1 Exercicio 3

3.a)

$$G(x) = x - \frac{(x - g(x))^2}{g(g(x)) - 2g(x) + x}$$

Como $g(g(z)) - 2g(z) + z = 0$, aplicando a regra de Cauchy (e considerando que $g'(z) \neq 1$)

$$\lim_{x \to z} \frac{(x - g(x))^2}{g(g(x)) - 2g(x) + x} = \lim_{x \to z} \frac{2(x - g(x))(1 - g'(x))}{g'(g(x))g'(x) - 2g'(x) + 1} =$$

$$\frac{2(z - g(z))(1 - g'(z))}{g'(g(z))g'(z) - 2g'(z) + 1} = \frac{2(z - z)(1 - g'(z))}{(g'(z) - 1)^2} = \frac{2(z - z)}{(g'(z) - 1)} = 0$$

donde

$$\lim_{x \to z} G(x) = z - 0 = z$$

Logo $g(z) = z \Longrightarrow G(z) = z$, i.e. z é ponto fixo de $G(x)$, (supondo $g'(z) \neq 1$).

3.b)

$$G(x) = x - \frac{(g(x) - x)}{\frac{g(g(x)) - 2g(x) + x}{(g(x) - x)}} = x - \frac{(g(x) - x)}{\frac{g(g(x)) - g(x)}{(g(x) - x)} - 1} =$$

$$x - \frac{(g(x) - x)}{g'(g(x)) - 1}$$

$$G'(x) = 1 - \frac{(g'(x) - 1)(g'(g(x)) - 1) - (g(x) - x)(g'(x)g''(g(x)))}{(g'(g(x)) - 1)^2}$$

$$G'(z) = \lim_{x \to z} G'(x) = 1 - \frac{(g'(z) - 1)^2 - 0}{(g'(z) - 1)^2} = \frac{(g'(z) - 1)^2 - (g'(z) - 1)^2 - 0}{(g'(z) - 1)^2} = \frac{0}{(g'(z) - 1)^2} = 0$$

pois $g'(z) \neq 1$. Se $g(z) = z$, $G(z) = z$ ou seja z é um ponto superatrator de G.