

Lista 2 - Introdução aos Passeios Aleatórios

1. No passeio aleatório circular, com estados 1, 2, 3 e 4, e probabilidade p de avançar um estado em sentido horário, seja $X_0 = 1$.

(a) Calcule $P(X_3 = 2 | X_0 = 1)$.

(b) Calcule $P(X_4 = 1 | X_0 = 1)$.

(c) Seja $T_1 = \min \{n > 0 : X_n = 1\}$. Prove que

$$P(T_1 = n) \neq 0 \Leftrightarrow n \text{ é par.}$$

2. Supondo um passeio aleatório partindo da origem, calcule:

(a) A probabilidade desse passeio, que termina no ponto $(7, 3)$, ter um máximo igual a 5.

(b) Quantos caminhos satisfazem o item anterior.

(c) A probabilidade de um passeio de tamanho 10 ter um máximo igual à 5.

3. Dado um passeio aleatório, quantos caminhos tocam o eixo 5 pela primeira vez somente no instante 20 ?

4. Determine a probabilidade de um passeio de tamanho 12 ter 6 lados acima do eixo, dado que no instante 12, ele está no estado 0.

5. Considere um passeio aleatório em \mathbb{Z}^2 , qual a probabilidade de que em quatro passos uma partícula termine exatamente onde começou ?

6. Suponha que exista uma partícula que segue a seguinte regra: ela pode seguir para seis caminhos diferentes que são determinados de acordo com o resultado do lançamento de um dado honesto, após ela seguir por um caminho, a partícula retorna a origem e o processo continua. Supondo um processo que acaba quando a partícula visita um caminho que já foi visitado antes, calcule:

(a) A probabilidade desse processo ter exatamente 3 passos.

(b) A probabilidade da partícula conseguir visitar os seis caminhos possíveis antes de terminar o processo.

7. Elizabeth chega em um cassino com \$500 e decide que vai jogar até duplicar seu dinheiro inicial. Suponha que ela apostará \$100 por jogada e que se ganhar terá um lucro de \$100, suponha também que a probabilidade de ganhar é igual a p , se em algum momento ela ficar sem dinheiro, pedirá emprestado para poder continuar jogando.

(a) Qual a probabilidade de Elizabeth jogar exatamente 15 rodadas?

(b) Suponha que Elizabeth pode parar de jogar a qualquer momento com probabilidade r , determine a probabilidade dela jogar por 10 rodadas e sair com a mesma quantidade de dinheiro que chegou.

(c) Supondo que ela não poderá pedir dinheiro emprestado, qual a probabilidade dela jogar 10 rodadas ?