UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

SEM0530 – Problemas de Engenharia Mecatrônica II
1º Semestre de 2022

Prática 3 – Solução de sistemas lineares

Integrantes:

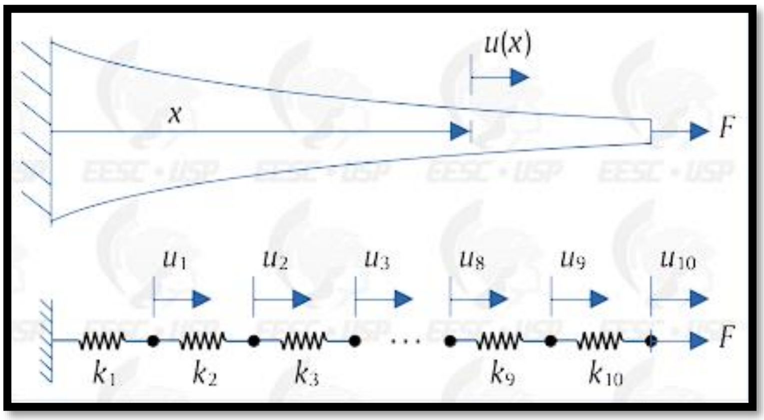
Matheus Della Rocca Martins N^oUSP : 12549731

São Carlos
13/06/2022

1. OBJETIVOS

O Problema proposto propõe a modelagem de uma estrutura sujeita a carregamentos de forças/deslocamentos utilizando um modelo discreto de molas em série (figura 1). Dessa forma, tem-se como objetivos construir a matriz de rigidez para o sistema fornecido, além de resolver o sistema linear resultante dessas interações utilizando o MATLAB. Para o primeiro caso deve-se considerar uma força de -50N aplicada no ponto 5 e uma força de 100 N aplicada no ponto 10. O segundo caso propõe um deslocamento de 3cm imposto na extremidade livre. Por fim, deve-se fazer um gráfico de u vs n para cada condição de carregamento proposta.

Figura 1: Problema Proposto



Fonte: Figura retirada dos slides do professor Marcelo A. Trindade

2. DESENVOLVIMENTO DO PROJETO

A seguir tem-se a resolução realizada para obter-se o equacionamento do problema:

Figura 2: Resolução desenvolvida

Prática 3 - Solução de sistemas lineares.

Matheus Della Rocca Martins   Nº USP: $125497\underbrace{31}_{N}$

Problema:

Dados: $\Delta K = (50 + 0,5 \cdot 31)$ KN/m $= 65,5$ [KN/m] //

$$K_m = K_{min} + \Delta K e^{-b m}$$

Sendo que: $b = 0,2$; $K_{min} = 10$ KN/m e $\Delta K = 65,5$ KN/m

Aplicando esses valores na equação tem-se:

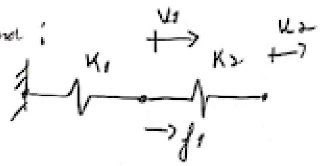
$$K_m = 10 + 65,5\, e^{-0,2 \cdot m} \text{ [KN/m]}$$

Obtendo a matriz de rigidez:

- $K u = F$, $u = \{u_1, \dots, u_{10}\}$

Irei analisar o equilíbrio em cada nó do sistema afim de obter as respectivas equações para o sistema:

Ponto 1:



$$\sum F = 0$$

$$\Rightarrow f_1 - K_1(u_1 - 0) - K_2(u_1 - u_2) = 0$$

$$\underbrace{u_1(K_1 + K_2) + u_2(-K_2)}_{\text{saídas}} = f_1$$

Entradas do sistema

↳ Momento das forças aplicadas.

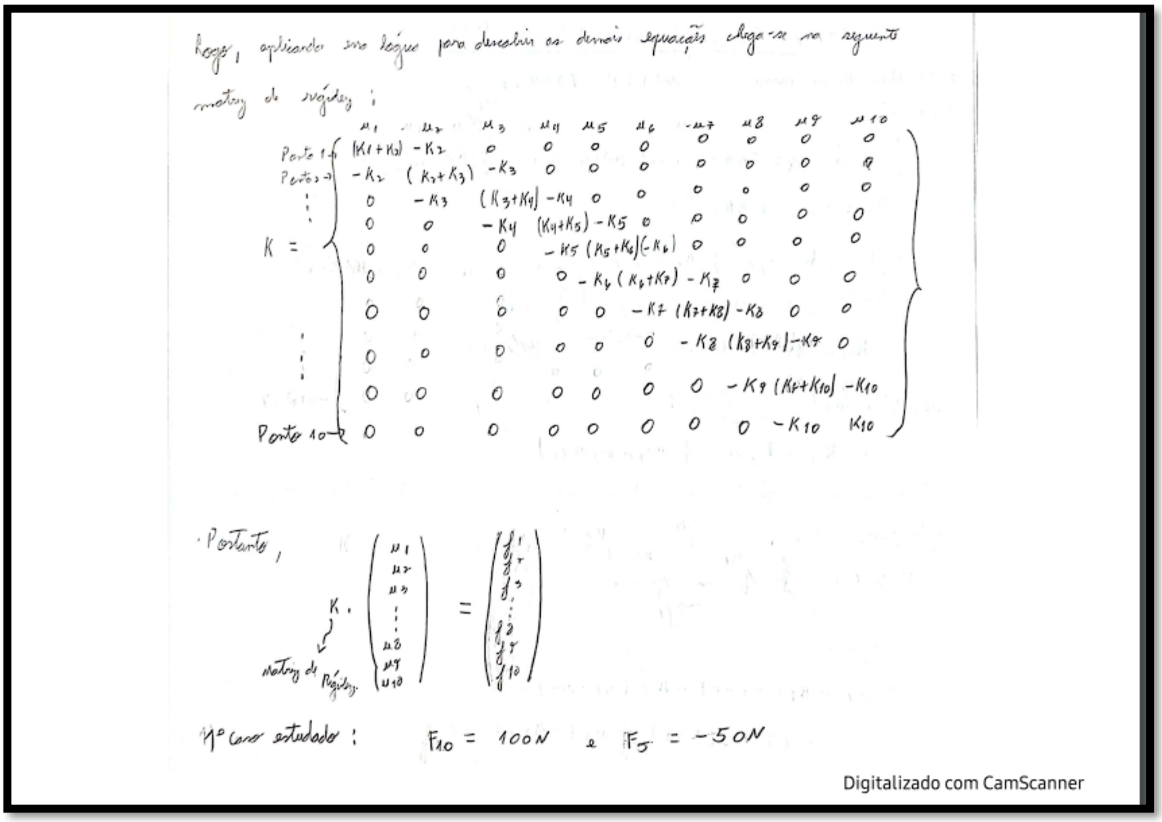
Aplicando o mesmo procedimento para os demais pontos:

Ponto 2: $\rightarrow f_2 - K_2(u_2 - u_1) - K_3(u_2 - u_3) = 0$

$$u_2(K_2 + K_3) + u_3(-K_3) + u_1(-K_2) = f_2$$

É possível notar certo padrão: u ponto ($+\sum K_s$ de molas em contato com o ponto) e u's de pontos que não estão sendo diretamente analisados. ($-\sum K_s$ entre o ponto analisado e os pontos)

Figura 3: Resolução desenvolvida



Logo, aplicando essa lógica para descobrir as demais equações chega-se na seguinte matriz de rigidez:

$$
K = \begin{array}{l} \text{Ponto 1} \rightarrow \\ \text{Ponto 2} \rightarrow \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \text{Ponto 10} \rightarrow \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} \end{array} \\
\left\{ \begin{array}{cccccccccc}
(K_1+K_2) & -K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-K_2 & (K_2+K_3) & -K_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -K_3 & (K_3+K_4) & -K_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -K_4 & (K_4+K_5) & -K_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -K_5 & (K_5+K_6) & -K_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -K_6 & (K_6+K_7) & -K_7 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_7 & (K_7+K_8) & -K_8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_8 & (K_8+K_9) & -K_9 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_9 & (K_9+K_{10}) & -K_{10} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{10} & K_{10}
\end{array} \right\} \end{array}
$$

Portanto,

$$
\underbrace{K}_{\text{matriz de rigidez}} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \end{pmatrix}
$$

1º caso estudado: $F_{10} = 100N$ e $F_5 = -50N$

Para este caso, tem-se forças externas aplicadas somente nos pontos 5 e 10 do sistema. Desse modo, o sistema linear fica da seguinte forma:

Figura 4: Resolução desenvolvida

Desta forma, tem-se:

$$K \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,05 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9/100 \end{pmatrix}$$

⤳ É necessário deixar as forças em KN devido as unidades dos valores fornecidos pelo programa.

Para obter os deslocamentos utiliza-se o MATLAB para solucionar este sistema linear.

Caso 2: Deslocamento de 3 cm na extremidade livre.

↳ $u_{10} = 3\text{ cm} = 0{,}03\text{ m}$ //

- O fato de existir um deslocamento na extremidade livre implica na existência de uma força aplicada neste ponto também.

$$F_{10} = K_{eq}\, u_{10}$$

<u>Cálculo de K_{eq}</u>:

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \dots + \frac{1}{K_{10}}$$

$$K_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{K_1} + \dots + \frac{1}{K_{10}}}$$

Com o auxílio do Matlab tem-se: $K_{eq} = 0{,}3267$

Portanto, $F_{10} = 0{,}3267 \cdot 0{,}03 = 0{,}0098$ KN

Sistema linear para o segundo caso:

$$K \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ F_{10} \end{pmatrix}$$

3. RESOLUÇÃO NO MATLAB

Para atingir os objetivos propostos utilizou-se o software MATLAB para resolver numericamente os sistemas obtidos anteriormente. A seguir tem-se os scripts criados no software. Além disso, é importante destacar que para solucionar o sistema utilizou o comando recomendado em aula “Barra invertida” (x=A\b) no MATLAB, em que o software resolve um sistema linear através da aplicação de métodos numéricos afim de se obter uma solução com erro aceitável.

Figura 6,7,8: Script MATLAB

Editor - C:\Users\Matheus\Documents\USP - ESTUDOS\Problemas 2\Pratica3.m*

Pratica3.m* | pratica2.m

```
% Prática 3 - Matheus Della Rocca Martins

% Cálculo kn:
kn = zeros(1,10);
for n=1:10
    kn(n) = 10 + 65.5 .* exp(-0.2*n); % [KN/m]
end
% Criando a matriz de rígidez
K = zeros(10,10);
for i= 1:10
    for j = 1:10
        if i==j && i~=10
            K(i,j) = kn(i) + kn(i+1);
        elseif j==i+1
            K(i,j) = -kn(i+1);
        elseif j==i-1
            K(i,j) = -kn(i);
        elseif i==j && i==10
            K(i,j) = kn(i);
        else
            K(i,j) = 0;
        end
    end
end

```

```
% Caso 1:

% Definindo a matriz das forças em cada ponto:
% Caso 1:
F1 = [0;0;0;0;-0.05;0;0;0;0; 0.1]; % KN
% Aplicação do método numérico para resolver o sistema
u1 = K\F1;


%Caso 2:

%Cálculo Keq para o caso 2:
Keq = 0;
for i=1:10
    Keq = Keq + 1/kn(i);
end
Keq = 1/Keq;
%Cálculo F10
F10 = (Keq*0.03); % KN
% Cálculo matriz de forças
F2 = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;F10]; % N
% Aplicação do método numérico para resolver o sistema
u2 = K\F2;
```

```

%Plot
n = [1:10]; %n variando de 1 a 10
figure (1)
plot(n, u1,'b', 'linewidth',1)
hold on
plot(n,u2,'g', 'linewidth',1)
title (" Gráfico dos deslocamentos u(n) em seus respectivos nós(n)")
xlabel ("nó(n)")
ylabel ("u_n(m)")
legend('Caso_1 (u1)', 'Caso_2(u2)', 'location', 'northwest')
axis square
grid on
```

Figura 7: Gráficos plotados

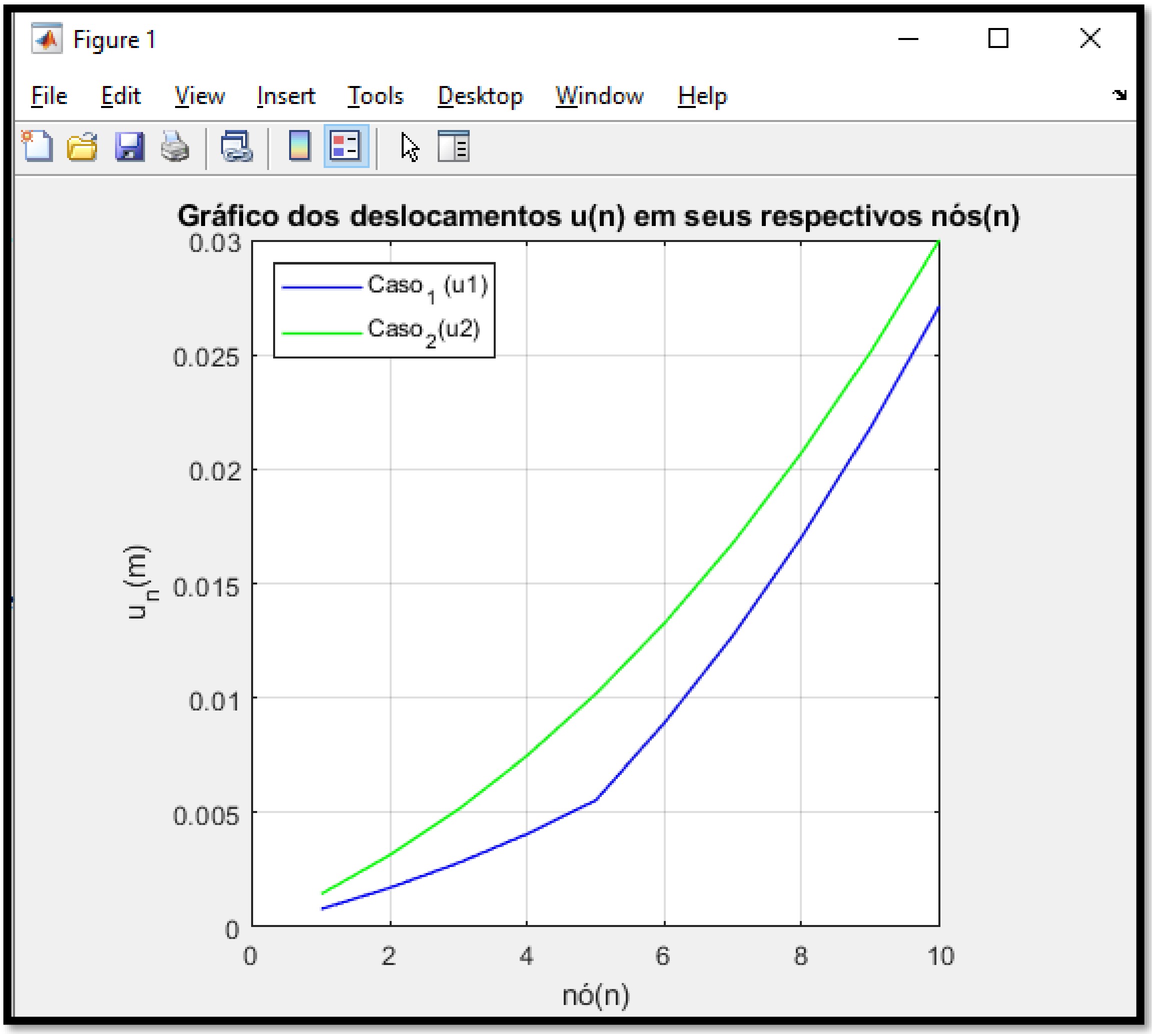


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Gráfico dos deslocamentos u(n) em seus respectivos nós(n)
Caso 1 (u1)
Caso 2 (u2)
u n (m)
nó(n)
0
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
0.03
0
2
4
6
8
10

4. CONCLUSÕES

Portanto, a partir da realização dessa prática concluiu-se ser possível a solução por métodos numéricos de um sistema linear utilizando o MATLAB. Desse modo, encontrou-se uma alternativa para problemas, como o proposto, em que existem muitas variáveis no sistema o que dificultaria uma solução manual.

Analisando os gráficos criados a partir dos dados fornecidos pelo problema, pode-se concluir que o deslocamento cresce conforme mais externo o ponto é em relação ao sistema. Isso é suportado tanto pelo fato de que a entrada mais significativa no sistema é aplicada no ponto mais externo como também pelo fato de que as constantes elásticas das molas mais externas são menores, ou seja, é necessária uma menor força para causar um mesmo deslocamento nessas molas se as comparar com outras com constantes elásticas maiores.

Desse modo, para o caso 1, em que se tem como entrada no ponto 10 a maior força aplicada no sistema também se tem o maior deslocamento neste ponto. Além disso, para o caso 2 em que a entrada no sistema é um deslocamento no ponto 10, o maior deslocamento gerado no sistema acontece no ponto 9, como se era esperado pelos conhecimentos teóricos.

Por fim, além dos dados colocados anteriormente, a partir da utilização do MATLAB chegou-se nos seguintes resultados:

Matriz de Rigidez criada no MATLAB:

Variables - K

K

10x10 double

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	117.5328	-53.9060	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-53.9060	99.8531	-45.9472	0	0	0	0	0	0	0
3	0	-45.9472	85.3782	-39.4310	0	0	0	0	0	0
4	0	0	-39.4310	73.5272	-34.0961	0	0	0	0	0
5	0	0	0	-34.0961	63.8243	-29.7282	0	0	0	0
6	0	0	0	0	-29.7282	55.8803	-26.1521	0	0	0
7	0	0	0	0	0	-26.1521	49.3763	-23.2242	0	0
8	0	0	0	0	0	0	-23.2242	44.0513	-20.8271	0
9	0	0	0	0	0	0	0	-20.8271	39.6915	-18.8645
10	0	0	0	0	0	0	0	0	-18.8645	18.8645
11										

Constantes elásticas para cada mola:

Variables - kn

K Keq kn

1x10 double

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	63.6269	53.9060	45.9472	39.4310	34.0961	29.7282	26.1521	23.2242	20.8271	18.8645

Constante equivalente obtida: 3.0611KN/m.

Força resultante no nó 10 devido ao deslocamento proposto no caso 2: F10=0.0918KN.

Deslocamentos para o caso 1:

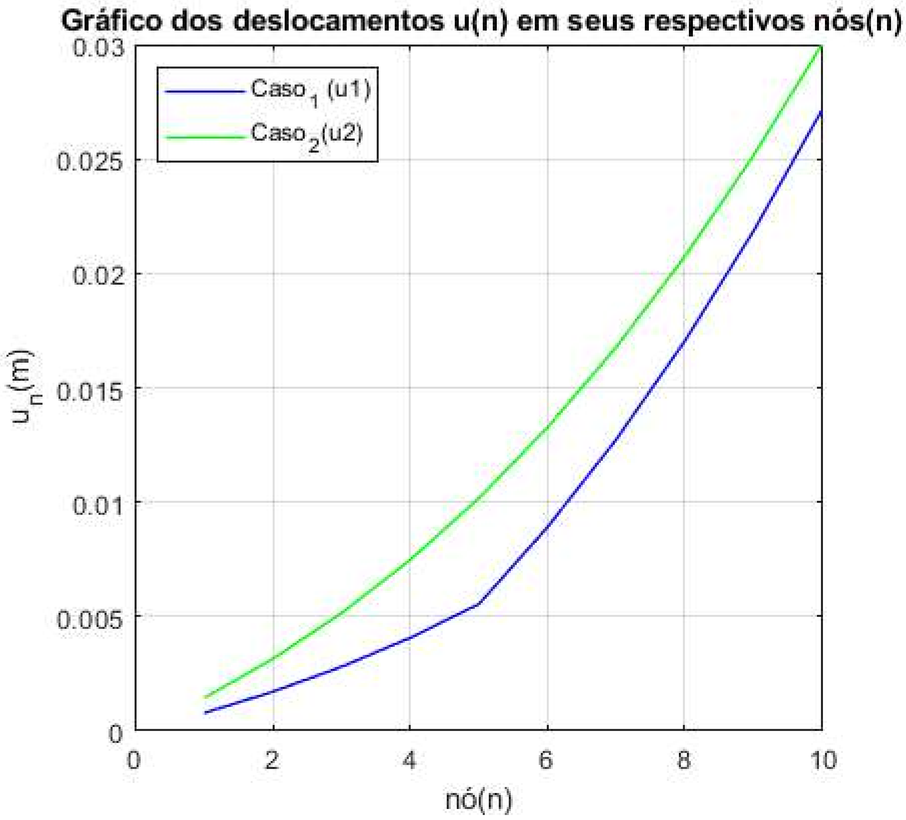
10x1 double

	1
1	7.8583e-04
2	0.0017
3	0.0028
4	0.0041
5	0.0055
6	0.0089
7	0.0127
8	0.0170
9	0.0218
10	0.0271

Deslocamentos para o caso 2:

	1
1	0.0014
2	0.0031
3	0.0051
4	0.0075
5	0.0102
6	0.0133
7	0.0168
8	0.0207
9	0.0251
10	0.0300

```
% Prática 3 - Matheus Della Rocca Martins

% Cálculo kn:
kn = zeros(1,10);
for n=1:10
   kn(n) = 10 + 65.5 .* exp(-0.2*n); % [KN/m]
end
% Criando a matriz de rígidez
K = zeros(10,10);
for i= 1:10
    for j = 1:10
       if i==j && i~=10
          K(i,j) = kn(i) + kn(i+1);
       elseif j==i+1
           K(i,j) = -kn(i+1);
       elseif j==i-1
           K(i,j) = -kn(i);
       elseif i==j && i==10
           K(i,j) = kn(i);
       else
           K(i,j) = 0;
       end
    end
end

% Caso 1:

% Definindo a matriz das forças em cada ponto:
% Caso 1:
F1 = [0;0;0;0;-0.05;0;0;0;0; 0.1]; % KN
% Aplicação do método numérico para resolver o sistema
u1 = K\F1;


%Caso 2:

%Cálculo Keq para o caso 2:
Keq = 0;
for i=1:10
    Keq = Keq + 1/kn(i);
end
Keq = 1/Keq;
%Cálculo F10
F10 = (Keq*0.03); % KN
% Cálculo matriz de forças
F2 = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;F10]; % N
% Aplicação do método numérico para resolver o sistema
u2 = K\F2;



%Plot
n = [1:10]; %n variando de 1 a 10
figure (1)
plot(n, u1,'b', 'linewidth',1)
hold on
plot(n,u2,'g', 'linewidth',1)
title (" Gráfico dos deslocamentos u(n) em seus respectivos nós(n)")
xlabel ("nó(n)")
ylabel ("u_n(m)")
legend('Caso_1 (u1)', 'Caso_2(u2)', 'location', 'northwest')
axis square
grid on
```



Published with MATLAB® R2021a