**6ª Aula Laboratorial de Matemática Computacional**
**Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação**
**2º Sem. 20/21**

**Problemas**

1. Sendo $A$ uma matriz quadrada simétrica, sabe-se que o seu número de condição, na norma euclidiana, é

$$cond_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \rho(A)\rho(A^{-1}). \tag{1}$$

O objectivo deste problema é obter uma aproximação de $cond_2(A)$ com base na fórmula (1), mas sem usar o comando *eig*.

Para aproximar o maior valor próprio de $A$ (em módulo), vamos aplicar o **método das potências**, cujo algoritmo se descreve a seguir.

- Escolher um vector $x^0 \in I\!R^n$, tal que $\|x^0\|_\infty = 1$.
- Para $k = 1, 2, 3 \dots$ calcular:

$$z^{(k)} = A\,x^{(k-1)};$$

$$\lambda^{(k)} = \frac{z_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}};$$

($i$ é tal que $|x_i^{(k-1)}| = \max_j |x_j^{(k-1)}|$).

$$x^{(k)} = \frac{z^{(k)}}{\lambda^{(k)}}.$$

- continuar o processo até que $|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}| < \epsilon$, onde $\epsilon$ é uma tolerância dada.

No caso de matrizes simétricas, sabe-se que o método das potências gera uma sucessão de números $\lambda^{(k)}$, que converge para $\lambda$, tal que $|\lambda| = \rho(A)$, isto é, $\lambda$ é o valor próprio dominante (de maior módulo) da matriz dada. Além disso, a sucessão de vectores $x^{(k)}$ converge para um vector próprio $x$ de $A$, de módulo 1, associado a $\lambda$ (isto é $Ax = \lambda x$).

(a) Escreva um programa em MATLAB para calcular o valor próprio dominante de uma matriz $A$ simétrica, usando o método das potências. Os dados de entrada do programa devem ser a matriz $A$, a sua dimensão $n$ e a tolerância $\epsilon$.

(b) Usando o código da alínea anterior e com base na fórmula (1), escreva um programa que permita calcular $cond_2(A)$. Use o comando *inv* para calcular $A^{-1}$.

2. Chama-se matriz de Hilbert a seguinte matriz quadrada, de componentes reais, definida por

$$H_{ij}^{(n)} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, ..., n.$$

Esta matriz surge em certos problemas da teoria da aproximação. (Poderão encontrar mais informações sobre as suas propriedades na wikipedia, pesquisando 'Hilbert matrix'.)

(a) Para $n = 2, ..., 15$ calcule o número de condição da matriz de Hilbert, usando o programa do Problema 1. Verifique os resultados, comparando-os com os que se obtêm, se calcular os valores prórios através do comando *eig*. Para construir a matriz de Hilbert, pode usar a função *hilbert*, disponibilizada no Fenix.

(b) Comprove experimentalmente que o número de condição de $H^{(n)}$ cresce exponencialmente com $n$ (até um certo valor $n_{max}$). Admitindo que $cond_2(H^{(n)}) \approx \exp(C\,n)$, determine um valor aproximado de $C$. Sugestão: considere a sucessão $\ln(cond_2(H^{(n)}))$.

(c) Seja $b^{(n)}$ um vector de dimensão $n$ definido por

$$b_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

É fácil verificar que a solução exacta do sistema linear $H^{(n)}\, x^{(n)} = b^{(n)}$, onde $H^{(n)}$ é a matriz de Hilbert, é o vector $x^{(n)} = (1, 1, \dots, 1)$. Obtenha numericamente a solução do sistema $H^{(n)}\, x^{(n)} = b^{(n)}$, usando o comando adequado do MATLAB, para $n = 2, \dots, 15$.

(d) Construa uma tabela com os seguintes valores: $cond_2(H^{(n)}), \|x^{(n)} - \tilde{x}^{(n)}\|_2$, $n = 2, \dots, 15$, onde $\tilde{x}^{(n)}$ é a solução numérica obtida na alínea anterior. Os valores desta tabela estão de acordo com a teoria sobre o condicionamento de sistemas?