UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

SEM0530 – Problemas de Engenharia Mecatrônica II
1º Semestre de 2022

Prática 5 – Aproximação numérica de EDOs de 2 ordem

Integrantes:

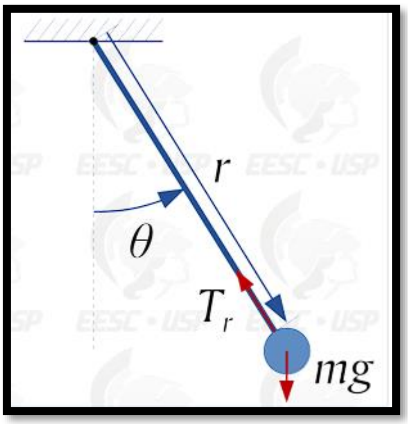
Matheus Della Rocca Martins N^oUSP : 12549731

São Carlos
03/07/2022

1. OBJETIVOS

O Problema fornecido propõe o estudo do movimento de um pêndulo amortecido, sendo que, deve-se determinar a evolução do deslocamento angular θ(t), considerando condições iniciais fornecidas, durante um intervalo de tempo. Além disso, deve-se plotar gráficos de modo a fornecer uma boa visualização do movimento do pêndulo. Por fim, é necessário obter o número de voltas completas percorridas pelo pêndulo antes de parar.

Figura 1: Problema Proposto

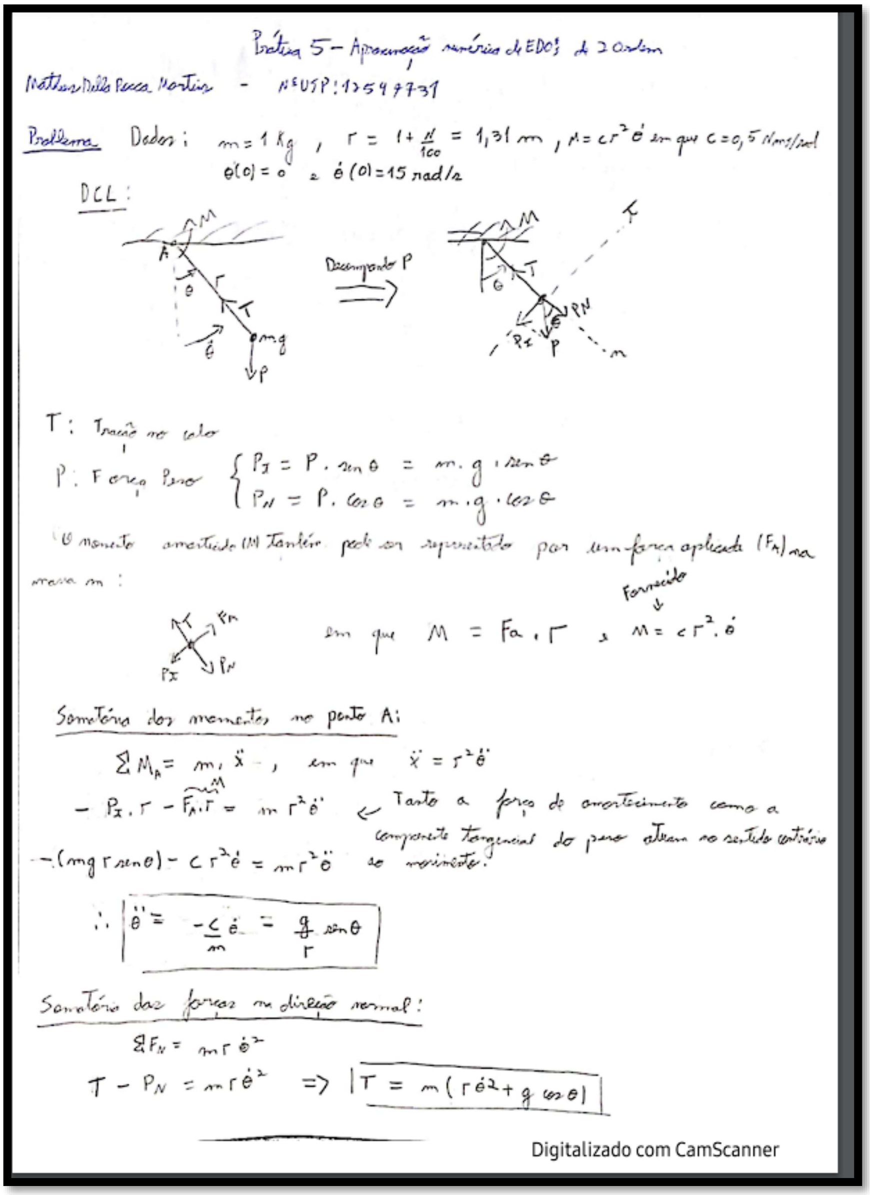


Fonte: Figura retirada dos slides do professor Marcelo A. Trindade

2. DESENVOLVIMENTO DO PROJETO

A seguir tem-se a resolução realizada para obter-se o equacionamento do problema:

Figura 2: Resolução desenvolvida



Prática 5 – Aproximação numérica de EDO's de 2 Ordem

Matheus Della Rocca Martins - NºUSP: 12547731

Problema Dados: $m = 1\,Kg$, $r = 1 + \frac{N}{100} = 1{,}31\,m$, $M = c r^2 \dot{\theta}$ em que $c = 0{,}5\,Nms/rad$

$\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = 15\,rad/s$

DCL:

T: Tração no cabo

P: Força Peso $\begin{cases} P_x = P \cdot sen\,\theta = m \cdot g \cdot sen\,\theta \\ P_N = P \cdot cos\,\theta = m \cdot g \cdot cos\,\theta \end{cases}$

O momento amortecido (M) também pode ser representado por uma força aplicada (F_A) na massa m:

em que $M = F_a \cdot r$ e $M = c r^2 \cdot \dot{\theta}$ (Fornecido)

Somatória dos momentos no ponto A:

$$\sum M_A = m \cdot \ddot{x}, \quad \text{em que} \quad \ddot{x} = r^2 \ddot{\theta}$$

$$-P_x \cdot r - \overbrace{F_A \cdot r}^{M} = m r^2 \ddot{\theta}$$ ← Tanto a força de amortecimento como a componente tangencial do peso atuam no sentido contrário ao movimento.

$$-(m g r\,sen\,\theta) - c r^2 \dot{\theta} = m r^2 \ddot{\theta}$$

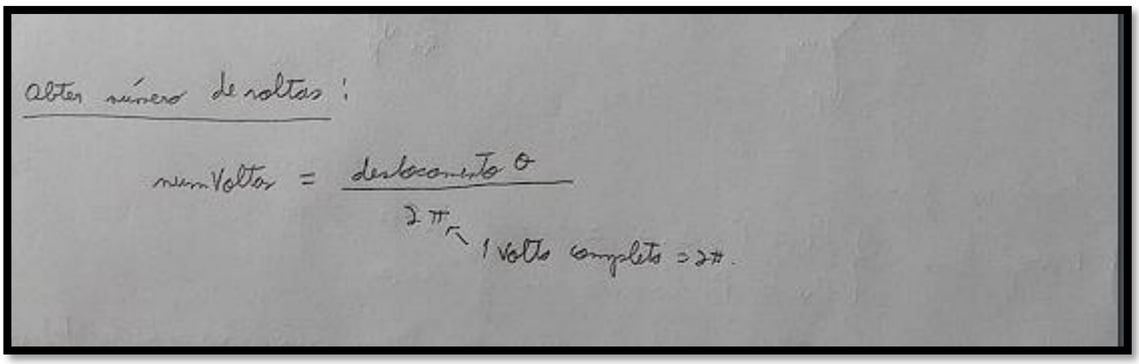
$$\therefore \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{c}{m}\dot{\theta} = \frac{g}{r}\,sen\,\theta}$$

Somatória das forças na direção normal:

$$\sum F_N = m r \dot{\theta}^2$$

$$T - P_N = m r \dot{\theta}^2 \Rightarrow \boxed{T = m(r\dot{\theta}^2 + g\,cos\,\theta)}$$

Digitalizado com CamScanner



Obter número de voltas:

$$numVoltas = \frac{deslocamento\ \theta}{2\pi}$$ ← 1 volta completa = 2π.

3. RESOLUÇÃO NO MATLAB

Para atingir os objetivos propostos utilizou-se o software MATLAB para resolver numericamente as equações obtidas. Para resolver a equação diferencial de 2 ordem obtida foi utilizado a função ode45 dentro deste software.

Figura 3,4,5,6: Script MATLAB

Editor - C:\Users\Matheus\Documents\USP - ESTUDOS\Problemas 2\Pratica5.m

Pratica5.m | edo2.m | +

```matlab
% Prática 5 - Matheus Della Rocca Martins - Nusp: 12549731

% Dados fornecidos
m = 1; %[kg]
r = 1.31; %[m]
c = 0.5; %[Nms/rad]
g = 9.81; %[m/s^2]
% Condições iniciais
theta0 = 0;
thetaP0 = 15;
CI = [theta0; thetaP0];
% Definindo intervalo de tempo
ti = 0;
dt = 0.05;
tf = 25;
iTempo = [ti:dt:tf];
% Resolvendo EDO
[t, theta] = ode45('edo2', iTempo, CI);
% Determinando a tracao
T = m.*(r.*theta(:,2).^2 + g.*cos(theta(:,1)));
% Encontrando numero de voltas completas
numVoltas = (theta(501,1))./(2.*pi); %->501 é o último termo de theta1

```

Editor - C:\Users\Matheus\Documents\USP - ESTUDOS\Problemas 2\edo2.m

Pratica5.m | edo2.m | +

```matlab
function res = edo2(t,theta)
    % Dados fornecidos
    m = 1; %[kg]
    r = 1.31; %[m]
    c = 0.5; %[Nms/rad]
    g = 9.81; %[m/s^2]
    th = theta(1);
    dthdt = theta(2);
    dth2dt = -(c./m).*dthdt - (g./r).*sin(th);
    res = [dthdt; dth2dt];
    end

```

Editor - C:\Users\Matheus\Documents\USP - ESTUDOS\Problemas 2\Pratica5.m

Pratica5.m | edo2.m

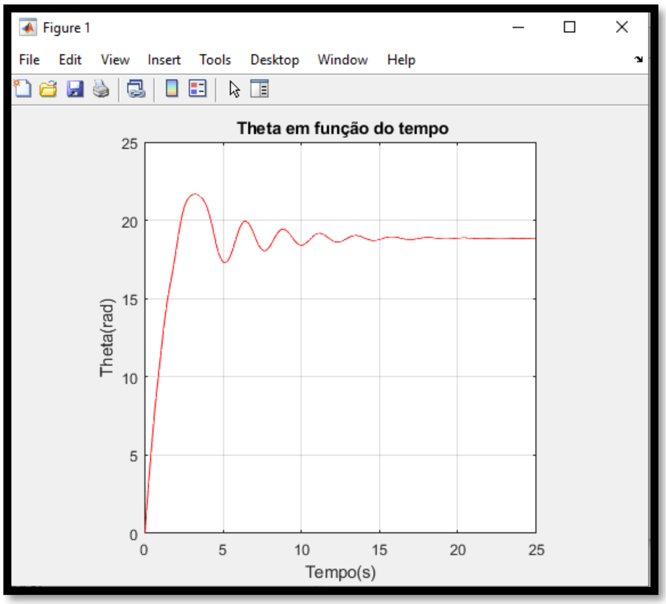
```matlab
numVoltas = (theta(501,1))./(2.*pi); %->501 é o último termo de theta1

%Plotando os gráficos solicitados
figure(1)
plot(t, theta(:,1), '-r', 'linewidth',1)
title (" Theta em função do tempo")
ylabel ("Theta(rad)")
xlabel ("Tempo(s)")
axis square
grid on
figure(2)
plot(t, theta(:,2), '-b', 'linewidth',1)
title (" ThetaPonto em função do tempo")
ylabel ("ThetaP(rad/s)")
xlabel ("Tempo(s)")
axis square
grid on
figure(3)
plot(theta(:,1), theta(:,2), '-g', 'linewidth',1)
title (" ThetaPonto em função de theta")
ylabel ("TetaP(rad/s)")
xlabel ("Theta(rad)")
axis square
grid on

```

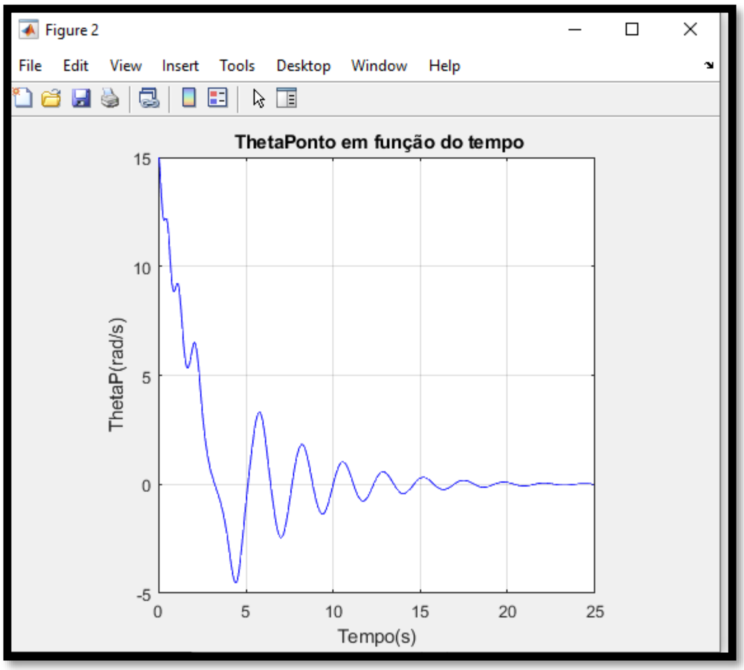
Editor - C:\Users\Matheus\Documents\USP - ESTUDOS\Problemas 2\Pratica5.m

Pratica5.m | edo2.m

```matlab
xlabel ("Theta(rad)")
axis square
grid on

figure(4)
plot(t, theta(:,1), '-r', 'linewidth',1)
title ("Evoluções")
axis square
grid on
hold on
plot(t, theta(:,2), '-b', 'linewidth',1)
axis square
grid on
hold off
legend('Theta-tempo','ThetaPonto-tempo')

figure(5)
plot(t, T, '-b', 'linewidth',1)
title (" Tração em função do tempo")
ylabel ("Tração(N)")
xlabel ("Tempo(s)")
axis square
grid on

```

Figura 7,8,9,10,11: Gráficos plotados





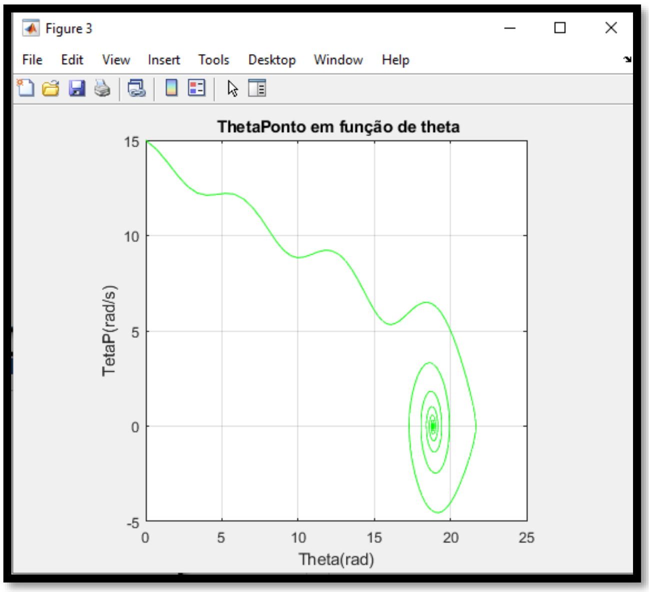


Figure 3
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
ThetaPonto em função de theta
TetaP(rad/s)
Theta(rad)

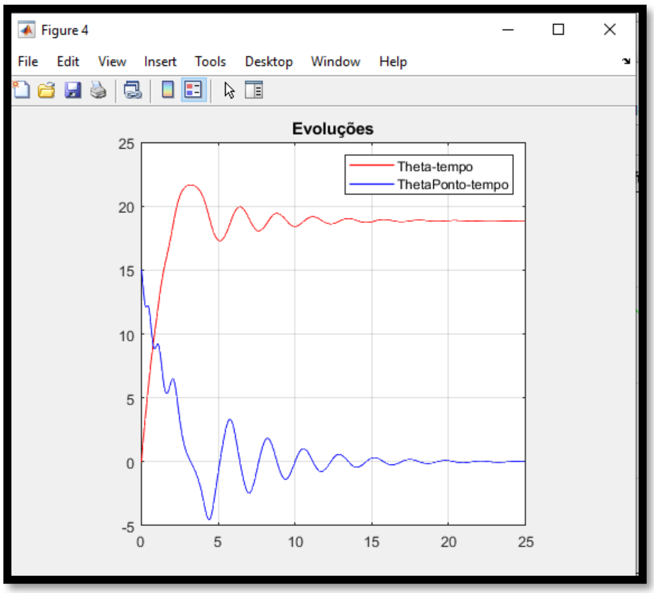


Figure 4
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Evoluções
Theta-tempo
ThetaPonto-tempo

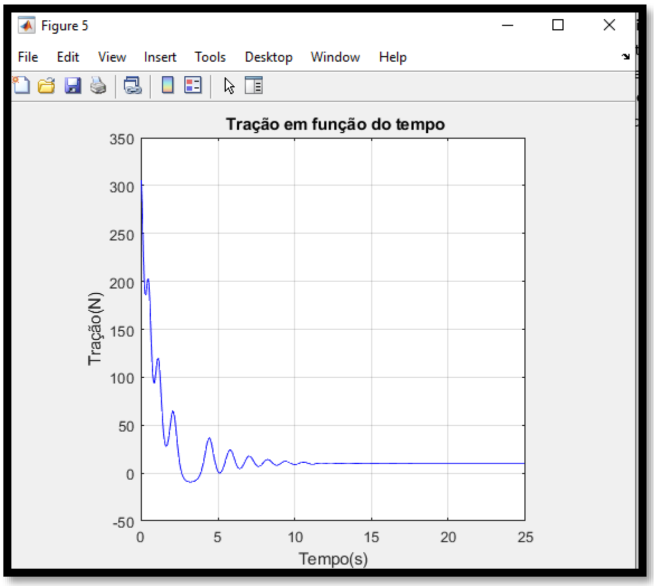


Figure 5
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Tração em função do tempo
Tração(N)
Tempo(s)

Figura 12: Valores obtidos para variáveis

Workspace

Name	Value
c	0.5000
CI	[0;15]
dt	0.0500
g	9.8100
iTempo	*1x501 double*
m	1
numVoltas	3.0016
r	1.3100
t	*501x1 double*
T	*501x1 double*
tf	25
theta	*501x2 double*
theta0	0
thetaP0	15
ti	0

Por fim, utilizou-se o MATLAB para calcular o número de voltas completas até que o pêndulo parasse seu movimento. Como pode ser observado na figura 12, o pêndulo completou um total de 3 voltas completas antes de parar (numVoltas = 3.0016).

4. CONCLUSÕES

Após a realização deste relatório, concluiu-se ser possível obter uma solução satisfatória para EDOs de segunda ordem utilizando métodos numéricos por meio do MATLAB. Desse modo, como resultado foi determinado que o pêndulo percorre 3 voltas completas antes de cessar o movimento, isso pode ser visto na figura 6, uma vez que, o valor de θ se estabiliza entre 6*pi e 8*pi radianos, o que indica que o pêndulo completou 3 voltas e depois se estabilizou na posição de equilíbrio.

Além disso, a partir da análise dos gráficos plotados foi possível visualizar a evolução das variáveis de interesse e, assim, verificar que conceitos especulativos teóricos esperados se cumpriram. A partir do gráfico da tração em função do tempo pode-se concluir que o elemento que liga a massa concentrada e o ponto de apoio fixo sofre tanto tração como compressão durante o movimento, tendo o valor máximo de solicitação de tração logo no início do experimento como se era esperado.

Tanto θ como a velocidade angular ($\dot{\theta}$) apresentam oscilações antes de chegar no valor de regime permanente, para θ este valor representa a distância angular percorrida, tendo uma saída praticamente constante a partir de t=20. O mesmo ocorre para a tração, entretanto, esta apresenta menor oscilação e se estabiliza mais rapidamente.

A seguir tem-se o esquema completo do script do MATLAB: