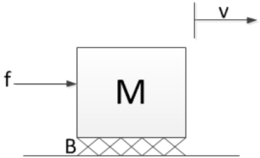
$$F(t) = Kx(t)$$

- Força de amortecedor ou atrito viscoso: Relaciona a força *F* associada a um corpo movimentando-se em um meio viscoso representado por um determinado coeficiente de atrito *B* devido a um deslocamento *x* no tempo *t*, ou sua velocidade resultante *v*.

$$F(t) = Bv(t) = B\frac{dx(t)}{dt}, ou\ ainda, F(s) = Bv(s) = sBx(s).$$

## Modelagem de Sistemas Mecânicos

### Sistema Massa-Atrito





- **M** – Massa do Corpo
- **B** – Coeficiente de Atrito
- **f** – Força de impulsão do sistema
- **v** – Velocidade resultante

- **Fm** – Força de reação da massa
- **Fb** – Força de Atrito
- **f** – Força de impulsão do sistema

# Modelagem de Sistemas Mecânicos


- Aplicando as leis de Newton, a força de atrito e a lei de D'Alembert vem,

$$Fm + Fb - f = 0 \; ou \; M\frac{dv(t)}{dt} + Bv(t) = f(t).$$

ou ainda,

$$Msv(s) + Bv(s) = f(s)$$

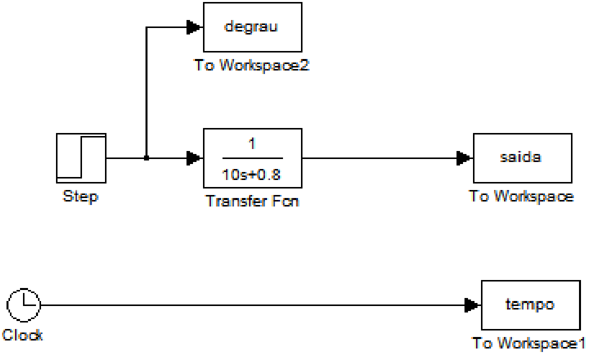
assim,

$$\frac{v(s)}{f(s)} = \frac{1}{Ms+B}$$

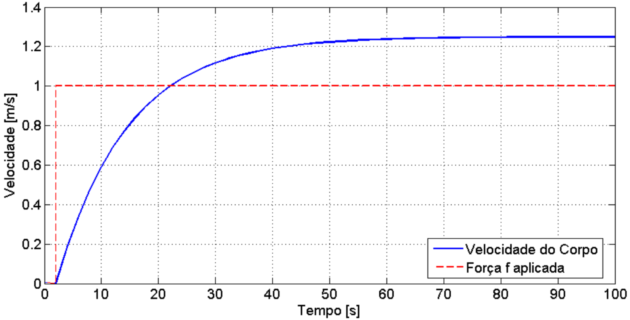
Modelagem de Sistemas Mecânicos

Exemplo: Uma força $f = 1$ N é aplicada em um corpo de massa $M = 10$ Kg, fazendo este deslocar em uma superfície com coeficiente de atrito de deslizamento $B = 0{,}8$. Qual o perfil da velocidade deste corpo em função do tempo?

# Modelagem de Sistemas Mecânicos

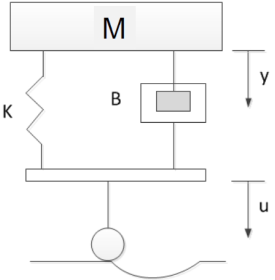


# Modelagem de Sistemas Mecânicos



# Modelagem de Sistemas Mecânicos
## Sistema de amortecimento

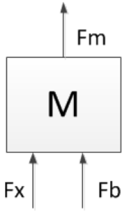
- Este tipo de sistema é empregado como base para estudo de dispositivos de suspensão automotiva.




- **M** – Massa do veículo em cada eixo
- **B** – Coeficiente de Atrito do amortecedor
- **u** – Deslocamento vertical no pneu
- **y** – Deslocamento vertical no veículo

## Modelagem de Sistemas Mecânicos
## Sistema de amortecimento

- Adotando a convenção do sentido de deslocamento indicado na figura anterior, a força de reação da massa (Fm) é para cima. Nesta condição a mola e o amortecedor estão sendo comprimidos, assim, suas forças são aplicadas no sentido de baixo para cima. Os deslocamentos são relativos à diferença y – u.



- Equacionando vem,

$$Fm + Fb + Fk = 0$$

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{d}{dt}[y(t) - u(t)] + K\,[y(t) - u(t)] \ = 0$$

ou ainda,

$$Ms^2y(s) + Bs\,[y(s) - u(s)] + K\,[y(s) - u(s)] \ = 0$$

resultando,

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{Bs+K}{Ms^2+Bs+K}$$

## Modelagem de Sistemas Elétricos

- As variáveis ou grandezas físicas frequentemente utilizadas para descrever o comportamento de sistemas elétricos são tensões e correntes em função do tempo (t), que geralmente é a variável independente. As equações que expressam os fenômenos típicos envolvidos são representadas por relações bem conhecidas.
- Lei de Ohm:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R}, ou\ \frac{v(s)}{i(s)} = R$$

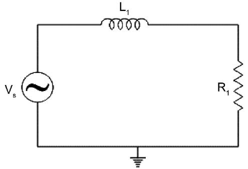
- Lei de Lenz:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}, ou\ \frac{v(s)}{i(s)} = sL$$

- Relação entre corrente *i* e tensão *v* no tempo *t* em uma Capacitância C.

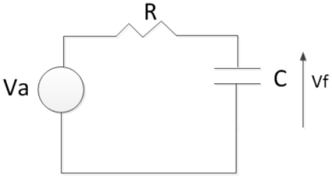
$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}, ou \ \frac{v(s)}{i(s)} = \frac{1}{s}$$

- Leis de Kirchhoff: A somatória das tensões em um laço fechado de um circuito elétrico é sempre nula.
  A somatória das corrente em um nó de um circuito é sempre zero.
- Exemplo: Circuito RL – Este tipo de circuito é muito frequente em vários modelos de enrolamentos de máquinas elétricas, bobinas de excitação de máquinas síncronas e etc. Uma fonte de tensão Va alimenta um circuito associado que fornece uma corrente, como demostrado na Figura a seguir.



## Modelagem de Sistemas Elétricos

- Exemplo: Circuito RC – Este tipo de circuito é muito utilizado em filtros, em instrumentação e eletrônica.




$$Ri(t) + vf(t) - va(t) = 0$$

$$RC\frac{df(t)}{dt}(t) + vf(t) - va(t) = 0$$

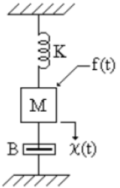
A função de transferência é dada por:

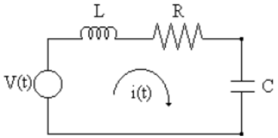
$$\frac{vf(s)}{va(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

# Analogia entre sistemas elétrico e mecânico

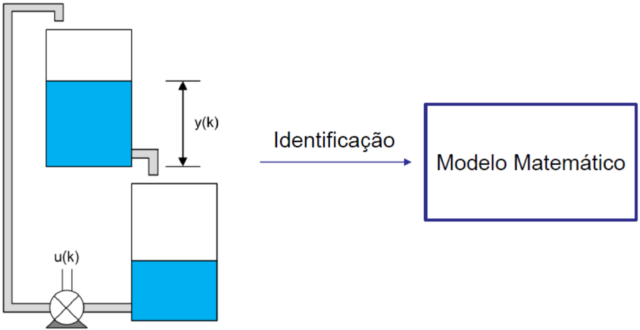
| SISTEMA ELÉTRICO | SISTEMA MECÂNICO DE TRANSLAÇÃO | SISTEMA MECÂNICO DE ROTAÇÃO |
|---|---|---|
| Tensão $\vartheta(t)$ | Força $F(t)$ | Torque $T(t)$ |
| Indutância $L$ | Massa $M$ | Momento de Inércia $(J)$ |
| Resistência $R$ | Coef. de Atrito $B$ | Coef. de Atrito $B$ |
| Inverso da Capacitância $1/C$ | Coef. de Elasticidade $K$ | Coef. de Elasticidade $K$ |
| Carga Elétrica $q(t)$ | Deslocamento $\chi(t)$ | Desloc. Angular $\theta(t)$ |
| Corrente $i(t)$ | Velocidade $\dot{\chi}(t)$ | Veloc. Angular $\dot{\theta}(t)=\omega(t)$ |

Sejam os sistemas elétricos e mecânicos, abaixo representados.



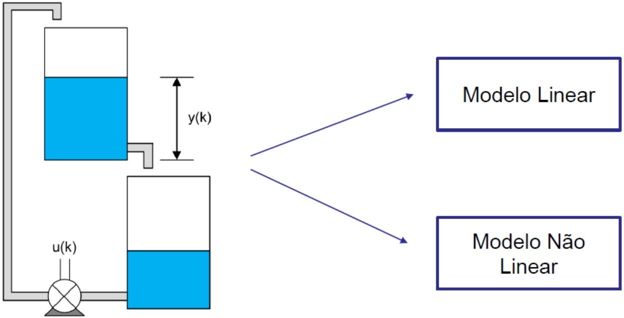



# Motivação

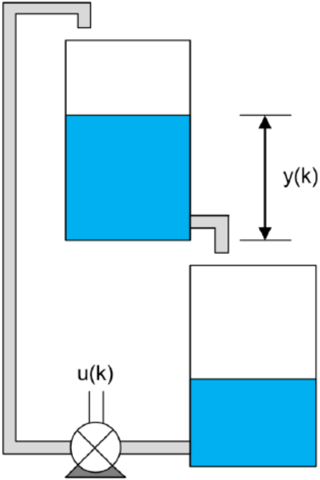


# Motivação

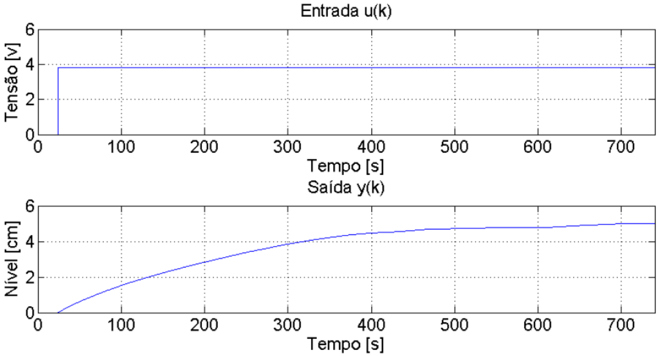
Um sistema de Nível não é linear, em função do escoamento turbulento do líquido.



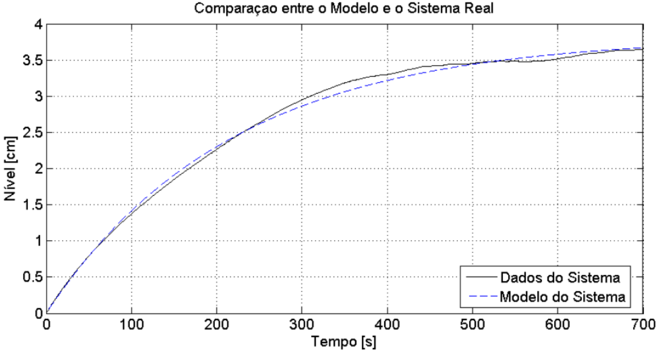
# Identificação Linear



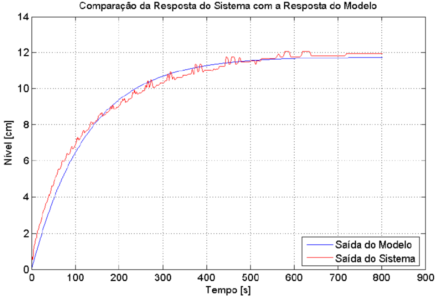
# Identificação Linear



# Identificação Linear



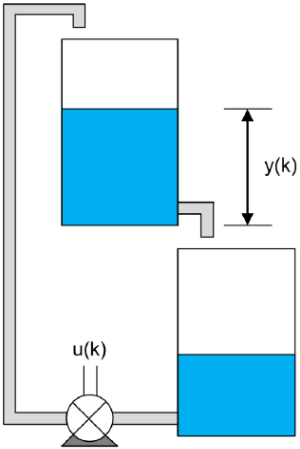
# Identificação Linear



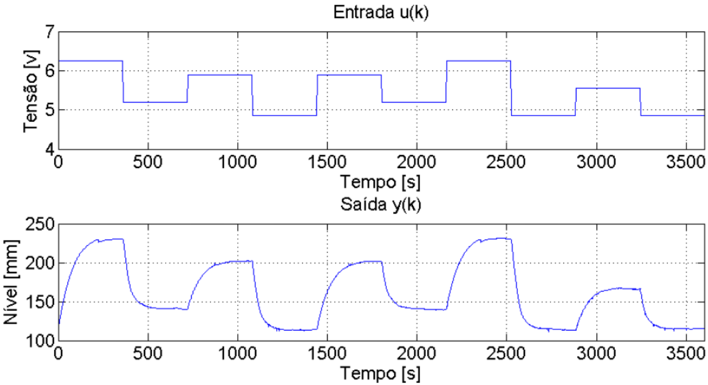

Entrada: Potência em %
Saída: Nível em cm

$$\frac{H(s)}{P(s)} = \frac{0,2}{125s + 1}$$

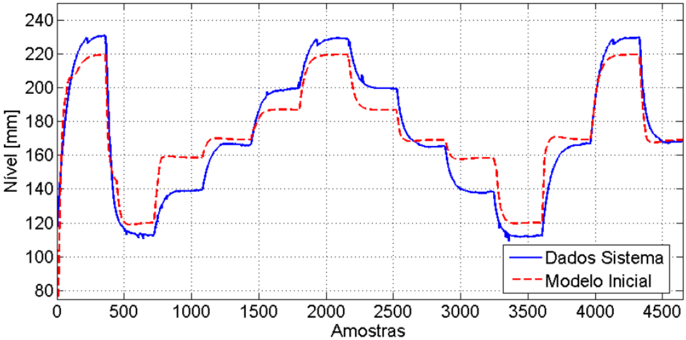
# Identificação Não Linear



# Identificação Não Linear



# Identificação Não Linear



# Identificação Não Linear