A soma de Riemann é um conceito fundamental na análise matemática, utilizado para **aproximar a área sob uma curva** (o valor de uma integral definida). Desenvolvido por Bernhard Riemann, ele serve como a base formal para a **definição da integral de Riemann**.

O que é a Soma de Riemann?

Dada uma função $f(x)$ definida em um intervalo $[a,b]$, a soma de Riemann funciona da seguinte forma:

1. O intervalo $[a,b]$ é dividido em n subintervalos.
2. Um ponto específico é escolhido dentro de cada subintervalo (x_i^*).
3. O valor da função nesse ponto ($f(x_i^*)$) é multiplicado pelo comprimento do subintervalo (Δx).
4. Todos esses produtos são somados para obter a aproximação da área.

Expressão Geral

Para uma partição uniforme do intervalo $[a,b]$, a soma de Riemann é expressa como:

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Onde:

- $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ é o comprimento de cada subintervalo.
- x_i^* é o ponto escolhido em cada subintervalo.

Tipos de Soma de Riemann

A escolha do ponto x_i^* dentro de cada subintervalo define os diferentes tipos de soma de Riemann:

- **Soma à Esquerda:** Usa o valor da função no **início** de cada subintervalo.
- **Soma à Direita:** Usa o valor da função no **final** de cada subintervalo.
- **Soma no Ponto Médio:** Usa o valor da função no **ponto médio** de cada subintervalo.

Cada tipo oferece uma aproximação ligeiramente diferente da área. A **precisão da aproximação aumenta** à medida que o número de subintervalos (n) cresce.

O Limite e a Integral Definida

A grande importância da soma de Riemann reside na sua relação com a integral definida. Se a função $f(x)$ é contínua no intervalo $[a,b]$, à medida que o número de subintervalos (n) tende ao infinito (ou seja, Δx tende a zero), a soma de Riemann **converge para o valor exato da integral definida**:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Para funções contínuas, todas as somas de Riemann (à esquerda, à direita, no ponto médio) convergem para o mesmo valor quando $n\to\infty$.

Exemplos Ilustrativos

- **Área sob $f(x)=x^2$ no intervalo $[0,1]$:** Ao dividir o intervalo em n subintervalos e usar a soma à esquerda, a soma de Riemann aproxima a área sob a parábola. Quanto maior o valor de n, mais próxima a aproximação estará do valor exato de $1/3$.
- **Função constante $f(x)=2$ no intervalo $[1,3]$:** Qualquer tipo de soma de Riemann resultará exatamente na área do retângulo, que é $2\times(3-1)=4$.
- **Função $f(x)=\sin(x)$ no intervalo $[0,\pi]$:** A soma de Riemann aproxima a área sob a curva do seno, que é exatamente 2.

Resultados Importantes da Soma de Riemann

- É a **base para a definição formal** de integral definida.
- Para funções contínuas, **todas as somas de Riemann convergem para o mesmo valor** quando $n\to\infty$.
- É amplamente utilizada em **cálculos numéricos, simulações e aplicações práticas** onde a integral exata não pode ser obtida analiticamente.
- A **precisão** da soma de Riemann depende diretamente do número de subintervalos e da regularidade da função.