Aula 04 - Métodos fechados para busca de raízes de funções

Hugo Vinícius Leão e Silva

hugovlsilva@gmail.com, hugo.vinicius.16@gmail.com, hugovinicius@ifg.edu.br

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus Anápolis
Curso de Bacharelado em Ciência da Computação

10 de setembro de 2021

Visão geral

Método gráfico

- É uma maneira simples para obter uma estimativa (imprecisa) da raiz de $f(x)$
- Exemplo: Deseja saber qual deve ser o coeficiente de arrasto c para que um paraquedista de massa $m = 68{,}1$ kg alcance a velocidade $v = 40$ m/s após $t = 10$ s de queda livre e gravidade $g = 9{,}8$ m/s^2. A equação é:

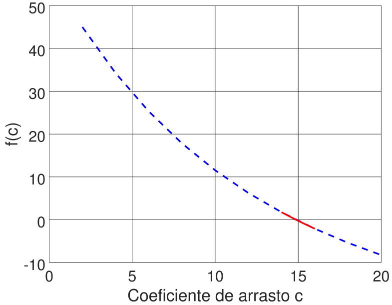
$$f(c, m, v, t, g) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) - v$$

- Mantendo m, v, t e g constantes, desejamos descobrir c que atende à solução acima;

$$f(c) = \frac{9,8 \times 68{,}1}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{68{,}1}10}\right) - 40$$

Método gráfico

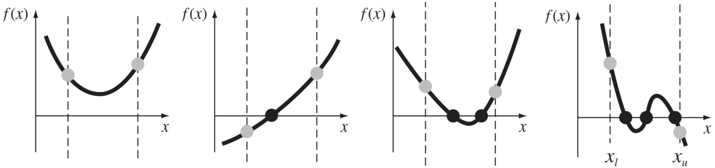
- Para isso, faz uma *coarse search* do intervalo de c que contenha $f(c) = 0$. Abaixo os valores de $f(c)$ considerando $2 \leq c \leq 20$ (traço-ponto azul) em passos de 2 em 2.



- O intervalo que contém a raiz é $14 \leq c \leq 16$. Faz uma *fine search* neste intervalo em passos de 0,001 (linha vermelha);
- Resultado $c = 14{,}867$ e $f(14{,}867) \approx 0{,}000036$;
- Implementar no Octave $f(x) = \sin 10x - \cos 3x$ para `x = [0:0.01:5]`, `x = [3:0.01:5]`, `x = [4.2:0.001:4.3]`.

Método gráfico

- O problema: impreciso;
- Mas os métodos gráficos podem ser úteis para ter calcular uma *estimativa* da raiz;
- Ajudam no entendimento do comportamento do sistema e no uso dos métodos numéricos;
- Exemplos de como raízes podem (ou não) ocorrer:



- Ou pior: pode haver raízes múltiplas, como em $f(x) = (x-2)(x-2)(x-4)$ ou a função ser descontínua, não-derivável. Ambas dificultam a busca por raízes.

Método da bissecção

- No gráfico do problema do paraquedista, $f(c)$ mudou de sinal em cada lado da raiz;
- Se $f(x)$ for real e contínuo no intervalo $[x_l, x_u]$ e $f(x_l)$ e $f(x_u)$ tiverem sinais opostos, $f(x_l)f(x_u) < 0$. Então existe pelo menos uma raiz real entre x_l e x_u;
- Métodos *incrementais* usam isso e diminui o intervalo sistematicamente.

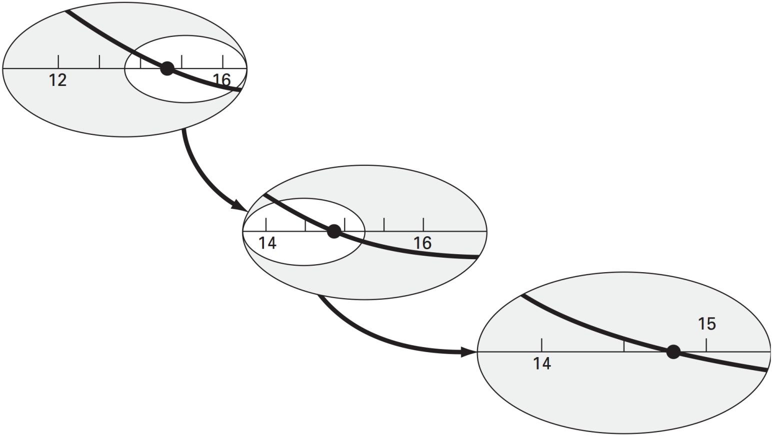
Método da bissecção

- O **método da bissecção** divide o intervalo iterativamente na metade da seguinte forma:
  1. Escolha o intervalo $[x_l, x_u]$ de forma que $f(x_l)f(x_u) < 0$;
  2. Estimativa da raiz é dada por:

  $$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

  3. Se $f(x_l)f(x_r) < 0$, a raiz está na primeira metade do intervalo. $x_u = x_r$. Volte ao passo 2;
  4. Se $f(x_l)f(x_r) > 0$, a raiz está na segunda metade do intervalo. $x_l = x_r$. Volte ao passo 2;
  5. Se $f(x_l)f(x_r) = 0$, a raiz é x_r. Pare os cálculos. Obs.: ou pare quando atingir a tolerância, que será dito mais à frente.

Método da bissecção



Método da bissecção

- Até quando o processo de busca de raiz deve iterar?
- Um conceito importante é o da **tolerância**;
- Especifica-se uma tolerância na variação de x_r. Usando a equação de erro relativo porcentual:

$$\epsilon_a = \left| \frac{x_r^{\text{novo}} - x_r^{\text{velho}}}{x_r^{\text{novo}}} \right| \times 100\%$$

  onde x_r^{novo} é o valor da raiz na iteração atual e x_r^{velho} é o valor da raiz na iteração anterior.
- Quando $\epsilon_a < 0,1\%$, para o algoritmo.

Método da falsa posição

- O método da bissecção é um pouco ineficiente, visto que tem que fazer diversas buscas;
- Além disso, ele considera iguais as duas metades do intervalo $[x_l, x_u]$;
- Enquanto isso, o método da falsa posição considera que se $f(x_l)$ estiver mais próximo de zero do que $f(x_u)$, provavelmente x_l está mais perto de zero do que x_u;
- Esse método faz uma interpolação linear $\rightarrow$ substitui a curva da função por uma reta e, por isso, produz uma falsa posição da raiz de $f(x)$;

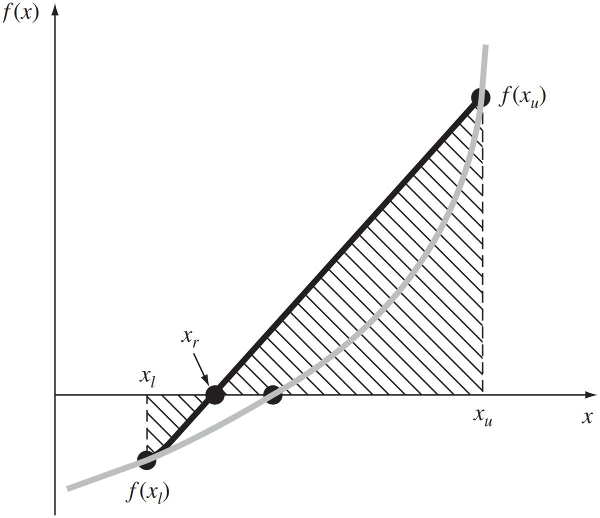
Método da falsa posição

- Semelhante ao método da falsa posição, porém, a fórmula que calcula a posição da raiz é:

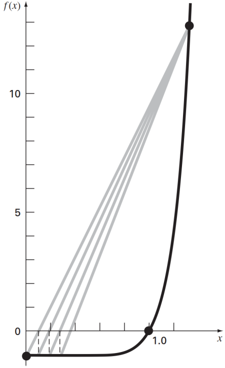
$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

- Se $f(x_l)$ e $f(x_r)$ tiverem o mesmo sinal, a raiz está na primeira metade do intervalo. $x_l = x_r$. Recalcule x_r.
- Senão, a raiz está na segunda metade do intervalo. $x_u = x_r$. Recalcule x_r.
- Faça este procedimento até que se atinja a tolerância desejada.

Método da falsa posição



- Entretanto, há situações em que x_l ou x_u ficam presos:



- O Método modificado da falsa posição detecta que x_u está preso nessa situação e faz $x_u = \frac{x_u}{2}$ para acelerar a convergência

Considerações finais

- Ressalta-se que pode haver mais de uma raiz em um intervalo fechado. Deve-se verificar isso;
- Uma solução algorítmica é varrer o intervalo em busca de raízes, mas qual o tamanho do passo?
- Se for pequeno demais $\rightarrow$ alto esforço computacional;
- Se for grande demais $\rightarrow$ pode-se perder raízes;
- Algoritmos de busca de força-bruta (como a bissecção) não são à prova de erros;
- O método gráfico e o entendimento do problema ajudam na localização de raízes.

Exercícios

Lista 1: Bissecção e Falsa Posição.