Semana 13: Integração Numérica

Nessa semana veremos um método iterativo que, a partir de uma função conhecida f e de valores $a, b \in \mathcal{D}(f)$, encontra um valor aproximado para a área entre a curva de f e o eixo horizontal limitada no intervalo $[a, b]$, representada por cinza na Figura 13.1.

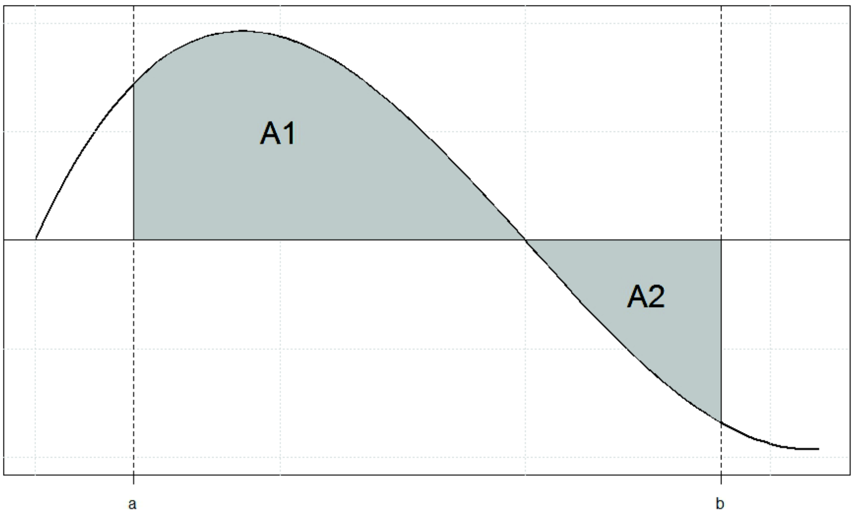


Figura 13.1: Área entre a curva de f e o eixo horizontal, limitada no intervalo $[a, b]$.

Dependendo da função f, essa conta pode ser feita de forma precisa a partir de integrais definidas, como vocês aprenderão em cálculo. Mas algumas vezes isso não é possível, ou seja, não existe como encontrar o valor da área de forma exata. Nesses casos a alternativa é encontrar uma aproximação a partir de métodos numéricos, como veremos nesse curso.

Antes de seguirmos com a ideia por trás do métodos vale destacar que nesse contexto a área entre a curva de f e o eixo horizontal, a qual queremos encontrar, considera área acima do eixo como positiva e área abaixo como negativa. Dessa forma, considerando a Figura 13.1, a área total entre a curva de f e o eixo, denominada A, é

$$A = A1 - A2,$$

onde $A1$ e $A2$ são os valores de área, ilustrados na Figura 13.1, ambos positivos.

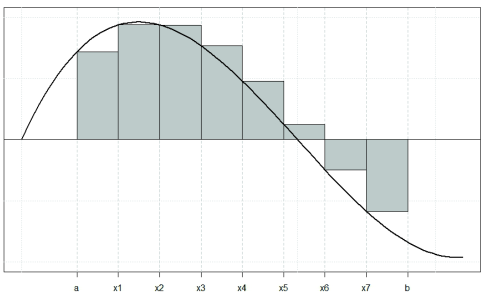
13.1 Aproximação por retângulos

Para fazer a aproximação por retângulos primeiro vamos dividirmos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo tamanho. O tamanho de cada subintervalo será

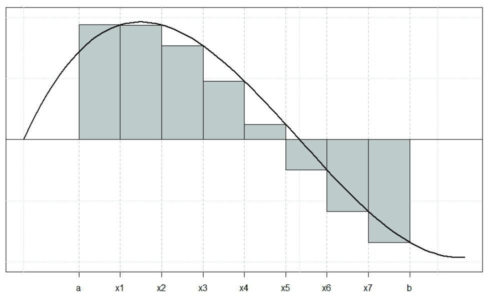
$$\delta = \frac{b - a}{n}$$

e os subintervalos são definidos pelos segmentos $[x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1, \ldots, n$ e $x_0 = a$, $x_1 = a + \delta$, $x_2 = x_1 + \delta$, …, $x_n = b$.

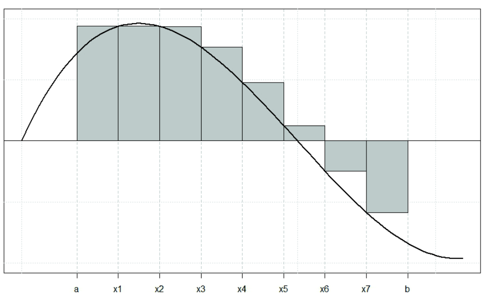
Para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ vamos definir um retângulo cuja base é o próprio subintervalo e altura pode ser definida de diferentes formas, iremos apresentar 4 formas, como ilustra a Figura 13.2. Primeiro considere que a altura é o valor de f avaliado no ponto mais à esquerda desse subintervalo. Nesse caso a altura do retângulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_{i-1})$, veja Figura 13.2(a). Também podemos definir a altura do retângulo como o valor de f avaliado no ponto mais à direita desse subintervalo. Nesse caso a altura do retângulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_i)$, veja Figura 13.2(b).



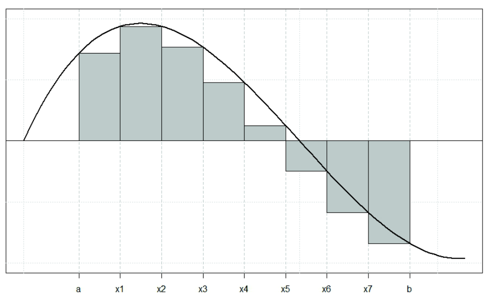
(a) Altura definida pelo ponto à esquerda.



(b) Altura definida pelo ponto à direita.



(c) Altura definida pelo maior valor de f.



(d) Altura definida pelo menor valor de f.

Figura 13.2: Aproximação por retângulos.

Podemos também definir a altura do retângulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ pelo maior ou pelo menor valor entre $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$. Nesse caso a altura do retângulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ é $\max(f(x_{i-1}), f(x_i))$ (Figura 13.2(c)), no caso de ser o maior valor, ou $\min(f(x_{i-1}), f(x_i))$ (Figura 13.2(d)), no caso de ser o menor valor.

Veja que podemos aproximar a área embaixo da curva de f pela soma das áreas dos n retângulos. Veja também que quanto maior o número retângulos, ou seja, quanto maior n, mais próximo está o valor da soma das áreas dos retângulos e o real valor da área.

Outra observação interessante é que se definirmos como a altura do retângulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ o maior valor entre $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$, Figura 13.2(c), então a soma das áreas dos retângulos será sempre maior que o real valor da área. Dessa forma, dizemos que a soma das áreas desses retângulos, denominada $\hat{A}_U$, é um limite superior para o real valor da área A, pois

$$A \leq \hat{A}_U. \tag{13.1}$$

Por outro lado, se definirmos como a altura do retângulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ o menor valor entre $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$, Figura 13.2(d), então a soma das áreas dos retângulos será sempre menor que o real valor da área. Dessa forma, dizemos que a soma das áreas desses retângulos, denominada $\hat{A}_L$, é um limite inferior para o real valor da área A, pois

$$\hat{A}_L \leq A. \tag{13.2}$$

13.2 Algoritmo

Como já foi discutido, serão usados os retângulos para aproximar a área entre a curva de f e o eixo horizontal. A ideia é escolher um valor para n, que representa o número de retângulos, e usar a soma das áreas dos retângulos para aproximar a área entre a curva de f e o eixo horizontal. Mas como determinar o número de subintervalos n que irá fornecer uma aproximação relativamente boa? E qual altura de retângulo vamos usar?

Veja que quanto mais subdivisões tem o intervalo $[a, b]$, mais precisa será a aproximação. Além disso, sendo $\hat{A}_U$ e $\hat{A}_L$ os valores da soma das áreas dos retângulos com alturas iguais a $\max(f(x_{i-1}), f(x_i))$ e $\min(f(x_{i-1}), f(x_i))$, respectivamente, de acordo com as Equações 13.1 e 13.2,

$$\hat{A}_L \leq A \leq \hat{A}_U.$$

Então o que vamos fazer para encontrar a aproximação é aumentar n, inciando com $n = 100$, até que os valores de $\hat{A}_L$ e $\hat{A}_U$ fiquem muito próximos, digamos, até que

$$\hat{A}_U - \hat{A}_L < 2\varepsilon,$$

onde ε é passado pelo usuário. Quando isso acontecer podemos afirmar que o ponto médio entre $\hat{A}_L$ e $\hat{A}_U$, definido por

$$\frac{\hat{A}_U + \hat{A}_L}{2},$$

é uma aproximação para a área desejada com erro menor que ε.

Entrada: a, b, f e ε.
Saída: uma aproximação para a área entre a curva de f e o eixo horizontal, limitada pelo intervalor $[a, b]$, com erro menor que ε.
Nome: IntegralNumérica

Defina $n = 100$;
Defina $\delta = \frac{b-a}{n}$;
Defina $\hat{A}_U = 0$ e $\hat{A}_L = 0$;
Inicie $x = a$;
Faça $\hat{A}_U = \hat{A}_U + \delta \max(f(x), f(x + \delta))$;
Faça $\hat{A}_L = \hat{A}_L + \delta \min(f(x), f(x + \delta))$;

7 Incremente $x = x + \delta$;
8 Se $x < b$, volte para a linha 5;
9 Se $\hat{A}_U - \hat{A}_L < 2\varepsilon$, retorne $\frac{\hat{A}_U + \hat{A}_L}{2}$;
10 Faça $n = n + 10$ e volte para a linha 2.

Para terminar, vejamos um resultado interessante. Sejam $\hat{A}_{Li} = \delta \min\left(f(x_{i-1}), f(x_i)\right)$ e $\hat{A}_{Ui} = \delta \max\left(f(x_{i-1}), f(x_i)\right)$ as áreas dos i-ésimos retângulos abaixo e acima da curva de f, respectivamente. Veja que o valor médio entre essas duas áreas pode ser calculado da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\frac{\hat{A}_{Li} + \hat{A}_{Ui}}{2} &= \frac{1}{2}\left(\delta \min\left(f(x_{i-1}), f(x_i)\right) + \delta \max\left(f(x_{i-1}), f(x_i)\right)\right) \\
&= \frac{\delta}{2}\left(\min\left(f(x_{i-1}), f(x_i)\right) + \max\left(f(x_{i-1}), f(x_i)\right)\right) \\
&= \frac{\delta}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)
\end{aligned}
$$

O valor $\frac{\delta}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)$ é exatamente a área do trapézio de base $[x_{i-1}, x_i]$ e alturas $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$. Logo, a aproximação para a área dada pela média entre as áreas dos retângulos acima e abaixo da curva de f é igual à aproximação dada pela área do trapézio, ilustrada na Figura 13.3.

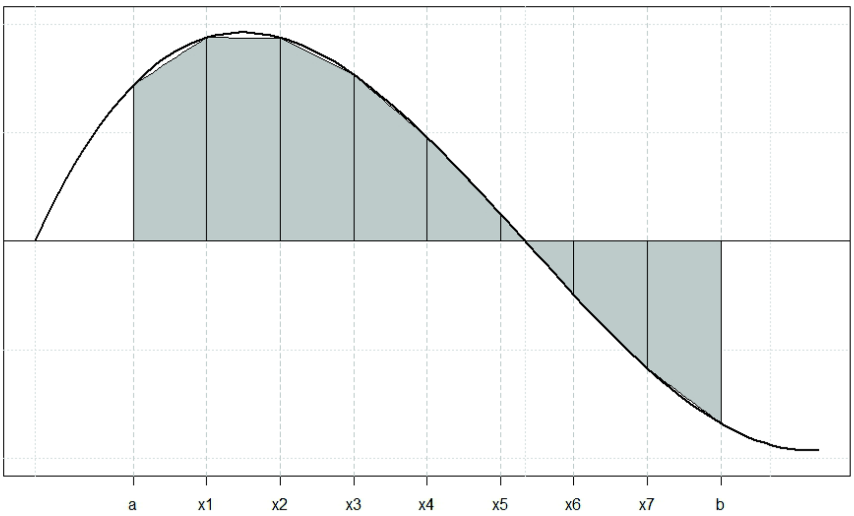


Figura 13.3: Aproximação por trapézios

Veja que para o mesmo valor de n, no caso do exemplo das figuras $n = 8$, a aproximação pela soma das áreas dos trapézio, Figura 13.3, é bem melhor que a aproximação pela somas das áreas dos retângulos, Figura 13.2.

Exercícios - 13ª Semana

13.1 Primeiro vamos aplicar o método em uma função que sabemos fazer as contas na mão, usando apenas áreas de figuras geométricas. Seja $f(x) = |x - 3| - 2$.

a) Na mão, sem usar o computador, faça um esboço do gráfico de f e hachure a área entre a curva de f e o eixo horizontal, limitada no intervalo [0,5].

b) Ainda na mão, calcule o valor da área hachurada. Lembre-se de considerar sinal positivo para área acima do eixo e sinal negativo para área abaixo dele. Esse é o valor que queremos aproximar.

c) Implemente uma função que recebe como entrada o valor n e retorna uma aproximação para a área hachurada dada pela a soma das áreas dos n retângulos. Escolha como quiser a definição da altura dos retângulos: valor da função no ponto à esquerda; valor da função no ponto à direita, maior valor da função; menor valor da função.
OBS: Nessa questão ainda não é para fazer o algoritmo visto em sala de aula, que retorna a aproximação dada pela média ente a soma das áreas dos retângulos acima e abaixo da curva de f.

d) Usando a função implementadas no item acima, encontre uma aproximação para a área hachurada com

- 50 retângulos.
- 100 retângulos.
- 150 retângulos.

e compare os resultados das 3 aproximações obtidas com o valor exato para a área encontrado no item b.

13.2 Implemente o algoritmo visto em sala de aula que recebe como entrada uma função f, o erro ε e valores $a, b \in \mathcal{D}(f)$ e retorna uma aproximação para a área entre a curva de f e o eixo horizontal, limitada no intervalo $[a, b]$, com erro menor que ε. A sua implementação será testada nas questões a seguir.

13.3 Agora vamos aplicar a implementação feita no exercício 13.2 para encontrar aproximações de áreas que só podemos achar o valor exato com recursos de cálculo.

a) Seja $f(x) = x^2 - x - 1$. Encontre uma aproximação para a área entre a curva de f e o eixo horizontal, limitada no intervalo $[-1, 1]$, com erro menor que $0,005$. Depois de encontrada a aproximação compare o resultado obtido com o valor exato, que é $-4/3$.

b) Seja $g(x) = xe^{x^2}$. Encontre uma aproximação para a área entre a curva de g e o eixo horizontal, limitada no intervalo $[0, 2]$, com erro menor que $0,01$. Depois de encontrada a aproximação compare o resultado obtido com o valor exato, que é $(e^4 - 1)/2$.
OBS: esse item pode levar tempo para rodar, no meu computador ele demorou mais de 1 minuto para terminar o método. Tenha paciência..

c) Seja $h(x) = \ln(x - 1)$. Encontre uma aproximação para a área entre a curva de h e o eixo horizontal, limitada no intervalo $[-2, -1]$, com erro menor que $0,0001$. Depois de encontrada a aproximação compare o resultado obtido com o valor exato, que é $\ln(1/2)$.

13.4 Modifique a função implementada no item 13.2 de forma que ela passe a retornar uma lista com dois objetos. O primeiro objeto da lista é uma aproximação para a área entre a curva de f e o eixo horizontal, limitada no intervalo $[a, b]$, com erro menor que ε. O segundo objeto da lista é o número de retângulos usados para conseguir a aproximação, isto é, o valor final de n.

13.5 Usando a função implementada no item 13.4, encontre o número de retângulos usados em cada uma das aproximações encontradas no item 13.3. Veja que o número de retângulos não depende somente do erro ε, mas também da função para a qual o método está sendo aplicado.