Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica
ELE077 Otimização Não-Linear

Trabalho Computacional II

Otimização Restrita

Questão 1. A preocupação atual com o lixo, a reciclagem e o meio ambiente faz com que os fabricantes tentem adotar novos materiais de embalagem para entregar seus produtos. Um desses casos envolve o uso de embalagens biodegradáveis feitas de materiais reciclados. Tendo isso em vista, um determinado fabricante quer projetar uma caixa como o da Figura 1. Ele sabe que o custo da embalagem biodegradável por unidade de área é de US$ 1.5 por metro quadrado. Além disso, seus produtos que serão colocados na caixa requerem que:

- A caixa deve ter um volume de 0.032 [m^3];
- O perímetro da base deve ser menor ou igual a 1.5 [m];
- Seus lados são dimensionados geometricamente para conter etiquetas de informações. Por isso:
  * A largura não deve exceder três vezes o comprimento.
  * Sua altura deve ser inferior a dois terços da largura.
  * Seu comprimento e largura são inferiores a 0.5 [m].

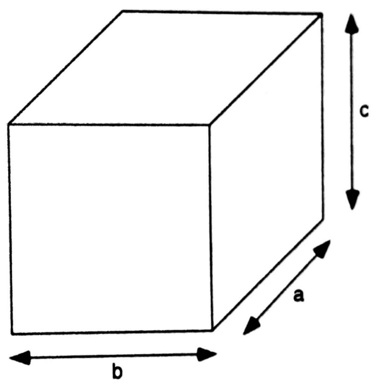

Figura 1: Desenho da caixa a ser otimizada na questão 1.

Pela Figura 1, podemos observar que a variável a significa o comprimento, a variável b significa a largura e a variável c significa a altura. Baseado nessas informações, podemos construir o seguinte problema de otimização para determinar as dimensões da caixa com menor custo:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(a,b,c) = 1.5(2ab + 2ac + 2bc) && \text{(1a)} \\
\text{sujeito a :}\ & abc = 0.032 && \text{(1b)} \\
& 2(a+b) \leq 1.5 && \text{(1c)} \\
& b \leq 3a && \text{(1d)} \\
& c \leq \frac{2}{3}b && \text{(1e)} \\
& 0 \leq a \leq 0.5 && \text{(1f)} \\
& 0 \leq b \leq 0.5 && \text{(1g)} \\
& c \geq 0 && \text{(1h)}
\end{aligned}
$$

A equação (1a) expressa a função-objetivo que é a minimização do custo de fabricação da caixa, sendo que cada os termos das somas correspondem às áreas de cada lado da caixa; a equação (1b) expressa a restrição de volume; as equações (1d)-(1g) expressam as restrições impostas pela etiqueta de informações que serão colocadas na caixa; e a equação (1h) simplesmente restringe que o comprimento não pode ser menor que zero. A partir dessas definições:

a) Aplique o Método das Penalidades Exteriores para converter o problema restrito em um problema irrestrito e reescreva o problema de otimização.

b) Escolha um algoritmo de otimização e justifique sua escolha.

c) Determine a solução ótima do problema. Informe os valores ótimos das variáveis de decisão, o custo da solução ótima, o critério de parada adotado, os valores iniciais adotados, o número de iterações da abordagem do problema restrito e o valor final de parâmetros que forem importantes para a metodologia escolhida.

   $*$ Para fins de validação do seu algoritmo, o ponto de ótimo do problema é $(a,b,c) = (0.3132, 0.391, 0.2607)$.

Questão 2. Seja a treliça de três barras mostrada na Figura 2. O comprimento de cada barra é denotada por A_1, A_2 e A_3 e, neste problema, iremos assumir que o comprimento das duas barras exteriores são iguais (isto é, $A_1 = A_3$). O espaçamento horizontal entre as barras e a distância até a ponta serão denotadas por uma mesma constante H. O parâmetro P denota a força-peso da carga que é colocada na treliça e é constante no nosso problema.

O objetivo é determina o comprimento de cada barra que minimiza o peso da treliça. Seja $x_1 = A_1$ e $x_2 = A_2$. O problema de otimização pode ser descrito

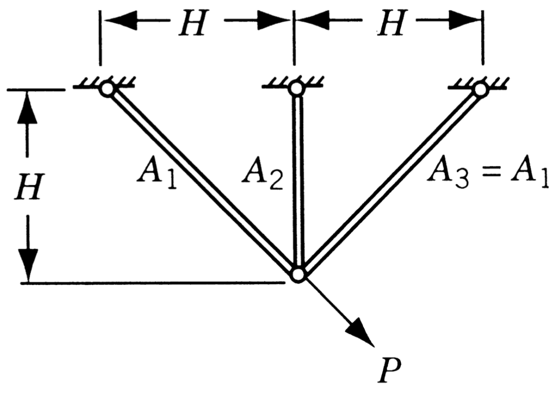

Figura 2: Treliça de três barras.

da seguinte forma:

$$\min \quad f(x_1, x_2) = (2\sqrt{2})x_1 + x_2 \tag{2a}$$

$$\text{sujeito a}: P\frac{x_2 + x_1\sqrt{2}}{x_1^2\sqrt{2} + 2x_1x_2} \leq 20 \tag{2b}$$

$$P\frac{1}{x_1 + x_2\sqrt{2}} \leq 20 \tag{2c}$$

$$-P\frac{x_2}{x_1^2\sqrt{2} + 2x_1x_2} \leq -15 \tag{2d}$$

$$0.1 \leq x_1, x_2 \leq 5 \tag{2e}$$

onde a eq.(2a) é a função-objetivo que representa o peso da treliça; as equações (2b) e (2c) representam o estresse máximo que as barras 1 e 2 podem suportar; a eq.(2d) representa o estresse mínimo na terceira barra e (2e) representa os limites das variáveis.

Seja $P = 20$. A partir dessas informações:

a) Aplique o Método do Langrangeano Aumentado para converter o problema restrito em um problema irrestrito e reescreva o problema de otimização.

b) Escolha um algoritmo de otimização e justifique sua escolha.

c) Determine a solução ótima do problema. Informe os valores ótimos das variáveis de decisão, o custo da solução ótima, o critério de parada adotado, os valores iniciais adotados, o número de iterações da abordagem do problema restrito e o valor final de parâmetros que forem importantes para a metodologia escolhida.

   * Para fins de validação do seu algoritmo, o ponto de ótimo do problema é $(x_1, x_2) = (0.57142665, 2.42328518)$.

Questão 3. Seja o seguinte problema canônico de otimização restrita:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2 && \text{(3a)} \\ \text{sujeito a}: \quad & (x-1)^3 - y + 1 \leq 0 && \text{(3b)} \\ & x + y - 2 \leq 0 && \text{(3c)} \\ & -1.5 \leq x \leq 1.5 && \text{(3d)} \\ & -0.5 \leq y \leq 2.5 && \text{(3e)} \end{aligned}$$

a) Plote o gráfico de contorno da função e as curvas das restrições e escolha um ponto dentro da região factível do problema para ser o ponto inicial do seu algoritmo de otimização. Dicas:
    * Para calcular os pontos de cada curva de restrição, você pode: (i) trocar as desigualdades por = nas expressões; (ii) isolar y nas equações; (iii) criar um vetor para x variando de -1.5 a 1.5; (iv) calcular y a partir da equação obtida em (ii) e usando o vetor x criado; e (v) plotar os vetores x e y como uma curva qualquer no gráfico.
    * Para uma melhor visualização da imagem, limite os eixos x e y da figura para os valores mínimos e máximos das variáveis. Se você utilizar a linguagem Python, você pode fazer isso através dos comandos `plt.xlim()` ou `axis.set_xlim()`.

b) Aplique o Método da Penalidade Interior para converter o problema restrito em um problema irrestrito e reescreva o problema de otimização.

c) Escolha um algoritmo de otimização e justifique sua escolha.

d) Determine a solução ótima do problema. Informe os valores ótimos das variáveis de decisão, o custo da solução ótima, o critério de parada adotado, os valores iniciais adotados para os parâmetros do método, o número de iterações da abordagem do problema restrito e o valor final de parâmetros que forem importantes para a metodologia escolhida.
    * Para fins de validação do seu algoritmo, o ponto de ótimo do problema é $(x, y) = (1, 1)$.

Observações Gerais sobre o Trabalho

- O relatório com a discussão dos experimentos e conclusões, bem como os códigos fonte dos métodos implementados, deverão ser enviados ao professor via Moodle (trabalhos enviados por e-mail não serão considerados). Templates para a escrita do relatório estão disponíveis na página da disciplina, mas não são obrigatórios.

- Espera-se um relatório discutindo as abordagens estudadas e sua aplicação a problemas de otimização. Relatórios contendo apenas códigos e/ou figuras não serão avaliados.

- Vocês podem utilizar a linguagem de programação que preferir. Minha sugestão: Python ou MATLAB (preferencialmente Python).

- Se vocês optarem pelo Python, vocês podem utilizar a biblioteca *scipy.optimize* que já conta com as implementações dos métodos BFGS, CG, Nelder-Mead entre outros.

- Se vocês optarem pelo MATLAB, vocês podem utilizar a *Optimization toolbox*.