Movimento Browniano

Matheus Farnese Lacerda Senna

Departamento de Ciência da Computação – Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte, MG – Brasil

1. Introdução e modelagem

O movimento Browniano é um modelo matemático que descreve o movimento aleatório de partículas suspensas em um fluido (líquido ou gás), resultante da colisão de átomos rápidos ou moléculas no gás ou líquido. Esse modelo pode ser utilizado também para aplicações fora da física de partículas, como por exemplo em finanças para modelar a variação dos preços de ativos ao longo do tempo, ou em biologia para observar o movimento molecular dentro de células e o comportamento de organismos microscópicos

Dessa forma, o modelo de movimento Browniano utilizado nesse trabalho é uma caminhada aleatória em uma ou duas dimensões da seguinte forma: a cada instante discreto de tempo, o caminhante dá um passo de tamanho entre -0.5 e 0.5 em cada uma das dimensões. Ou seja, caso esteja-se analisando o caso 1D, o caminhante altera sua coordenada a cada instante de tempo e, caso seja 2D, ele altera ambas coordenadas, x e y, de acordo com o que foi descrito (i.e., um passo no espaço 2D é uma tupla com valores de x e y entre -0.5 e 0.5). Ao final de uma execução com N intervalos de tempo, o caminhante terá dado N passos e se encontrará em sua posição final.

2. Visualização da caminhada

2.1. 1D

Para obter-se uma visualização do modelo, foram feitas caminhadas de 10^4 passos. O eixo x dos gráficos a seguir contém a posição do caminhante, enquanto que o eixo y corresponde ao instante de tempo (de 0 a 10.000) quando ele se encontrava na respectiva posição. Ou seja, apesar da caminhada ser 1D, os gráficos plotados têm duas dimensões para que seja possível a visualização da evolução da caminhada.

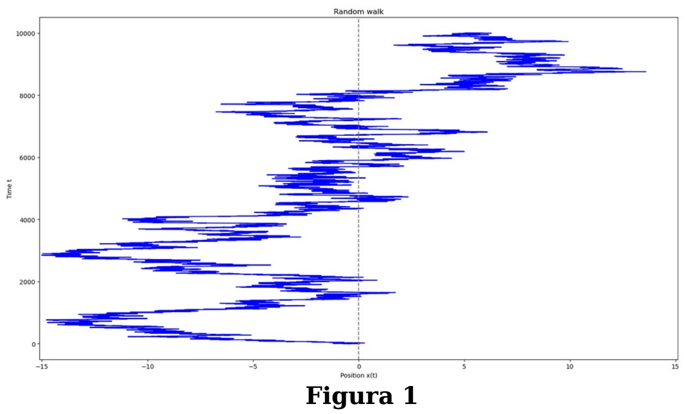

Figura 1

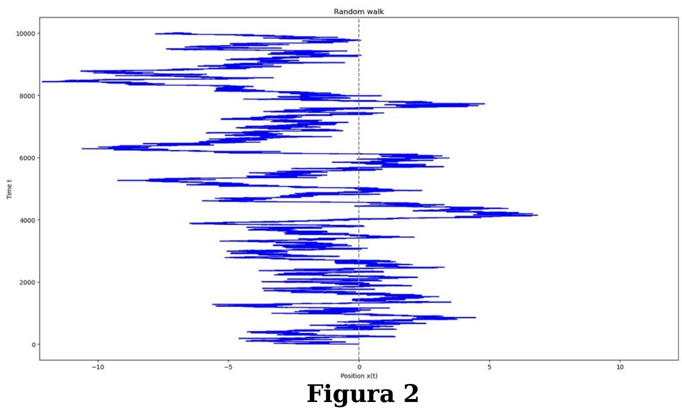

Figura 2

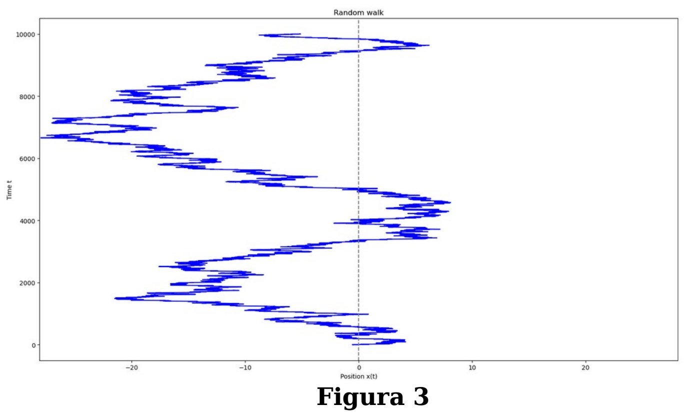

Figura 3

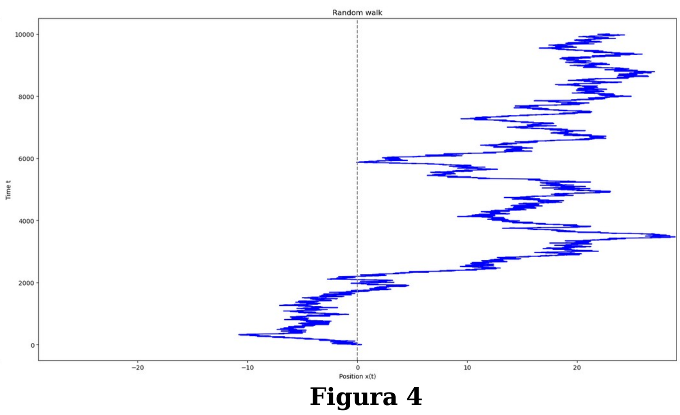

Figura 4

A linha pontilhada nos gráficos indica a origem. Verifica-se que a caminhada aleatória pode assumir vários formatos, como mostrado acima. Pode oscilar entre direita e esquerda da origem (como nas figura 1 e 2) ou ficar mais à direita (figura 4) ou mais à esquerda (figura 3). Também é possível casos mais extremos, onde a caminhada se direciona fortemente a um dos lados, como mostrado na figura 5 a seguir.

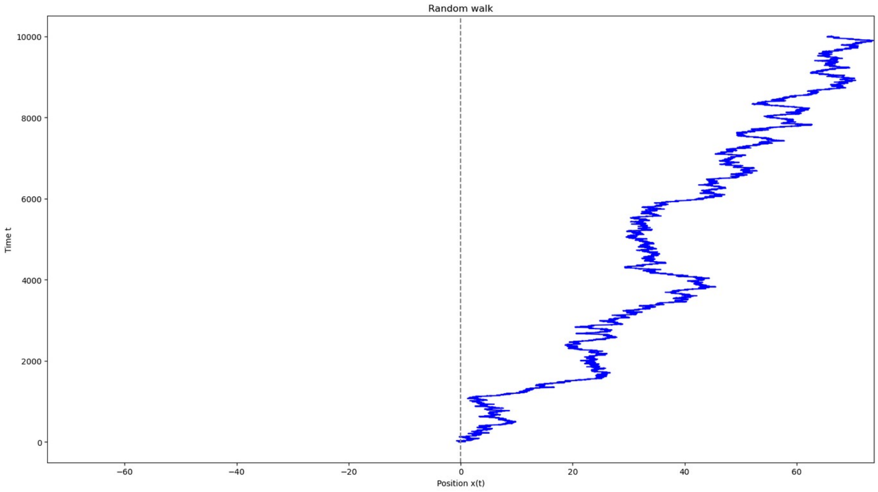

Figura 5

Atentando para o fato de que os valores (absoluto) de x passam de 60 na figura 5, enquanto que o máximo foi perto de 30 nas figuras de 1 a 4, verifica-se que, de fato, esse é um caso onde aconteceu de os passos para a direita serem maiores e mais frequentes do que os para a esquerda.

2.2. 2D

Agora, foram feitas caminhadas 2D com 10^1, 10^3 e 10^5 passos. As coordenadas dos pontos estão plotadas nos gráficos a seguir. O caminhante sempre começa na origem. As linhas indicam os passos, isso é, o ponto ligado à origem é o destino do primeiro passo, o próximo ponto ligado a esse último é o destino do segundo passo, e assim por diante, até chegar no último ponto da caminhada. A razão x/y de todas as figuras a seguir é 1, i.e., a origem está sempre no centro da figura e as figuras têm mesmo tamanho. As linhas pontilhadas indicam as retas x = 0 e y = 0.

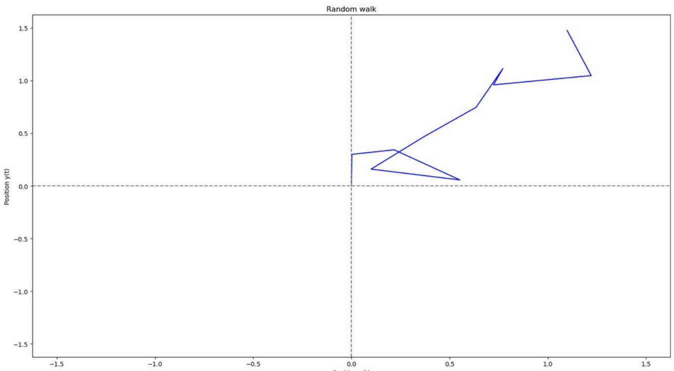

Figura 6

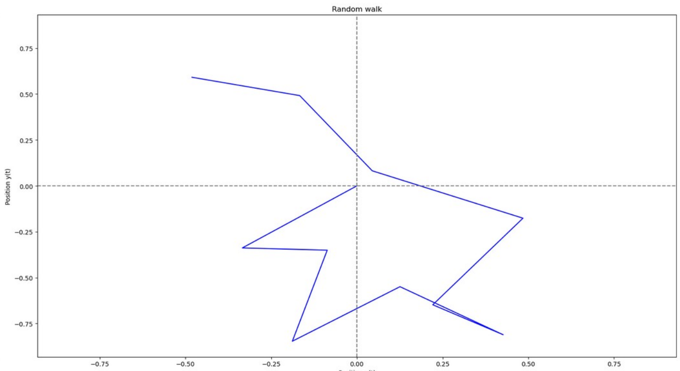

Figura 7

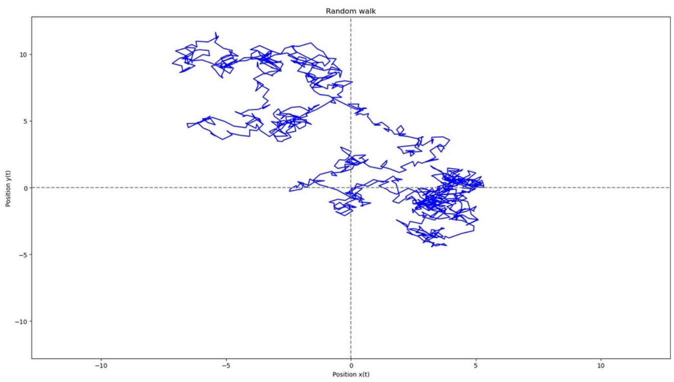

Figura 8

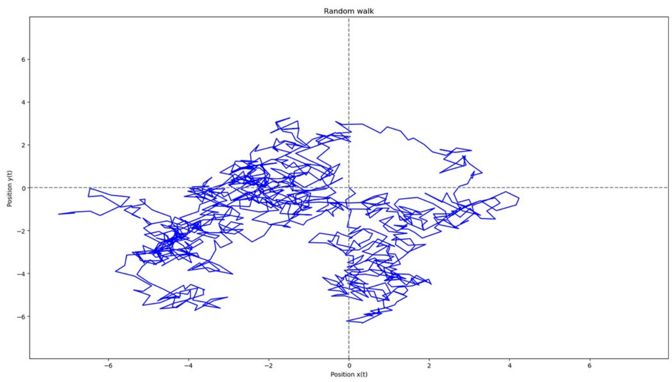

Figura 9

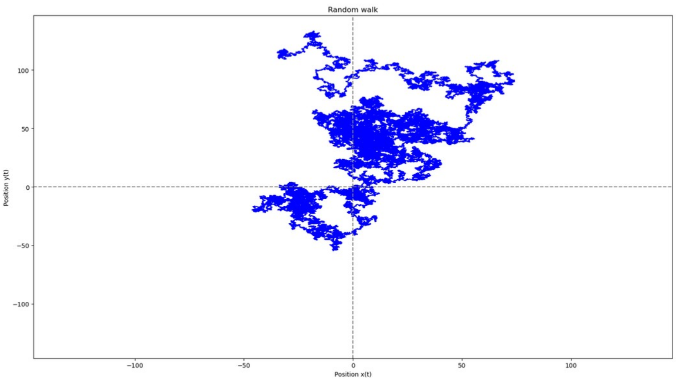

Figura 10

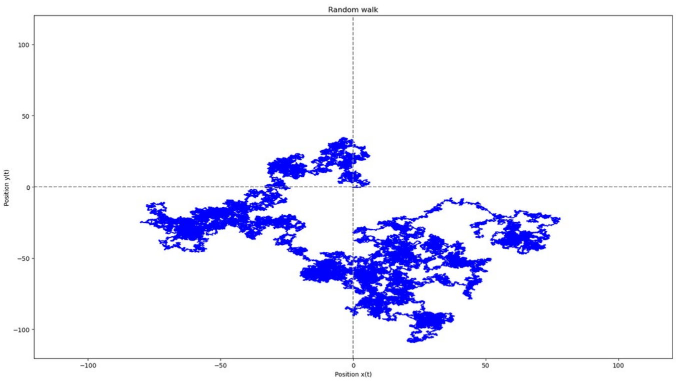

Figura 11

Verifica-se que, novamente, a caminhada aleatória pode assumir vários formatos. Pode oscilar entre os quadrantes (como nas figura 7, 9 e 11) ou ficar mais retida em certos quadrantes. Ademais, observa-se que os limites dos eixos x e y (i.e., o maior valor absoluto indicado por esses eixos) nas figuras 6 e 7 (10^1 passos) é próximo de 1, enquanto que nas figuras 8 e 9 (10^3 passos), já oscila perto de 10. Finalmente, nas figuras 10 e 11 (10^5 passos), esse limite vai para 100. De fato, a distância final da caminhada aumenta de aproximadamente 10 vezes com um aumento de 100 vezes no número de passos.

3. Análise dos pontos finais das caminhadas

3.1. Gráfico de dispersão

De forma a observar visualmente como é a distribuição dos pontos finais de caminhada aleatórias em 2D, foram feitas 10.000 caminhadas 2D de 1 passo e outras 10.000 de 10 passos. Com esses 10.000 + 10.000 pontos, foi gerado um gráfico de dispersão (scatter plot), que se encontra a seguir.

Figura 12

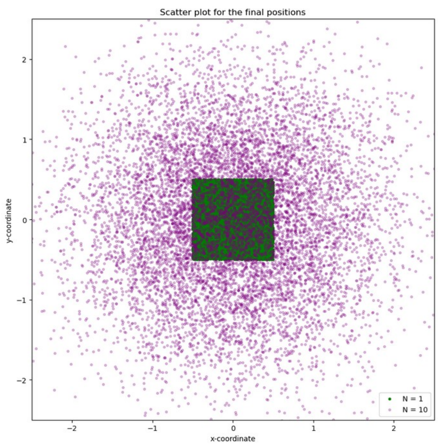

Figura 13

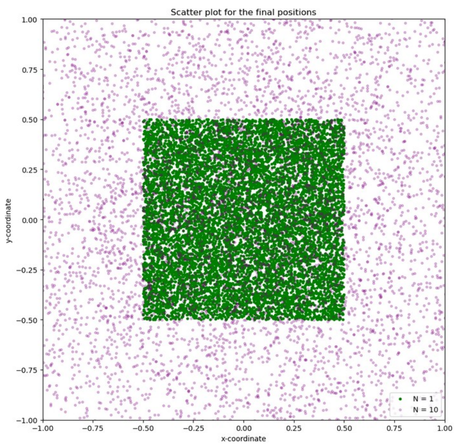

Figura 14

As figuras 12, 13 e 14 representam o mesmo gráfico, mas com um zoom progressivamente maior sobre a origem. Os pontos verdes são referentes às caminhadas com 1 passo, enquanto que os roxos são daquelas com 10 passos. Verifica-se que as caminhadas com 10 passos estão distribuídas em um padrão circular, enquanto que as com 1 passo formam um quadrado.

3.2. Histogramas

Finalmente, para verificar que o teorema central do limite se aplica para um um ensemble de caminhadas aleatórias de N passos, foram plotados histogramas com os valores dos pontos finais de 10.000 caminhadas 1D. Os histogramas a seguir possuem 50 bins. Também foi plotada a fórmula $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$, ou seja, a aproximação pela Normal prevista pelo teorema central do limite. O sigma utilizado na fórmula acima vale $\sigma = \sqrt{\frac{N}{12}}$, onde N é o número de passos das caminhadas. A seguir estão os resultados obtidos.

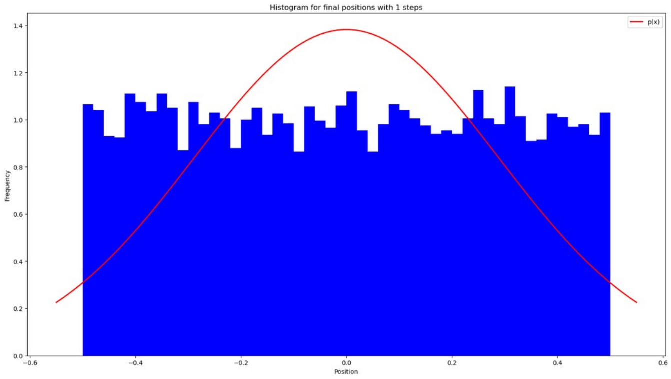

Figura 15

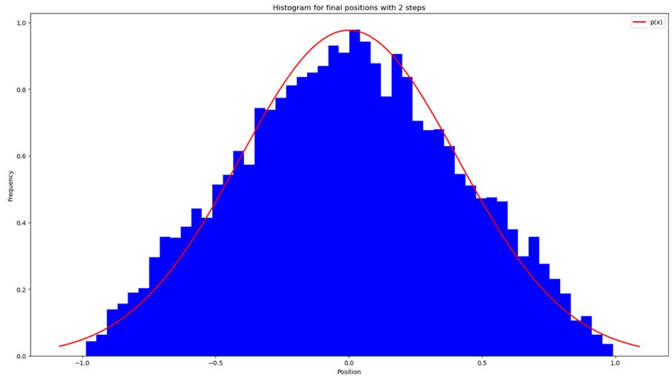

Figura 16

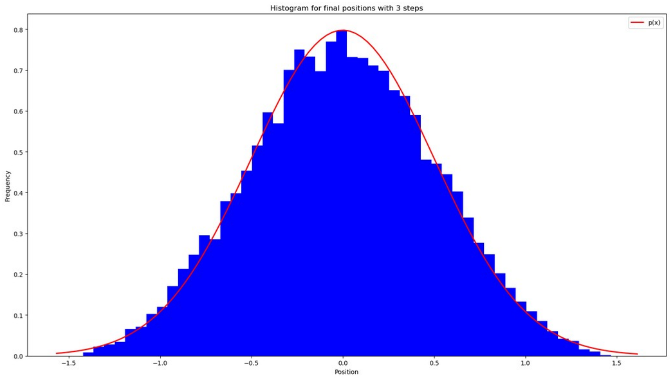

Figura 17

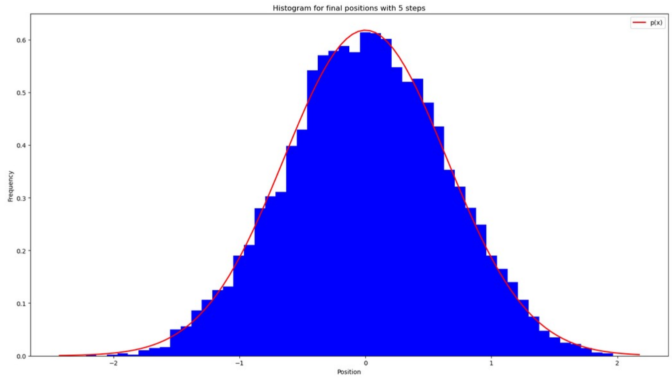

Figura 18

Nas figuras 15, 16, 17 e 18, o número de passos de cada uma das 10.000 caminhadas foram, respectivamente, 1, 2, 3 e 5 passos. Verifica-se que, quanto maior o número de passos, melhor é a aproximação pela normal. Com N = 1 passo, a distribuição do histograma se aproxima de uma distribuição uniforme entre -0.5 e 0.5, o que era de se esperar, pois o tamanho do único passo da caminhada é uniformemente distribuído entre esses valores. Já para N = 2, a distribuição obtém um formato mais parecido com a normal. Para N = 3 a normal já é uma boa aproximação para uma caminhada aleatória. A partir daí, um aumento no N não faz tanta diferença na qualidade da aproximação, como pode-se perceber na figura 18 (N = 5) e na figura 19 a seguir, que foi gerada com N = 1.000.

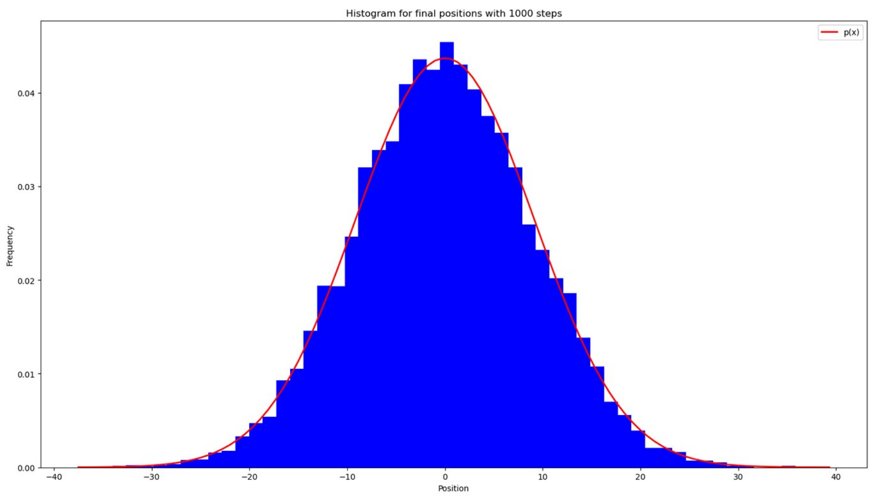

Figura 19

4. Apêndice

O código usado para as análises está disponível no seguinte repositório do github:

https://github.com/MatheusFarnese/Fisica_Estatistica_Computacional/tree/main/Movimento_Browniano

Para a execução do modelo, utilize o arquivo brownian_motion.py e digite a seguinte linha de comando em um terminal:

```
python3 brownian_motion.py
```

Caso queira alterar os parâmetros dos testes, basta alterar as chamadas de função nas últimas linhas do arquivo brownian_motion.py. O primeiro bloco de chamadas responde ao item 1 letras a) e b) da especificação. O segundo bloco, ao item 2 e, o terceiro, à letra c) do item 2. Os parâmetros já presentes nas chamadas são aqueles que geraram os resultados apresentados nesse relatório.