# Semana 12: Derivação Numérica

Nesse capítulo vamos estudar como usar o computador para encontrar uma aproximação para o coeficiente angular da reta tangente à $f$ no ponto $x_0$, denominada $f'(x_0)$. Para isso vamos supor que sabemos avaliar $f$ em uma vizinhança de $x_0$, ou pelo menos uma aproximação para isso.

## 12.1 Métodos Numéricos

### 12.1.1 Primeiro Método

Já estudamos em cálculo que a derivada de uma função $f$ em $x_0$ é a inclinação da reta tangente à $f$ em $x_0$. E para encontrar o valor de $f'(x_0)$ temos que calcular o seguinte limite:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

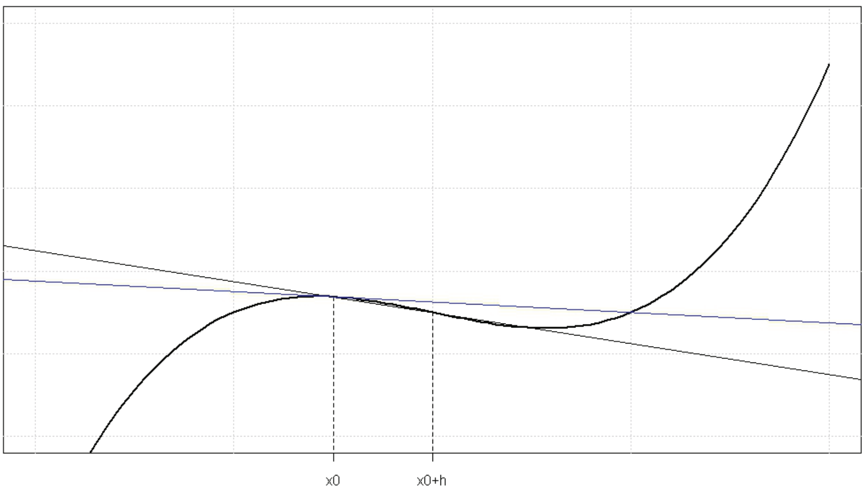


Figura 12.1: Ilustração para a derivada em $x_0$.

Esse limite já sugere uma aproximação para a derivada de $f$ em $x_0$. Se escolhemos $h$ bem pequeno podemos afirmar que:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

O que estamos fazendo nesse caso é aproximando a inclinação da reta tangente à $f$ no ponto $x_0$ (reta em azul na Figura 12.1) pela inclinação da reta secante a $f$ que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, com $x_1 = x_0 + h$ (reta em preto na Figura 12.1). Veja que quanto menor o valor de $h$ mais próxima está uma reta da outra, logo mais próxima está uma inclinação de uma reta da inclinação da outra.

Podemos usar $h$ positivo ou negativo. Caso $h > 0$ a reta secante em questão passa por $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, com $x_1 = x_0 + h$ sendo um ponto à direita de $x_0$, como mostra a Figura 12.1. Já se $h < 0$ a reta considerada na aproximação passa em $(x_0, f(x_0))$ e $(x_2, f(x_2))$, com $x_2 = x_0 - h$ sendo um ponto à esquerda de $x_0$.

### 12.1.2 Segundo Método

Uma outra alternativa para calcular uma aproximação para $f'(x_0)$ é usar a reta secante que passa pelos pontos $(x_0-h, f(x_0-h))$ e $(x_0+h, f(x_0+h))$, nesse caso vamos considerar o seguinte limite:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Se escolhemos $h$ bem pequeno podemos afirmar que:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

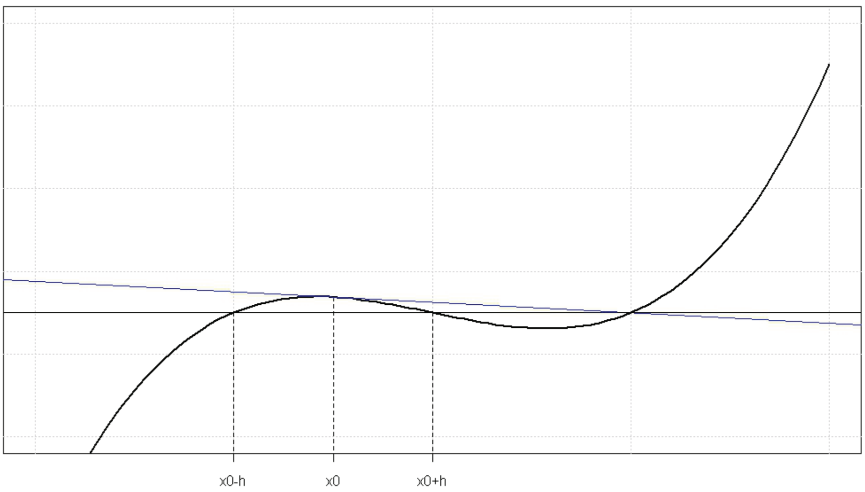


Figura 12.2: Ilustração para a derivada em $x_0$.

Esse novo método está ilustrado na Figura 12.2. Nesse caso a reta secante usada na aproximação não leva em consideração $(x_0, f(x_0))$ e sim $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, com $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 - h$, pontos à direita e à esquerda de $x_0$, respectivamente.

## 12.2 Algoritmo

Vamos ao algoritmo. Para aproximar $f'(x_0)$ vamos começar com um $h$ qualquer, que pode ou não ser informado pelo usuário. A partir desse valor de $h$ calculamos uma primeira aproximação. Depois diminuímos o valor de $h$, por exemplo dividindo por 2, e calculamos uma nova aproximação. Realizamos esse procedimento diversas vezes até que aproximações consecutivas tenham um erro menor do que o erro $\varepsilon$ determinado pelo usuário.

---

**Entrada**: $x_0$, $f$ e $\varepsilon$.
**Saída**: uma aproximação para $f'(x_0)$.
**Nome**: DerivadaNumérica

1 Defina $h = 1$;
2 Defina $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 - h$;
3 Se $x_1 \notin D(f)$ ou $x_2 \notin D(f)$, pare e retorne erro.
4 Calcule $d = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2h}$;
5 Atualize o valor de $h$: $h = \frac{h}{2}$;
6 Atualize $x_1$ e $x_2$: $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 - h$;
7 Calcule $\tilde{d} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2h}$;
8 Se $|d - \tilde{d}| < \varepsilon$, retorne $\tilde{d}$;
9 Faça $d = \tilde{d}$ e volte para a linha 5.

---

Dica: Talvez fique mais simples se o algoritmo for implementado usando o `repeat`.

Veja agora uma possibilidade de realizar o algoritmo de forma recursiva. Nesse caso vai ser bem mais simples de $h$ também for passado como entrada.

---

**Entrada**: $x_0$, $f$, $\varepsilon$ e $h$.
**Saída**: uma aproximação para $f'(x_0)$.
**Nome**: DerivadaNuméricaRec

1 Defina $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 - h$;
2 Se $x_1 \notin D(f)$ ou $x_2 \notin D(f)$, pare e retorne erro.
3 Calcule $d = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2h}$;
4 Atualize o valor de $h$: $h = \frac{h}{2}$;
5 Atualize $x_1$ e $x_2$: $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 - h$;
6 Calcule $\tilde{d} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2h}$;
7 Se $|d - \tilde{d}| < \varepsilon$, retorne $\tilde{d}$;
8 Retorne DerivadaNuméricaRec$(x_0, \varepsilon, h)$.

---

# Exercícios - 12ª Semana

Para os exercícios a seguir considere $f'(x_0)$ = coeficiente angular da reta tangente à $f$ no ponto $x_0$.

12.1 Em cada item a seguir considere que as únicas informações disponíveis sobre a função $f$ estejam na tabela apresentada. Complete a terceira coluna de cada tabela com aproximações para a derivada no ponto em questão. Faça as contas na mão. Para cada linha use o método mais apropriador de acordo com as informações disponíveis.

a)

| $x_0$ | $f(x_0)$ | $f'(x_0)$ |
|---|---|---|
| 1.1 | 9.025013 | |
| 1.2 | 11.02318 | |
| 1.3 | 13.46374 | |
| 1.4 | 16.44465 | |

b)

| $x_0$ | $f(x_0)$ | $f'(x_0)$ |
|---|---|---|
| 7.4 | -68.31929 | |
| 7.6 | -71.69824 | |
| 7.8 | -75.15762 | |
| 8.0 | -78.69741 | |

12.2 Compare o valor aproximado encontrado no exercício acima com os valores reais, dado pelas funções a seguir.

a) $f'(x_0) = 2e^{2x_0}$

b) $f'(x_0) = \frac{1}{x_0+2} - 2(x_0+1)$

12.3 Vamos agora implementar o método visto em sala de aula. Para isso considere a função $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

a) Qual o domínio da função $f$?

b) Implemente uma função que recebe como entrada $x_0 \in Dom(f)$ e um erro $\varepsilon$ e retorna uma aproximação para $f'(x_0)$ a partir do segundo método visto em sala de aula.

c) A partir da função implementada encontre aproximações para $f'(0)$, $f'(-\frac{1}{5})$ e $f'(\frac{1}{3})$.

d) Vamos implementar agora o algoritmo de forma recursiva. Para facilitar considere $h$ um argumento de entrada da sua função. Dessa forma, implemente uma função recursiva que recebe como entrada $x_0 \in Dom(f)$, um erro $\varepsilon$ e $h$ retorna uma aproximação para $f'(x_0)$ a partir do segundo método visto em sala de aula.

e) A partir da função recursiva encontre aproximações para $f'(0)$, $f'(-\frac{1}{5})$ e $f'(\frac{1}{3})$. Quando for chamar a função para encontrar as aproximações use $h = 1$.

12.4 Considere agora a função $f(x) = ln(x^2 + x - 2)$.

a) Qual o domínio da função $f$?

b) Implemente uma função que recebe como entrada $x_0 \in Dom(f)$ e um erro $\varepsilon$ e retorna uma aproximação para $f'(x_0)$ a partir do segundo método visto em sala de aula.
Dica: Nesse caso será necessário ter cuidado com: (i) o $x_0$ informado pelo usuário, se ele não estiver no domínio interrompa o processo e envie uma mensagem de erro; (ii) a escolha de $h$ inicial, atenção para não acontecer de $x_0 - h$ ou $x_0 + h$ não pertencer ao domínio.

c) A partir da função implementada encontre aproximações para $f'(3)$, $f'(-\frac{5}{2})$ e $f'(\frac{4}{3})$.

d) Vamos implementar agora o algoritmo de forma recursiva. Para facilitar considere novamente $h$ um argumento de entrada da sua função. Dessa forma, implemente uma função <u>recursiva</u> que recebe como entrada $x_0 \in Dom(f)$, um erro $\varepsilon$ e $h$ retorna uma aproximação para $f'(x_0)$ a partir do segundo método visto em sala de aula.

e) A partir da função recursiva encontre aproximações para $f'(3)$, $f'(-\frac{5}{2})$ e $f'(\frac{4}{3})$.

12.5 Considere agora $f(x) = e^{-x/3}\left(1 + \frac{x}{x^2+1}\right) - 1$.

a) Qual o domínio da função $f$?

b) Primeiro implemente uma função que recebe como entrada $x$ e retorna $f(x)$. Vamos chamar essa função de `f`.

c) Implemente agora uma função que recebe como entrada $x$ e retorna uma aproximação para $f'(x)$ considerando um erro de $10^{-3}$. Vamos chamar esse função de `df`.

d) Nosso objetivo agora é usar o método da bisseção para encontrar os pontos de máximo e mínimo locais de $f$. Veja que esses pontos são os pontos $x_0$ tais que $f'(x_0) = 0$. Para isso siga os itens a seguir.

   i) Digite `plot(f,xlim=c(-3,5))` e `plot(df,xlim=c(-3,5));abline(h=0)` e, comparando os dois gráficos, veja onde estão os pontos $x_0$ tais que $f'(x_0) = 0$. Para encontrais aproximações para tais pontos vamos buscar as raízes da função `df`.

   ii) Use o método da bisseção para encontrar uma aproximação para o mínimo local de $f$. A partir dos gráficos escolha valores para $a$ e $b$ de forma a garantir que o método converge para o mínimo local. Faça a sua função de forma que ela chame `df`.

   iii) Use o método da bisseção para encontrar uma aproximação para o máximo local de $f$. A partir dos gráficos escolha valores para $a$ e $b$ de forma a garantir que o método converge para o máximo local. Faça a sua função de forma que ela chame `df`.

   iv) Vamos testar se deu certo. Guarde no objeto `xmin` a aproximação para o mínimo local e no objeto `xmax` a aproximação para o máximo local de $f$. Agora digite a seguinte sequência de comandos e discuta o gráfico gerado.

```
> plot(df,xlim=c(-3,5))
> abline(h=0)
> segments(x0=xmin,y0=2,x1=xmin,y1=-2,lty=2)
> points(xmin,0,pch=19,cex=1.2)
> segments(x0=xmax,y0=1,x1=xmax,y1=-1,lty=2)
> points(xmax,0,pch=19,cex=1.2)
```