10^{a} Aula Laboratorial de Matemática Computacional
Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação
2^{o} Sem. 20/21
Problemas

1. É frequente aplicar o método dos mínimos quadrados com funções ajustadoras periódicas do tipo

$$P_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{m} a_{k+m} \sin(kx), \tag{1}$$

também chamadas polinómios trigonométricos. Elas são utilizadas sobretudo no caso de se aproximarem funções periódicas. Uma vez que função ajustadora (1) tem período 2π, a aproximação é feita no intervalo $[-\pi, \pi]$, com uma rede de n pontos equidistantes. Neste caso, temos $x_i = -\pi + ih$,$i = 1, ..., n$, com $h = \frac{2\pi}{n}$,$n > 2$. Note-se que o primeiro ponto é $x_1 = -\pi + h$, pelo que o ponto $-\pi$ não faz parte da rede. A vantagem de utilizar este tipo de função ajustadora é que, neste caso, a matriz do sistema normal é *diagonal*. Com efeito, se usarmos as notações

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_i(x) = \cos(ix),\ i = 1, ..., m; \quad \phi_i(x) = \sin(ix),\ i = m + 1, ..., 2m,$$

verifica-se que a função ajustadora (1) se pode representar na forma

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{2m} a_k \phi_k(x), \tag{2}$$

sendo que as funções de base $\phi(x)$ satisfazem

$$(\phi_i(x), \phi_j(x)) = \sum_{k=1}^{n} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k) = \begin{cases} n, \text{ se } i = j = 0; \\ n/2, \text{ se } i = j > 0; \\ 0, \text{ se } i \neq j. \end{cases} \tag{3}$$

Das igualdades (3) resulta que a matriz do sistema normal, no caso da função ajustadora (1), é diagonal, e, sendo f a função a aproximar, os coeficientes a_k obtêm-se simplesmente através das fórmulas

$$\begin{aligned} a_0(x) &= \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k), \\ a_i(x) &= \tfrac{2}{n} \textstyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cos(ix_k), \quad i = 1, ..., m \\ a_i(x) &= \tfrac{2}{n} \textstyle\sum_{k=1}^{n} f(x_n) \sin(ix_k), \quad i = m + 1, ..., 2m. \end{aligned} \tag{4}$$

O processo de cálculo dos coeficientes a_i através das fórmulas (4) é por vezes referido como a *transformação de Fourier discreta*.

O código *trigono* em MATLAB permite calcular os coeficientes a_i , $i = 0, 1, .., 2m$, sendo dada uma certa função f e os parâmetros n e m. Note-se que em geral $n > 2m + 1$ (no caso de se verificar a igualdade $n = 2m + 1$, o número de funções de base é igual ao número de pontos, pelo que neste caso (e só neste caso) se verifica $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, ..., n$.

(a) A partir do código *trigono* construa uma função *trigono1*, com os mesmos parâmetros de entrada que, além de calcular os coeficientes a_i, calcule um vector g, cujas entradas são $P_{m,i} = P_m(x_i)$,$i = 1, ..., n$. Esse código deverá também calcular o valor de $Q = \sum_{k=1}^{n} (P_m(x_k) - f(x_k))^2$.

(b) Considere a função $f_1(x) = x + x^2$. Considerando $n = 101$, obtenha funções ajustadoras de f_1, com $m = 20, 30, 40, 50$. Para cada caso, trace um gráfico que mostre a função f_1 e a função ajustadora P_m. Indique também o valor respectivo de Q. Comente os resultados.

(c) Repita os mesmos cálculos, para a função $f_2(x) = 1/(1+5x^2)$, com $n = 101$, $m = 20, 30, 40, 50$.

2. A fórmula dos trapézios permite calcular um valor aproximado T_n do integral

$$\int_a^b f(x)dx,$$

usando n subintervalos. Segundo a fórmula do erro da regra dos trapézios, admitindo que $f \in C^2([a,b])$, temos então

$$E_n^T(f) = I(f) - T_n(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi_1), \tag{5}$$

Se em vez de n, dividirmos o intervalo $[a,b]$ em $2n$ subintervalos temos

$$E_{2n}^T(f) = I(f) - T_{2n}(f) = -\frac{b-a}{12}(h/2)^2 f''(\xi_2), \tag{6}$$

onde $h = (b-a)/n$. Em geral $f''(\xi_1) \neq f''(\xi_2)$; no entanto, se h for suficientemente pequeno, temos $f''(\xi_1) \approx f''(\xi_2) = f_2$, pelo que podemos resolver as equações (5), (6) como um sistema de equações cujas incógnitas são $I(f)$ e f_2. Resolvendo esse sitema, temos:

$$I(f) \approx T_n^1 = \frac{4T_{2n}(f) - T_n(f)}{3}. \tag{7}$$

Este processo de aumentar a precisão do resultado, combinando duas aproximações com diferentes valores de h, é chamado *extrapolação.* Aplicado de forma sistemática, ele dá origem a um algoritmo conhecido como integração de Romberg.

(a) Escreva uma função em MATLAB, que permita calcular uma aproximação do integral, pela regra dos trapézios, sendo dada a função f, os limites do intervalo $[a,b]$ e o número n de subintervalos a considerar.

(b) Com base no programa alínea anterior, escreva um novo código que permita aproximar um integral fela fórmula (7).

(c) Para testar o seu programa, aplique-o ao cálculo do integral $\int_0^1 \exp(x)dx$. Obtenha aproximações T_n com $n = 10, 20, 40, 80, 160$, bem como os respectivos valores extrapolados T_n^1. Analise os erros $E_n^1 = |I - T_n^1|$. Admitindo que estes erros satisfazem uma relação do tipo $E_n^1 = \frac{1}{n^k}$, qual o valor de k?