4ª Aula Laboratorial de Matemática Computacional
Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação
2º Sem. 20/21

Problemas

1. Altere o código da função 'pfixo' (que encontra na página da cadeira), de modo a testar se o método converge e avaliar a ordem de convergência . Para isso, a função deve calcular sucessões do tipo:

$$c_{p,k} = \frac{|x_{k+2} - x_{k+1}|}{|x_{k+1} - x_k|^p},$$

com $p = 1, 2, 3$ e $k = 0, 1..., nit - 2$, onde nit é o número de iterações realizadas. Para melhor interpretação dos resultados, o output do programa deve conter: 1) a sucessão das iteradas x_k; 2) cada uma das sucessões $c_{1,k}, c_{2,k}, c_{3,k}$. Analisando o comportamento destas sucessões, avalia-se a ordem de convergência. Caso o erro absoluto não satisfaça a condição de paragem ao fim de um certo número de iterações (por exemplo, 100) conclui-se que o método diverge.

2. Utilize o código da alínea anterior com cada uma das funções iteradoras abaixo indicadas. Verifique se o método converge e, em caso afirmativo, indique: a) o limite e o erro absoluto da aproximação obtida; b) a ordem de convergência; c)o coeficiente assimptótico de convergência (c.a.c.) do método do ponto fixo.

   (a) $g_1(x) = 1.5x(1 - x)$, $x_0 = 0.5$ (ver exemplos das aulas 5 e 6).

   (b) $g_1(x) = 3.5x(1 - x)$, $x_0 = 0.5$ (ver exemplos das aulas 5 e 6).

   (c) $g_3(x) = 0.5(x + 1/x)$, $x_0 = 50$ (ver Exemplo 2.16 dos *Apontamentos de Matemática Computacional*).

   Os resultados que obteve correspondem às previsões teóricas?

3. Para acelerar a convergência do processo iterativo do ponto fixo existe o chamado método de Steffensen. Neste caso, dada uma certa função g, cujo ponto fixo z se pretende determinar, a função iteradora é dada pela expressão

$$G(x) = x - \frac{(x - g(x))^2}{g(g(x)) - 2g(x) + x}.$$

Prova-se que este método converge para um ponto fixo z de g, mesmo quando esse ponto é repulsor para g. Além disso, a sua ordem de convergência é, em geral, superior à do método do ponto fixo.

   (a) Mostre que qualquer ponto fixo de g também é ponto fixo de G. *Nota:* A função G pode ser definida em $x = z$ por continuidade, admitindo que $G(z) = \lim_{x \to z} G(x)$. Assuma que $g \in C^1(V(z))$ e que $g'(z) \neq 1$.

   (b) Nas condições da alínea anterior, mostre que, se z é um ponto fixo de g, então z é um ponto superatractor de G (isto é, $G'(z) = \lim_{x \to z} G'(x) = 0$).

   (c) Elabore uma função para a aplicação do método de Steffensen. Tal como a função do problema 1, deve permitir testar a ordem de convergência e o c.a.c. do método.

   (d) Utilize o código da alínea anterior para verificar a ordem de convergência e o coeficiente assimptótico de convergência (c.a.c.) do método de Steffensen, usando as funções g_1, g_2 e g_3 anteriormente definidas. Compare os resultados com os que obteve no problema 2. Que conclusões pode tirar?