7ª Aula Laboratorial de Matemática Computacional
Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação
2º Sem. 20/21

Problemas

Considere uma matriz A_n, de dimensões $n \times n$, cujos elementos são dados por

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= 2, \quad i = 1, ..., n; \\ a_{i,i-1} &= 1, \quad i = 2, ..., n; \\ a_{i,i+1} &= 1, \quad i = 1, ..., n-1; \\ a_{i,j} &= 0, \quad \text{se} |i-j| > 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Para resolver um sistema com esta matriz, pretende-se aplicar o método SOR [1], cuja fórmula iteradora é a seguinte:

$$x^{(k+1)} = \omega z^{(k+1)} + (1-\omega) x^{(k)}, \tag{2}$$

onde $z^{(k+1)}$ é o vector que se obtém de $x^{(k)}$, aplicando o método de Gauss-Seidel; ω é um parâmetro dado. É fácil ver que, no caso de $\omega = 1$, este método reduz-se ao método de Gauss-Seidel. A utlização deste método permite, mediante a escolha adequada do parâmetro ω, obter uma convergência mais rápida que a do referido método. Sabe-se que no caso de matrizes simétricas e definidas positivas o método SOR converge, sse $\omega \in]0, 2[$. Mais informações sobre este método podem ser encontradas nos Apontamentos de Matemática Computacional, p.157-158.

1. Com base na função *GaussSeidel*, que implementa o método de Gauss-Seidel, construa uma função em MATLAB para implementar o método SOR. Esta função deverá ter, além dos outros parâmetros de entrada, o valor de ω.

2. Pretende-se agora saber qual o valor de ω que permite obter a convergência mais rápida do método SOR, aplicado a esta matriz, no caso de $n = 20$. Para isso, considere o sistema $Ax = b$, onde $b = (1, \ldots, 1)$. Aplique o método SOR, com $\omega = 0.1, 0.2, ..., 1.9$, utilizando sempre a mesma aproximação inicial e a tolerância $\epsilon = 10^{-6}$. Registe o número de iterações realizadas, em cada caso, e a partir daí determine o valor óptimo do parâmetro (ω_{opt}), com duas casa decimais (para esse efeito, teste o método, com novos valores de ω).

3. Mostre que a matriz A é definida positiva (recorrendo aos cálculos que entender necessários).

4. Escreva um programa que, para cada valor de ω, lhe permita calcular C_ω, a matriz de iteração do método SOR (ver fórmulas na bibliografia).

5. Calcule o raio espectral de C_ω, para cada valor de ω (considere os mesmos valores que no problema 2). Para que valor de ω o raio espectral é mínimo? Diga se este resultado está de com as conclusões do problema 2.

6. Repita os cálculos do problema 5, no caso de $n = 30$ e $n = 40$. Como varia o valor de ω_{opt}, quando n aumenta?

[1] Do inglês, sucessive over-relaxations